UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"
Câmpus de São José do Rio Preto

Luzia Francisca Pedrazzi Righetto

Uma proposta de sequência didática para o ensino de Programação Linear no Ensino Médio

Ilha Solteira
2015

Luzia Francisca Pedrazzi Righetto

Uma proposta de sequência didática para o ensino de Programação Linear no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Profmat – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, Polo Ilha Solteira.

Orientador: Prof. Dr. José Marcos Lopes.

Ilha Solteira
2015

Righetto, Luzia Francisca Pedrazzi.
Uma proposta de sequência didática para o ensino de programação linear no ensino médio / Luzia Francisca Pedrazzi Righetto. -- São José do Rio Preto, 2015
66 f. : il.

Orientador: José Marcos Lopes
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas

1. Matemática (Ensino médio) - Estudo e ensino. 2. Geometria analítica - Estudo e ensino. 3. Programação linear. 4. Modelos matemáticos. 5. Matemática - Metodologia. I. Lopes, José Marcos. II. Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho". Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas. III. Título.

CDU – 516(07)

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca do IBILCE
UNESP - Câmpus de São José do Rio Preto

Luzia Francisca Pedrazzi Righetto

Uma proposta de sequência didática para o ensino de Programação Linear no Ensino Médio

Dissertação apresentada como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre, junto ao Profmat – Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Área de Concentração – Matemática, do Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Campus de São José do Rio Preto, Polo Ilha Solteira.

Comissão Examinadora

Prof. Dr. José Marcos Lopes
UNESP – Ilha Solteira
Orientador

Prof. Dr. Inocêncio Fernades Balieiro Filho
UNESP – Ilha Solteira

Profa. Dra. Tatiana Bertoldi Carlos
UFMS - Paranaíba

Ilha Solteira
11 de fevereiro de 2015

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. José Marcos Lopes pela paciência, atenção, dedicação, apoio, confiança e disponibilidade na orientação deste trabalho e por sempre me incentivar.

Aos colegas de curso pelos momentos alegres que compartilhamos, em especial José Luiz Duarte pela ajuda e discussões durante a resolução de exercícios.

A todos meus alunos que participaram da aplicação do pré-teste desta sequência didática.

Ao Deoclécio M. Kosaka pelo trabalho da parte gráfica e formatação.

Ao Prof. Dr. Edson Donizete por, sem saber, permitir minha chegada até aqui.

Ao Edison Righetto, meu amigo e companheiro, por suas críticas pessoais e por estar sempre ao meu lado.

A minha filha Ana Julia Righetto pelos estímulos e por não me deixar desistir.

RESUMO

Este trabalho apresenta uma proposta de ensino aprendizagem para problemas de Programação Linear e sua solução geométrica, para o caso de duas variáveis, através de uma sequência didática com resolução de problemas, especificamente para a terceira série do Ensino Médio. Trata-se de uma sequência didática em que os problemas apresentam uma ordem crescente de dificuldade. Apresentamos uma breve revisão do conteúdo de Geometria Analítica, desigualdades lineares e por meio de uma linguagem simples, como modelar e resolver problemas de Programação Linear que estão presentes em nosso cotidiano. Como já aparece no Caderno do Aluno, fornecido pela Secretaria da Educação do Estado de São Paulo, propomos a utilização da sequência didática, em sala de aula, através do uso da metodologia de resolução de problemas, em que o aluno deve chegar ao conceito matemático por meio de suas descobertas. Aplicamos em sala de aula um pré-teste para avaliar o conteúdo de nossa proposta com o objetivo de verificar a necessidade de refazer ou acrescentar alguns problemas e constatamos que uma das principais dificuldades dos alunos está na parte da modelagem matemática do Problema de Programação Linear. Essa dificuldade está nitidamente relacionada com a dificuldade na interpretação de texto, fato que claramente ocorre com os alunos que têm pouco hábito de leitura. Pretendemos com este trabalho dar nossa contribuição para um melhor aprendizado em problemas de Programação Linear.

Palavras-chave: Geometria analítica. Resolução de problemas. Problema de programação linear. Sequência didática. Ensino médio.

ABSTRACT

This work presents a proposal for learning education for linear programming problems and its geometric solution for the case of two variables, through a teaching sequence with problem solving, specifically for the third year of high school. It refers to a didactic sequence in which the problems will adding the degree of difficulty. We present a brief review of Analytic Geometry, linear inequalities and through simple language, how to model and solve linear programming problems that are present in our daily lives. As already appears in the Student Notebook, provided by the Department of Education of the State of São Paulo, we propose the use of didactic sequence in the classroom through the use of problem-solving methodology, where the student must reach the mathematical concept through of their own discoveries. We apply in the *classroom a pretest to assess the content of our proposal in order to verify the need to redo or add some problems and we found that one of the main difficulties of the students are in the mathematical modeling of Linear Programming Problem. This difficulty is clearly related to the difficulty in interpreting text, a fact that clearly occurs by little learning through reading habit. We intend with this work to give our contribution to a better learning in linear programming problems.*

Keywords*: Analytic geometry. Problem resolution. Linear programming problem. Didactic sequence. High school.*

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Programação Linear (PL) tem como interesse a otimização, isto é, minimização ou maximização de uma função linear satisfazendo um conjunto de equações e ou inequações lineares denominadas restrições.

A Programação Linear foi primeiramente concebida por George B. Dantzig (1914 – 2005) por volta de 1947 enquanto trabalhava como consultor matemático para a força aérea dos Estados Unidos, desenvolvendo um planejamento automatizado para um programa de fornecimento logístico.

Embora o matemático e economista soviético L.V. Kantorovich (1912- 1986) tenha formulado e resolvido um problema deste tipo em 1939, seu trabalho só tornou-se conhecido em 1959. Portanto, o conceito de Programação Linear é usualmente creditado à Dantzig.

Porque a Força Aérea referia-se aos seus vários projetos como programas a serem implementados, Dantzig primeiro publicou textos falando de suas ideias como "Programando numa Estrutura Linear". O termo Programação Linear foi verdadeiramente cunhado pelo economista e matemático T.C. Koopmans (1910 – 1985) no verão de 1948 enquanto ele e Dantzig passeavam próximo a praia de Santa Mônica na Califórnia.

Em 1949 George B. Dantzig publicou o Método Simplex para resolver problemas de Programação Linear.

Desde este tempo vários matemáticos ou cientistas têm contribuído para o campo da programação linear de muitos modos diferentes, incluindo desenvolvimento teórico, aspectos computacionais e exploração de novas aplicações do assunto.

O Método Simplex para resolver um Problema de Programação Linear (PPL) desfruta de grande aceitação devido a sua capacidade para resolver problemas importantes na área de gerenciamento administrativo e sua capacidade para produzir soluções em curto espaço de tempo.

Para a elaboração desta parte inicial do capítulo introdutório utilizamos a referência Bazaraa, Jarvis e Sherali (1990).

Vários autores têm mostrado que a Programação Linear pode também ser ensinada no Ensino Médio. Já na década de 80 do século passado, São Paulo (1980) mostrava como introduzir a PL no Ensino Médio.

Algumas dissertações do mestrado profissional PROFMAT têm utilizado como tema a PL. Destacamos aqui os trabalhos de Araujo (2013), Melo (2012) e Santos (2013).

Em Melo (2012) observa-se ênfase na resolução geométrica através do uso do software Graphamatica após a modelagem do problema. Por isso, prioriza problemas com duas variáveis. Araujo (2013), em seu trabalho, apresenta um desenvolvimento da Teoria dos Conjuntos Convexos e a resolução de modelos de Problemas Lineares utilizando o Método Simplex enfatizando problemas de mais de duas variáveis. Santos (2013) mostra uma abordagem de problemas de PL para o Ensino Médio com resoluções geométricas e o método simplex sem dar atenção à Geometria Analítica e outros conceitos que se utiliza na modelagem e resolução de problemas de PL.

Neste trabalho apresentamos algumas noções básicas de Programação Linear e nos preocupamos com a resolução geométrica de alguns problemas, já que o material de Apoio ao Currículo do Estado de São Paulo, Caderno do Aluno da 3ª série do Ensino Médio volume 1 (SÃO PAULO, 2014), apresenta vários problemas de Programação Linear. Temos como objetivo a possibilidade de introduzir esse assunto no Ensino Médio, de uma maneira simples, clara e de modo que qualquer aluno consiga resolver um problema de PL com duas variáveis. Faremos inicialmente um breve resumo das ferramentas matemáticas necessárias para alcançarmos esse nosso objetivo.

No capítulo II, abordamos brevemente um pouco da história de como a resolução de problemas surgiu para facilitar o entendimento da Matemática e também fazemos uma breve descrição do conceito de sequência didática o qual pode ser utilizado no ensino de matemática.

No capítulo III, apresentamos um resumo de alguns conceitos de Geometria Analítica que serão utilizados na modelagem e na resolução de um problema de PL com duas variáveis.

O capítulo IV, consiste de uma breve revisão do conceito de desigualdades lineares, o qual é muito utilizado na resolução geométrica de um problema de PL.

No capítulo V, apresentamos a definição de conjunto convexo e combinação convexa, que auxiliará o aluno na interpretação geométrica de problemas de PL, como modelá-lo e sua resolução geométrica.

No capítulo VI, são apresentados alguns exemplos de problemas clássicos de PL.

No capítulo VII, apresentamos a descrição de nossa proposta didática bem como os resultados e a análise do pré-teste aplicado em sala de aula.

O capítulo VIII, consiste das considerações finais em que procuramos destacar as vantagens desta proposta, bem como as variações didáticas que o professor poderá adotar de acordo com seus alunos.

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA E RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Nota-se que é necessário abordar os assuntos de Matemática de forma específica, levando o aluno a perceber a importância em aprendê-lo e não a obrigação. Com isto a proposta pedagógica que utiliza uma sequência didática na construção do conhecimento, visa desenvolver instrumentos de indagações e questionamentos por parte dos alunos, bem como transformar em problemas, situações do seu interesse; porém, de uma forma orientada e organizada pelo professor.

A sequência didática utilizada neste trabalho foi pensada como:

> uma outra modalidade organizativa que se constitui numa série de ações planejadas e orientadas com o objetivo de promover uma aprendizagem especifica e definida. Estas ações são sequências de forma a oferecer desafios com o grau de complexidade crescente, para que as crianças possam colocar em movimento suas habilidades, superando-as e atingindo novos níveis de aprendizagem. (PANUTTI, 2003, p. 04).

Um dos primeiros autores a definir o conceito de sequência didática foi Zabala, (1998, p. 18) como sendo "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecidos, tanto pelos professores como pelos alunos".

Nesta perspectiva, a utilização da Teoria das Situações Didáticas compreende-se a sequência didática como uma articulação em situações didáticas e situações cujo âmbito de ensinar não é revelado ao aluno, no entanto é concebido pelo professor com objetivo de criar condições favoráveis para a aquisição de um novo saber, visando criar um meio adequado ao desenvolvimento onde o aluno interage com o objeto de pesquisa de forma que o desafie a encontrar respostas para as situações problemas. (CASTOLDI; DANYLUK, 2014).

Em uma sequência didática deve-se levar em conta, a importância das intenções educacionais, sendo que alguns critérios para analisar uma sequência reportam as sequências a três dimensões que segundo Zabala (1998, p. 31) são: "dimensão conceitual – o que se deve saber; dimensão procedimental – o que se deve saber fazer; e dimensão atitudinal – como se deve ser?”.

O aluno deve participar de sua aprendizagem, desta forma pode dar significado para o que está aprendendo e ultrapassar a condição de um ser passivo, mero receptor de conhecimentos prontos e acabados. O aluno pode se tornar um sujeito ativo e capaz de buscar respostas para resolver situações que aparecem em seu cotidiano. Neste processo o professor é de fundamental importância, pois cabe a ele criar condições para que os alunos se sintam capazes de irem em busca de conhecimento, sentindo-se seguros de que o mesmo dará o suporte necessário para que busquem respostas para seus possíveis e inevitáveis questionamentos. (CASTOLDI; DANYLUK, 2014).

Além da sequência didática, atualmente, outro foco para o ensino da Matemática é a resolução de problemas, o que no Estado de São Paulo desde 1999, vem sendo feito através da Secretaria da Educação, com o caderno do aluno, onde através de problemas, leva-se o aluno a compreender, entender o conteúdo sem que este lhe seja imposto através de procedimentos algorítmicos.

Em 1892, Felix Klein já se preocupava como o professor de matemática deveria trabalhar com seus alunos. Em suas monografias trabalhou matemática elementar de uma maneira avançada e, nelas, deixava aos professores a responsabilidade de desenvolver caminhos por ele sugeridos.

Desde esta época já se nota a preocupação com o ensino da matemática, envolvendo métodos mais atraentes e professores mais qualificados.

Schroeder e Lester (1989) apresentam três maneiras de abordar o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas: teorizar sobre resolução de problemas, ensinar a resolver problemas e ensinar Matemática via resolução de problemas.

Foi observado que muitos estudantes não sabiam alguns conteúdos de Matemática, apesar de haver alunos que eram exímios em resolver problemas. Com isso, discursos no campo da Educação Matemática mostrou a necessidade de uma adequação no trabalho escolar com o intuito de um maior aprendizado matemático.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN):

> Os movimentos de reorientação curricular ocorridos no Brasil, a partir dos anos 20 , não tiveram força suficiente para mudar a prática docente dos professores para eliminar o caráter elitista desse ensino, bem como melhorar sua qualidade.Em nosso país o ensino de matemática ainda é marcado pelos altos índices de retenção, pela

> formalização precoce de conceitos, pela excessiva preocupação com o treino de habilidades e mecanização de processos sem compreensão. (BRASIL, 1997, p. 19).

Dentro de outra orientação, os alunos deveriam aprender Matemática com compreensão, foi quando começou-se a falar em resolução de problemas como uma ferramenta para se aprender Matemática e segundo Andrade (1998):

> A primeira vez em que a resolução de problemas é tratada como um tema de interesse para professores e alunos, nos níveis superiores, foi a partir do livro How to *Solve it* , de Polya, cuja primeira edição data de 1945. Antes desse período, entretanto, houve algumas experiências e alguns estudos enfatizando os produtos da resolução de problemas. As experiências mais remotas e significativas podem ser creditadas a Dewey, entre 1896 e 1904. Nessas experiências, as crianças estudavam através de projetos que reproduziam as situações sócio econômicas. Dewey sugeria que esta orientação pedagógica centrada em projetos pudesse contribuir para o desenvolvimento do espírito crítico das crianças, capacitando-as para o desenvolvimento de uma sociedade democrática (FIORENTINI, 1994, p. 188). Bloom e Broder, ainda na década de 50, para melhor captarem as estratégias de resolução, estudaram os processos de resolução utilizados por estudantes bem sucedidos. Para que isso fosse possível, os alunos deveriam pensar em voz alta durante o processo. Com base em suas pesquisas, defendiam, que o ensino de resolução de problemas deveria centrar-se no ensino de estratégias para resolver problemas, pois acreditavam que os hábitos de resolução de problemas poderiam ser alterados ou aprimorados por uma adequada formação e prática. (ANDRADE, 1998, p. 7-8).

A tendência hoje é considerar os alunos como participantes ativos, os problemas como instrumentos precisos e bem definidos e a resolução de problemas uma atividade com uma coordenação complexa e simultânea de vários níveis de atividades.

Ensinar Matemática por intermédio de resolução de problemas ganhou força no mundo inteiro no final dos anos 70. Resolução de problemas, como aplicação da matemática ao mundo real, resolvendo questões que ampliam as fronteiras da própria ciência Matemática.

Ainda segundo Andrade (1998):

> A resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de ensinar matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob este enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação dos conceitos antes mesmo de sua apresentação na linguagem matemática formal. O foco esta na ação por parte do aluno. (ANDRADE, 1998, p. 12).

Ao ensinar Matemática por meio de resolução de problemas, tem-se em mente que com isto os alunos compreenderão os conceitos, os processos e as técnicas operatórias necessárias dentro do trabalho feito em cada unidade matemática, levando o aluno a observar que entender é essencialmente relacionar. Com isto, leva-se o aluno a compreender, mudando-se a ideia de que Matemática é apenas uma ferramenta para se resolver problemas, ou seja, o aluno tem uma visão mais ampla, que Matemática é um caminho para se pensar, um organizador de ideias e assim tornando o aprendizado, em Matemática, muito mais forte, pois auto gerado e não imposto pelo professor. Quando se oferece ao aluno aprender Matemática por meio da resolução de problemas, tem-se um poderoso e importante caminho para que ele desenvolva sua própria compreensão. (ONUCHIC, 1999).

Sabe-se que nenhuma intervenção no processo ensino aprendizagem fará diferença se não houver um professor eficiente, o que de acordo com Van de Walle (2001) deve:

> Gostar da disciplina Matemática, o que significa fazer Matemática com prazer; compreender como os alunos aprendem e constroem suas ideias; ter habilidade em planejar e selecionar tarefas e, assim, fazer com que os alunos aprendam matemática num ambiente de Resolução de Problemas; ter habilidade em integrar diariamente a avaliação com o processo de ensino a fim de melhorar esse processo e aumentar a aprendizagem. (VAN DE WALLE, 2001 citado por ONUCHIC; ALLEVATO, 2004, p. 219).

Ao ensinar um tópico matemático o professor deve sempre colocar inicialmente uma situação problema, a qual envolva o tópico a ser ensinado, e desenvolver técnicas matemáticas para que o aluno chegue em respostas razoáveis a tal situação dada. Entra aqui, uma sequência de problemas com grau crescente de dificuldade que leve o aluno a pensar e começar a elaborar a resolução do problema dado.

Neste trabalho apresentamos uma sequência de dez problemas em que o aluno possa pensar e concretizar seu conhecimento em Geometria Analítica e, aumentando-se o grau de dificuldade chegar a um Problema de Programação Linear sem que lhe seja dito, inicialmente, que é um Problema de Programação Linear.

3 NOÇÕES BÁSICAS DE GEOMETRIA ANALÍTICA

Apresentamos neste capítulo alguns conceitos básicos da Geometria Analítica os quais serão utilizados para a resolução geométrica de um Problema de Programação Linear. A referência bibliográfica utilizada aqui foi Lima (2001).

3.1 COORDENADAS NA RETA

A Geometria Analítica baseia-se na ideia de representar os pontos da reta por números reais e os pontos do plano por pares ordenados de números reais.

Assim, dados dois pontos quaisquer na reta e fixado uma unidade de comprimento, o comprimento do segmento de reta AB chama-se *distância* entre os pontos A e B e indica-se por $\mathrm{d}(\mathrm{A}, \mathrm{B})$. Assim podemos introduzir coordenadas sobre uma reta, ou seja, representar seus pontos por meio de um número real.

Uma reta se diz *orientada* quando sobre ela escolhe-se um sentido de percurso, chamado *positivo*, o sentido inverso chama-se *negativo*. Em uma reta orientada, diz-se que um ponto B esta à *direita* do ponto A quando o sentido do percurso de A para B é positivo.

Um eixo é uma reta orientada na qual se fixou um ponto O, chamado *origem*. A origem faz-se corresponder o número zero. A cada ponto X do eixo E, situado à direita de O corresponde um número real positivo $x = d(O, X)$ = comprimento do segmento de reta OX.

Aos pontos situados à esquerda de O correspondem números reais negativos, cujos valores absolutos medem as distâncias entre esses pontos.

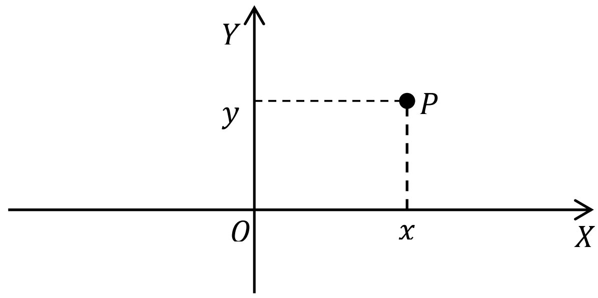
No plano indica-se por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares (x, y) com x e y números reais. Dados (a, b) e (c, d) em $\mathbb{R}^2$, tem-se que $(a, b) = (c, d)$ se, e somente se, $a = c$ e $b = d$.

O número x se chama *primeira coordenada* e o número y *segunda coordenada* do par (x, y). Um par não é a mesma coisa que um conjunto, por exemplo o par (3,5) e (5,3) são diferentes, pois no primeiro a primeira coordenada é 3 e no segundo par a primeira coordenada é 5. Por outro lado, os conjuntos {3, 5} e {5, 3} são iguais pois um número pertence a um deles se, e somente se, pertence ao outro. Assim, um par ordenado não é a mesma coisa que um conjunto com dois elementos.

Em um plano π um *sistema de coordenadas* (cartesianas) consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos no mesmo plano, com a mesma origem O. O eixo OX chama-se *eixo das abcissas*, o eixo OY chama-se *eixo das ordenadas* e OXY é o sistema de coordenadas cartesianas.

A escolha de um sistema de coordenadas no plano π permite estabelecer uma correspondência biunívoca entre $\pi \rightarrow \mathbb{R}^2$. A cada ponto P do plano π fazemos corresponder um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os números x e y são as *coordenadas* do ponto P relativas ao sistema *OXY*; x é a *abcissa* e y é a *ordenada* de *P*, em outras palavras, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é o par ordenado de números reais que corresponde ao ponto *P*.

Figura 1 - Sistema de coordenadas no plano π



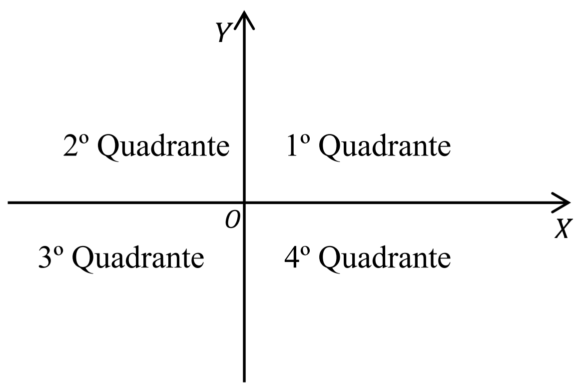
Fonte: Lima (2001)

O ponto O, origem do sistema de coordenadas tem abcissa e ordenada ambas iguais a zero, $O = (0,0)$.

O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. O primeiro é o de atribuir um significado geométrico a fatos de natureza numérica, como o comportamento de uma função real de uma variável real, que ganha muito em clareza quando se olha para seu gráfico. O segundo propósito do uso de coordenadas é o de se recorrer a elas a fim de resolver problemas de geometria, o que ocorre com Geometria Analítica. Na prática, esses dois pontos se entrelaçam: para estabelecer os fatos da Geometria Analítica usam-se os resultados básicos da Geometria Euclidiana.

Os eixos ortogonais OX e OY decompõem o plano π em quatro regiões, cada uma delas denominada *quadrante*. O primeiro quadrante é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ tais que $x \geq 0$ e $y \geq 0$. O segundo quadrante é formado pelos pontos $P = (x, y)$ tais que $x \leq 0$ e $y \geq 0$. O terceiro quadrante pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \leq 0$ e $y \leq 0$ e, finalmente o quarto quadrante é formado pelos pontos $P = (x, y)$ com $x \geq 0$ e $y \leq 0$.

Figura 2 - Eixos ortogonais *OX* e *OY* decompõem o plano π em quatro regiões.



Fonte: Lima (2001)

3.2 EQUAÇÃO DA RETA NO PLANO

Uma vez escolhido um sistema de coordenadas no plano, as *curvas* nesse plano passam a ser representadas por equações. Chama-se equação de uma *curva* ***C*** a uma igualdade envolvendo as variáveis x, y a qual é satisfeita se, e somente se, o ponto $P = (x, y)$ pertence à curva ***C***. Inicialmente vamos tratar da equação $y = ax + b$.

Diz-se que uma reta r é *vertical* quando ela é paralela ao eixo OY ou coincide com ele. Uma reta r é *horizontal* quando é paralela ao eixo OX ou coincide com ele.

Se uma reta vertical r corta o eixo OX num ponto de abcissa u , então todos os pontos $P = (u, y)$ são pontos de r, com y arbitrário. Neste caso, a equação da reta r é $x = u$.

Se tomarmos uma reta r não vertical, ela corta o eixo OY no ponto $B = (0, b)$ e para todo ponto $P = (x, y)$ pertencente à reta r, com $x \neq 0$, o quociente $\frac{(y-b)}{x}$ tem o mesmo valor. De fato, sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, com abcissas $x_1 \neq x_2$ não nulas, sobre a reta r. Sejam $Q_1 = (x_1, b)$ e $Q_2 = (x_2, b)$. Os triângulos retângulos BQ_1P_1e BQ_2P_2 são semelhantes, logo $\frac{\overline{P_1Q_1}}{x_1} = \frac{\overline{P_2Q_2}}{x_2}$, isto é

$$\frac{y_1 - b}{x_1} = \frac{y_2 - b}{x_2}.$$

Temos, então, que de fato o quociente $\frac{y-b}{x}$ não depende da posição do ponto $P = (x, y)$ sobre a reta r.

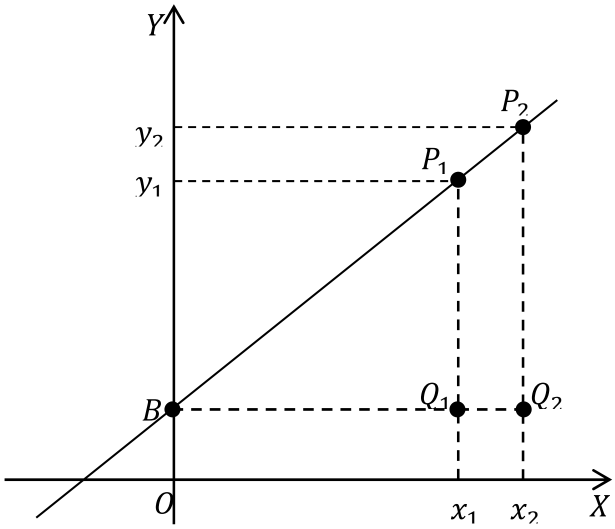
A constante $a = \frac{y-b}{x}$ chama-se *inclinação* da reta não vertical r.

Na figura 3, os triângulos retângulos BQ_1P_1eBQ_2P_2 são semelhantes, pois têm o mesmo ângulo agudo $\hat{B}$.

Assim, se r é uma reta não vertical, existem a e b tais que, para todo ponto $P = (x, y)$ em r temos a igualdade $y = ax + b$. Reciprocamente se $P = (x, y)$ satisfaz $y = ax + b$ então P pertence a reta *r*.

Muitas vezes costuma-se dizer “a reta $y = ax + b$” para designar a reta de equação $y = ax + b$.

Figura 3 - Equação da reta no plano



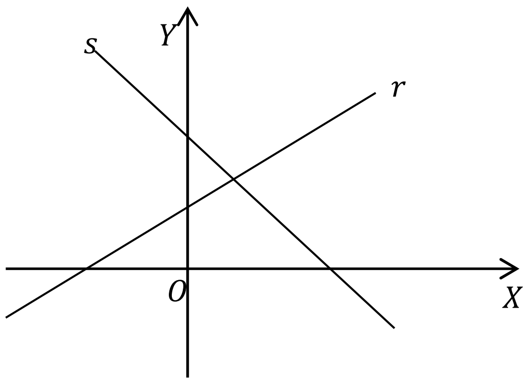
Fonte: Lima (2001)

É importante ter sempre em mente o significado das constantes a e b na equação da reta não vertical $y = ax + b$, b é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo OY (ponto de abcissa zero) e a, inclinação da reta, mede a taxa de crescimento de y em função de x. Quando se acrescenta uma unidade a x, passando de x para $x + 1$, o acréscimo correspondente de y é

$$[(a(x + 1) + b)] - [ax + b] = a$$

Quando $a > 0$ a reta $y = ax + b$ é inclinada para cima (esquerda) e quando $a < 0$ será inclinada para baixo (direita).

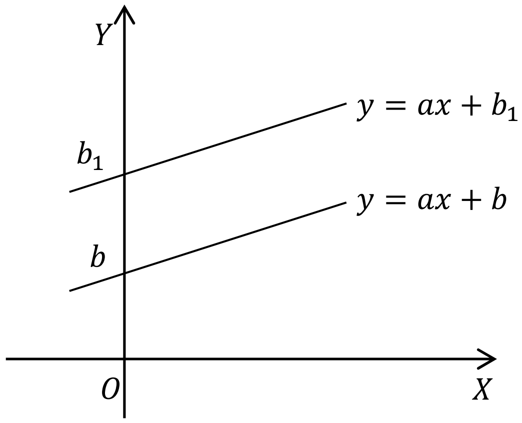
Figura 4 - A inclinação da reta *r* é positiva e da reta *s* é negativa



Fonte: Lima (2001)

Duas retas $y = ax + b$ e $y = a_1x + b_1$ são paralelas distintas se, e somente se, possuem a mesma inclinação a e cortam o eixo OY em pontos distintos, de ordenadas $b \neq b_1$.

Figura 5 - Retas paralelas de mesma inclinação a, mas $b \neq b_1$



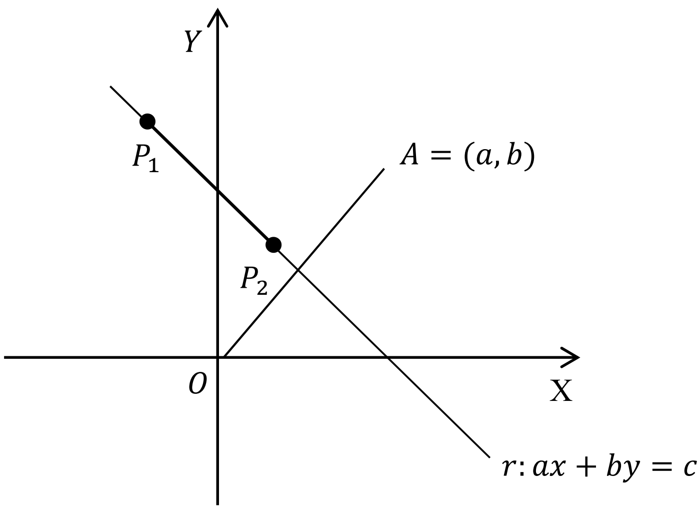
Fonte: Lima (2001)

Quando escrevermos a equação $ax + by = c$ estaremos supondo que a e b não são simultaneamente nulos, ou seja, $a^2 + b^2 \neq 0$, mesmo que isso não seja dito explicitamente.

Ao se afirmar que a equação $ax + by = c$ representa uma reta r, significa que um ponto $P = (x, y)$ pertence a r se, e somente se, suas coordenadas x e y satisfazem a equação dada.

Para ver isto, seja $A = (a, b)$ diferente de $O = (0, 0)$, sobre a reta OA, perpendicular à reta dada r, baixada da origem O.

Figura 6 - *OA* é perpendicular à reta *r*



Fonte: Lima (2001)

Se $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ são pontos quaisquer sobre a reta r, o segmento P_1P_2 é perpendicular a OA, portanto

$$a(x_1 - x_2) + b(y_1 - y_2) = 0 \text{ , isto é}$$

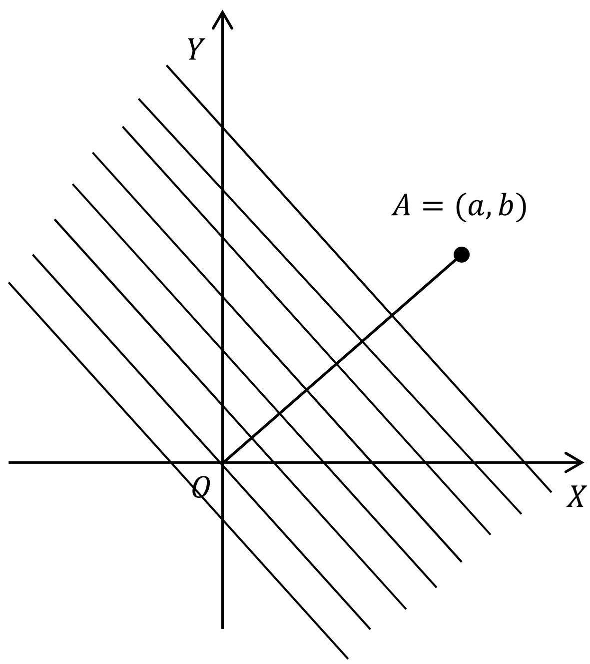
$$ax_1 + by_1 = ax_2 + by_2$$

Assim, mostramos que qualquer que seja o ponto $P = (x, y)$ pertencente à reta r, a expressão $ax + by$ terá sempre o mesmo valor, seja c esse valor, ou seja, $ax + by = c$.

Considerando agora uma função de duas variáveis $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x, y\ ) = ax + by$, diz-se que o ponto $P = (x, y)$ está no *nível* c em relação a φ quando $\varphi(x, y) = c$, ou seja, os pontos do plano que estão no nível c em relação à função φ são os pontos da reta de equação $ax + by = c$. Diz-se então que a reta é *a linha de nível* c dessa função.

A linha de nível 0 é a reta de equação $ax + by = 0$. As demais linhas de nível da função φ são retas paralelas a esta, sendo todas perpendiculares ao segmento OA com $A = (a, b)$.

Figura 7 - Linhas de nível da função $\varphi(x, y) = ax + by$



Fonte: Lima (2001)

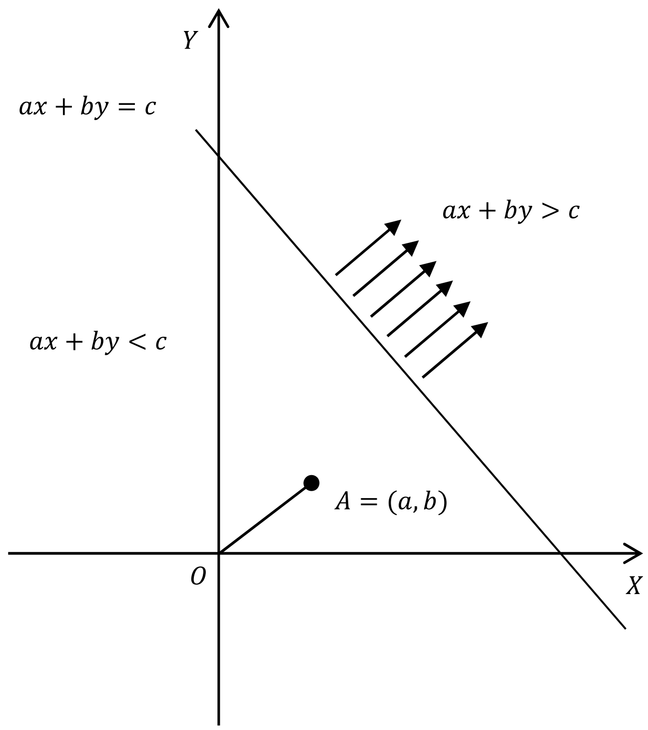
4 DESIGUALDADES LINEARES

Toda reta decompõe um plano em duas regiões denominadas *semiplanos*.

Dada a reta $r : ax + by = c$, os semiplanos H^- e H^+ por ela determinados são definidos pelas desigualdades $ax + by \leq c$ e $ax + by \geq c$. Assim temos:

$$H^- = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax + by \leq c\} \text{ e } H^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; ax + by \geq c\}.$$

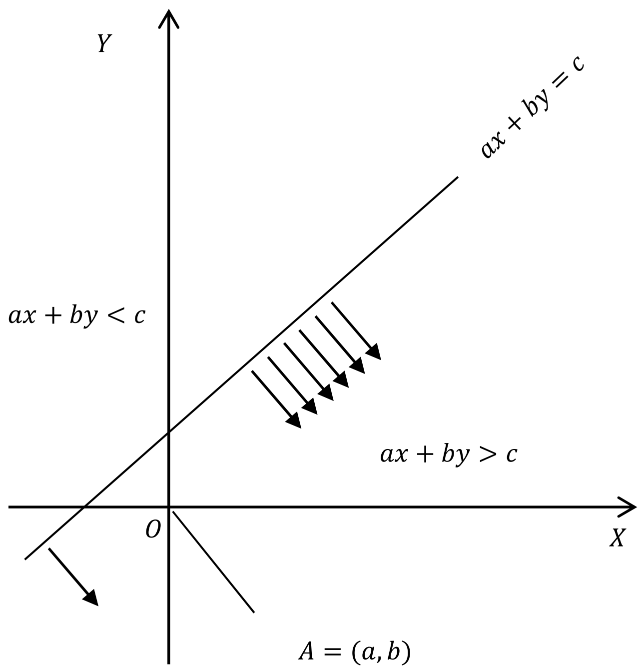
Figura 8 - As setas indicam o crescimento da função $\varphi(x, y) = ax + by$



Fonte: Lima (2001)

Considerando a função $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x, y) = ax + by$, a reta $ax + by = c$ é a linha de nível c da função φ. Como φ(0, 0) = 0, a origem está no nível zero de φ. Por outro lado, $\varphi(a, b) = a^2 + b^2 > 0$, o ponto *A* = (*a, b*) está no nível positivo $c = a^2 + b^2$. Logo, quando percorre-se a Reta *AO* no sentido de *O* para *A*, os níveis *c* das retas $ax + by = c$ todas perpendiculares a *AO* vão crescendo, o que nos permite distinguir os semiplanos H^- e H^+.

Figura 9 - A figura exibe os semiplanos $ax + by \geq c$ e $ax + by \leq c$



Fonte: Lima (2001)

5 CONJUNTOS CONVEXOS E COMBINAÇÃO CONVEXA

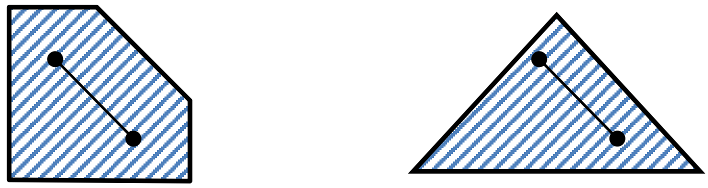
As definições de conjunto *convexo* e de ponto extremo apresentadas a seguir são fundamentais para o estudo em Programação Linear (PL).

Definição. Dizemos que um conjunto $X \subset \Re^n$ é *convexo* se dados quaisquer dois pontos $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2 \in X$, então o segmento de reta que une $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$ deve também pertencer ao conjunto, ou seja, $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in X$ para cada $\lambda \in$ [0,1].

Qualquer ponto da forma $\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ onde $\lambda \in$ [0, 1] é chamado combinação convexa de $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$. Se $\lambda \in$ (0, 1), então a combinação convexa é chamada estrita.

A figura 10 apresenta, geometricamente, exemplos de conjuntos convexos e a figura 11 de conjuntos não convexos, ambos no espaço $\Re^2$.

Figura 10 – Conjuntos Convexos



Fonte: Puccini (1972)

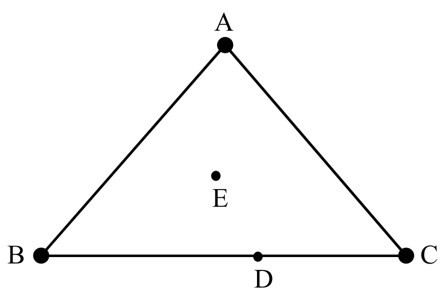
Figura 11 - Conjuntos Não Convexos

Fonte: Puccini (1972)

Definição. Seja X um conjunto convexo, dizemos que **x** é um *ponto extremo* de X se $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2$ com $\lambda \in (0,1)$ e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in X$, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2$.

Sendo assim, **x** não pode ser representado como uma combinação estritamente convexa de dois pontos diferentes de X, logo **x** é um ponto extremo. A figura 12 apresenta, geometricamente, um exemplo no espaço $\Re^2$.

Figura 12 – Ponto Extremo



Fonte: Elaborado pela própria autora

Os Pontos A, B e C são pontos extremos, já os pontos D e E não são pontos extremos.

6 PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

6.1 DEFINIÇÕES BÁSICAS

Consideremos o seguinte Problema de Programação Linear (PPL) em duas variáveis:

Minimizar a função $z = c_1 x_1 + c_2 x_2$

sujeito a

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\geq b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\geq b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 &\geq b_m \\
x_1, x_2 &\geq 0 \ .
\end{aligned}
$$

Aqui, z é a função objetivo a ser minimizada. Os coeficientes c_1 e c_2 são os coeficientes de custo (ou lucro para um problema de maximização) conhecidos e x_1 e x_2 são as variáveis de decisão a serem determinadas. A desigualdade $\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \geq b_i$ representa a i-ésima restrição (ou restrição estrutural). Os coeficientes a_{ij} para $i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2$ são chamados de coeficientes técnicos. Estes coeficientes formam a matriz de restrição $\boldsymbol{A}$.

$$
\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{bmatrix}.
$$

O vetor coluna cuja i-ésima componente é b_i (referido como vetor do lado direito da desigualdade) representa a exigência mínima a ser satisfeita.

$$
\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.
$$

As desigualdades $x_1, x_2 \geq 0$ são as restrições de não negatividade. Um conjunto de variáveis (x_1, x_2) satisfazendo todas as restrições é chamado de *Conjunto das Soluções Possíveis* ou *Conjunto das Soluções Viáveis* do problema.

Usando a terminologia precedente, o problema de Programação Linear pode ser estabelecido como segue: "Entre todos os vetores viáveis, ache um que minimize (ou maximize) a função objetivo", tal vetor é chamado de *Solução Ótima*.

6.2 HIPÓTESES E LIMITAÇÕES DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

O conteúdo desta seção foi extraído de Bazaraa, Jarvis e Sherali (1990) e Puccini (1972).

Para representar um problema de otimização no formato de um programa linear, algumas limitações necessitam ser explicitadas. São elas:

1 – **Proporcionalidade:** Nos modelos de Programação Linear assume-se, por exemplo, que o lucro de cada atividade c_j é proporcional ao nível de produção x_j. Essa hipótese diz que o lucro unitário c_j independe do nível de produção x_j e não considera a chamada economia de escala, sendo válida na maioria dos problemas reais. Para atenuá-la pode-se considerar intervalos de produção nos quais essa proporcionalidade é, aproximadamente, verificada.

2 – **Aditividade:** Esta hipótese garante que o custo total é a soma dos custos individuais, e que a contribuição da i-ésima restrição é a soma das restrições das atividades individuais, ou seja, elas não são substituições ou resultados de iterações entre as atividades.

3 – **Divisibilidade:** Esta hipótese garante que a variável de decisão pode ser dividida em qualquer nível fracionário de modo que valores não inteiros para as variáveis de decisão são permitidos.

4 – **Caráter determinístico:** Os coeficientes c_j, a_{ij} e b_i são conhecidos deterministicamente. Demanda, custo, preços, recursos disponíveis, etc., não serão de natureza probabilística ou aleatória.

É importante reconhecer que se um problema de programação linear está sendo usado para modelar uma dada situação, então as hipóteses já mencionadas são mantidas; pelo menos no âmbito de operação.

Quando Dantzig apresentou seu modelo de programação linear no encontro da sociedade econométrica de Wisconsin, o famoso economista H. Hotteling (1895-1973) criticou-o observando que, na realidade o mundo é não linear. Enquanto Dantzig contra argumentava, o então famoso matemático John Von Neumann (1903-1957) veio em seu socorro lembrando que a conferência falava sobre Programação “Linear” (e não vida linear) e era baseado em um conjunto de axiomas pré-estabelecidos. Falando ingenuamente, um usuário pode aplicar a técnica de programação linear, se, e somente se, seus interesses se ajustam aos axiomas mencionados.

Aparentemente, não obstante as hipóteses de restrição, a Programação Linear está entre os modelos mais usados hoje. Tais hipóteses representam vários sistemas muito satisfatoriamente, e são capazes de prover uma grande soma de informações além de uma solução simples.

A modelagem e análise das operações de um problema de pesquisa em geral ou de um problema de programação linear em particular envolve vários estágios.

O estágio da formulação do problema envolve um estudo detalhado do sistema, coleta de dados e a identificação do problema específico que necessita ser analisado; juntamente com as restrições e a função objetivo.

Frequentemente, a análise pode ser apenas parte da configuração do problema. O próximo estágio envolve a construção de uma idealização do problema, ou modelagem matemática do problema. Devemos ter cautela ao assegurar que o modelo representa satisfatoriamente o sistema a ser analisado, mantendo o modelo matematicamente solucionável.

Este compromisso deve ser feito com critério, e as hipóteses subjacentes ao modelo devem ser devidamente consideradas.

Deve-se ter em mente que as soluções obtidas são soluções do sistema, mas não necessariamente é solução para o modelo que representa a verdadeira solução.

O terceiro estágio é encontrar uma solução por uma técnica apropriada considerando características especiais do problema, se for o caso. Uma ou mais soluções ótimas podem ser procuradas, ou apenas uma solução aproximada pode ser levantada a partir de alguma avaliação heurística. No caso de múltiplas funções objetivos pode-se procurar soluções ótimas eficientes, isto é, soluções tais que o aperfeiçoamento do valor de qualquer função objetivo é necessariamente acompanhado por dano em alguma outra função objetivo.

O quarto estágio é o teste do modelo, e sua possível reestruturação. Examinamos o modelo e sua sensibilidade aos vários parâmetros do sistema e estudamos suas predições a vários cenários do tipo “ *o que seria se ...* “.

Esta análise pode também ser usada para averiguar a integridade do modelo comparando o resultado de seus prognósticos com os resultados esperados. Neste estágio, pode-se querer enriquecer o modelo incorporando outras características importantes do sistema que não foram consideradas de início, ou então, por outro lado pode-se, escolher por simplificar o modelo.

A Programação Linear é também frequentemente usada para resolver certos tipos de problemas de otimização não linear por meio de sucessivas aproximações lineares e constitue uma importante ferramenta no método de solução para problemas de otimização linear discreta tendo variáveis restritas inteiras.

6.3 EQUAÇÕES, INEQUAÇÕES, VARIÁVEIS NÃO NEGATIVAS E LIMITADAS

Recordemos que a Programação Linear resolve um problema de maximizar ou minimizar uma função linear submetida a desigualdades ou igualdades lineares. Assim, por intermédio de uma simples manipulação o problema pode ser transformado de uma maneira ou outra em uma forma equivalente. Vejamos como.

Uma desigualdade pode ser transformada em uma igualdade. Consideremos a restrição dada por

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \geq b_i \qquad (6.1)$$

Esta restrição pode ser colocada na forma de equação subtraindo uma variável excedente não negativa x_3. Assim, (6.1) torna-se

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j - x_3 = b_i \qquad \text{com} \qquad x_3 \geq 0$$

(seria análogo se $\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_j \leq b_i$)

Uma igualdade também pode ser transformada em uma desigualdade embora isto não seja interessante quando do uso do Método Simplex.

Para problemas práticos as variáveis representam quantidades físicas e, portanto não devem ser negativas. Se a variável x_j não tem restrição quanto ao sinal, ela pode ser trocada por $x_j^{'} - x_j^{''}$ com $x_j^{'} \geq 0$ e $x_j^{''} \geq 0$.

Agora, se $x_j \geq \ell_j$, então a nova variável $x'_j = x_j - \ell_j$ é automaticamente não negativa. Também, se a variável x_j é restrita pela desigualdade $x_j \leq u_j$ em que $u_j \leq 0$, então a substituição $x'_j = u_j - x_j$ produz uma variável x'_j não negativa.

6.4 PROBLEMAS DE MAXIMIZAÇÃO E MINIMIZAÇÃO

Outra manipulação é a conversão de um problema de maximização em um de minimização e reciprocamente.

Notemos que sobre qualquer região

$$\text{Máximo } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = -\text{mínimo } \sum_{j=1}^{n} - c_j x_j \, .$$

Assim, um problema de máximo (ou mínimo) pode ser convertido em um problema de mínimo (ou máximo) pela multiplicação dos coeficientes da função objetivo por –1. Após o encontro do ótimo do novo problema, o ótimo do problema original é aquele multiplicado por menos um.

6.5 PROGRAMAÇÃO LINEAR NA FORMA MATRICIAL

Um problema de Programação Linear com n variáveis pode ser colocado de uma maneira mais conveniente por meio da utilização de matrizes.

Consideremos o problema,

$$\text{Minimizar } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{sujeito a } \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \; ; \; x_j \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, m \text{ e } j = 1, 2, \ldots, n.$$

tal problema pode ser colocado na forma matricial.

Minimizar $\boldsymbol{cx}$

sujeito a $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b} \quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$

sendo: $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

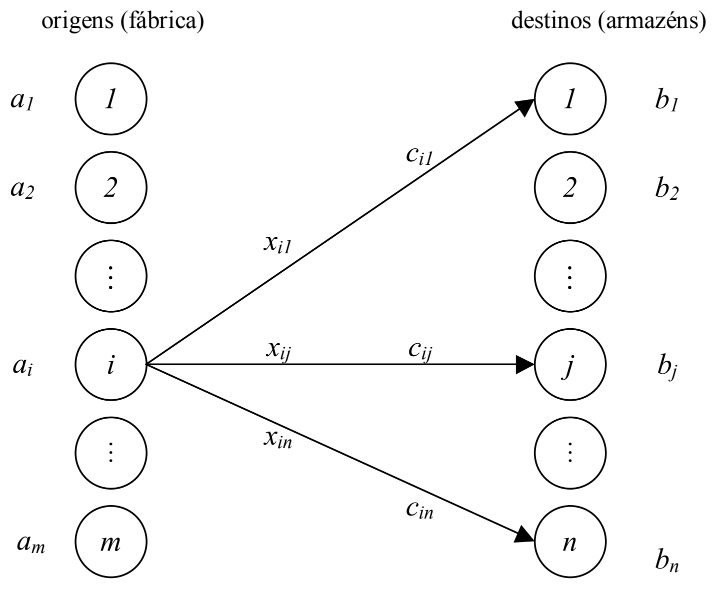
$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

6.6 MODELOS E EXEMPLOS DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Neste item vamos descrever alguns problemas que podem ser formulados por intermédio de um Problema de Programação Linear. São exemplos clássicos de PL e podem ser encontrados em praticamente todos os livros que tratam desse assunto.

6.6.1 PROBLEMA DO TRANSPORTE

O modelo dos transportes tem por objetivo minimizar o custo total do transporte necessário para abastecer n destinos, a partir de m centros fornecedores (origens). Pode ser esquematizado por:



Para $i=1,2,...,m$ e $j=1,2,...,n$ tem-se

x_{ij} - quantidade a ser transportada da origem i para o destino j; são as variáveis do problema.

c_{ij} - custo unitário do transporte da origem i para o destino j.

a_i - quantidade disponível de transporte na origem i.

b_j - quantidade necessária no destino j.

Assim, o problema consiste em achar valores de x_{ij} ($i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$) que minimize o custo total do transporte, dada pela função objetivo.

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sendo que os x_{ij} devem satisfazer as restrições de oferta e demanda.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad i = 1, 2, \ldots, m$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

e $x_{ij} \geq 0$.

Assim, *m* restrições de oferta, uma para cada origem, indicam que a quantidade que sai da origem *i* tem de ser igual à quantidade a_i disponível naquela origem. As *n* restrições de demanda, uma para cada destino, indicam que a quantidade que chega a cada destino *j* tem de ser igual à quantidade b_j requerida por aquele destino.

Este modelo requer um algoritmo especial para sua resolução, o qual não será citado, nem exemplificado neste trabalho. É um exemplo mais amplo de problemas de programação linear.

6.6.2 PROBLEMA DA DESIGNAÇÃO

Este problema é um caso particular do problema de transporte em que:

$m = n$

$a_i = 1$ para $i = 1, 2, \ldots, m$

$b_j = 1$ para $j = 1, 2, \ldots, n$

Com isto o modelo tem o seguinte aspecto:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad e \quad j = 1, 2, 3, \dots, n$$

Este modelo recebe o nome de problema de designação porque sua solução ótima indicará qual a origem *i* que foi designada para abastecer o destino *j*.

6.6.3 ASPECTOS TEÓRICOS DA PROGRAMAÇÃO LINEAR

Apresentamos nesta seção os principais resultados teóricos relacionados a um Problema de Programação Linear. O conteúdo desta seção está descrito em Puccini (1972).

Se uma matriz $\boldsymbol{A}(m \times n)$ tem n colunas, $\boldsymbol{A}_j$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ e das quais m colunas $\boldsymbol{A}_{j1}, \boldsymbol{A}_{j2}, \dots, \boldsymbol{A}_{jm}$ são linearmente independente, então a matriz quadrada $\boldsymbol{B} = \left[\boldsymbol{A}_{j1}, \boldsymbol{A}_{j2}, \dots, \boldsymbol{A}_{jm}\right]$, de ordem m é uma base em **A**.

Seja $\boldsymbol{A}(m \times n)$ uma matriz com base $\boldsymbol{B} = \left[\boldsymbol{A}_{j1}, \boldsymbol{A}_{j2}, \dots, \boldsymbol{A}_{jm}\right]$. Para qualquer $\boldsymbol{b} \in \Re^m$ a solução básica de $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, correspondente à base **B**, é achada resolvendo-se $\boldsymbol{A}_{j1} x_{j1} + \boldsymbol{A}_{j2} x_{j2} + \dots + \boldsymbol{A}_{jm} x_{jm} = \boldsymbol{b}$ para $x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jm}$ e fazendo os restantes $x_j = 0$.

Se $\boldsymbol{B} = \left[\boldsymbol{A}_{j1}, \boldsymbol{A}_{j2}, \dots, \boldsymbol{A}_{jm}\right]$ é uma base em $\boldsymbol{A}$ e x_{ji} $(i = 1, 2, \dots, m)$ são as variáveis correspondentes às colunas $\boldsymbol{A}_{ji}, (i = 1, 2, \dots, m)$, então x_{ji} $(i = 1, 2, \dots, m)$ são as variáveis básicas e todas as outras restantes variáveis x_j são chamadas variáveis não-básicas.

Suponha-se que para o sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ seja imposta a condição de que todas as variáveis $x_j, j = 1, 2, \dots, n$ sejam não negativas. Agora são de interesse apenas as soluções básicas que satisfaçam a restrição $x_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$. Uma solução compatível básica do sistema $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ é uma solução básica do sistema, na qual todas as suas variáveis são positivas ou nulas.

Os teoremas a seguir estabelecem a fundamentação matemática para a resolução de um Problema de Programação Linear.

Teorema 1. O conjunto de todas as soluções possíveis do modelo de Programação Linear é um conjunto convexo.

Prova. Consideremos o modelo de PPL,

Maximizar $z = \boldsymbol{c}\,\boldsymbol{x}$

sujeito a , $\begin{matrix} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0} \end{matrix}$ e

Seja C o conjunto formado por, $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$. Queremos mostrar que o conjunto C é convexo. Para tanto, basta mostrar que

$$\left\{\begin{matrix} \boldsymbol{x}_1 \in C \\ \boldsymbol{x}_2 \in C \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{x} = \alpha\, \boldsymbol{x}_1 + (\,1 - \alpha\,)\, \boldsymbol{x}_2 \in C \text{ para } 0 \le \alpha \le 1.$$

Sejam $\boldsymbol{x}_1$ e $\boldsymbol{x}_2$ duas soluções possíveis quaisquer, então:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_1 \ge \boldsymbol{0} \Rightarrow \alpha \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 \le \alpha \boldsymbol{b} \qquad (6.2)$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \le \boldsymbol{b},\ \boldsymbol{x}_2 \ge 0 \Rightarrow (1-\alpha)\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 \le (1-\alpha)\boldsymbol{b} \qquad (6.3)$$

Consideremos o vetor:

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\,\boldsymbol{x}_2,\ 0 \le \alpha \le 1.$$

Como $\boldsymbol{x}_1 \ge 0$, $\boldsymbol{x}_2 \ge 0$ e $0 \le \alpha \le 1$ tem–se que $\boldsymbol{x} \ge \boldsymbol{0}$. Temos de verificar agora se $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$.

De fato, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}(\ \alpha\, \boldsymbol{x}_1 + (1-\alpha)\, \boldsymbol{x}_2\ ) = \ \boldsymbol{A}\alpha \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{A}(1-\alpha)\boldsymbol{x}_2$

das equações (6.2) e (6.3) temos que

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \le \alpha \boldsymbol{b} + (1-\alpha)\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}.$$

Portanto, $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}$.

Teorema 2. Toda solução possível básica do sistema $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ é um ponto extremo do conjunto de soluções possíveis, isto é , do conjunto convexo C do teorema 1.

Prova. Consideremos o conjunto convexo formado por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{x} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned} . \tag{6.4}$$

De maneira explícita tem-se:

$$\begin{bmatrix} a_{11} \; \ldots \; a_{1m} & a_{1m+1} \; \ldots \; a_{1n} \\ a_{21} \ldots \; a_{2m} & a_{2m+1} \; \ldots \; a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} \; \ldots \; a_{mm} & a_{mm+1} \; \ldots \; a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ . \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_m \end{bmatrix} \tag{6.5}$$

Consideremos a solução possível básica formada pelo vetor $\boldsymbol{x}$, de dimensão *n*, abaixo:

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ . \\ . \\ x_m \\ 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix} \quad com \quad todos \quad os \quad x_i \geq 0.$$

Vamos supor que $\boldsymbol{x}$ não seja um ponto extremo do conjunto (6.4). Então $\boldsymbol{x}$ pode ser obtido como uma combinação convexa de outros dois pontos distintos do conjunto. Sejam $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ esses dois pontos do conjunto (6.4), pode-se ter

$$\boldsymbol{x} = \alpha\,\boldsymbol{y} + (1-\alpha)\boldsymbol{z} \quad ,0 \leq \alpha \leq 1. \tag{6.6}$$

Como $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ pertencem ao conjunto (6.4), são válidas as relações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{y} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \boldsymbol{A}\boldsymbol{z} &= \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{z} &\geq \boldsymbol{0} \end{aligned} .$$

Se $\boldsymbol{x}$ for um ponto extremo de (6.4), então não existem $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$ distintos de $\boldsymbol{x}$, que satisfaçam (6.6).

A relação (6.6), colocada em termos de coordenadas de cada um dos três vetores, fornece as seguintes relações :

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \alpha\, y_1 + (1-\alpha) z_1 \\
x_2 &= \alpha\, y_2 + (1-\alpha) z_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m &= \alpha\, y_m + (1-\alpha) z_m \\
0 &= \alpha\, y_{m+1} + (1-\alpha) z_{m+1} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 &= \alpha y_n + (1-\alpha) z_n
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

Devido às relações $0 \le \alpha \le 1$, $\boldsymbol{y} \ge \mathbf{0}$ *e* $\boldsymbol{z} \ge \mathbf{0}$, as últimas $(n-m)$ relações de (6.7) só podem ser satisfeitas num dos seguintes casos:

1º) $0 < \alpha < 1$ *e* $y_{m+i} = z_{m+i} = 0$ *para* $i = 1, \ldots, n-m.$

Neste caso, teríamos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$, pois as três soluções apresentam uma coincidência nas variáveis não básicas do sistema (6.5). Consequentemente os valores das variáveis básicas serão os mesmos para as três soluções.

2º) $\alpha = 0$ *e* $z_{m+i} = 0$ *para* $i = 1, \ldots, n-m.$

Neste caso teríamos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z}$ pelas mesmas razões do item anterior.

3º) $\alpha = 1$ *e* $y_{m+i} = 0$ *para* $i = 1, \ldots, n-m$.

Neste caso teríamos $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ pelas mesmas razões do primeiro item.

Com isto, demonstramos que não existem soluções possíveis $\boldsymbol{y}$ e $\boldsymbol{z}$, distintas da solução possível básica $\boldsymbol{x}$, que satisfaçam a relação (6.6). Então, o ponto $\boldsymbol{x}$ é um ponto extremo do conjunto convexo (6.4).

Os teoremas 3 e 4, apresentados a seguir são fundamentais em Programação Linear e mostram basicamente que se uma solução existe, então esta será um ponto extremo do conjunto das soluções viáveis. Como já mencionamos, a prova destes dois teoremas pode ser encontrada em Puccini (1972).

Teorema 3.

(*a)* Se a função objetivo possui um máximo (ou mínimo) finito, então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo C do teorema 1.

(*b*) Se a função objetivo assume o máximo (ou mínimo) em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos extremos.

Teorema 4. Se existe uma solução possível, então existe também uma solução possível básica.

Como consequência desses teoremas, temos que o número de iterações para encontrar a solução ótima de um modelo de programação linear é finito, e , a necessidade do teorema 4 deve-se ao fato de que um modelo de programação linear pode não apresentar solução.

Dos teoremas anteriores observamos que quando um Problema de Programação Linear possui solução ótima, então esta é um ponto extremo do conjunto convexo formado pelas soluções possíveis do problema.

Cada ponto extremo está relacionado com uma solução possível básica. O método simplex, o qual não será considerado aqui, caminha através dos pontos extremos (soluções básicas viáveis) até a determinação da solução ótima, quando esta existe.

Consideraremos neste trabalho apenas a solução geométrica de um Problema de Programação Linear com duas variáveis.

6.6.4 SOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Vamos descrever o processo geométrico para resolver um Problema de Programação Linear. Este método pode ser utilizado para problemas com duas ou três variáveis, mas é mais adequado e simples para problemas com duas variáveis. Esta técnica oferece todas as informações referentes ao número de soluções de um Problema de Programação Linear.

Consideremos o problema:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} \quad z = \boldsymbol{cx} \\ &\text{sujeito a} \quad \boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b} \\ &\qquad\qquad\quad \boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0} \end{aligned}$$

Sabemos que a região viável, consiste de todos os vetores $\boldsymbol{x}$ que satisfazem $\boldsymbol{Ax} \geq \boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{x} \geq \boldsymbol{0}$. Entre todos estes pontos queremos encontrar aquele que resulte no menor valor para $\boldsymbol{cx}$.

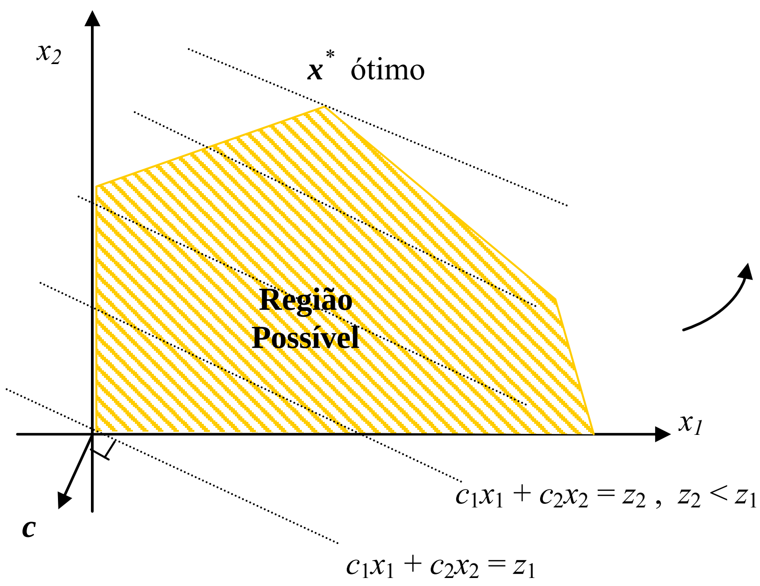
Observamos que pontos com o mesmo objetivo z satisfazem a equação $\boldsymbol{cx} = z$, isto é

$$\sum_{j=1}^{2} c_j x_j = z$$

Desde que z será minimizado, então o plano (reta em espaço bidimensional) $\sum_{j=1}^{2} c_j x_j = z$ deve ser movido paralelamente a si mesmo em uma direção buscando o mínimo da função objetivo z . Esta direção de busca pelo mínimo é $-c$, e, portanto o plano (ou reta) é movido na direção $-c$ tanto quanto necessário e possível sem perder o contato com a região viável.

Consideremos a figura

Figura 13 - Solução geométrica



Fonte: Bazaraa; Jarvis e Sherali (1990)

Notemos que o ponto ótimo $\boldsymbol{x}^*$ é alcançado, na reta $c_1x_1^* + c_2x_2^* = z^*$, onde $z^* = c_1x_1^* + c_2x_2^*$, não pode ser movido mais longe na direção $-\boldsymbol{c} = (-c_1, -c_2)$, pois seria levado a pontos fora da região viável. Em outras palavras, não se pode mover a partir de $\boldsymbol{x}^*$

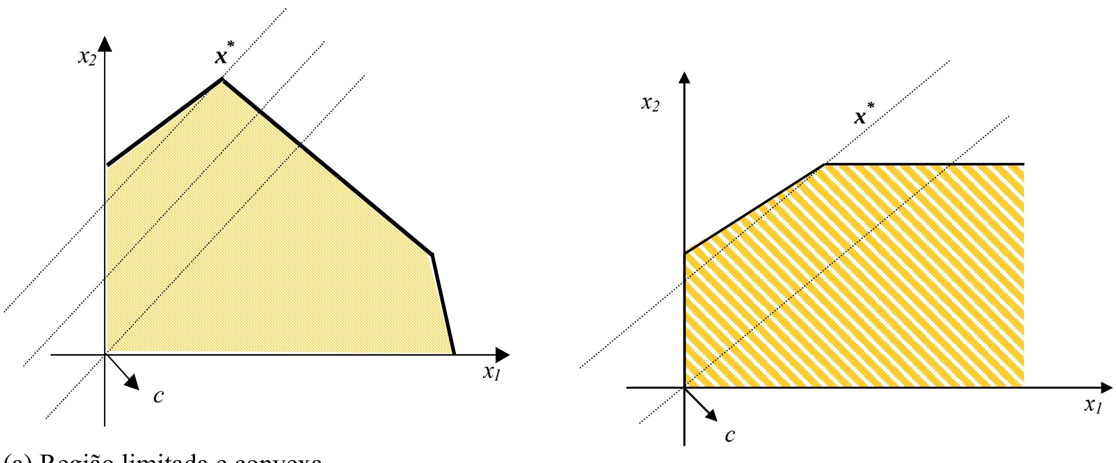
em uma direção que forme um ângulo agudo com $-\boldsymbol{c}$ e reduzindo a função objetivo a valores ainda menores e dentro da região viável. Portanto, concluímos que $\boldsymbol{x}^*$ é de fato a solução ótima. Para um problema de maximização, o plano $\boldsymbol{cx} = z$ deve ser movido tanto quanto possível na direção do vetor $\boldsymbol{c}$.

É importante notar que o ponto ótimo $\boldsymbol{x}^*$, na figura 13, é um dos seus cinco vértices também chamados de pontos extremos. Se o problema tem uma solução ótima finita, então necessariamente ele ocorrerá num ponto extremo. De fato, se o $\min \boldsymbol{cx}$ ocorrer em mais de um ponto extremo, então cada um deles é um ótimo e toda combinação convexa destes pontos ainda é uma solução ótima. Neste último caso o problema possui infinitas soluções, todas com o mesmo valor ótimo.

Assim, dependendo da estrutura do problema pode-se ter uma única solução ótima, infinitas soluções ou ainda não ter solução ótima. Neste último caso, dizemos que o problema é impossível.

1. Solução ótima única

Figura 14 - (a) Região limitada e convexa e (b) Região ilimitada



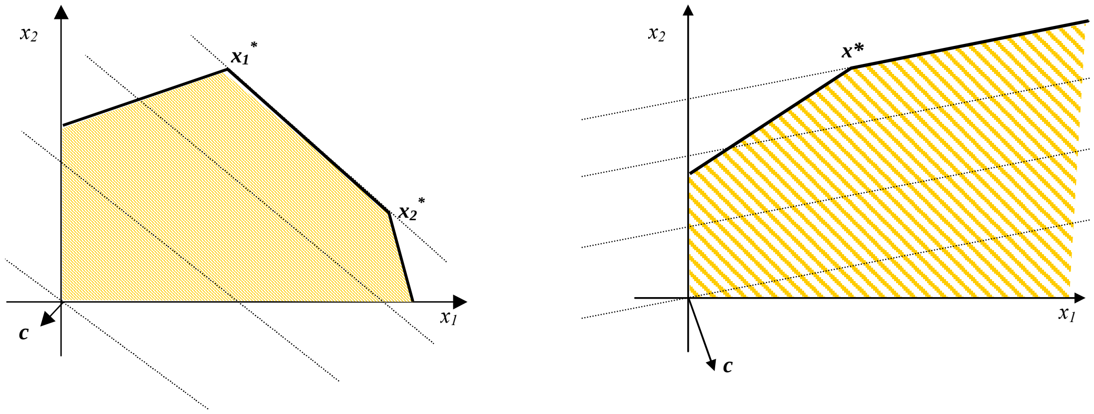
(a) Região limitada e convexa

(b) Região ilimitada

Fonte: Bazaraa; Jarvis e Sherali (1990)

2. Número infinito de soluções ótimas (ou soluções ótimas alternativas)

Figura 15 - (a) Região limitada e (b) Região ilimitada.



(a) Região limitada

(b) Região ilimitada

Fonte: Bazaraa; Jarvis e Sherali (1990)

Temos que em (a) da figura 15 qualquer ponto no segmento de reta $\boldsymbol{x}_1^* \boldsymbol{x}_2^*$ é solução ótima e em (b) qualquer ponto sobre a semi reta com vértice $\boldsymbol{x}^*$ é solução ótima.

3. Não existe solução ótima

Neste caso o sistema de igualdades (ou desigualdades) que definem a região viável é inconsistente.

Nos casos 1 e 2 é interessante fazer a seguinte observação: desenhe os vetores normais aos vínculos passando por $\boldsymbol{x}^*$ e apontando para fora da região factível. Também construa os vetores $-\boldsymbol{c}$ em $\boldsymbol{x}^*$. Note que o cone gerado pelas normais aos vínculos passando por $\boldsymbol{x}^*$ contém o vetor $-\boldsymbol{c}$. Esta é de fato a condição necessária e suficiente para $\boldsymbol{x}^*$ ser solução ótima.

6.6.5 RESOLUÇÃO GEOMÉTRICA DE ALGUNS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR

Problema 6.1. (SÃO PAULO, 1980) Um alfaiate dispõe de 16m^2 de algodão, 11m^2 de seda e 15m^2 de lã. Sabendo que para um terno são necessários 2m^2 de algodão, 1m^2 de seda e 1m^2 de lã; que para um vestido tais quantidades são 1m^2, 2m^2 e 3m^2, respectivamente, e que ele lucra R$ 300,00 por terno e R$ 500,00 por vestido, pergunta-se: quantos ternos e quantos vestidos o alfaiate deve confeccionar de modo a obter lucro máximo?

Resolução.

Sejam: x = número de ternos confeccionados pelo alfaiate

y = número de vestidos confeccionados pelo alfaiate

tem-se :

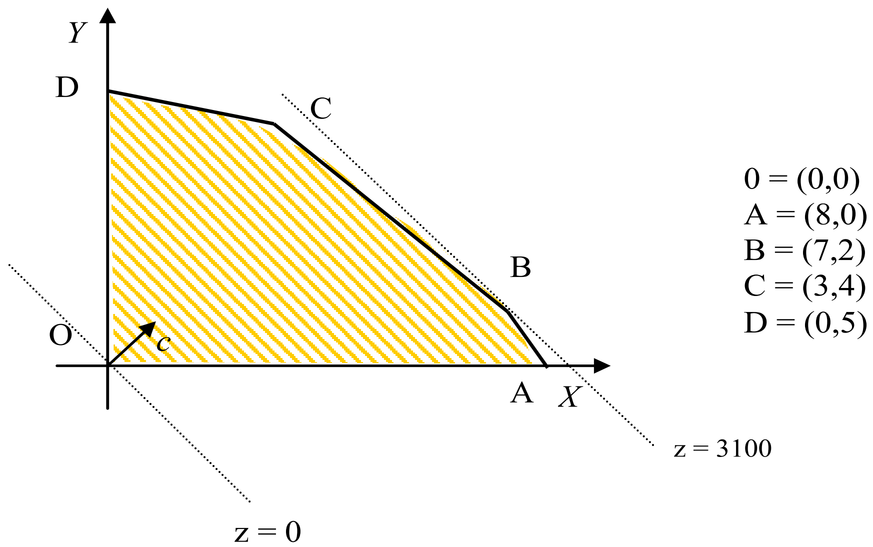
$$2x + y \leq 16$$

$$x + 2y \leq 11$$

$$x + 3y \leq 15$$

$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0$$

Figura 16 – Solução geométrica do problema 6.1



Fonte: São Paulo (1980)

O polígono da figura anterior é obtido resolvendo-se as cinco inequações (restrições do problema).

O lucro do alfaiate é dado pela função objetivo.

$$z = f(x, y) = 300x + 500y\,.$$

E a solução ótima ocorre em B = (7, 2).

De fato:

$$f(0,0) = 300.0 + 500.0 = 0$$
$$f(8,0) = 300.8 + 500.0 = 2400$$
$$f(3,4) = 300.3 + 500.4 = 2900$$
$$f(0,5) = 300.0 + 500.5 = 2500$$
$$f(7,2) = 300.7 + 500.2 = 3100$$

Problema 6.2. (SÃO PAULO, 1980) Duas fábricas produzem três tipos diferentes de papel e existe uma certa demanda para cada tipo. A companhia que controla as fábricas tem um contrato para a produção de 16 toneladas de papel fino, 5 toneladas de papel médio e 20 toneladas de papel grosso. O custo por dia de operação da primeira fábrica é R$ 30.000,00 e o da segunda fábrica é R$ 60.000,00.

A primeira fábrica produz 8 toneladas de papel fino, 1 tonelada de papel médio e 2 toneladas de papel grosso por dia. A segunda fábrica produz 2 toneladas de papel fino, 1 tonelada do papel médio e 7 toneladas do grosso por dia. Quantos dias de produção das duas fábricas serão necessários para atender os contratos da forma mais econômica para a companhia?

Resolução.

Para uma melhor visualização e melhor interpretação do problema vamos colocar os dados em forma de tabela.

Tipo de papel e custo	**Fábrica 1**	**Fábrica 2**	**Demanda em toneladas**
Fino	8 ton por dia	2 ton por dia	16
Médio	1 ton por dia	1 ton por dia	5
Grosso	2 ton por dia	7 ton por dia	20
Custo por dia	R$ 30.000,00	R$ 60.000,00	------------

Sejam:

x = número de dias que a fábrica 1 deve operar

y= número de dias que a fábrica 2 deve operar.

Temos que minimizar a função objetivo

$$z = f(x,y) = 30.000\ x + 60.000\ y$$

sujeita às restrições

$$8x+2y\geq 16$$

$$x+y\geq 5$$

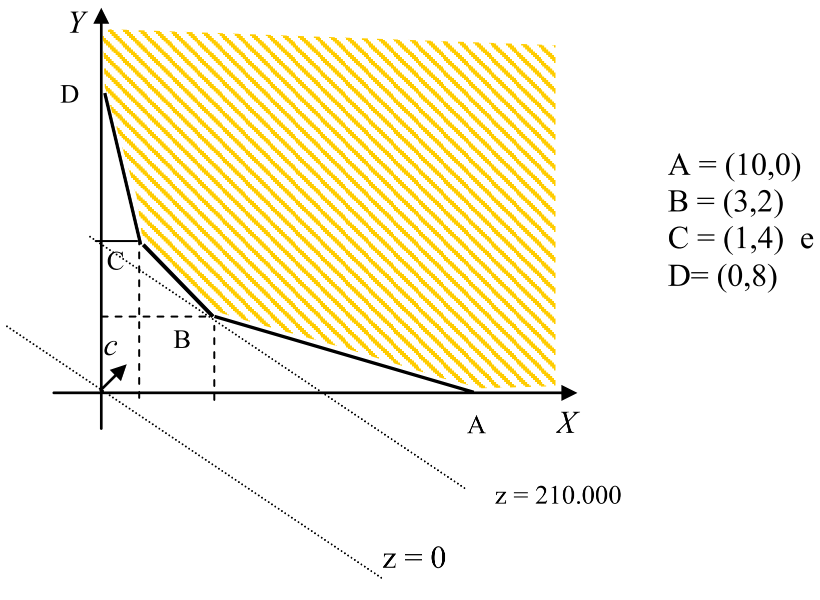
$$2x+7y\geq 20$$

$$x\geq 0 \quad \text{e} \quad y\geq 0$$

com isto, obtemos a região possível (viável) apresentada na figura 17.

Como o vetor $\boldsymbol{c}$ = (1,2) é o oposto à direção de busca e os candidatos a mínimo ocorrem entre os vértices assinalados na fronteira da região factível, calculando-se f em cada um dos vértices verifica-se que o mínimo ocorrerá em B. Assim, temos o valor ótimo $f(x=3,\ y=2)=210.000$, em que a fábrica 1 deverá trabalhar 3 dias e a fábrica 2 deverá trabalhar 2 dias. Observa-se que neste caso haverá uma super produção de papel fino (28 toneladas), pois a demanda de papel fino é de 16 toneladas, mas qualquer outra combinação de dias acarretará um aumento de custo para a companhia.

Figura 17 – Solução geométrica do problema 6.2



Fonte: São Paulo (1980)

7 A PROPOSTA DE SEQUÊNCIA DIDÁTICA

7.1 DESCRIÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Apresentamos nesta seção a nossa proposta de sequência didática. O produto didático aqui fornecido não segue os pressupostos da Engenharia Didática.

Para Artigue (1996) a Engenharia Didática é desenvolvida em quatro fases:

- a primeira fase consiste das análises prévias;
- a segunda fase consiste da concepção e da análise a priori das situações didáticas da engenharia;
- a terceira fase consiste do desenvolvimento da parte experimental;
- e, finalmente, a quarta fase consiste da análise a posteriori e validação.

Nossa proposta didática consiste de 10 problemas, em grau crescente de dificuldade e tem por objetivo fazer que os próprios alunos, ao final da aplicação da proposta, sejam capazes de formular e resolver um Problema de Programação Linear de duas variáveis.

Quando da aplicação da proposta, em sala de aula, sugerimos que se utilize a metodologia de resolução de problemas na concepção que a resolução dos problemas seja utilizada para se ensinar Matemática. Entendemos que esta seja uma maneira eficiente e adequada para se ensinar Matemática no Ensino Básico. Essa concepção é uma das formas de se "fazer" Matemática que está preconizada nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Assim, sugerimos as seguintes etapas para a aplicação da proposta em sala de aula:

- solicitar que os alunos, em grupo, resolvam cada problema;
- posteriormente, discutir as soluções certas e erradas de alguns grupos por meio de uma pequena plenária;
- e, finalmente, o professor deve sistematizar o conceito matemático presente naquele problema.

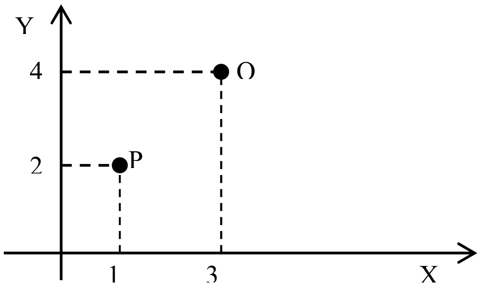
Para cada um dos problemas, da sequência didática, fornecemos alguns comentários e sugestões de como o professor pode utilizar este material em sala de aula. O professor deve entender que são sugestões que podem ser modificadas ou melhoradas em função de seus alunos. Afinal, ninguém conhece melhor seus alunos do que o próprio professor. Para alguns conceitos talvez seja necessário trabalhar mais alguns problemas. Assim, sugerimos que o professor esteja preparado para enfrentar essas situações.

Problema1. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas OXY os dois seguintes pontos: $P = (1, 2)$ e $Q = (3, 4)$.

Solução e comentários

A resolução está apresentada na figura 18.

Figura 18 - Representação geométrica dos pontos P e Q



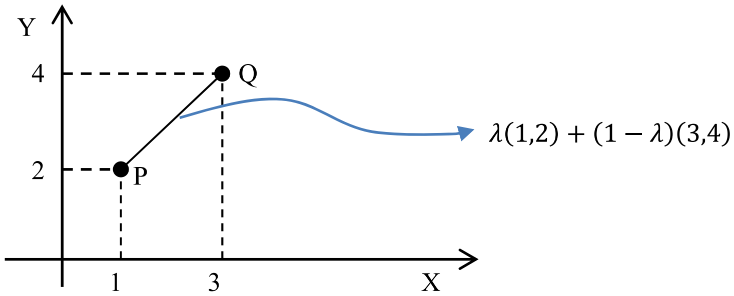
Fonte: Elaboração da própria autora

Problema 2. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas cartesianas *OXY* todos os pontos da forma: $\lambda(1, 2) + (1 - \lambda)(3, 4)$ quando $\lambda \in [0,1]$.

Solução e comentários

A resolução está apresentada na figura 19.

Figura 19 - Representação geométrica do segmento de reta determinado pelos pontos P e Q



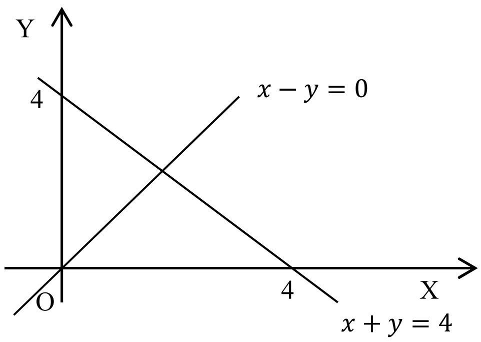
Fonte: Elaboração da própria autora

Problema 3. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas cartesianas *OXY* as retas: $x + y = 4$ e $x - y = 0$.

Solução e comentários

A resolução está apresentada na figura 20.

Figura 20 - Representação geométrica das retas $x + y = 4$ e $x - y = 0$



Fonte: Elaboração da própria autora

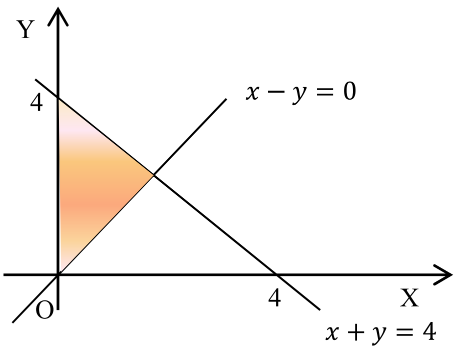
Problema 4. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas cartesianas *OXY* o conjunto S das soluções do sistema de desigualdades lineares:

$$x + y \leq 4$$
$$x - y \leq 0$$
$$x \geq 0 \text{ e } y \geq 0.$$

Solução e comentários

Cada inequação da forma $ax + by \leq c$ representa um semiplano e para um PPL isso representa uma restrição do problema. As desigualdades $x \geq 0$ e $y \geq 0$ são conhecidas como restrições de não negatividade. O conjunto S é chamado de *Conjunto Viável* ou *Conjunto das Soluções Possíveis*. A solução está representada na figura 21.

Figura 21 - Representação geométrica do conjunto S



Fonte: Elaboração da própria autora

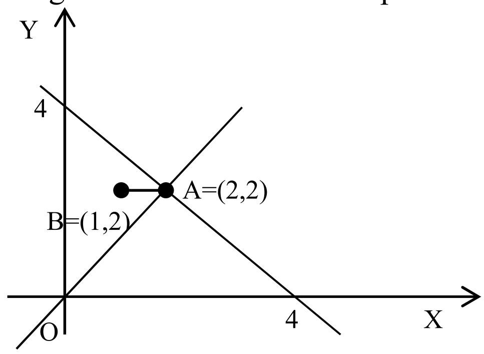
Problema 5. Escolha dois pontos quaisquer *A* e *B* do conjunto S determinado no *problema 4*. Verificar geometricamente que o segmento de reta *AB* também pertence ao conjunto S.

Solução e comentários

O objetivo deste problema é introduzir o conceito de *conjunto convexo*. Um subconjunto C do plano chama-se *convexo* quando o segmento de reta que une dois pontos quaisquer de C está contido em C. O conjunto das soluções possíveis de um PPL é um conjunto convexo (Teorema 1). Assim, esse conceito é de fundamental importância para a obtenção da solução deste tipo de problema.

A figura 22 apresenta a solução do problema 5 quando escolhemos os pontos *A* = (2, 2) e *B* = (1, 2). Para quaisquer outras escolhas de dois pontos em S sempre o segmento de reta unindo esses dois pontos estará contido em S. Assim, S é um conjunto convexo.

Figura 22 - O segmento de reta unindo os pontos A e B está contido em S



Fonte: Elaboração da própria autora

Problema 6. Considere o conjunto S determinado no *problema 4*.

(a) Verificar geometricamente e algebricamente que o ponto $P = (1,2)$ pode ser escrito como uma combinação convexa de dois pontos de S. [Lembrando que o ponto P é uma combinação convexa de dois pontos A e B se $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$, para algum $\lambda \in [0,1]$.]

(b) Verificar geometricamente e algebricamente que o ponto $U = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pode ser escrito como uma combinação convexa de dois pontos de S.

(c) Verificar geometricamente que o ponto $W = (2, 2)$ não pode ser escrito como uma combinação convexa de dois pontos distintos de S.

Solução e comentários

O objetivo deste problema é o de introduzir o conceito de *ponto extremo*, tendo em vista que a solução de um PPL é sempre alcançada em um ponto extremo do conjunto das soluções possíveis.

Para o exemplo considerado o ponto P é um ponto interior, o ponto U é um ponto do bordo (fronteira) e W é um ponto extremo de S. Veja a figura 23.

(a) Temos que:

$$(1, 2) = \frac{1}{2}(0, 2) + (1 - \frac{1}{2})\ (2, 2) = (0, 1) + \frac{1}{2}(2, 2) = (0, 1) + (1, 1) = (1, 2).$$

Assim, mostramos algebricamente que o ponto (1, 2) é uma combinação convexa dos pontos (0, 2) e (2, 2) ambos pertencentes a S e neste caso $\lambda = \frac{1}{2}$.

Geometricamente, pode-se perceber que o ponto (1, 2) pertence ao segmento de reta determinado pelos pontos (0, 2) e (2,2). Veja a figura 22.

(b) Considerando-se os dois pontos (0, 0) e (2, 2) ambos pertencentes a S e com $\lambda = \frac{3}{4}$ temos que:

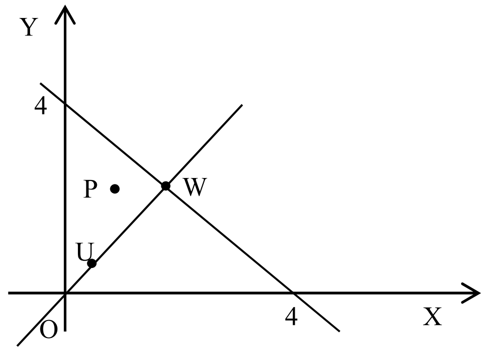
$$U = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \lambda\,(0,0) + (1-\lambda)\,(2,2).$$

Assim, mostramos algebricamente que o ponto *U* pode ser escrito como uma combinação convexa de dois pontos de S.

Geometricamente, pode-se perceber que o ponto *U* pertence ao segmento de reta determinado pelos pontos (0, 0) e (2, 2). Veja a figura 23.

(c) Também na figura 23 podemos observar que o ponto *W* não pertence a nenhum segmento de reta determinado por dois pontos distintos de S. Assim, *W* é um ponto extremo (vértice) de S.

Figura 23 - Representação geométrica dos pontos P, U e W



Fonte: Elaboração da própria autora

Problema 7. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas *OXY* as retas

r: $x + 2y = 0$,   s: $x + 2y = 2$,   t: $x + 2y = 4$

e o segmento de reta determinado pelos pontos O = (0, 0) e A = (1, 2).

Solução e comentários

O objetivo deste problema é o de introduzir o conceito de *linha de nível* de uma reta. Este conceito será utilizado na solução geométrica de um PPL.

Considerando-se a função linear de duas variáveis $\varphi : \Re^2 \to \Re$, definida por $\varphi(x, y) = ax + by$, diremos que o ponto $P = (x, y)$ está no nível *c* ou tem nível *c* em relação a φ quando $\varphi(x, y) = c$. Portanto, os pontos do plano que estão no nível *c* em relação à função φ são os pontos da reta representada por $ax + by = c$. Diz-se que esta reta é a linha de nível *c* da função φ. (LIMA, 2001).

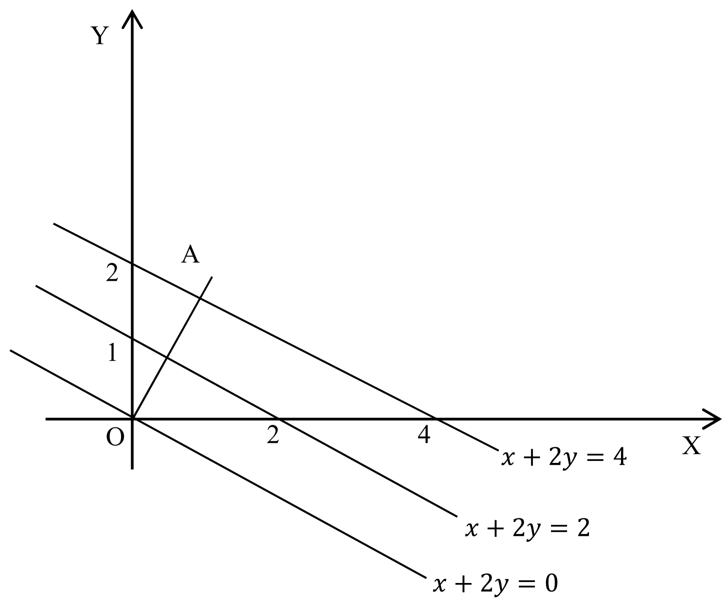
Para o exemplo considerado a linha de nível 0 é a reta $x + 2y = 0$, a linha de nível 2 é a reta $x + 2y = 2$ e a linha de nível 4 é a reta $x + 2y = 4$.

Na figura 24 estão representadas as retas r, s, t e também o segmento de reta unindo os pontos O = (0, 0) e A = (1, 2).

Todas as linhas de nível da função φ são retas paralelas à reta $x + 2y = 0$ e todas são perpendiculares ao segmento de reta OA. Neste ponto o professor terá uma boa oportunidade para relembrar as condições de paralelismo e perpendicularismo entre retas.

O resultado básico para a determinação da solução geométrica de um PPL com duas variáveis é dado pelo fato que se "*deslocarmos a linha de nível paralelamente a si mesma no sentido de O para A, o valor da função cresce*".

Figura 24 - Linha de nível da função definida por $\varphi(x, y) = ax + by$ com $a = 1$, $b = 2$, $c = 0$, 2, 4 e segmento de reta OA



Fonte: Elaboração da própria autora

Os três problemas a seguir são Problemas de Programação Linear em duas variáveis e podem ser resolvidos geometricamente com os conceitos previamente estudados nos problemas anteriores.

Problema 8. Maximizar a função definida por $f(x, y) = 2x – y$, com as variáveis x, y sujeitas às restrições

$$x + y \leq 4,\ \ x - y \leq 0,\ \ x \geq 0 \ \text{ e } \ y \geq 0.$$

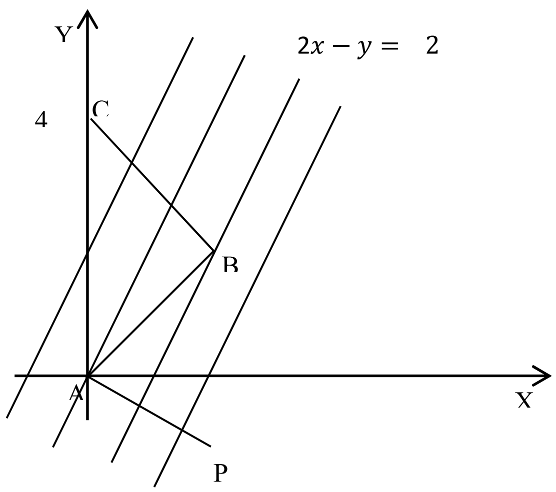
Solução e comentários

Da solução do *problema 4* sabemos que o conjunto dos pontos viáveis S é o triângulo *ABC*, com *A* = (0, 0), *B* = (2, 2) e *C* = (0, 4). As linhas de nível de *f* são as retas 2*x*–*y* = *c* todas perpendiculares ao segmento *AP*, com *P* = (2, –1). Os valores *c* da função definida por *f*(*x*, *y*) = 2*x*–*y* crescem quando essas linhas se deslocam no sentido de *A* para *P*. Assim, o valor máximo em S é atingido no vértice B, ou no ponto extremo *B* = (2, 2).

Dizemos que (2, 2) é o ponto ótimo e o valor ótimo é *f*(2, 2) = 2.2 – 2 = 2. Portanto, a resposta para esse problema é 2.

A figura 25 apresenta o conjunto viável S, as linhas de nível da função definida por *f*(*x*, *y*) = 2*x*–*y* e o vértice ótimo.

Figura 25 - Conjunto viável S e ponto extremo ótimo B = (2, 2)



Fonte: Elaboração da própria autora

Problema 9. Minimizar a função definida por *f*(*x*, *y*) = *x*– 2*y*, com as variáveis *x*, *y* sujeitas às restrições

$$x + y \leq 4,\ \ x - y \leq 0,\ \ \ x \geq 0\ \text{ e }\ y \geq 0.$$

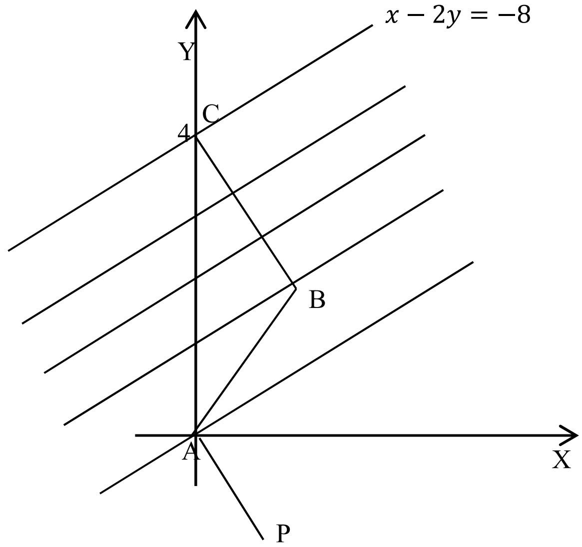
Solução e comentários

De forma análoga ao *problema 8*, já sabemos que o conjunto dos pontos viáveis S é o triângulo *ABC*, com *A* = (0, 0), *B* = (2, 2) e *C* = (0, 4). Agora, as linhas de nível de *f* são as retas *x*– 2*y* = *c* todas perpendiculares ao segmento *AP*, com *P* = (1, –2). Os valores *c* da função definida por *f*(*x*, *y*) = *x*– 2*y* crescem quando essas linhas se deslocam no sentido de *A* para *P*. Assim, como desejamos determinar o menor valor possível para *f* devemos nos deslocar no sentido inverso, ou seja, de *P* para *A*. O valor mínimo em S é atingido no vértice, ou no ponto extremo $C = (0, 4)$.

Dizemos que (0, 4) é o ponto ótimo e o valor ótimo é $f(0, 4) = 0 - 2.4 = -8$. Portanto, a resposta para esse problema é -8.

A figura 26 apresenta o conjunto viável S, as linhas de nível da função definida por $f(x, y) = x - 2y$ e o vértice ótimo.

Figura 26 - Conjunto viável S e ponto extremo ótimo $C = (0, 4)$



Fonte: Elaboração da própria autora

Problema 10. (Lima, 2001, p. 67) Uma fábrica de rações para cães e para gatos produz rações de dois tipos, obtidos mediante a mistura de três ingredientes básicos: carne desidratada, farinha de milho e farinha de soja. A tabela abaixo indica as quantidades de ingredientes em um pacote de cada tipo de ração.

Ração para	Carne desidratada	Farinha de milho	Farinha de soja
Cães	3 Kg	1 Kg	1 Kg
Gatos	2 Kg	2 Kg	_

Para a próxima semana de produção, estão disponíveis 1200 Kg de carne desidratada, 800 Kg de farinha de milho e 300 Kg de farinha de soja. O lucro é de R$ 4,00 em cada pacote de ração, para cães ou para gatos. Determinar quantos pacotes de cada tipo de ração a fábrica deve produzir de modo a maximizar o seu lucro.

Solução e comentários

A primeira dificuldade para a resolução deste problema é obter o modelo matemático que caracteriza o problema. Inicialmente devemos pensar em definir as variáveis do modelo, aquilo que estamos buscando. Neste caso desejamos determinar quantos pacotes de cada tipo de ração. Assim, definimos as variáveis:

x = número de pacotes de ração para cães;

y = número de pacotes de ração para gatos.

O nosso objetivo é o de obter o maior lucro e como em cada pacote a fábrica obtém um lucro de R$ 4,00 para a ração de cães ou para gatos, então desejamos maximizar a função definida por $f(x, y) = 4x + 4y$.

Agora devemos pensar nas restrições do modelo. Essas restrições são fornecidas pelas quantidades disponíveis de cada tipo de ingrediente e também pela exigência de cada ingrediente em cada tipo de ração. Para esse caso temos as seguintes restrições:

$$
\begin{aligned}
3x + 2y &\leq 1200 \\
x + 2y &\leq 800 \\
x \quad &\leq 300 \\
x \geq 0 \ &, \ y \geq 0.
\end{aligned}
$$

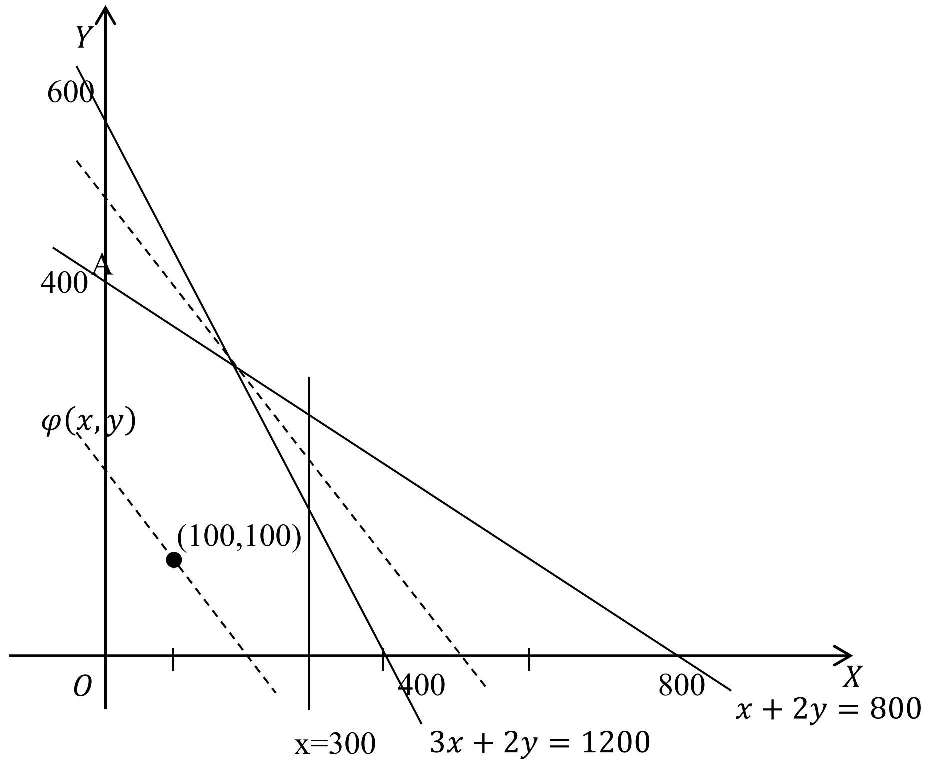
As duas últimas restrições são as restrições de não negatividade, pois nesse caso não faz sentido produzir um número negativo de pacotes de ração.

Assim, temos de resolver o seguinte PPL:

$$
\begin{array}{ll}
\text{maximizar} & 4x + 4y \\
\text{sujeito a} & 3x + 2y \leq 1200 \\
 & x + 2y \leq 800 \\
 & x \leq 300 \\
 & x \geq 0 \ , \ y \geq 0.
\end{array}
$$

A solução geométrica está indicada na figura 28 e fornece a solução ótima com $x= 200$ e $y = 300$ e com valor ótimo $z = 4.200 + 4.300 = 2000$. Portanto, a estratégia para a fábrica obter o maior lucro é produzir 200 pacotes de ração para cães e 300 pacotes de ração para gatos, o que produzirá um lucro de R$ 2000,00.

Figura 27 – Solução Geométrica do problema 10



Fonte: Lima (2001)

7.2 APLICAÇÃO DO PRÉ-TESTE

Como forma de fazer uma pré-avaliação de nossa sequência didática aplicamos um pré-teste em forma de prova avaliativa para uma turma da terceira série do ensino médio de uma escola estadual da cidade de Ilha Solteira, estado de São Paulo.

O objetivo principal do pré-teste foi verificar a necessidade de alteração do enunciado de algum problema ou acréscimo (supressão) de problemas. Esta tarefa foi facilitada tendo em vista que eu era professora desta turma e pude utilizar o pré-teste como forma avaliativa do bimestre.

O uso do pré-teste como prova avaliativa foi pensado no sentido de que os alunos se empenhariam na resolução dos problemas.

Todos os conceitos matemáticos que aparecem na sequência didática já haviam sido trabalhados anteriormente em sala de aula através do uso do caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014).

Sou professora nesta unidade escolar desde 1983, e atualmente trabalho com quatro salas da terceira série e três da primeira série. Ao aplicar o pré-teste escolhi a turma da 3ª D por ter aulas duplas e por ser a turma de alunos mais frequentes e interessados. A turma no dia da aplicação, era composta de trinta e um alunos e formamos quinze duplas e um aluno fez o trabalho sozinho. Na sala de aula haviam três estagiários, alunos do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática da UNESP de Ilha Solteira, eles não participaram do pré-teste e suas atuações como estagiários se deu por observação.

A sequência didática, consta de dez problemas de grau crescente de dificuldade e foi elaborada de modo que o aluno aplique seus conhecimentos envolvendo-se na resolução dos problemas de tal maneira que os considere desafiante e interessante.

Ao resolver os problemas, "o aluno deverá estar preocupado principalmente em dar significado a Matemática envolvida e, assim, desenvolver sua compreensão sobre essas ideias". (Van de Walle, 2009, p. 58).

Antes da aplicação do pré-teste conversei com os alunos para que formassem duplas de acordo com suas afinidades.

Os problemas de 1 a 9 foram resolvidos em aula dupla (duas aulas de 50 minutos) e durante a aplicação pedi aos estagiários que me ajudassem a observar os alunos de um modo geral.

O problema 10 foi aplicado no dia posterior, em uma aula de 50 minutos e mesmo com minha intervenção no esclarecimento e questionamentos de dúvidas dos alunos apenas uma dupla resolveu corretamente.

No problema 1 tem-se uma simples aplicação para que o aluno mostre que sabe a definição de coordenadas de um ponto e saiba distinguir o eixo das abcissas do eixo das ordenadas.

Problema1. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas OXY os dois seguintes pontos: $P = (1, 2)$ e $Q = (3, 4)$.

Nesta atividade todos mostraram que assimilaram o significado de coordenadas de um ponto. Não houve erro.

No problema 2 o aluno tem que trabalhar com o conceito de combinação convexa e de segmento de reta.

Problema 2. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas cartesianas *OXY* todos os pontos da forma: $\lambda(1, 2) + (1 - \lambda)(3, 4)$ quando $\lambda \in [0,1]$.

Nesta atividade apenas uma dupla questionou o que era para fazer e após uma breve orientação fez e assim todos acertaram.

No problema 3 os alunos deveriam trabalhar com o conceito de reta: equação e sua representação gráfica.

Problema 3. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas cartesianas *OXY* as retas: $x + y = 4$ e $x - y = 0$.

Todos acertaram e não houve perguntas ou dúvidas na resolução deste problema.

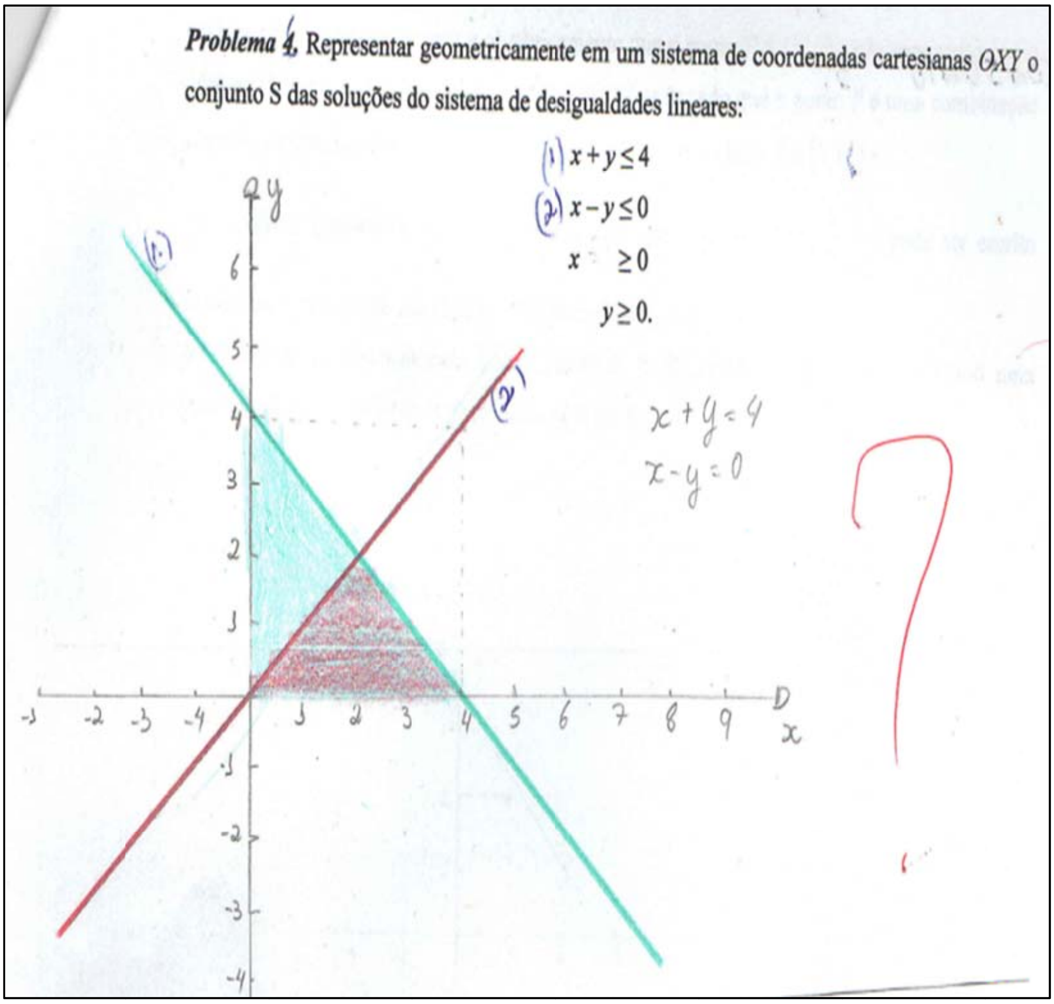
No problema 4 os alunos deveriam trabalhar com o conceito de desigualdades lineares, lembrando que cada desigualdade representa um semiplano.

Problema 4. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas cartesianas *OXY* o conjunto S das soluções do sistema de desigualdades lineares:

$$\begin{aligned} x + y &\leq 4 \\ x - y &\leq 0 \\ x \quad &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Aqui alguns alunos se equivocaram na determinação do conjunto S. Na figura 28 indicamos a solução errada de um grupo de alunos. O equívoco ocorreu na segunda desigualdade.

Figura 28 – Resolução do problema 4 por uma dupla de alunos



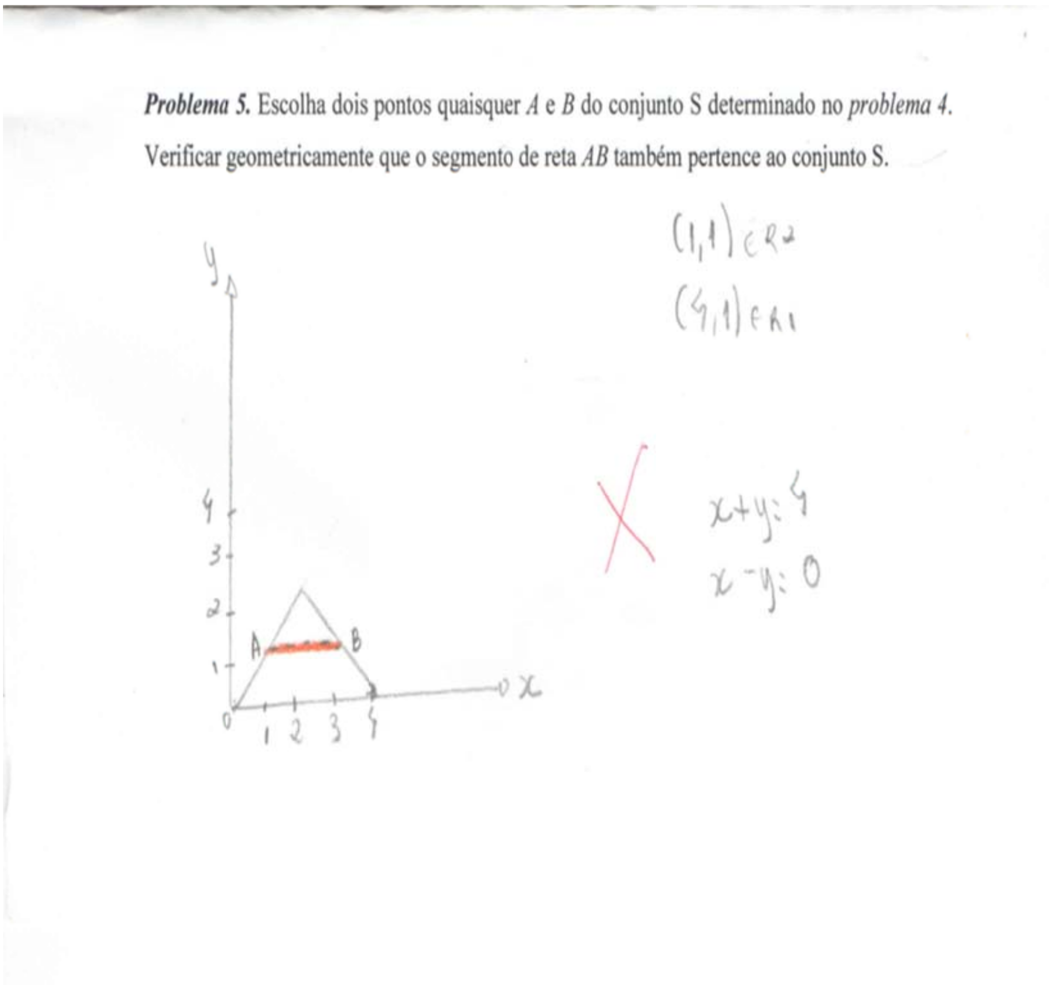
Fonte: Elaborado por uma dupla de alunos

No problema 5 os alunos deveriam apresentar noções do conceito de conjunto convexo.

Problema 5. Escolha dois pontos quaisquer A e B do conjunto S determinado no *problema 4*. Verificar geometricamente que o segmento de reta AB também pertence ao conjunto S

Como o problema 5 depende da solução do problema 4, os que erraram na localização do conjunto S do problema 4 também erraram o problema 5. Entretanto alguns grupos apresentaram corretamente a noção de conjunto convexo. Na figura 29 apresentamos a solução de uma dupla de alunos que mostrou conhecimento de conjunto convexo, mas no conjunto S errado.

Figura 29 – Resolução do problema 5 por uma dupla de alunos



Fonte: Elaborado por uma dupla de alunos

No problema 6 o objetivo é verificar o conceito de ponto extremo e combinação convexa.

Problema 6. Considere o conjunto S determinado no *problema 4*.

(a) Verificar geometricamente e algebricamente que o ponto P = (1,2) pode ser escrito como uma combinação convexa de dois pontos de S. (Lembrando que o ponto P é uma combinação convexa de dois pontos A e B se $P = \lambda A + (1 - \lambda)B$, para algum $\lambda \in [0,1]$.)

(b) Verificar geometricamente e algebricamente que o ponto $U = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pode ser escrito como uma combinação convexa de dois pontos de S.

(c) Verificar geometricamente que o ponto W = (2, 2) não pode ser escrito como uma combinação convexa de dois pontos distintos de S.

Aqui alguns alunos tiveram dificuldade em resolver algebricamente o item b, mas fizeram geometricamente, então considerei correto a questão e alguns alunos fizeram totalmente errada a questão.

No problema 7 o objetivo é levar o aluno a adquirir o conceito de curvas de nível.

Problema 7. Representar geometricamente em um sistema de coordenadas OXY as retas

$$(r): x + 2y = 0, \quad (s): x+ 2y = 2, \quad (t): x + 2y = 4$$

e o segmento de reta determinado pelos pontos O = (0, 0) e A = (1, 2).

Apenas dois grupos não conseguiram resolver este problema de forma correta.

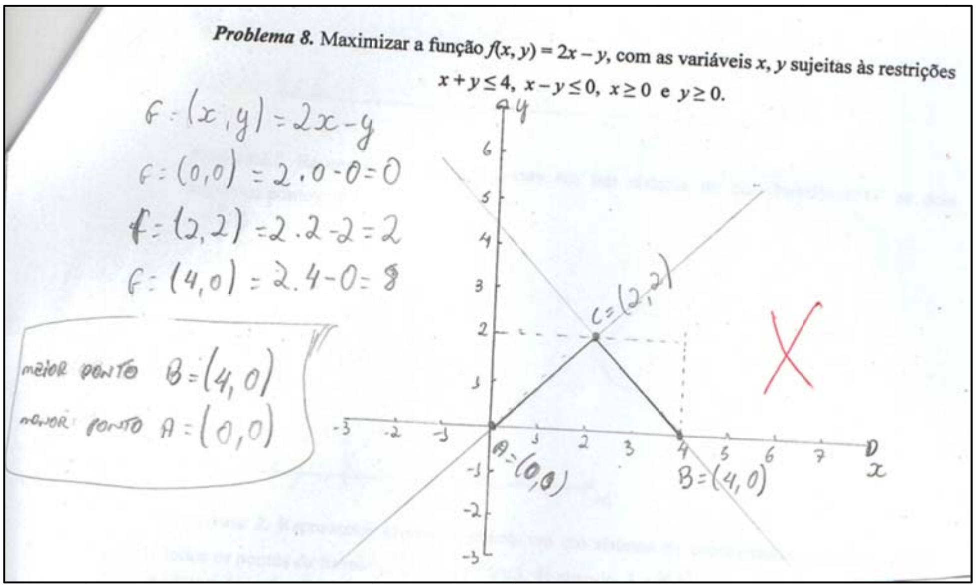
No problema 8 o aluno deverá aplicar o conhecimento de ponto máximo e curva de nível para achar o ponto ótimo.

Problema 8. Maximizar a função $f(x, y) = 2x - y$, com as variáveis x, y sujeitas às restrições

$$x+ y \leq 4, \;\; x - y \leq 0, \;\; x \geq 0 \;\text{ e }\; y \geq 0.$$

Novamente, aqui os alunos que erraram o problema 4 resolveram para o conjunto S errado mas, como nota-se na figura 30, alguns mostraram conhecimento de ponto de máximo.

Figura 30 – Resolução do problema 8 por uma dupla de alunos



Fonte: Elaborado por uma dupla de alunos

No problema 9 o aluno deverá trabalhar o conceito de ponto ótimo mínimo.

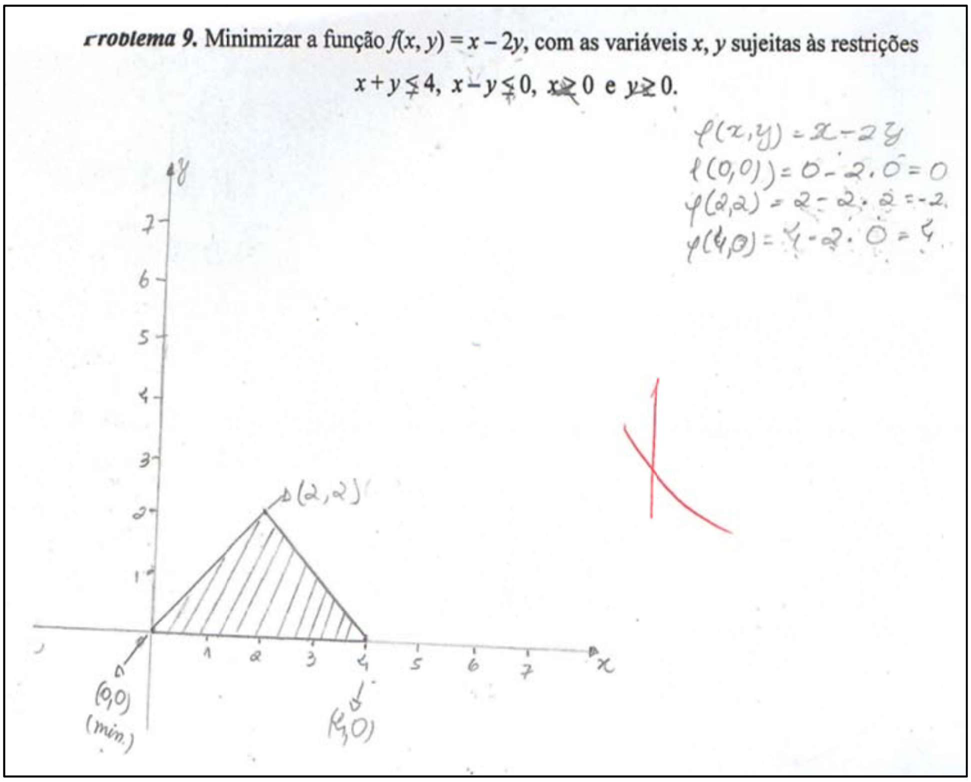
Problema 9. Minimizar a função $f(x, y) = x - 2y$, com as variáveis x, y sujeitas às restrições

$$x + y \leq 4,\ \ x - y \leq 0,\ \ x \geq 0\ \text{ e }\ y \geq 0.$$

Aqui como na questão 8, quem errou o problema 4 mostrou conhecimento de ponto mínimo no conjunto S errado. A figura 31 mostra um exemplo deste fato.

Alguns alunos não fizeram as questões 8 e 9 alegando que não deu tempo, mesmo sendo aula dupla, ou seja, cem minutos (1h40 min).

Figura 31 – Resolução do problema 9 por uma dupla de alunos



Fonte: Elaborado por uma dupla de alunos

O problema 10 já é mais elaborado. O aluno deverá mostrar habilidade para modelar matematicamente um problema e resolvê-lo geometricamente.

Problema 10. (Lima, 2001, p. 67) Uma fábrica de rações para cães e para gatos produz rações de dois tipos, obtidos mediante a mistura de três ingredientes básicos: carne desidratada, farinha de milho e farinha de soja. A tabela abaixo indica as quantidades de ingredientes em um pacote de cada tipo de ração.

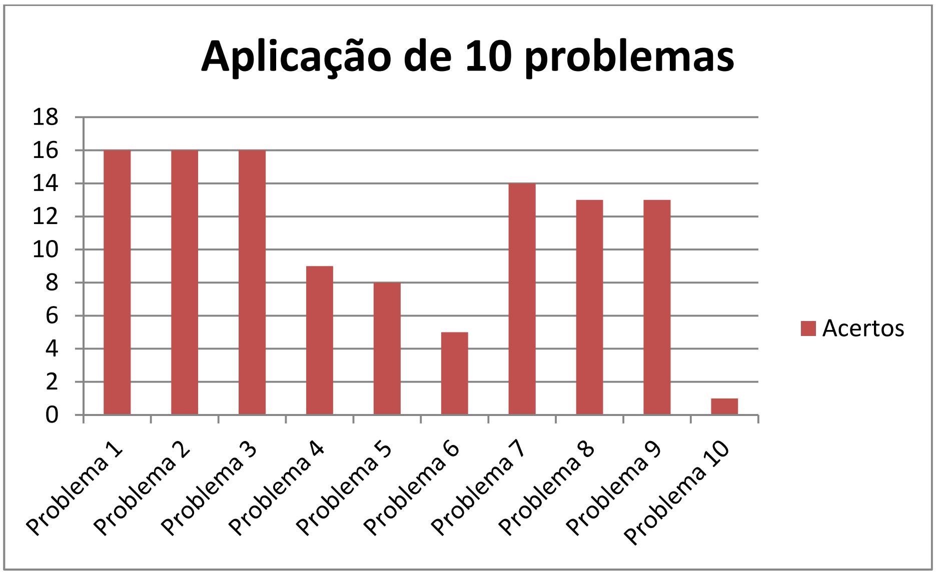
Ração para	**Carne desidratada**	**Farinha de milho**	**Farinha de soja**
Cães	3 Kg	1 Kg	1 Kg
Gatos	2 Kg	2 Kg	_

Para a próxima semana de produção, estão disponíveis 1200 Kg de carne desidratada, 800 Kg de farinha de milho e 300 Kg de farinha de soja. O lucro é de R$ 4,00 em cada pacote de ração, para cães ou para gatos. Determinar quantos pacotes de cada tipo de ração a fábrica deve produzir de modo a maximizar o seu lucro.

Aqui alguns alunos esboçaram a modelagem mas alegaram falta de tempo para resolver a parte geométrica, uma vez que este problema foi aplicado em uma aula simples.

Na figura 32 apresentamos o número de acertos de cada problema após a aplicação do pré-teste.

Figura 32 - Acertos por duplas



Fonte: Elaboração da própria autora

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Hoje em dia com o caderno do aluno (nas escolas estaduais do estado de São Paulo) tem-se um importante aliado para se obter êxito no processo ensino aprendizagem.

Com atividades propostas, baseadas na resolução de problemas, o caderno do aluno estimula o estudante a obter soluções adequadas levando-o a uma melhor compreensão do conteúdo.

Para este trabalho, não houve um tempo hábil para utilizá-lo seguindo os pressupostos da Engenharia Didática, uma vez que devemos cumprir grande parte do programa anual e, o pré-teste ter sido aplicado no final de setembro.

Quando aplicamos o pré-teste os alunos já tinham visto todo o conteúdo necessário para sua resolução, estes conteúdos são trabalhados no primeiro bimestre, e setembro foi início do terceiro bimestre.

Esta proposta de ensino foi pensada com o objetivo de contribuir para com o gostar de aprender matemática, pois muitos alunos ao encontrarem dificuldade no aprendizado de matemática tornam-se desinteressados e desestimulados.

Pensando no aluno e baseado no caderno do aluno que apresenta PL por resolução de problemas, podemos estabelecer algumas questões com o objetivo de melhorar este aprendizado. Por exemplo:

- como uma sequência didática envolvendo conteúdo de PL, poderia contribuir para que este aprendizado seja utilizado no dia a dia;
- pode-se através da sequência didática o aluno obter um pensamento matemático para as tomadas de decisões?
- o que propomos contribuirá para o letramento matemático dos alunos?

Acreditamos que este tipo de proposta didática pode auxiliar o professor que ao iniciar, depara-se com o caderno do aluno, ou mesmo com um conteúdo e, sabe-se que durante seus estudos não lhe foi apresentado como trabalhar de modo a estimular seus alunos, muito menos como trabalhar com resolução de problemas. Assim, esperamos que, de uma maneira clara o professor pode melhor compreender e aplicar PL sem que seus alunos fiquem desinteressados, tornando assim o aprendizado mais atraente. Em se tratando do ensino de matemática nota-se a dificuldade em que o aluno encontra para fazer a passagem de um registro para outro (notação formal para a notação matemática) o que muitas vezes o impede de continuar a aprender através da resolução de problemas.

Os PCN destacam a urgência de pessoas serem capazes de comunicar-se, solucionar problemas, tomar decisões em suas vidas pessoal e profissional.

Notamos uma escassez de material de PL, um pouco nos PCN, alguns problemas no caderno do aluno, por isto nossa proposta de uma sequência didática, uma maneira de organizar os conteúdos a serem trabalhados utilizando-se a resolução de problemas.

Da análise dos resultados do pré-teste e para os professores que pretendam utilizar esta sequência didática em sala de aula sugerimos:

- uma maior atenção no desenvolvimento da modelagem matemática, com o acréscimo de mais alguns problemas, pois acreditamos foi isto que faltou para um melhor êxito no problema 10.
- que cada problema seja cuidadosamente trabalhado tendo em vista que a resolução de alguns problemas de nossa sequência didática, depende da solução correta de problemas anteriores.

Os alunos que não resolveram corretamente o problema 4 também erraram os problemas 5, 6, 8 e 9, tendo em vista que esses últimos quatro problemas dependiam do conjunto convexo determinado no problema 4. Assim, para a sequência didática aqui proposta é de extrema importância que ao final do trabalho com cada um dos problemas o professor sistematize o conceito matemático estudado e apresente a solução correta do problema.

De nossa experiência profissional, de mais de 30 anos como professora da rede estadual de ensino, acreditamos que para uma adequada aplicação desta proposta de ensino em sala de aula e utilizando-se a resolução de problemas como uma forma para se ensinar matemática, conforme preconizada por Onuchic (1999) e Van de Walle (2009), sejam necessárias pelo menos 8 aulas de 50 minutos cada uma.

O Regimento do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, disponível em http://www.profmat-sbm.org.br/index.php/funcionamento/regimento, estabelece em seu artigo 25 que "O Trabalho de Conclusão de Curso versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula." Assim, entendemos que nosso trabalho de conclusão de curso está de acordo com o estabelecido nas normas do PROFMAT.

Não pretendemos aqui, criar uma proposta inovadora para o ensino de PL, mas darmos nossa contribuição para facilitar a atuação do professor em sala de aula de tal modo que leve seus alunos a gostarem de aprender.

Esperamos que este trabalho contribua para uma maior e melhor interpretação da resolução geométrica de um Problema de Programação Linear, o que acreditamos acontecerá se for aplicado logo após os conteúdos básicos serem trabalhados em sala de aula.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, S. **Ensino – aprendizagem de matemática via resolução, exploração, codificação e descodificação de problemas.** 1998. 295 f. Dissertação (Mestrado) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1998.

ARAUJO, P. F. S. **Programação linear e suas aplicações:** definição e métodos de solução. 2013. 114 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2013. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/541/2011_00442_PEDRO_FELIPPE_DA_SILVA_ARAUJO.pdf?sequence=1>. Acesso em: 13 fev. 2015.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, J. **Didáctica das matemáticas.** Lisboa: Instituto Piaget. Horizontes Pedagógicos, 1996. 280 p.

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows.** 2. ed. New York: John Wiley & Sons, 1990. 684 p.

BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília, DF: MEC/SEF, 1997.

CASTOLDI, L.; DANYLUK, O. S. Sequência didática para a introdução de estatística no ensino fundamental. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE ENSINO DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA, 5., 2014, Ponta Grossa. **Anais...** Ponta Grossa: [S.n.], 2014.

FIORENTINI, D. **Rumos da pesquisa brasileira em educação matemática:** o caso da produção científica em cursos de pós graduação. 1994. Tese (Doutorado) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1994.

LIMA, E. L. **Geometria analítica e álgebra linear.** Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2001. 306 p.

MELO, J. N. B. **Uma proposta de ensino e aprendizagem de programação linear no ensino médio**. 2012. 124 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012. Disponível em: < https://www.lume.ufrgs.br/bitstream/handle/10183/61731/000866424.pdf?sequence=1>. Acesso em: 13 fev. 2015.

ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: UNESP. 1999. p. 199-218.

ONUCHIC, L. R. ALLEVATO , N. S. G. Novas Reflexões sobre o Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (Org.). **Educação matemática:** pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 213-231.

PANUTTI, M. R. V. **Caminhos da prática pedagógica**. TVE Brasil. Rio de Janeiro. julho de 2003. Disponível em: <http://tvebrasil.com.br/SAUTO/boletins2004/ei/text1.htm>. Acesso em: 25 nov. 2013.

PUCCINI, A. L. **Introdução à programação linear.** Rio de Janeiro: LTC, 1972. 252 p.

SANTOS, J. M. **Programação linear:** uma aplicação possível no ensino médio. 2013. 44 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional – PROFMAT) – Instituto de Matemática, Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2013. Disponível em: < http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/540/2011_00441_JOSIAS_MOREIRA_DOS_SANTOS.pdf?sequence=1>. Acesso em 13 fev. 2015.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria de Estado da Educação. **Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas:** subsídio para a implementação da proposta curricular de matemática para o 2º grau. São Paulo: SE, 1980. V. 1.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. **Caderno do aluno:** 3ª Série Ensino Médio, São Paulo: SE, 2014.

SCHROEDER, T. L.; LESTER Jr. F. K. Developing understanding in mathematics via problem solving. TRAFTON, P. R.; SHULTE, A. P. (Ed.) **New directions for elementary school mathematics**. National of Teachers of Mathematics, 1989. 245 p.

VAN DE WALLE, J. A. **Elementary and middle school mathematics.** New York: Longman, 2001. 576 p.

VAN DE WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental:** formação de professores e aplicação em sala de aula. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009. 584 p.

ZABALA, A. **A prática educativa:** como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998. 224 p.

ANEXO – PROBLEMAS DO LIVRO DO ALUNO

Apresentamos neste anexo alguns problemas do caderno do aluno (SÃO PAULO, 2014), para a terceira série do Ensino Médio. Estes cadernos são utilizados nas escolas estaduais do Estado de São Paulo e fornecidos pela Secretaria de Estado da Educação.

Tais problemas envolvem conceitos de Programação Linear. Entretanto, não é mencionado em nenhum momento o nome Programação Linear.

Assim, nossa proposta de ensino contempla um tópico da matemática que é destacado e recomendado pelo governo do Estado de São Paulo.

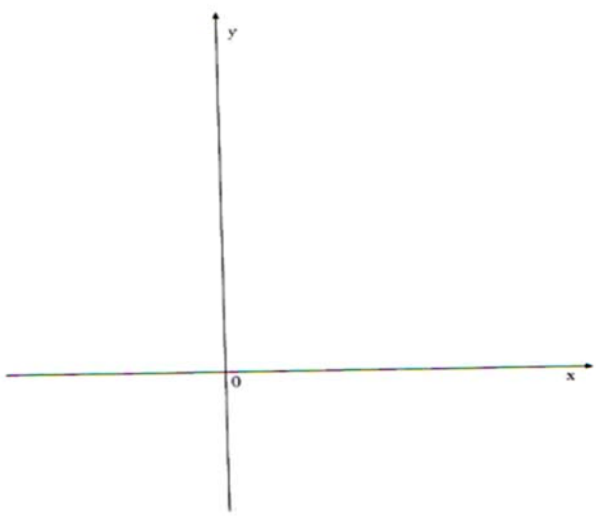
Figura 34 – Caderno do aluno – 3ª série do Ensino Médio

Uma fábrica produz dois tipos de produtos: A e B. A quantidade produzida diariamente de A é igual a **x**, e a quantidade diária de B é igual a **y**. O processo de produção é tal que cada unidade produzida de A custa sempre 5 reais e cada unidade de B custa 8 reais, sendo, portanto, o custo da produção conjunta de A e B igual a **C = 5x + 8y** (C em reais).

a) Sendo o valor de C, em determinado dia, igual a R$ 2400,00, determine dois pares de valores possíveis para **x** e **y**.

b) Sendo o máximo valor admissível para C igual a R$ 3200,00, qual é o valor máximo possível para **x**? E qual é o valor máximo possível para **y**? (Observação: $x \geq 0$, $y \geq 0$.)

c) Represente em um sistema de coordenadas no plano os pares (x; y) para os quais se tem $C \leq 3200$.



Fonte: São Paulo (2014, p. 28)

Figura 35 – Caderno do aluno – 3ª série do Ensino Médio

d) Mostre que, quanto menor o custo, menor a ordenada do ponto em que a reta que o representa intercepta o eixo **y**.

e) Para qual dos pares (x; y) tem-se a dieta satisfeita e o custo da alimentação o menor possível?

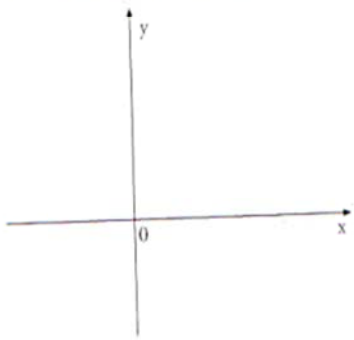
LIÇÃO DE CASA

5. Um pequeno fazendeiro dispõe de 8 alqueires para plantar milho e cana. Ele deve decidir quanto plantar de milho e quanto de cana, em alqueires, de modo que seu rendimento total seja o maior possível. Cada alqueire de milho plantado deve resultar em um rendimento líquido de R$ 20 mil e cada alqueire de cana deverá render R$ 15 mil. No entanto, cada alqueire de milho requer 20 000 L de água para irrigação e cada alqueire de cana requer somente 10 000 L de água, sendo que, no período correspondente, a quantidade de água disponível para tal fim é 120 000 L.

Considere **x** e **y** as quantidades de alqueires plantados de milho e cana, respectivamente.

a) Como se pode representar, em termos de **x** e **y**, o rendimento total **R** a ser recebido pelo fazendeiro, supondo que venda a totalidade de sua produção?

b) Qual é a relação entre **x** e **y** que traduz a exigência de que o total de alqueires plantados não pode ser maior do que 8? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.

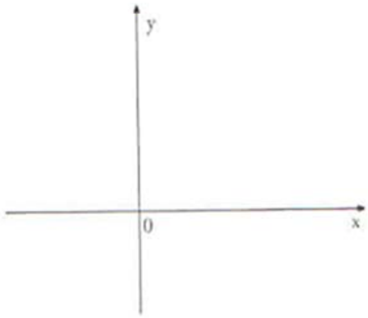


31

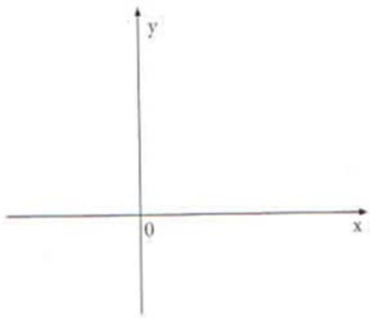
Fonte: São Paulo (2014, p. 31)

Figura 36 – Caderno do aluno – 3ª série do Ensino Médio

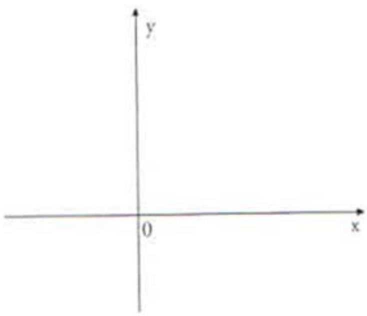
c) Qual é a relação entre **x** e **y** que traduz a exigência de que o total de água a ser utilizado não pode superar os 120 000 L? Represente no plano cartesiano os pontos (x; y) que satisfazem essa relação.



d) Represente no plano cartesiano o conjunto dos pontos que satisfazem simultaneamente as duas exigências expressas nos itens b e c (lembrando que devemos ter $x \geq 0$, $y \geq 0$).



e) Determine o conjunto dos pontos (x; y) do plano que correspondem ao rendimento $R_1 = 75$ mil e os que correspondem ao rendimento $R_2 = 120$ mil.



Fonte: São Paulo (2014, p. 32)