Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT/SBM

Vetores no Ensino Fundamental: Uma sequência didática para o 9º ano

Magda Braga Chaves Lemos

Março - 2014

Orientador: Paulo Cezar Pinto Carvalho - IMPA

"Pequenas dificuldades adiadas costumam transformar-se em grandes dificuldades. Se alguma decisão é mais complicada que as demais, ela deve ser tomada em primeiro lugar".

(Augusto César de Oliveira Morgado)

Agradecimentos:

À minha professora de 3ª série Primária (hoje, 4º ano do Ensino Fundamental I) que me fez sua monitora e disse a minha mãe: ”Esta menina nasceu professora de Matemática”.

À minha professora de Cálculo Diferencial e Integral III, Maria Virgínia Giraldi que me fez sua monitora durante três periodos na Universidade Santa Úrsula, instituição que tenho muito orgulho de ter sido aluna.

E, aos professores que idealizaram o PAPMEM que me ensinaram muito e continuam me ensinando, no PROFMAT, a ser um profissional que gosta de uma Matemática desenvolvida de forma correta e agradável.

Obrigado por vocês se dedicaram a nós professores.

Resumo

O assunto *vetores* é, geralmente, apresentado por professores de Física no 1º ano do Ensino Médio como se fosse um assunto desta disciplina sem nenhum vínculo com a Matemática. Uma possível forma de se modificar isto é introduzindo este conceito no 9º ano do Ensino Fundamental.

Este trabalho tem por objetivo apresentar uma sequência didática de como se explorar o assunto *vetores* para o aluno do Ensino Fundamental de forma natural se utilizando de conceitos e propriedades de figuras geométricas planas e suas representações no plano cartesiano.

Palavras-Chave: Vetores, ensino fundamental, figuras geométricas planas, representação no plano cartesiano, sequência didática.

Abstract

The topic *vectors* is usually presented by physics teachers in the 1st year of high school as if it were a matter of this course no connection with mathematics. A possible way to modify this is introducing this concept in the 9th year of Elementary School.

This work aims to present a didactic sequence as *vectors* explore the subject for the student of elementary school in a natural way using the concepts and properties of plane geometric figures and their representations in the coordinate plane.

Keywords: Vector, basic education, planar geometry, representation in the cartesian plane and didactic sequence.

Sumário

Capítulo I

Introdução

A noção de *vetor* é usualmente apresentado aos alunos como sendo um "ente físico" e não um objeto matemático com definição e propriedades bem definidas, e com isso o aluno fica com um objeto matemático fora de contexto.

Uma sugestão de como modificar a forma que o assunto é introduzido e torná-lo um assunto mais agradável e consistente para os alunos é abordá-lo no 9º ano do Ensino Fundamental.

Este trabalho é uma proposta de uma nova sequência didática para 9º ano e uma sugestão de como o assunto *vetores* deve ser introduzido no Ensino Fundamental utilizando, dentro da Geometria e da representação das figuras geométricas no plano cartesiano, os conceitos de quadriláteros já estudados nos anos anteriores e as relações nos triângulos retângulos e triângulos quaisquer, estudados ao longo do 9º ano.

A proposta de sequência didática feita neste trabalho teve como base a sequência didática utilizada no CMRJ (Colégio Militar do Rio de Janeiro), isto não significa que outra escola não possa assumir esta nova sequência didática. Desde que a escola trabalhe todos os tópicos dos três primeiros bimestres da sequência didática do CMRJ as modificações podem ser feitas.

Para que faça sentido o ensino deste assunto no 9º ano é necessário que:

- Os itens da sequência didática, de Geometria, anterior ao assunto *vetores* sejam ministrados em sua íntegra;
- As atividades elaboradas, para apresentar o assunto de forma que o aluno do Ensino Fundamental seja capaz de fazer associação com os conceitos geométricos, sejam aplicadas na sequência sugerida;
- Se proponham situações-problema aplicadas à Física, para tornar o assunto consistente para o aluno.

O objetivo desta proposta é transformar um assunto explorado na Física de forma assistemática e baseado em um conjunto de regras, aparentemente arbitrárias, como uma consequência de conteúdos da Geometria estudados ao longo do Ensino Fundamental.

Capítulo II

Uma Proposta de Sequência Didática para o 9º ano do Ensino Fundamental

Neste capítulo apresento a sequência didática utilizada hoje e a proposta de uma nova sequência didática com sugestões de como abordar os assuntos sem ampliar a carga horária e fazendo conexões dentro dos assuntos explorados na *Geometria*.

A sequência didática apresentada é a utilizada no Colégio Militar do Rio de Janeiro, instituição que trabalho desde 1995. Sendo, que nos últimos cinco anos só trabalho com o 9º ano. A minha experiência em dar aula de *Geometria* neste segmento do ensino fundamental me fez pensar nesta modificação, que na minha visão trará ganhos para o aprendizado do aluno não só na Física como também dentro da própria Matemática. Trabalhar com o aluno as figuras no plano cartesiano, ao longo de todo ano, aprimorará a visão cartesiana do aluno e será útil na construção de gráficos.

1 Sequência Didática utilizada hoje

O conteúdo de Matemática no 9º ano do CMRJ é ministrada por dois professores, um de Álgebra e outro de Geometria. Os assuntos são ministrados concomitantes, sendo três tempos semanais para Álgebra e dois tempos para Geometria.

Abaixo temos a sequência didática de Geometria disposta por bimestre.

GEOMETRIA

1º Bimestre

- Segmentos Proporcionais
- Teorema de Tales

2º Bimestre

- Teorema das bissetrizes
- Semelhança de triângulos e polígonos
- Relações métricas no triângulo retângulo

3º Bimestre

- Relações trigonométricas no triângulo retângulo
- Lei dos senos e cossenos
- Relações métricas na circunferência

4º Bimestre

- Potência de um ponto
- Polígonos regulares
- Relações métricas nos polígonos regulares
- Áreas das figuras planas

Nesta sequência, "Potência de ponto" é ministrada no 4º bimestre, sendo que este assunto é uma consequência imediata de uma das "Relações métricas da circunferência", não se faz necessária utilização de uma carga horária para este tópico. Outro tópico que pode ser suprimido desta sequência didática é "Polígonos regulares", este assunto explora os elementos de um polígono regular, relações entre quantidade de lados e diagonais e cálculo de ângulo interno do polígono e estes assuntos são estudados no 8º ano do ensino fundamental.

Como alternativa a esta sequência didática apresentamos na próxima seção uma proposta que inclui o assunto *Vetores* no conteúdo de Geometria do 9º ano do Ensino Fundamental.

2 Sequência Didática modificada

Fazendo uma comparação com a sequência didática utilizada hoje, nesta nova sequência didática foram retirados os assuntos "Polígonos regulares" e "Potência de Ponto". O assunto "Potência de ponto" deve ser colocado como uma aplicação das "Relações métricas na circunferência", no 4º bimestre.

E, ao mesmo tempo, dentro de tópicos dos bimestres anteriores ao 3º bimestre, podemos aplicar exercícios que facilitarão chegar às definições que aparecerão no assunto *vetores*, como por exemplo, quando for dado "Teorema de Pitágoras" explorar exercícios de distância entre dois pontos no plano cartesiano.

Explorar exercícios, onde o aluno tem que posicionar figuras no plano cartesiano ao decorrer do 2º bimestre e o início do 3º bimestre, fará com que o aluno crie uma visão cartesiana que lhe facilitará o desenvolvimento do assunto *vetores*. Como e onde usar este tipo de exercício será exposto de forma mais explíta no próximo capítulo.

A inserção do assunto *Vetores* implicará em uma redistribuição de carga horária ao longo desta nova sequência didática que, não trará prejuízos em relação à sequência didática utilizada hoje, pois ao longo de todos os tópicos serão introduzidos, em forma de exercícios de aplicação dos mesmos, os conceitos que serão formalizados dentro do assunto *Vetores*.

Abaixo temos a nova sequência didática de Geometria disposta por bimestre.

GEOMETRIA

1º Bimestre

- Segmentos Proporcionais
- Teorema de Tales
- Teorema das bissetrizes

2º Bimestre

- Semelhança de triângulos e polígonos
- Relações métricas no triângulo retângulo
- Relações trigonométricas no triângulo retângulo

3º Bimestre

- Lei dos senos e cossenos
- Vetores

4º Bimestre

- Relações métricas na circunferência
- Relações métricas nos polígonos regulares
- Áreas das figuras planas

Observe que o tópico *vetores* aparecerá depois de todo o conteúdo que explora o cálculo de comprimento dos lados dos triângulos e as relações existentes entre os lados e os ângulos internos. Isto se faz necessário pois *vetores* é um objeto matemático que envolve **direção**, logo necessitamos de ângulos e **módulo**, logo precisamos calcular comprimentos.

As modificações feitas na sequência didática fica mais explícita se olharmos para as duas sequências didáticas em paralelo em uma tabela, onde os tópicos que foram suprimidos da sequência didática ou transferidos de um bimestre para outro aparecem com lacunas em branco.

Table 1: **Tabela Comparativa das duas Sequências Didáticas**

S.D. utilizada hoje	S.D. modificada
1º Bimestre	
Segmentos Proporcionais	Segmentos Proporcionais
Teorema de Tales	Teorema de Tales
	Teorema das bissetrizes
2º Bimestre	
Teorema das bissetrizes	
Semelhança de triângulos e polígonos	Semelhança de triângulos e polígonos
Relações métricas no triâng. retâng.	Relações métricas no triâng. retâng.
	Relações trigon. no triâng. retâng.
3º Bimestre	
Relações trigon. no triâng. retâng.	
Lei dos senos e cossenos	Lei dos senos e cossenos
	Vetores
Relações métricas na circunferência	
4º Bimestre	
	Relações métricas na circunferência
Potência de um ponto	
Polígonos Regulares	
Relações métricas nos políg. reg.	Relações métricas nos políg. reg.
Áreas das figuras planas	Áreas das figuras planas

Capítulo III
Vetores na Sequência Didática proposta

O conteúdo necessário para o ensino de *vetores* será abrangido ao longo dos três primeiros bimestres desta sequência didática. Para que não seja necessário um número grande de aulas para o assunto *Vetores*, podemos diluir conceitos que serão definidos aqui, dentro de assuntos do 2º e 3º bimestres através de exercícios que envolvam as figuras geométricas posicionadas no plano cartesiano.

Dentro do assunto *vetores* será necessário explorar os seguintes tópicos:

- Segmentos orientados;
- Segmentos equipolentes;
- Definir vetores;
- Operações com vetores;
- Módulo de um vetor;
- Projeções de um vetor

Antes de abordar os tópicos acima é essencial trabalhar o conceito de **distância**. Sua formalização será, naturalmente, entendida se, quando o professor estiver ministrando "Teorema de Pitágoras", dentro do assunto "Relações Métricas no Triângulo Retângulo", elaborar exercícios que explore o cálculo do comprimento de um segmento de reta $\overline{AB}$, sendo que os pontos A e B são dados através de suas coordenadas no plano cartesiano.

A elaboração de exercícios que explore os triângulos dados através das coordenadas de seus vértices no plano cartesiano, dentro do assunto "Semelhança de Triângulos", fará com que o aluno trabalhe o conceito de distância para calcular as medidas dos lados do triângulo. Neste tipo de exercício, o professor pode fazer com que o aluno perceba a relação existentes entre as coordenadas dos vértices de figuras semalhantes no plano cartesiano, facilitando assim a formalização existentes dentro dos tópicos **definir vetores** e **operações com vetores**. Outro conceito que deve ser explorado neste momento é **multiplicação de um vetor por um escalar**, fazendo observações sobre o que ocorrerá com as coordenadas dos vértices dos pontos que formam os lados equivalentes de duas figuras semelhantes.

O tópico mais importante para o aprendizado dos conceitos da Física, **Projeções de um vetor**, será formalizado de forma rápida se, quando ministramos "Relações Métricas no Triângulo Retângulo" utilizamos exercícios onde o triângulo retângulo é posicionado com um dos seus vértices na origem dos eixos coordenados e outro sobre o eixo das abscissas. Explorar nestes exercícios as projeções da hipotenusa sobre a horizontal e a vertical, e fazer a menção ao fato que podemos projetar ortogonalmente um segmento em qualquer direção. Os exercícios que são apresentados no livros didáticos de Matemática do 9º ano, geralmente, só fazem projeção na horizontal acarretando um problema na Física, pois o aluno fica com o conceito de projeção errado.

Ao desenvolver o assunto "Relações Trigonométricas no Triângulo Retângulo" utilizar exercícios onde o triângulo retângulo é posicionado com um dos seus vértices na origem dos eixos coordenados e outro sobre o eixo das abscissas, só que agora trabalhando com o ângulo interno do triângulo retângulo. E, finalmente fazer observações sobre as relações existentes entre as coordenadas dos vértices do deste triângulo e as medidas dos comprimentos de seus catetos.

Na sequência deste capítulo faço o desenvolvimento dos tópicos citados acima e, que devem ser formalizados nesta sequência didática. Os tópicos foram desenvolvidos com todo o rigor matemático, o doscente tem que decidir, conforme o nível dos alunos, de que forma formalizar estes tópicos com seus alunos. O importante é, explorar os tópicos de forma a fazer as associações geométricas que foram exploradas com exercícios durante o segundo bimestre.

Não se faz necessário demonstrar, formalmente, todas as propriedades apresentadas e sim, associá-las a todos conceitos geométricos apresentados.

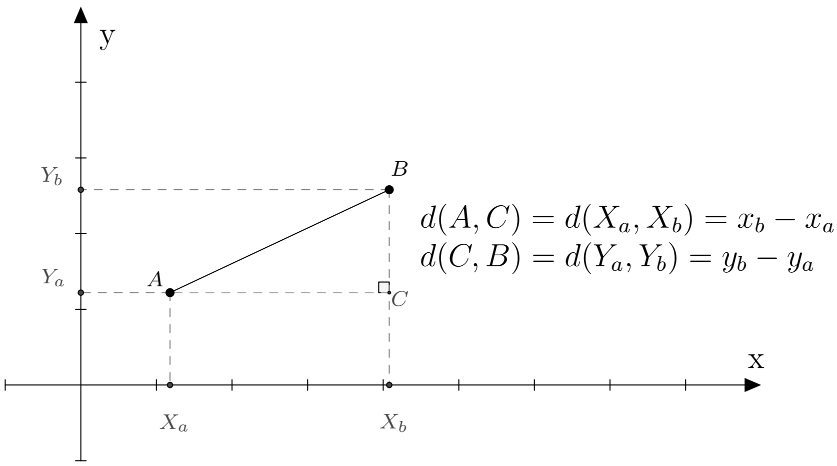
A seguir, fazemos um breve resumo do conteúdo relativo à *vetores* que deve ser coberto no 9º ano, de acordo com a sequência proposta.

1 Distância entre dois pontos no plano cartesiano

Considere dois pontos sobre o eixo OX, a distância entre eles é a diferença de suas **abscissas**, pois ao ponto $X_a = (x_a, 0)$, sobre este eixo, está associado um número real x_a e ao ponto $X_b = (x_b, 0)$, x_b.

De forma análoga, para pontos sobre o eixo OY, a distância é a diferença entre suas **ordenadas**, pois ao ponto $Y_a = (0, y_a)$, sobre este eixo, está associado um número real y_a e ao ponto $Y_b = (0, y_b)$, y_b. [1]

Dados dois pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ no plano cartesiano, utilizamos o Teorema de Pitágoras para concluir que a distância entre A e B é obtida da igualdade,



$$d^2(A,B) = d^2(A,C) + d^2(C,B)$$
$$d^2(A,B) = (x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2$$
$$d(A,B) = \sqrt{(x_b - x_a)^2 + (y_b - y_a)^2}$$

[1] Em todo capítulo X_p representará um ponto sobre o eixo OX de abscissa x_p, isto é, $X_p = (x_p, 0)$ e Y_p, um ponto sobre o eixo OY de ordenada y_p, isto é, $Y_p = (0, y_p)$.

2 Segmento de reta orientado

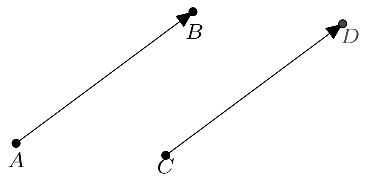
Segmento de reta orientado AB, é o segmento de reta onde o sentido positivo de percurso é partir da origem A e chegar na extremidade B.
Notação utilizada para representar este segmento é $\overrightarrow{AB}$. O segmento orientado $\overrightarrow{BA}$ tem sentido oposto ao segmento orientado $\overrightarrow{AB}$.

2.1 Segmentos equipolentes

Dizemos que os segmentos de retas orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são equipolentes, quando eles:

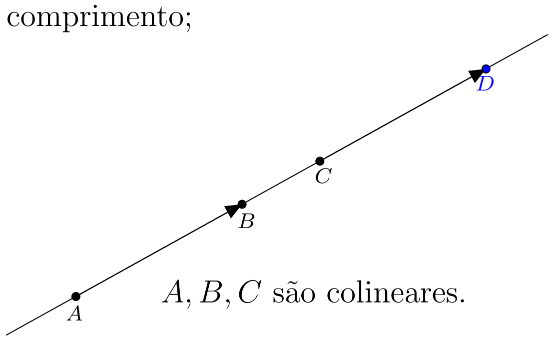
- Têm o mesmo comprimento;
- Têm a mesma direção(isto é, paralelos ou colineares);
- Têm o mesmo sentido.

Neste caso, escrevemos $\overrightarrow{AB} \equiv \overrightarrow{CD}$.

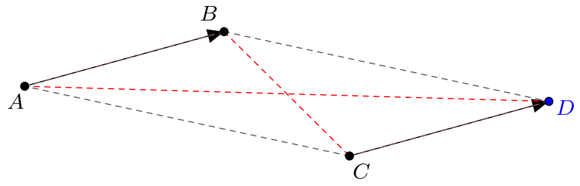


Observemos que dados três pontos A, B e C do plano é sempre possível obter um quarto ponto D tal que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ sejam equipolentes.
Se A, B e C:

- forem colineares, é só escolher D, sobre a reta que contém os três pontos A, B e C, de forma que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tenham o mesmo sentido e comprimento;



- não forem colineares, basta obter D de forma que o quadrilátero $ABDC$ seja um paralelogramo.



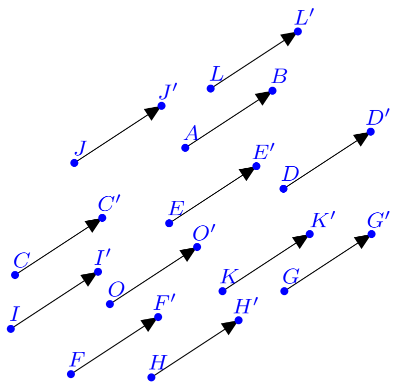
A, B, C não são colineares.
$ABCD$ não é um paralelogramo.
$ABDC$ é um paralelogramo.

3 Vetor

É o representante da classe dos segmentos orientados equipolontes à $\overrightarrow{AB}$.

Na figura abaixo escolhemos um dos segmentos orientados e utilizamos uma letra minúscula para denotá-lo.

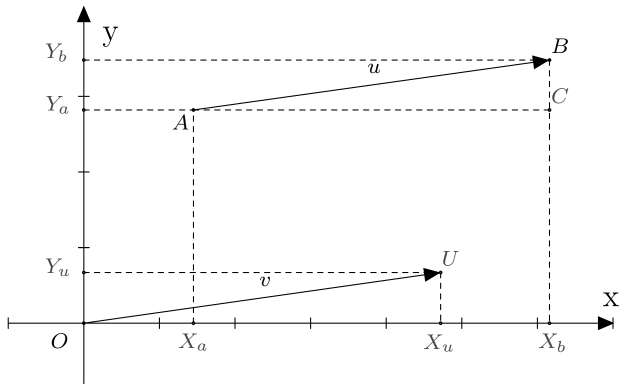
$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} \textbf{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{OO'} \textbf{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{CC'} \textbf{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{DD'} \textbf{ ou } \overrightarrow{u} = \overrightarrow{EE'} \textbf{ ou } \cdots$$



Isto é, podemos escolher o representante do vetor $\overrightarrow{u}$ com origem em qualquer ponto do plano. Em especial, podemos obter qualquer vetor com origem em $O = (0, 0)$.

Representação de um vetor no plano cartesiano

Dados os pontos $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$, considere o vetor $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. As coordenadas do ponto $U = (x_u, y_u)$ de forma que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU}$, onde O é a origem dos eixos coordenados, será obtida através de conceitos geométricos observados na figura abaixo.



Como os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OU}$ representam o mesmo vetor, eles são equipolentes. Podemos concluir, a partir deste fato que, os triângulos ABC e OUX_u são congruentes.
Logo, os segmentos AC e OX_u têm o mesmo comprimento e os segmentos CB e X_uU, também, isto é;

- Como $C = (x_b, y_a)$ temos que $d(A,C) = d(X_a, X_b) = x_b - x_a$ e $d(O, X_u) = x_u$ logo $x_u = x_b - x_a$.
- E, como $d(C,B) = d(Y_a, Y_b) = y_b - y_a$ e $d(X_u, U) = d(O, Y_u) = y_u$ temos $y_u = y_b - y_a$.

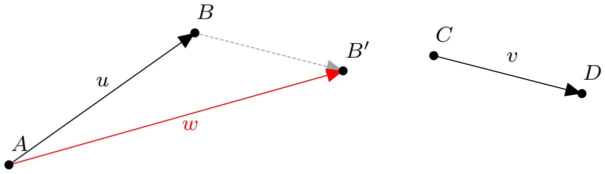
$$\overrightarrow{u} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$$

3.1 Adição de Vetores

Somar dois vetores significa transportar um ponto através da direção e sentido de um dos vetores obtendo outro ponto, e, a partir deste transportá-lo na direção e sentido do outro vetor da soma. O vetor determinado pelo primeiro e o último ponto do deslocamento descrito acima é o vetor soma. Logo, dado dois vetores, não importa onde eles se localizam no plano cartesiano, é sempre possível realizar a soma entre eles, basta escolhermos o segmento orientado que represente o segundo vetor da adição com a extremidade coincidindo com a origem do primeiro vetor da adição.

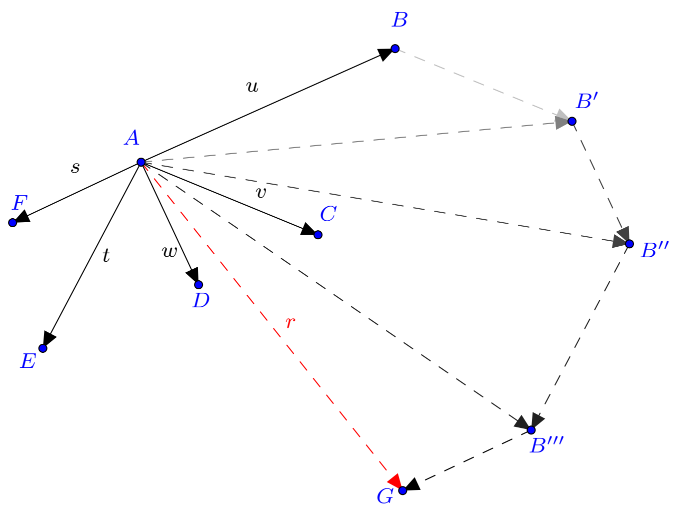
Dados dois vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, para obtermos a soma deles primeiro determinamos um ponto B' de modo que os segmentos orientados BB' seja equipolente ao segmento orientado CD.

Observe a figura:



$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{w}$$

A soma de mais de dois vetores é feita, obtendo a resultante da soma dos dois primeiros vetores e, depois a resultante da soma do terceiro com a primeira resultante, e assim, sucessivamente.



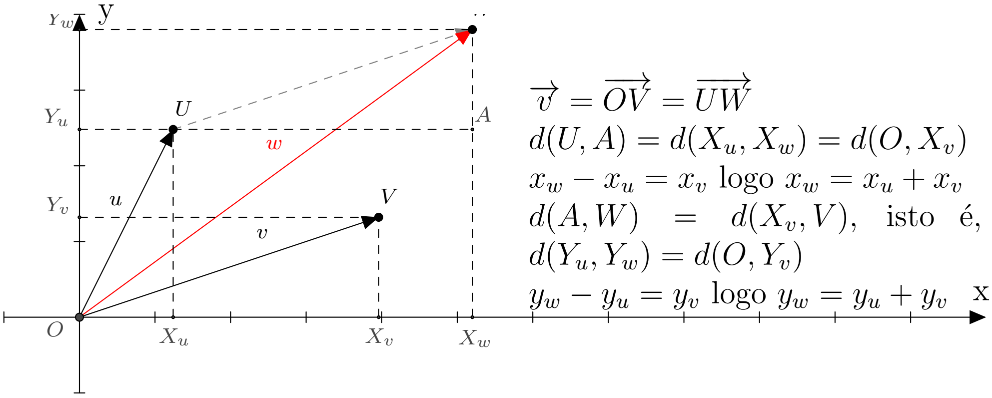
$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} + \overrightarrow{t} + \overrightarrow{s} = ((((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{AF}) =$$

$$= ((((\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{AF}) = (((\overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'B''}) + \overrightarrow{AE}) + \overrightarrow{AF})$$

$$= ((\overrightarrow{AB''} + \overrightarrow{B''B'''}) + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AB'''} + \overrightarrow{B'''G} = \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{r}$$

Representação do vetor soma no plano cartesiano

Dados dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ e $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$, as coordenadas do vetor soma $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ será,

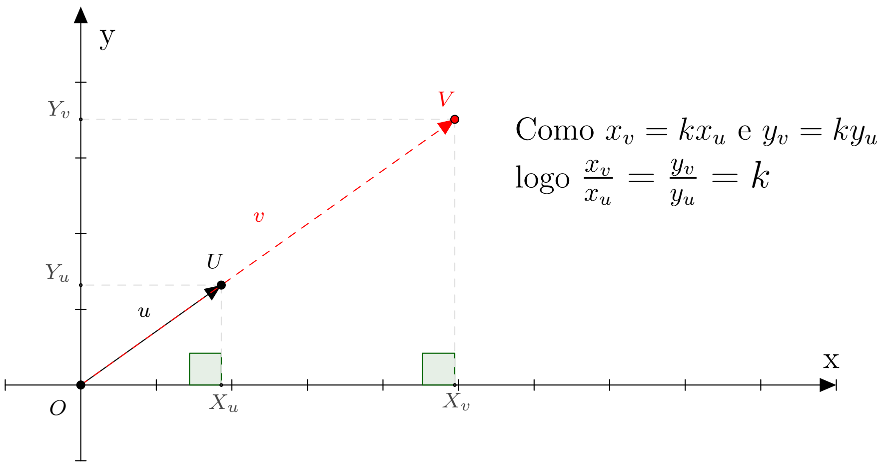


$$\overrightarrow{w} = (x_u + x_v, y_u + y_v)$$

3.2 Multiplicação do Vetor por um número real

Dado o vetor $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ e o número real k, definimos o vetor $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ como sendo $\overrightarrow{v} = (kx_u, ky_u)$.

Observando sua representação no plano cartesiano, concluímos que;



Os triângulos OUX_u e OVX_v são semelhantes pelo caso LAL, pois, o ângulo formados pelos lados OX_u e X_uU e o ângulo formado pelos lados OX_v e X_vV são congruentes e os segmentos OX_u, OX_v e X_uU, X_vV são proporcionais na razão k.

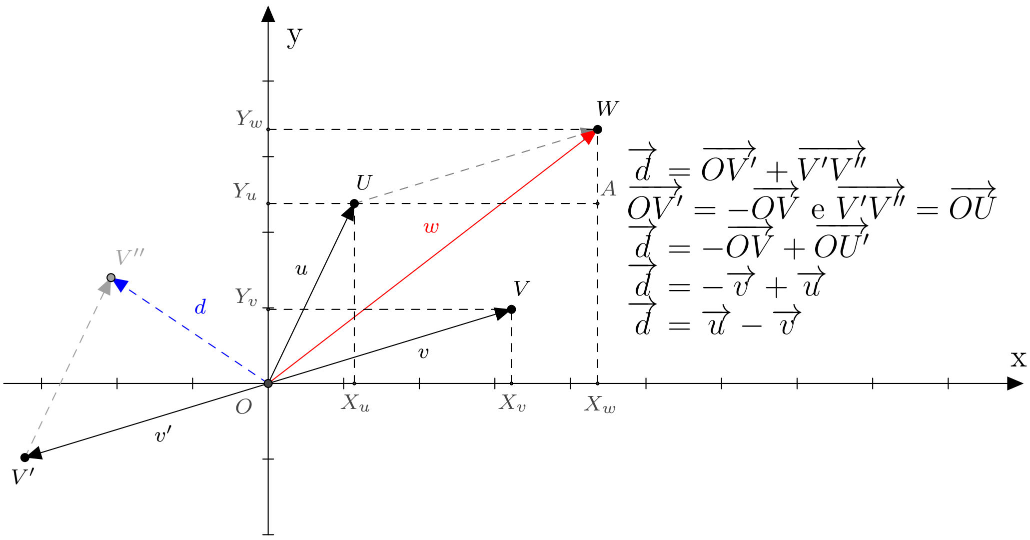
A partir deste fato, concluímos que multiplicar um vetor por um número real, significa geométricamente, manter sua direção.

Analisando as variações da constante de proporcionalidade k, temos:

- Se k é **positivo** o então os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm **mesmo sentido**;
- Se k é **negativo** então os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm **sentido contrário**;
- Se $k = 0$ então o vetor $\overrightarrow{v} = (0.0)$ (isto é, o vetor se reduz a um ponto);
- Se $-1 < k < 1$, o vetor $\overrightarrow{v}$ tem comprimento **menor** que o vetor $\overrightarrow{u}$;
- Se $k > 1$ ou $k < -1$, o vetor $\overrightarrow{v}$ tem comprimento **maior** que o vetor $\overrightarrow{u}$;
- Se $k = 1$ ou $k = -1$ então os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ têm o mesmo comprimento;

O vetor soma e o vetor diferença no plano

Dados dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ e $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$, o vetor soma $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e vetor diferença $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$ estão representados no plano cartesiano abaixo.



$$\begin{aligned}\overrightarrow{d} &= \overrightarrow{OV'} + \overrightarrow{V'V''}\\ \overrightarrow{OV'} &= -\overrightarrow{OV} \text{ e } \overrightarrow{V'V''} = \overrightarrow{OU}\\ \overrightarrow{d} &= -\overrightarrow{OV} + \overrightarrow{OU'}\\ \overrightarrow{d} &= -\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}\\ \overrightarrow{d} &= \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\end{aligned}$$

Observe que $\overrightarrow{d} = \overrightarrow{VU}$, logo as diagonais do paralelogramo $OUWV$ são o vetor soma $\overrightarrow{w}$ e o vetor diferença $\overrightarrow{d}$.

3.3 Módulo de um vetor

É o número real positivo que representa seu comprimento, isto é, se $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OU} = (x_u, y_u)$ então $\|\overrightarrow{u}\| = d(O, U)$.

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x_u^2 + y_u^2}$$

Observe que:

- o módulo de um vetor $\overrightarrow{u}$ será zero se, e somente se $\overrightarrow{u} = (0, 0)$;
- seja k um número real e $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$, $\|k * \overrightarrow{u}\| = |k| * \|\overrightarrow{u}\|$;

  $$\|k * \overrightarrow{u}\| = \sqrt{(k * x_u)^2 + (k * y_u)^2} = |k| * \sqrt{x_u^2 + y_u^2} = |k| * \|\overrightarrow{u}\|$$

- $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$. (Desigualdade Triangular)

  Observando a figura acima temos que $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ representam os lados de um triângulo, logo vale a desigualdade triangular

4 Produto Escalar

É o produto entre dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$ e $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$ definido como sendo o número real resultante da fórmula abaixo;

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x_u.x_v + y_u.y_v$$

Propriedades do Produto Escalar

1. Dados três vetores $\overrightarrow{u} = (x_u, x_v)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$ e $\overrightarrow{w} = (x_w, y_w)$

$$\begin{gathered}
\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = (x_u, y_u).(x_v + x_w, y_v + y_w) = \\
x_u.(x_v + x_w) + y_u.(y_v + y_w) = x_u.x_v + x_u.x_w + y_u.y_v + y_u.y_w) = \\
(x_u.x_v + y_u.y_v) + (x_u.x_w + y_u.y_w) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} \\
\overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}
\end{gathered}$$

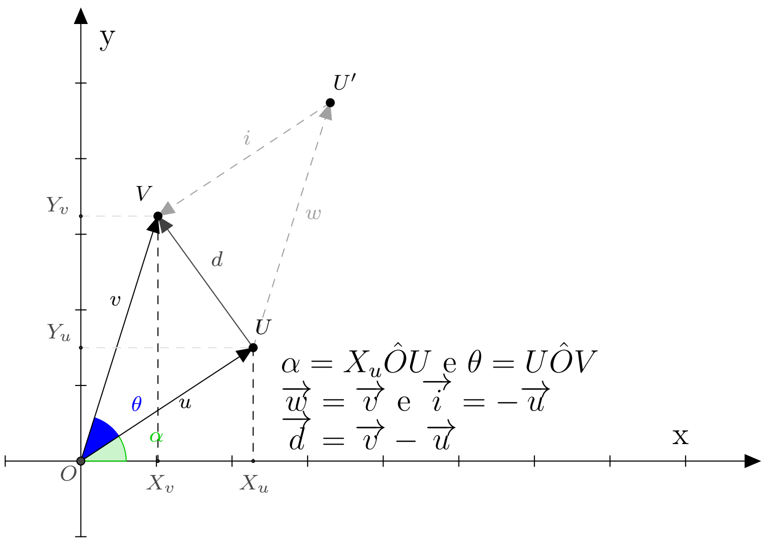
2. Dados dois vetores $\overrightarrow{u} = (x_u, x_v)$, $\overrightarrow{v} = (x_v, y_v)$ e um número real k

$$\begin{gathered}
(k.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = (k.x_u, k.y_u).(x_v, y_v) = (k.x_u).x_v + (k.y_u).y_v = \\
k.(x_u.x_v + y_u.y_v) = k.(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}) \\
(k.\overrightarrow{u}).\overrightarrow{v} = k.(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v})
\end{gathered}$$

3. O produto escalar e o módulo

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = (x_u, y_u).(x_u, y_u) = x_u.x_u + y_u.y_u = (x_u)^2 + (y_u)^2 = (\|\overrightarrow{u}\|)^2$$
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = (\|\overrightarrow{u}\|)^2$$

Observemos no plano cartesiano, o que representa, geométricamente, o produto escalar;



Agora observemos o triângulo UOV na figura acima, o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ é o ângulo $\theta = U\hat{O}V$.
Aplicando a lei dos cossenos neste triângulo, temos:

$$(d(U,V))^2 = (d(O,U))^2 + (d(O,V))^2 - 2.d(O,U).d(O,V).\cos\theta$$
Mas $d(U,V) = \|(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u})\|$, $d(O,U) = \|\overrightarrow{u}\|$ e $d(O,V) = \|\overrightarrow{v}\|$, logo

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2.\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos\theta \tag{1}$$

Utilizando as propriedades 3 e 1, descritas acima, temos;
$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = (\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}).(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}.(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) - \overrightarrow{u}.(\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}) =$$
$$\overrightarrow{v}.\overrightarrow{v} - \overrightarrow{v}.\overrightarrow{u} - \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{u}\|^2$$

$$\|\overrightarrow{v} - \overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{u}\|^2 \tag{2}$$

Substituindo (2) em (1):
$$\|\overrightarrow{v}\|^2 - 2.\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{u}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + \|\overrightarrow{v}\|^2 - 2.\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos\theta, \text{ logo}$$

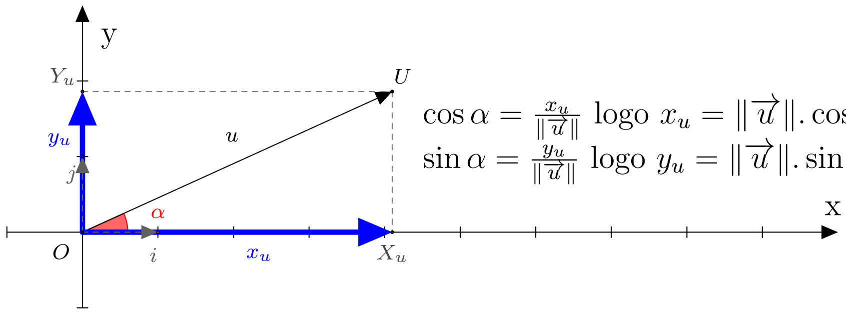
$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|.\cos\theta$$

5 Projeção de um vetor sobre os eixos coordenados

Considere os vetores $\overrightarrow{i} = (1, 0)$ e $\overrightarrow{j} = (0, 1)$, os vetores unitários (isto é, vetores de comprimento 1) sobre os eixos OX e OY, respectivamente.

Qualquer vetor sobre o eixo OX é escrito da forma $\overrightarrow{OX_u} = x_u.\overrightarrow{i}$, e os vetores sobre o eixo OY, $\overrightarrow{OY_u} = y_u.\overrightarrow{j}$. Logo o vetor $\overrightarrow{u} = (x_u, y_u)$,

$$\overrightarrow{u} = x_u.\overrightarrow{i} + y_u.\overrightarrow{j}$$



$\cos\alpha = \frac{x_u}{\|\overrightarrow{u}\|}$ logo $x_u = \|\overrightarrow{u}\|.\cos\alpha$

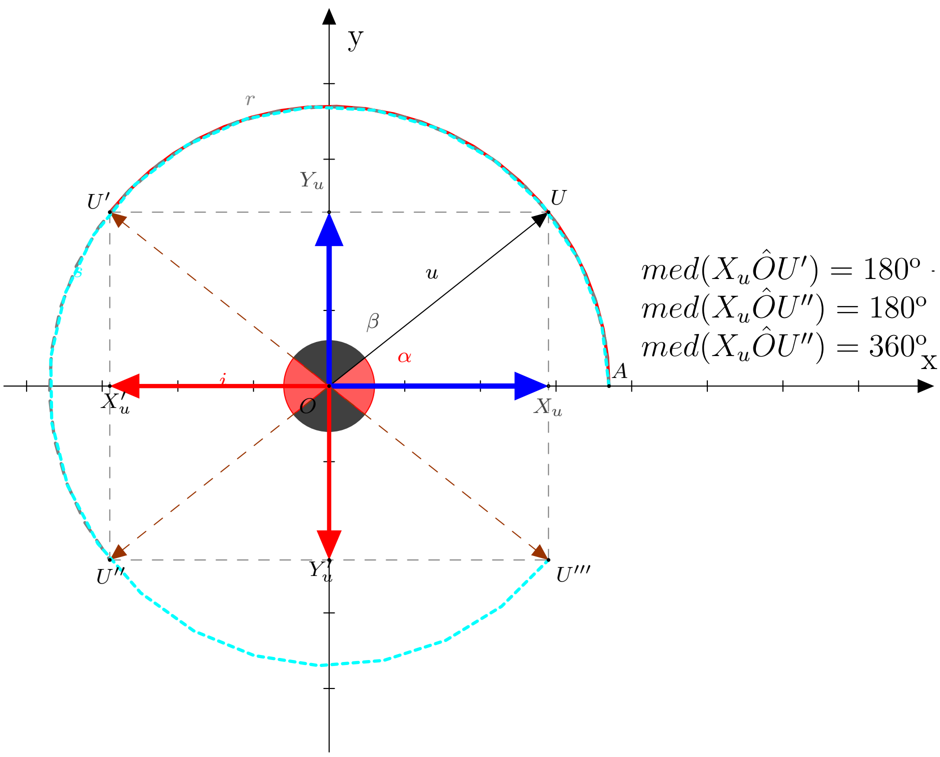
$\sin\alpha = \frac{y_u}{\|\overrightarrow{u}\|}$ logo $y_u = \|\overrightarrow{u}\|.\sin\alpha$

As coordenadas do vetor $\overrightarrow{u}$ são denominadas;

- x_u, a componente do vetor $\overrightarrow{u}$ na direção do vetor $\overrightarrow{i}$ ou na direção do eixo OX;

- y_u, a componente do vetor $\overrightarrow{u}$ na direção do vetor $\overrightarrow{j}$ ou na direção do eixo OY.

Observe que quando temos vetores com extremidade em pontos do 2º, 3º e 4º quadrantes, o ângulo que o vetor forma com o eixo OX é o que determinada se as coordenadas do vetor são positivas e/ou negativas.



Como um ponto no 2º quadrante têm abscissa negativa e ordenada positiva, concluímos que:

$\cos(180^o - \alpha) = -\cos\alpha$ e $\sin(180^o - \alpha) = \sin\alpha$

No 3º quadrante têm abscissa negativa e ordenada negativa, concluímos que:

$\cos(180^o + \alpha) = -\cos\alpha$ e $\sin(180^o + \alpha) = -\sin\alpha$

No 4º quadrante têm abscissa positiva e ordenada positiva, concluímos que:

$\cos(360^o - \alpha) = \cos\alpha$ e $\sin(360^o - \alpha) = -\sin\alpha$

Capítulo IV

Atividades sugeridas para introduzir o assunto *Vetores*

Neste capítulo apresento algumas atividades que irão auxiliar o professor a explorar o assunto *vetores* com o alunos.

As atividades propostas exploram as propriedades dos quadriláteros e triângulos associados à sua representação no sistema de coordenadas retangulares.

- Objetivo: o discente receber o conteúdo, sistematizado, de vetores de uma forma, geometricamente, natural;
- Pré-requisitos: o professor ter cumprido, em sua íntegra, os assuntos propostos na sequência didática proposta no capítulo II;
- Descrição da atividade: a cada aula explorar duas das atividades propostas. Aplicar as atividades, e deixar que o discente explore as mesmas sem nenhuma interferência inicial do professor. Depois fazer as atividades, chegando às conclusões importantes para que as definições e propriedades descritas no capítulo III sejam compreendidas com mais naturalidade.

Antes de iniciar o conteúdo descrito no capitulo III, aplicar as atividades I, II, III e IV.

Introduza o capítulo III, formalizando a definição de distância entre dois pontos, e em seguida defina:

- segmento orientado e aplique a atividade V;
- segmento equipolente e aplique a atividade VI;
- vetor e aplique a atividade VII.

Daí, em diante, as representações no plano cartesiano das definições e propriedades que aparecerão no capítulo III deverão ocorrer de forma simples. O professor deve aplicar exercícios de fixação ao final de cada tópico explorado com os alunos.

Depois de ter desenvolvido todos os tópicos sobre *vetores* mencionados no capítulo III, aplicar as atividades VIII, IX e X, que são exercícios simples de Física[2], para que o aluno entenda o objetivo do estudo de *vetores*.

[2] Exercícios retirados do livro texto citado na bibliografia[7].

ATIVIDADE I: Localizar vértices de um quadrado no plano cartesiano.

Sejam A, B, C e D vértices do quadrado $ABCD$. Em cada uma das situações abaixo, são dados três dos quatro vértices, determine o vértice que falta. Utilize o plano cartesiano para obter o quadrado em cada uma das situações:

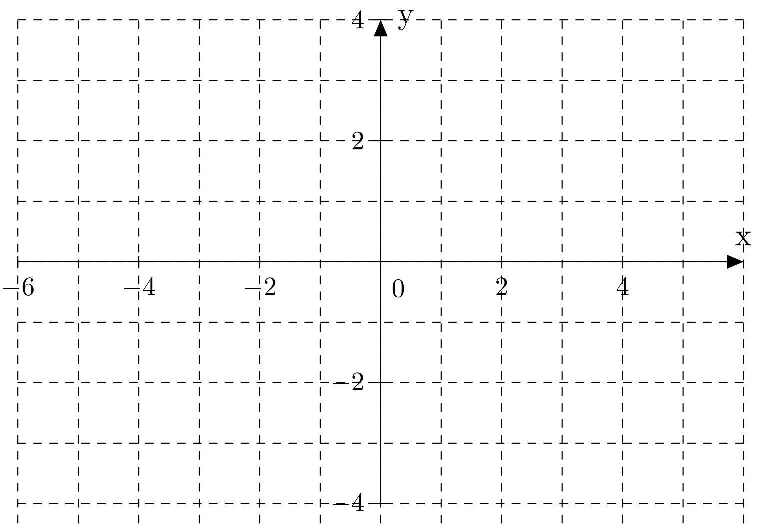
1) $A_1(0,0)$, $B_1(0,1)$ e $C_1(1,0)$

2) $A_2(-1,1)$, $B_2(-1,-3)$ e $D_2(3,1)$

3) $A_3(2,3)$, $C_3(-2,-1)$ e $D_3(2,-1)$

4) $B_4(0,4)$, $C_4(1,4)$ e $D_4(1,3)$

5) $A_5(a,b)$, $B_5(a+c,b)$ e $D_5(a,b+c)$. Sendo a, b e c números reais.



Observando o item 5, responda:

- O que significa, geometricamente, adicionarmos um valor real c à abscissa do vértice A para obtermos o vértice B?

- O que significa, geometricamente, adicionarmos um valor real c à ordenada do vértice A para obtermos o vértice D?

ATIVIDADE II: Localizar vértices de um retângulo no plano cartesiano.

Sejam A, B, C e D vértices do retângulo $ABCD$. Em cada uma das situações abaixo, são dados três dos quatro vértices, determine o vértice que falta. Utilize o plano cartesiano para obter o retângulo em cada uma das situações:

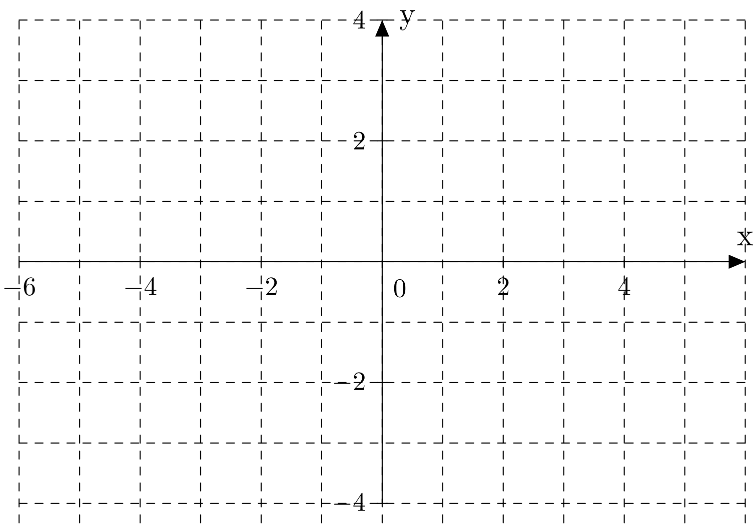
1) $A_1(0,0)$, $B_1(0,1)$ e $C_1(2,0)$

2) $A_2(-1,1)$, $B_2(-1,-3)$ e $D_2(1,1)$

3) $A_3(2,3)$, $C_3(-2,-2)$ e $D_3(2,-2)$

4) $B_4(0,4)$, $C_4(1,4)$ e $D_4(1,0)$

5) $A_5(a,b)$, $B_5(a+c,b)$ e $D_5(a,b+d)$. Sendo a, b, c e d números reais.



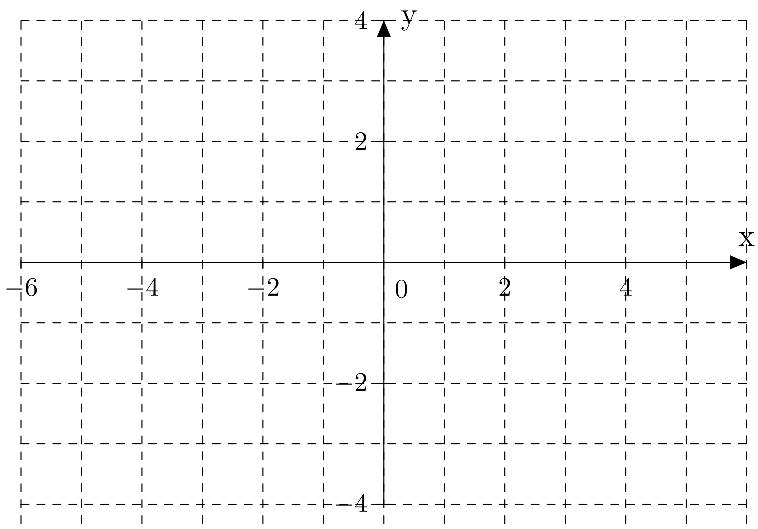
Observando o item 5, responda:

- O que significa, geometricamente, adicionarmos um valor real c à abscissa do vértice A para obtermos o vértice B?
- O que significa, geometricamente, adicionarmos um valor real d à ordenada do vértice A para obtermos o vértice D?
- É possível obter um quadrado? Se for possível, qual a relação entre os parâmetros para que isso ocorra?

ATIVIDADE III: Localizar vértices de um paralelogramo no plano cartesiano.

Sejam A, B, C e D vértices do paralelogramo $ABCD$. Em cada uma das situações abaixo, são dados três dos quatro vértices, determine o vértice que falta. Utilize o plano cartesiano para obter o paralelogramo em cada uma das situações:

1) $A_1(0,0)$, $B_1(0,3)$ e $C_1(2,1)$
2) $A_2(-1,1)$, $B_2(-1,-3)$ e $D_2(1,3)$
3) $A_3(2,3)$, $C_3(-2,-2)$ e $D_3(-2,3)$
4) $B_4(0,4)$, $C_4(1,4)$ e $D_4(-1,0)$
5) $A_5(a,b)$, $B_5(a+c,b)$ e $D_5(a+e,b+d)$. Sendo a, b, c, d e e números reais.



Observando o item 5, responda:

- É possível obtermos quadrados com esta configuração? Que valores de e e d, tornam isto possível?
- É possível obtermos retângulos com esta configuração? Que valores de e e d, tornam isto possível?

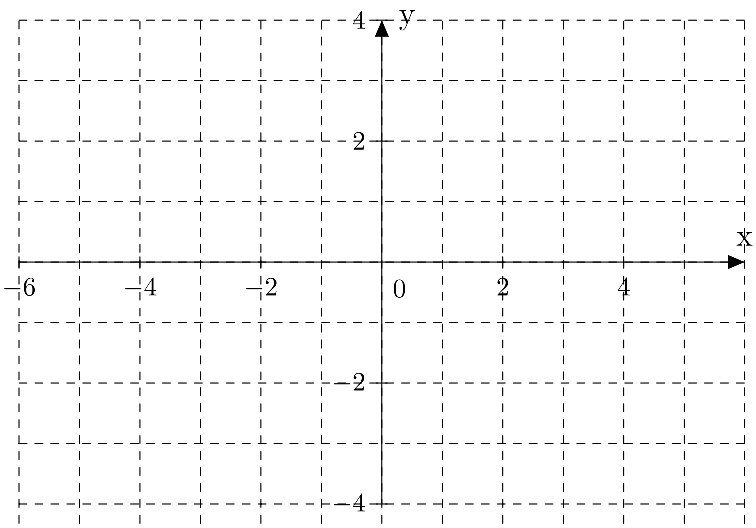
ATIVIDADE IV: Localizar vértices de um quadrado, um retângulo e um paralelogramo dado sua diagonal.

Sejam A, B, C e D vértices do quadrilátero $ABCD$. Em cada uma das situações abaixo, são dadas as coordenadas dos vértices que formam uma das diagonais do quadrilátero. Determine, os dois vértices que faltam para obter um quadrado, um retângulo e um paralelogramo. Utilize o plano cartesiano para obter os quadriláteros:

1) $A_1(0,0)$ e $C_1(2,1)$

2) $B_2(-1,1)$ e $D_2(1,3)$

3) $A_3(a,b)$ e $D_3(a+e,b+d)$. Sendo a, b, c, d e e números reais.



Observando o item 5, responda:

- É sempre possível obtermos quadrado, retângulo e paralelogramo dada uma de suas diagonais? Se for possível, quantos quadrados, retângulos e paralelogramos podemos obter?

- Descreva o processo utilizado para obter cada uma das figuras?

ATIVIDADE V: Localizar segmentos orientados no plano cartesiano.

Sejam A a origem e B a extremidade de um segmento orientado, construa um segmento orientado de origem C e extremidade D paralelo ao segmento orientado dado em cada uma das situações abaixo.

1) $A_1(0,0)$ e $B_1(0,3)$

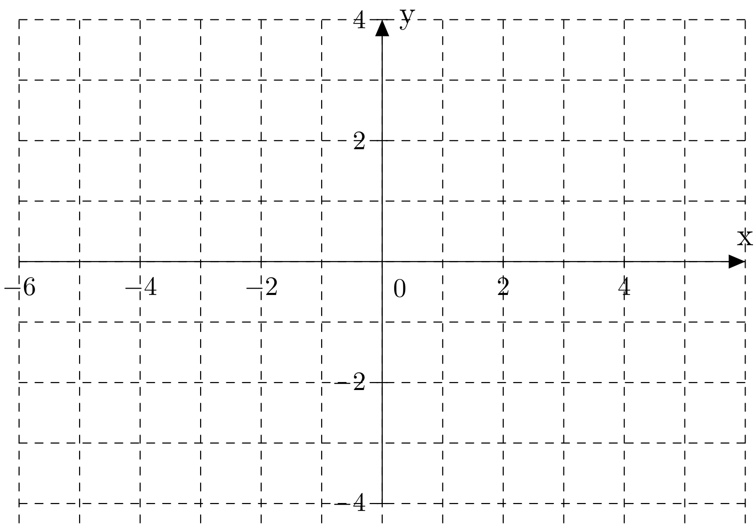
2) $A_2(-1,1)$ e $B_2(-1,-3)$

3) $A_3(3,3)$ e $B_3(-2,-2)$

4) $A_4(-1,0)$ e $B_4(0,4)$

5) $A_5(0,0)$ e $B_5(c,d)$.Sendo a e b números reais.

6) $A_6(a,b)$ e $B_6(a+2*c, b+2*d)$. Sendo a, b, c e d números reais.



Observando o item 5 e 6, responda:

- Os segmentos orientados obtidos são paralelos? Têm o mesmo comprimento?
- É possível fazer uma modificação nas coordenadas do ponto B para que os segmentos dos itens 5 e 6 tenham o mesmo comprimento? Qual?

ATIVIDADE VI: Segmentos orientados equipolentes no plano cartesiano

Sejam A a origem e B a extremidade de um segmento orientado, construa um segmento orientado de origem C e extremidade D equipolente ao segmento orientado dado em cada uma das situações abaixo.

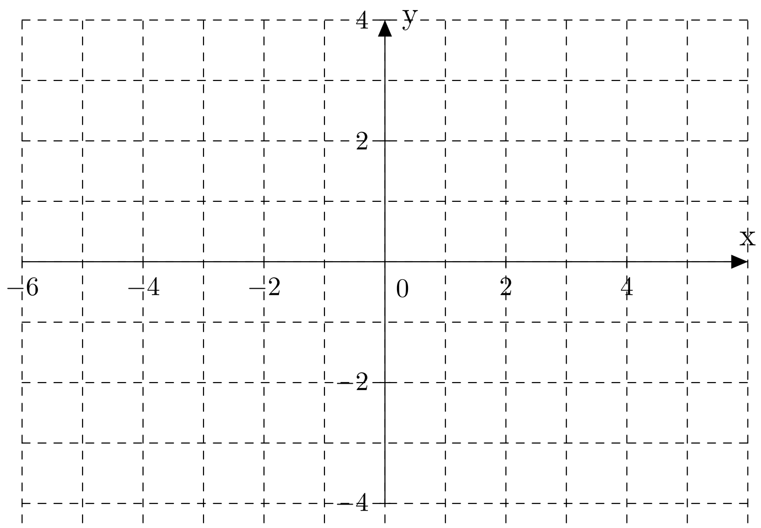
1) $A_1(-1, 1)$ e $B_1(-1, -3)$

2) $A_2(3, 3)$ e $B_2(-2, -2)$

3) $A_3(-1, 0)$ e $B_3(0, 4)$

4) $A_4(0, 0)$ e $B_4(c, d)$.Sendo a e b números reais.

5) $A_5(a, b)$ e $B_5(a + c, b + d)$. Sendo a, b, c e d números reais.



Observe os itens construídos acima e responda:

- O quadrilátero de vértices $ABCD$ é um paralelogramo?
- O quadrilátero de vértices $ABDC$ é um paralelogramo?

ATIVIDADE VII: Localizar vetores no plano cartesiano.

Dados o vetor $\overrightarrow{u}$ e A sua origem, localize no plano cartesiano cada um dos vetores abaixo.

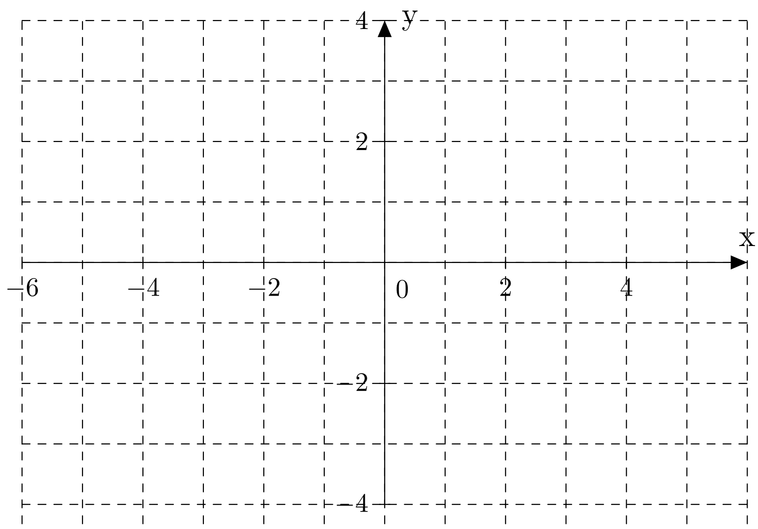
1) $A_1(-1,1)$ e $\overrightarrow{u_1} = (2,3)$

2) $A_2(3,3)$ e $\overrightarrow{u_2} = (2,3)$

3) $A_3(-1,0)$ e $\overrightarrow{u_3} = (2,3)$

4) $A_4(0,0)$ e $\overrightarrow{u_4} = (c,d)$.Sendo c e d números reais.

5) $A_5(a,b)$ e $\overrightarrow{u_5} = (c,d)$. Sendo a, b, c e d números reais.



Em cada um dos itens acima, a origem e a extremidade do vetor $\overrightarrow{u}$ construido é A e B, respectivamente. Se $A = (x_a, y_a)$ e $B = (x_b, y_b)$ então é correto afirmar que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (x_b - x_a, y_b - y_a)$?

ATIVIDADE VIII: Resolver exercícios da Física que envolva os conceitos básicos de vetores explorados nesta sequência didática.

Um barco está com motor funcionando em regime constante; sua velocidade em relação à água tem modulo igual a $5m/s$. A correnteza do rio movimenta-se em relação às margens com $2m/s$, constante. Determine o módulo da velocidade do barco em relação às margens em quatro situações distintas:

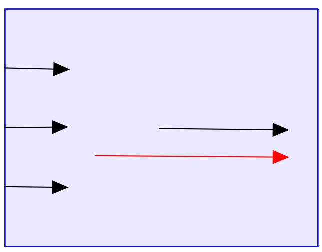
a) o barco navega paralelo à correnteza e no seu próprio sentido;

b) o barco navega paralelo à correnteza e em sentido contrário;

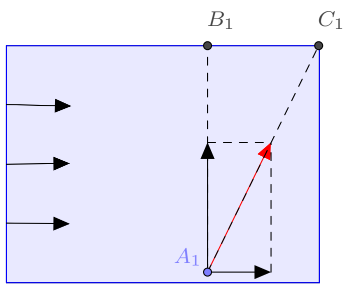
c) o barco movimenta-se mantendo seu eixo numa direção perpendicular à margem;

d) o barco movimenta-se indo de um ponto a outro situado exatamente em frente, na margem oposta.

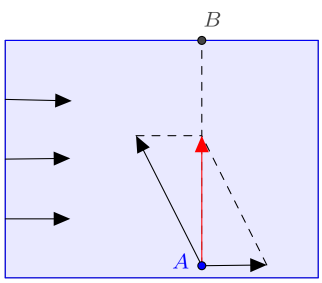
Observe cada uma das figuras abaixo e associe ao item que melhor represente a situação problema proposta acima.(o vetor vermelho representa a solução do problema) Resolva o problema.



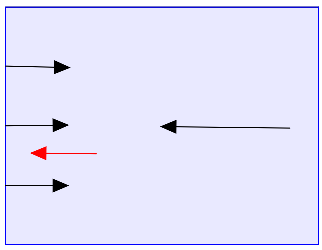
( )



( )



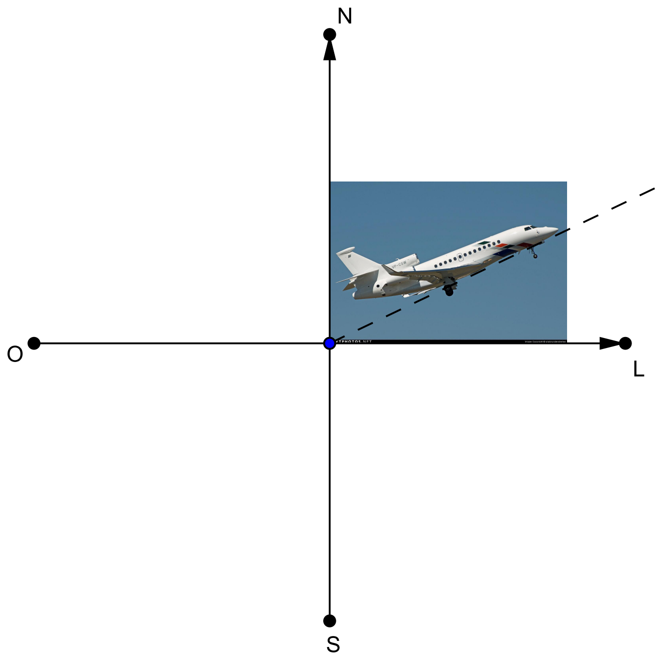
( )



( )

ATIVIDADE IX: Resolver exercícios da Física que envolva os conceitos básicos de vetores explorados nesta sequência didática.

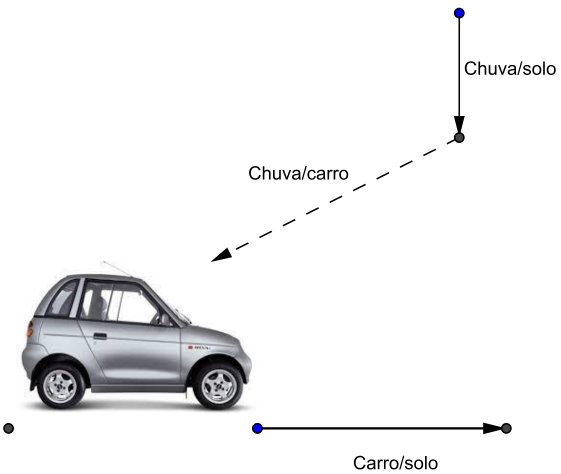
Um avião se desloca numa direção que faz um ângulo de 30° com a direção leste-oeste, com velocidade de $200 m/s$, conforme a figura. Determine as componentes da velocidade do avião nas direções norte-sul e leste-oeste.



E, se avião se deslocar com a mesma velocidade, numa direção que faz um ângulo de 150° com a direção leste-oeste? Resolva o problema.

ATIVIDADE X: Resolver exercícios da Física que envolva os conceitos básicos de vetores explorados nesta sequência didática.

Num dia sem vento, a chuva cai verticalmente em relação ao solo com velocidade de $10m/s$. Um carro se desloca horizontalmente com $20m/s$ em relação ao solo. Determine o módulo da velocidade da chuva em relação ao carro.



Desenhe sobre um plano cartesiano os vetores velocidades do problema e determine qual o objeto matemático que lhe dará a solução para o problema. Resolva o problema.

Capítulo V

Utilização do Geogebra no desenvolvimento do assunto *Vetores*

O Geogebra[3] é um programa de geometria dinâmica onde é possível obter dinamismo nas construções geométricas e, desta forma, obter generalizações sobre as mesmas.

As atividades propostas no capítulo anterior ficam mais interessantes quando podemos obter de forma rápida diversas situações com as mesmas condições iniciais. Para isto, o professor necessita de uma sala com computadores onde os alunos poderão fazer as construções e/ou um data show para exibir as atividades feitas pelo professor, de forma dinâmica.

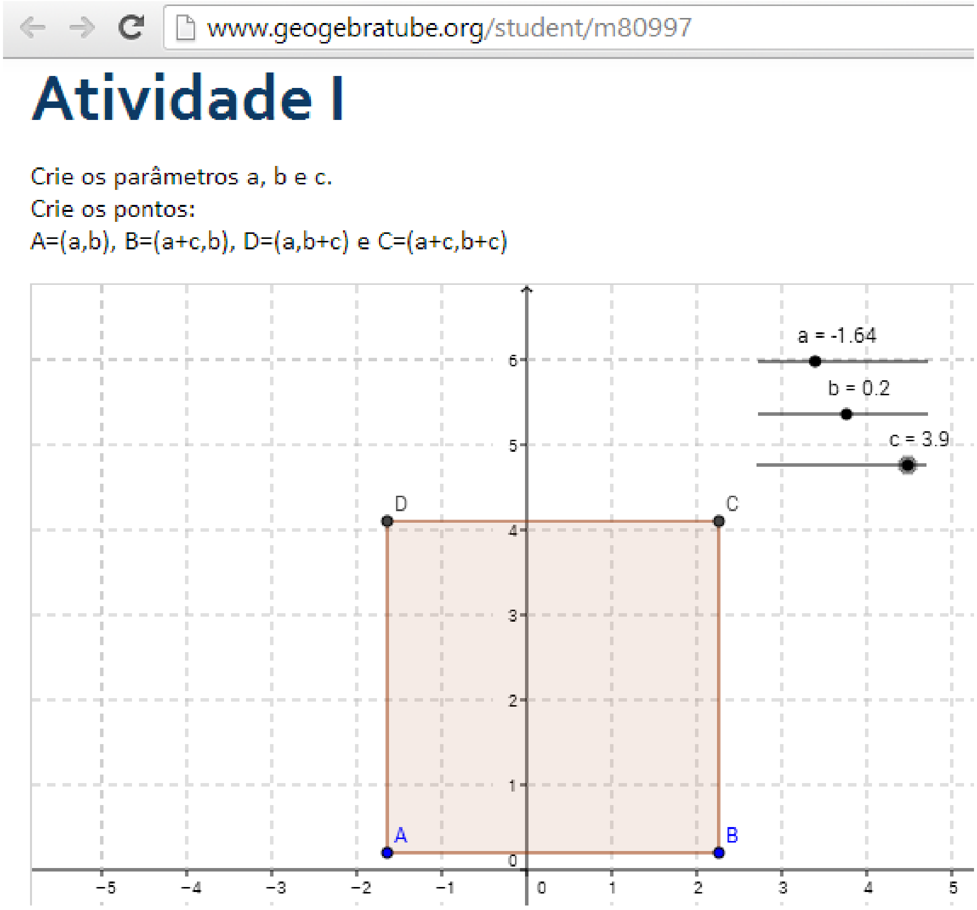
Para professores que nunca trabalharam com um programa de gemetria dinâmica, temos a opção de construções prontas através dos applet's associados às atividades, de I a VII, propostas no capítulo IV. Para isto, é necessária ter a internet como instrumento de trabalho.

- Atividade I: http://www.geogebratube.org/student/m80997;
- Atividade II: http://www.geogebratube.org/student/m89201;
- Atividade III: http://www.geogebratube.org/student/m89213;
- Atividade IV: http://www.geogebratube.org/student/m89122;
- Atividade V: http://www.geogebratube.org/student/m71081;
- Atividade VI: http://www.geogebratube.org/student/m81004;
- Atividade VII: http://www.geogebratube.org/student/m71097;

Os applet's foram construídos para que o professor dê dinamismo às aulas e possa dispor do tempo de aula para fazer as discussões sobre o que há de essencial em cada uma das atividades.

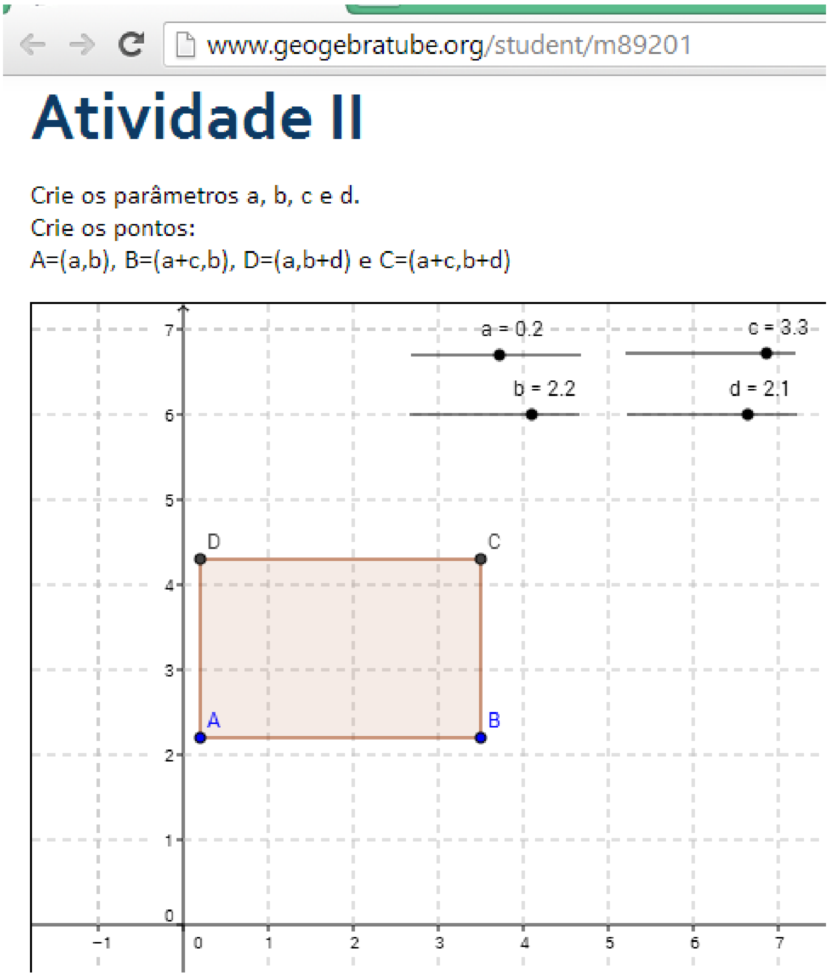
[3] O programa para fazer as construções pode ser baixado no site: http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/

No applet da atividade I, a primeira observação a ser feita é que os lados do quadrado são paralelos aos eixos coordenados.



No final da página é solicitado que se movimente os parâmetros a, b e c. Ao movimentar o parâmetro a, observamos que o quadrado se move para direita e para esquerda, já o parâmetro b faz com que o quadrado se mova para cima e para baixo e o parâmetro c faz com que o comprimento da diagonal, e consequentemente o lado do quadrado se altere.

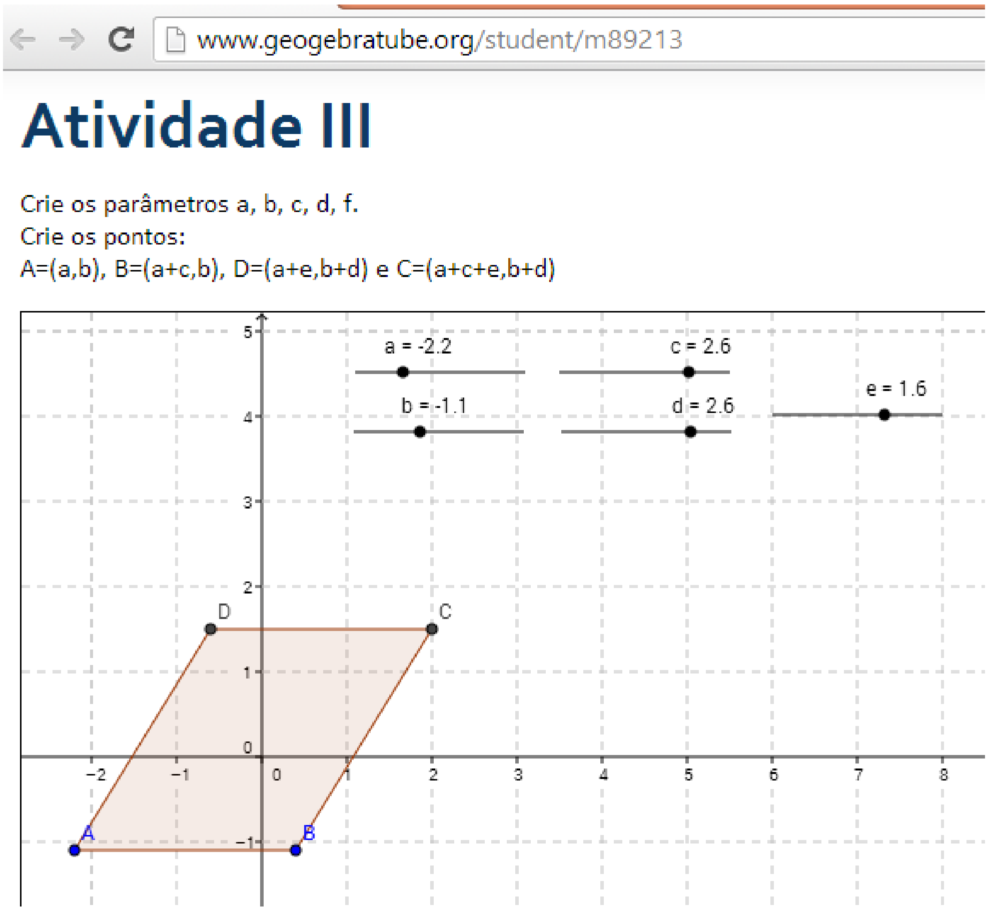
No applet da atividade II, a primeira observação a ser feita é que os lados do retângulo são paralelos aos eixos coordenados.



No final da página é solicitado que se movimente os parâmetros a, b, c e d. Ao movimentar o parâmetro a, observamos que o retângulo se move para direita e para esquerda, o parâmetro b faz com que o retângulo se mova para cima e para baixo, já o parâmetro c faz com que comprimento do lado na direção horizontal se altere e o parâmetro d faz com que o comprimento do lado na direção vertical se altere. Após estas observações, questionar se é possível obter quadrados a partir destes retângulos. Se possível, quais devem ser as relações entre os parâmetros a, b, c e d.

Depois de aplicada estas duas atividades seria interessante questionar o que aconteceria, com relação às coordenadas dos vértices do quadrilátero, se os lados não fossem paralelos aos eixos coordenados.

No applet da atividade III, a primeira observação a ser feita é que um dos lados do paralelogramo é paralelo ao eixo das abscissas.

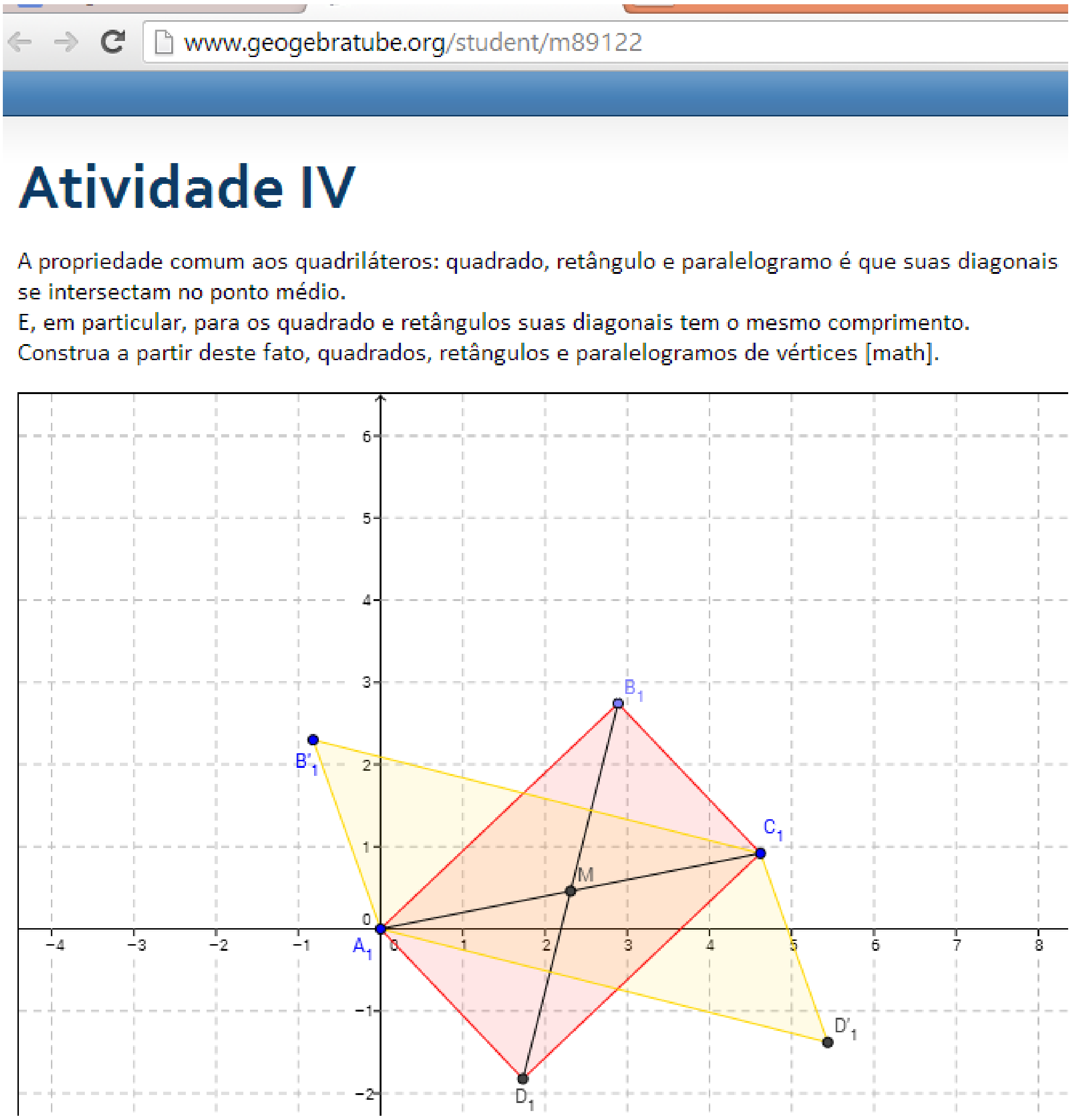


No final da página é solicitado que se movimente os parâmetros a, b, c, d e e. Os fatos observados são que, o parâmetro:

- a faz com que o paralelogramo se mova para direita e para esquerda;
- b faz com que o paralelogramo se mova para cima e para baixo;
- c faz com que o comprimento do lado na direção horizontal se altere;
- d faz com que os pontos C e D se movam verticalmente;
- d faz com que os pontos C e D se movam horizontalmente.

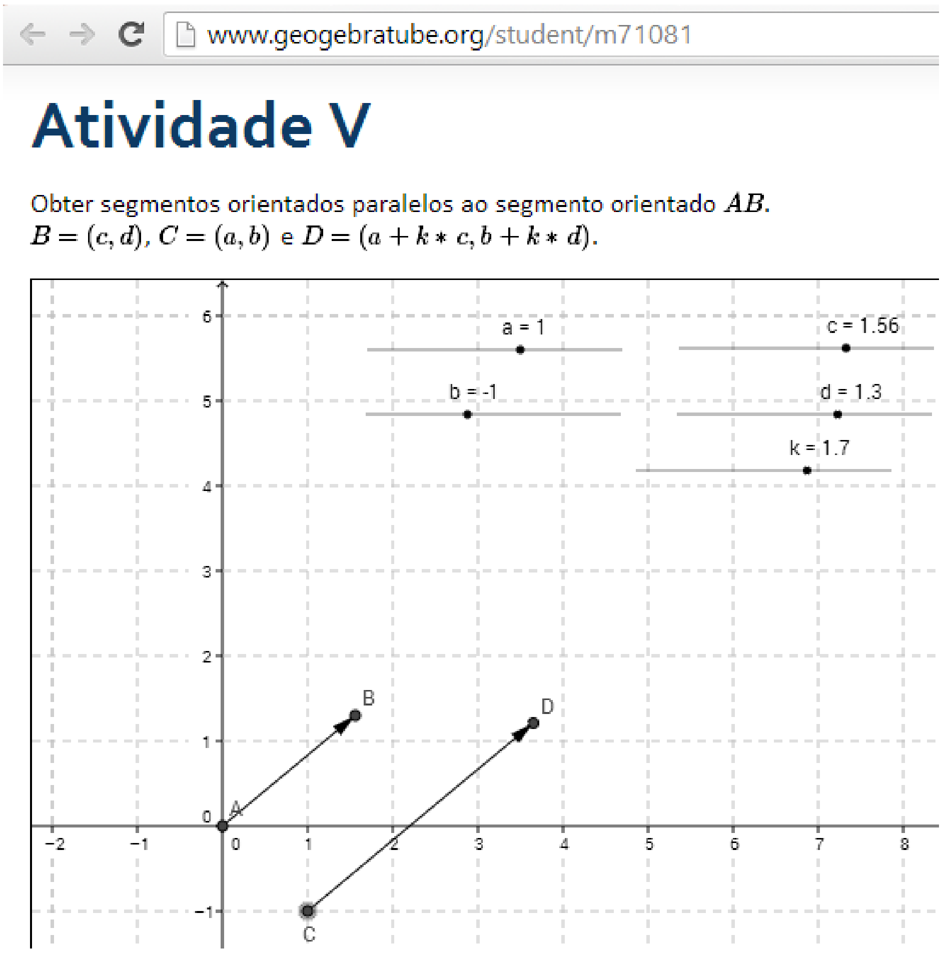
Depois de aplicada esta atividade seria interessante questionar se é possível obter retângulos e/ou quadrados. Caso seja possível, qual à relação entre os parâmetros para que isto ocorra.

No applet da atividade IV,



é solicitado que se movimente os pontos A_1, B_1 e C_1, depois mova o ponto B_1'. Os fatos observados são que, independente da movimentação feita em quaisquer dos pontos da figura, os pontos A_1 e C_1 são vértices pertencentes aos dois quadriláteros e qualquer movimentação feita com o ponto B_1, só obtemos retângulos e quadrados. Depois de aplicada esta atividade seria interessante questionar se é possível obter retângulos e/ou quadrados movimentando o vértice B_1' e concluir qual o objeto geométrico que comprova este fato.

No applet da atividade V,



é solicitado que se movimente os parâmetros a, b, c, d e k. Os fatos observados quando é feita a movimentação é que, o parâmetro:

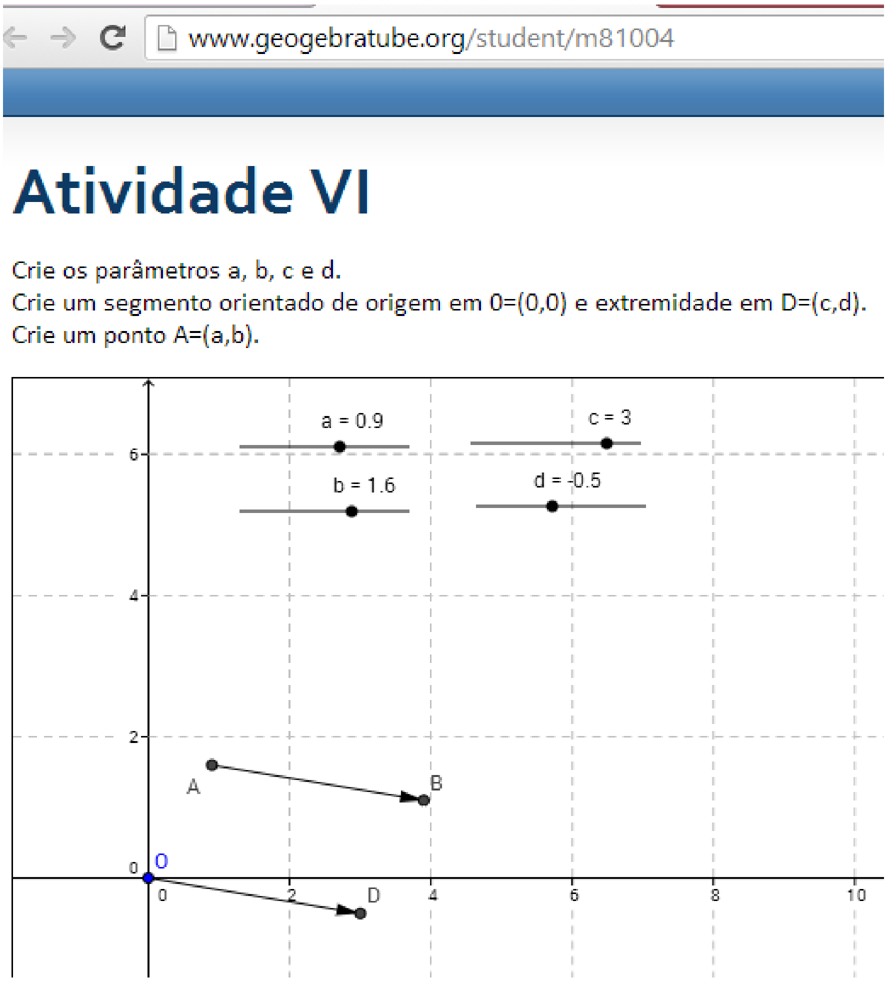
- a faz com que o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ se mova para direita e para esquerda;
- b faz com que o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ se mova para cima e para baixo;
- c faz com que as extremidades B e D dos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ se movam na horizontal sem que se altere as direções e sentidos dos segmentos;
- d faz com que as extremidades B e D dos segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e

$\overrightarrow{CD}$ se movam na vertical sem que se altere as direções e sentidos dos segmentos;

- k faz com que o segmento orientado $\overrightarrow{CD}$ se mova sem alterar sua direção, mas altera o sentido e/ou o comprimento;

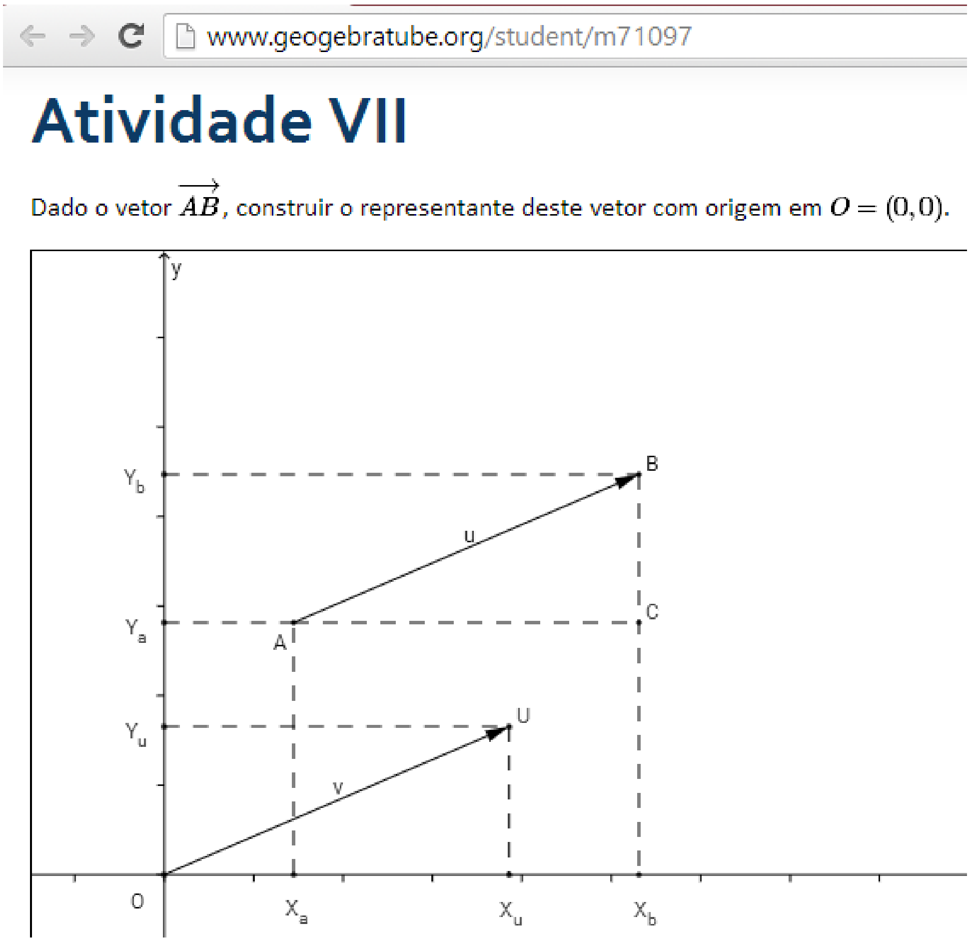
Depois de aplicada esta atividade seria interessante questionar se é possível fazer com que os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tenha mesma direção, sentido e comprimento. Caso seja possível, o que acontecerá com as coordenadas do ponto D.

No applet da atividade VI,



movimentando os parâmetros a, b, c e d obteremos os questionamentos feitos sobre a atividade V.

No applet da atividade VII,



movimentando os pontos A e B observamos que as direções, sentido e comprimento dos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{OU}$ são sempre iguais.
Depois de aplicada a atividade observar que temos uma infinidade de segmentos orientados que podemos utilizar como representante de um vetor. Verificar qual a relação entre as coordenadas de um vetor com origem na origem do plano cartesiano e outro igual a ele com origem em qualquer ponto do plano cartesiano.

O ideal é que sua construa os applet's para os problemas de Física, que os tornarão mais atrativos para o alunos além de tornar a sua compreensão mais simples.

Capítulo VI

Relato de uma experiência

Inicialmente, quando falei sobre este projeto com o meu orientador pensei em aplicar as atividades que foram sugeridas no trabalho. Formei uma turma no CMRJ com alunos do 9º ano, escolhidos de forma aleatória, e comecei a aplicar as atividades. Consegui aplicar as duas primeiras atividades, mas por motivos de organização do colégio, que tem diversas atividades fora da grade de aulas, não pude continuar. Resolvi relatar a experiências destas duas primeiras atividades que aconteceram da forma esperada.

Após aplicar as atividades I e II, com os alunos fazendo as construções em papel milimetrado, no último item de cada atividade vieram os questionamentos dos alunos: "Qual o valor que eu substituo para cada uma das letrinhas?". Este questionamento era esperado, o aluno precisa de números para concretizar exercícios. A minha resposta foi: "Cada um substitui o número que quiser." e complementei, "compare a sua figura com a do seu colega". Depois que eles fizeram e compararam, a maioria percebeu que as figuras estavam deslocadas de posição e que eram de tamanhos diferentes, na maioria das vezes.

Neste momento, apresentei as figuras construídas no GEOGEBRA, através dos parâmetros que aparecem no último item das atividades, e de forma simples, os alunos perceberam que quando eu variava os parâmetros, cada um destes alterava a figura original de alguma forma, ou deslocando a figura na horizontal, ou na vertical e/ou alterando seu tamanho, mas todas as figuras obtidas eram quadrados na atividade I e retângulos na atividade II.

A geometria dinâmica é um instrumento excelente para chegarmos a conclusões importantes na Geometria e em todos os assuntos da Matemática onde obter o maior número de resultados facilitarão a formalização do conteúdo. E, em especial, o assunto *vetores* necessita deste dinamismo, pois o deslocamento é o fenômeno físico que rege toda a construção de sua teoria.

Capítulo VII
Considerações Finais

Durante os meus 27 anos de profissão, sendo 19 anos de Colégio Militar, escuto reclamações dos meus colegas professores de Física, Química e outras disciplinas, sobre o que os alunos aprendem de Matemática ao longo do Ensino Fundamental.

Acho que precisamos modificar o que ensinamos, em Matemática, no Ensino Fundamental. O conteúdo a ser ensinado tem que abranger tópicos que faça o aluno fazer conexões com os conteúdos de Física, Química, Geografia e qualquer outra disciplina que se utiliza da Matemática como instrumento de cálculo.

A Matemática não pode continuar a ser apenas uma disciplina que dificulta a vida acadêmica do aluno, na verdade, ela tem que ser um facilitador.

Por este motivo escrevi esta proposta de inclusão do assunto *Vetores* no 9º ano do Ensino Fundamental, para minimizar os problemas da disciplina Física, ao longo do 1º ano do Ensino Médio.

A minha inspiração para pensar "como ensinar" vem da leitura de livros da Coleção Professor de Matemática da SBM, como por exemplo os citados na bibliografia deste trabalho [1][2]. Como atualmente estou lencionando no 9º ano do Ensino Fundamental, e por muito tempo lecionei no 1ºano do Ensino Médio, resolvi fazer esta proposta que está, atualmente, fazendo parte da minha vida profissional.

Bibliografia

[1] LIMA, E. L. *"Meu Professor de Matemática e outras histórias"*, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[2] LIMA, E. L. *"Matemática e Ensino"*, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 2001.

[3] LIMA, E. L. com colaboração de CARVALHO, P. C. P. *"Coordenadas no Plano"*, Coleção Professor de Matemática, SBM, Rio de Janeiro, 1992.

[4] LIMA, E. L. *"Geometria Analítica e Álgebra Linear"*, Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

[5] LEHMANN, C. H. *"Geometria Analítica"*, Editora Globo, Porto Alegre, 1979.

[6] FRENSEL, K.; DELGADO, J. *"Coordenadas e Vetores no Plano"*, Coleção PROFMAT, SBM, Rio de Janeiro, 2013.

[7] JUNIOR, F. R.; FERRARO, N. G.; SOARES, P. A. de T. *"Os Fundamentos da Física 1"*, Editora Moderna, 9ª edição.

[8] MACHADO, S. D. A. (ORG.) *"Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica"*, PAPIRUS EDITORA, São Paulo, 2011.

[9] BÚRIGO, E. Z.; GRAVINA, M. A.; BASSO, M. V. A.; GARCIA V. C. V. (ORG.) *"A Matemática na Escola: Novos Conteúdos, Novas Abordagens"*, Série Educação à Distância, UFRGS, Porto Alegre, 2012. Disponível em: .

[10] CARNEIRO, M. A. *"LDB fácil: leitura crítico-compreensiva artigo a artigo"* Vozes, 1998.

[11] MÓZER, G. S.; MOLON, J.; RODRIGUES, K. S. T.; OLIVEIRA, N. J.; MARQUES, R. A.; AMORIM, V. G. *"O curso de capacitação no CIEP-Centro Internacional de Estudos Pedagógicos"* UnB, 2013. http://simposio.profmat-sbm.org.br/docs/(ApresentacaoFinal).pdf

[12] http://www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/vetores/Objetos/Vetores_e_Operacoes_v2.0.3.swf