Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Ciências Exatas e Tecnologia
Curso de Pós-graduação em Matemática

Manoela do Vale de Oliveira

Congruência: uma experiência com alunos surdos

Rio de Janeiro

2014

Manoela do Vale de Oliveira

Congruência: uma experiência com alunos surdos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Leonardo Tadeu Silvares Martins

Doutor em Matemática - UFF

Rio de Janeiro

2014

Oliveira, Manoela do Vale

Congruência: uma experiência com alunos surdos / Manoela do Vale Oliveira - 2014

63.p

1. Matemática 2. Ensino de Matemática. I.Título.

CDU xxx.xx

Manoela do Vale de Oliveira

Congruência: uma experiência com alunos surdos

Trabalho de Conclusão de Curso apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 25 de agosto de 2014

BANCA EXAMINADORA

Leonardo Tadeu Silvares Martins

Doutor em Matemática - UFF

Aline Caetano da Silva Bernardes

Mestre em Matemática Aplicada - UFRJ

Leo Akio Yokoyama

Doutor em Educação Matemática - UNIBAN

Rosiane Soares Cesar

Mestre em Matemática - UFF

Silas Fantin

Doutor em Matemática - USP

Ao meu esposo Aldair José de Oliveira e a minha filha Gabriela do Vale de Oliveira

Resumo

Por muitos anos, o ensino de Geometria foi colocado em segundo plano nos ensinos Fundamental e Médio, porém esse cenário vem sendo modificado uma vez que estudos comprovam que o ensino de Geometria promove o desenvolvimento da percepção visual e do raciocínio lógico. E como é o ensino deste conteúdo para alunos surdos? Os alunos surdos têm uma percepção visual mais apurada do que o ouvinte, pois a pessoa surda não possui um dos sentidos, a audição, sendo a visão o seu canal de comunicação. Mas, o ensino de Geometria para surdos também ficou em segundo plano, pois, por questões filosóficas e políticas, os alunos deveriam primeiro aprender a oralizar para poder aprender os conteúdos. Mas esse cenário vem sendo modificado, uma vez já que se reconhece uma língua visoespacial natural da comunidade surda, a Língua Brasileira de Sinais, LIBRAS. A proposta desse trabalho é sugerir algumas atividades para construir o conceito de congruência de segmentos usando a construção geométrica para os alunos surdos. As atividades foram aplicadas a uma classe de alunos de uma escola de surdos.

Palavras-chave: Educação de Surdos; Geometria; Isometria

Agradecimentos

A Deus, que através da fé, permitiu que eu conseguisse prosseguir com meus estudos e que me concedeu o direito de gerar o maior presente da minha vida: minha filha.

Aos meus pais, Maria Carolina e Zacarias, por ter dado e incentivado a minha educação. Principalmente a minha mãe que incentivou a me tornar professora.

Ao meu esposo Aldair que me apoiou muito durante esses dois anos de mestrado e principalmente para terminar esse trabalho sendo companheiro, amigo e não me deixando desistir.

Ao meu orientador, Prof Leonardo Silvares, primeiramente por ter aceitado a me orientar e que com paciência, dedicação e carinho me orientou e motivou para realizar e terminar esse trabalho.

A Ivana Cortês que se tornou uma grande amiga e por ser companheira de estudo.

Aos meus colegas de turma que se revelaram ser grandes companheiros e amigos, ajudando um ao outro nos momentos de dificuldade.

Aos professores da UNIRIO, principalmente os professores Silas Fantin, Ronaldo Busse, Leonardo Silvares, Gladson Antunes, Fábio Simas, e José Cal Neto, pelas excelentes aulas.

Aos meus alunos do INES, foi por vocês que fiz esse trabalho.

Ao colega Edson Akira por ter me deixado a realizar a pesquisa na sua turma.

As minhas amigas do INES, Maria Dolores, Silene e Maria Isabel por me incentivar a fazer o Mestrado.

Muito obrigada!

Sumário

1 Prólogo

Vou iniciar contando um pouco da minha história com o Instituto Nacional de Educação de Surdos (INES), pois foi importante para a escolha do tema e da amostra do meu trabalho final de curso.

Em 2004, foi aberto um concurso para o INES, sobre o qual fui informada por meu atual marido, que na época era o meu namorado. Era um concurso somente para uma vaga de professor(a) de Matemática. Eu nem sabia que existia uma escola somente para alunos surdos, conhecia o Instituto Benjamin Constant, mas desconhecia o INES. Passei em 5^o lugar. Em setembro de 2005, fui convocada para assumir a vaga. Nem sabia aonde se localizava o INES, fiquei imaginando como deveria me portar com os alunos. A princípio vislumbrava que uma fala pausada seria importante para que os alunos pudessem fazer leitura labial. Ademais, sabia da existência da Língua Brasileira de Sinais (LIBRAS) e até conhecia o alfabeto. Comecei a trabalhar no dia 17 de novembro de 2005, no turno da noite, e verifiquei que estava num território muito diferente do que tinha imaginado.

Somente no primeiro dia um intérprete me auxiliou no desenvolvimento das aulas. Neste mesmo dia foi criado um sinal (espécie de apelido que identifica uma pessoa através de característica física ou emocional) para mim e cada um dos alunos foi se apresentando. A partir do segundo dia de trabalho lecionei sem o auxílio do intérprete. De fato, "tive que me virar" durante as três semanas últimas do ano letivo, pois o curso de LIBRAS que o INES oferta anualmente teve inicio somente em fevereiro do ano seguinte (2006). Nessas referidas semanas, aprendi o básico de LIBRAS para ensinar/relembrar as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) pois não haveria tempo hábil para ensinar mais nada.

No ano 2006 continuei no ensino noturno e comecei a frequentar o curso de LIBRAS. Lecionei no 2° segmento do Ensino Fundamental o qual a época tinha uma clientela de adultos que, em sua maioria, não sabiam executar a leitura labial e também tinham conhecimento restrito de LIBRAS. Além disso, alguns alunos tinham problemas motores e/ou neurológicos.

Houve momentos em que me senti incapaz como professora, pois os alunos não conseguiam compreender o que estava ensinando. No entanto obtive apoio das professoras mais experientes que me disseram que no início era assim mesmo, mas que não deveria desistir.

Com relação ao aprendizado de LIBRAS, aprendi no curso o básico para me comunicar no dia a dia. Como estava inserida numa Comunidade Surda pratiquei e ampliei meu vocabulário com os meus alunos. Entretanto, não me considero fluente na língua.

Com isso já se passaram 8 anos, já lecionei nos três turnos (manhã, tarde e noite), além de trabalhar por dois anos na oficina de matemática do ensino fundamental 1 (1° ao 5° ano). Em 2012 iniciei o mestrado e no ano seguinte o INES me concedeu uma licença para me dedicar somente ao mestrado. Neste sentido, sinto-me na obrigação de retornar ao meu trabalho com uma contribuição para o ensino dos alunos do Instituto. Desta forma esse trabalho foi idealizado para os meus alunos do INES ou alunos surdos de outras instituições.

Uma coisa que aprendi e que devo esclarecer que o termo *surdo-mudo* é um termo inadequado, pois mesmo as pessoas que nascem surdas são capazes de falar. Então, o termo que devemos usar é *somente surdo*.

2 Introdução e Motivação

Podemos observar que estamos imersos em um mundo em que a Geometria é facilmente identificada no nosso cotidiano. Seja através da observação de uma construção de um prédio ou mesmo na identificação da forma de um brinquedo infantil.

Assim, a Geometria é considerada a ciência do espaço, pois trabalha com formas e medições. Favorece a percepção espacial e a visualização, sendo conhecimento relevante para as diferentes áreas, permitindo que o aluno desenvolva sua percepção, sua linguagem e raciocínio geométrico de forma a construir conceitos.

Neste sentido, a Geometria certamente é um dos conteúdos matemáticos com grande potencialidade de se utilizar alternativas menos ortodoxas para o seu ensino. Ao invés de o professor ministrar sua aula utilizando somente a lousa, pode buscar diferentes maneiras para transmitir esse conhecimento. Ou seja, a geometria parece ser, dentro da matemática escolar, uma área particularmente propícia à realização de atividades de natureza exploratória e investigativa.

No tocante ao ensino de geometria para os surdos, o uso de recursos visuais é importante para o aprendizado desses alunos, uma vez que a comunicação é, prioritariamente, pelo campo visual. Assim, porque não ensinar a geometria? São inúmeros motivos históricos tanto no próprio ensino da geometria como na Educação de Surdos.

Assim, este trabalho apresenta algumas atividades para o ensino do conceito de congruência de segmentos que foram aplicadas em uma turma de alunos surdos usando a construção geométrica.

A seguir falaremos um pouco do Instituto Nacional de Educação de Surdos (INES); ensino da Geometria, mais especificamente o ensino da geometria para alunos surdos que é o objetivo do trabalho.

No capítulo 2 falaremos sobre a fundamentação teórica matemática do trabalho que se faz em cima do conceito de isometria para justificar o conceito de congruência que é trabalhado no ensino fundamental.

No capítulo 3 descreveremos as atividades que foram desenvolvidas pelos alunos surdos do INES , as conclusões das mesmas e propostas de atividades para serem aplicadas.

Finalizando com o capítulo 4 falaremos das conclusões obtidas neste trabalho de maneira em geral e algumas sugestões de outros estudos.

2.1 O Instituto Nacional de Educação de Surdos - INES

O Instituto tem 157 anos e foi criado por iniciativa do surdo francês Eduard Huet. É único em âmbito federal, como centro de referência nacional na área da surdez (1993), exercendo os papéis de subsidiar a formulação de políticas públicas e de apoiar a sua implementação pelas esferas subnacionais de governo, promovendo fóruns de debates, publicações, seminários, pesquisas e assessorias em todo território nacional. Possui uma vasta produção de material pedagógico, fonoaudiológico e de vídeos em língua de sinais, distribuídos para os sistemas de ensino.[1]

O Colégio de Aplicação (CAp/INES) oferece Educação Precoce (de zero a três anos), Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior através do Curso Bilíngue de Pedagogia. O CAp/INES funciona em três turnos (manhã, tarde e noite), oferecendo aos alunos o ensino regular numa proposta bilíngue, sendo a LIBRAS considerada a primeira língua e a língua de instrução no currículo da instituição e a Língua Portuguesa como segunda língua, nas modalidades de leitura e escrita, objetivando levar o aluno a alcançar competência comunicativa. O Cap/INES recebe somente alunos surdos com níveis de surdez severo (escuta sons fortes como latido do cachorro, avião, caminhão, serra elétrica, e não é capaz de escutar a voz humana sem a prótese auditiva) e profundo (escuta apenas os sons graves que transmitem vibração (helicóptero, avião, trovão)).[3]

A grade curricular do segundo segmento do Ensino Fundamental compõe-se das disciplinas da Base Nacional Comum e de uma parte diversificada, com as disciplinas LIBRAS e Inglês. As turmas são compostas no máximo por 15 alunos. A carga horária da disciplina Matemática do Ensino Fundamental do segundo segmento e Médio é composta por 5 tempos semanais de 45 minutos cada.

2.1.1 Currículo de Matemática

Observando o currículo de Matemática do Ensino Fundamental do segundo segmento e Médio do Instituto, há diferença no currículo do sexto ao oitavo anos comparado com os currículos das redes públicas e particulares. Geralmente, o conteúdo de frações e números decimais é lecionado no sexto ano. Diferentemente, no INES esse conteúdo é ensinado no sétimo ano. Além disso, números inteiros e equação do primeiro grau são ensinados no oitavo ano no Instituto. Sendo assim, os conteúdos que geralmente são ofertados no oitavo nas escolas regulares, no INES são diluídos no oitavo e nono anos do Ensino Fundamental. Em relação aos conteúdos de geometria são lecionados figuras planas: triângulo, quadrado e retângulo (sexto ano); Posições relativas de duas retas e Teorema de Tales (oitavo ano); ângulos, Polígonos regulares e triângulos (incluindo Teorema de Pitágoras) (nono ano). E, no Ensino Médio, Trigonometria e Geometria Espacial (prismas e Pirâmides).

2.2 Ensino de Geometria

A Geometria é um área de conhecimento da Matemática que, em nível básico, proporciona várias interconexões entre as diversas partes do currículo dessa ciência, interligando-se à Álgebra e à Aritmética, áreas fortemente presentes na Matemática da educação básica. O ensino da geometria promove ainda o desenvolvimento da percepção visual e raciocínio lógico.

Além disso, Lorenzato [8] ressalta que a Geometria faz parte do nosso cotidiano, mas "é preciso conseguir enxergá-la... mesmo não querendo, lidamos [...] com ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, proporcionalidade, medição [...]". A relação com a geometria dos objetos de nosso dia a dia é inevitável, mesmo que não percebamos os padrões abstratos e sua relação com as formas estudadas na Geometria.

Mesmo assim, no nosso sistema educacional público, ainda pode-se detectar que o ensino de geometria não se dá em sua plenitude, uma vez que geralmente os planejamentos tem como base os livros didáticos, ou seja, os livros didáticos contribuem na indução de estratégias de ensino, que por sua vez, deixam o conteúdo de geometria no final das obras. Essa disposição dos conteúdos atribui à geometria um caráter de mero complemento, apresentando-a de modo fortemente fragmentado, por assunto e série, sem conexão com a aritmética e a álgebra. Além disso, existem professores, devido à sua formação, têm tendência em pensar que a geometria é assunto para segundo plano [2].

Recentemente, alguns autores de livros didáticos modificaram a apresentação dos conteúdos, intercalando a geometria com as outras áreas, sugerindo que seja explorada ao longo do ano letivo. Alguns exemplos dessa abordagem são as coleções Tudo é Matemática [15], Matemática e Realidade [17] e Matemática Hoje é Feita Assim [14]. Essa modificação está acontecendo porque estudos esclarecem que a geometria promove o entendimento de diferentes conteúdos matemáticos, por isso pode ser trabalhada em conjunto com os demais conteúdos matemáticos. Dessa forma, os alunos entenderão melhor até mesmo o cálculo algébrico, que muitas vezes, parece ser abstrato.

De fato, a visão fragmentada da geometria vai perdendo espaço para uma abordagem mais contextualizada. Ou seja, a Geometria deixaria de ser um simples compêndio de nomenclaturas e fórmulas para uma Geometria que seja capaz de desenvolver, no aluno, o raciocínio lógico e organizado. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (1998), "os conceitos geométricos constituem parte importante do currículo de Matemática no Ensino, porque através deles, o aluno desenvolve um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que vive."

2.3 Ensino de Geometria para Alunos Surdos

Em relação ao ensino de Geometria para alunos surdos, além dos problemas que destacamos na seção anterior, se faz necessário compreender as vertentes pedagógicas na Educação de Surdos.

Basicamente foram três filosofias que influenciaram e/ou influenciam a Educação de Surdos no Brasil, na ordem do seu surgimento, que são o Oralismo, a Comunicação Total e o Bilinguismo.

O Oralismo é uma filosofia que tem como o principal objetivo a oralização e a integração da pessoa surda a comunidade ouvinte, pois considera a surdez uma patologia localizada, uma deficiência, e a pessoa surda, como um deficiente que deve ser tratado por profissionais por meio da reabilitação da fala, para integrar-se à sociedade majoritária ouvinte [13].

Assim, a educação de pessoas surdas, nessa filosofia, faz com que a aprendizagem das disciplinas escolares sejam colocadas em segundo plano, uma vez que enfatizava apenas o aspecto comunicacional destes alunos, importando somente o fato de torná-los aptos a utilizar uma língua, de forma oralizada. Existem vários estudos [6],[7] que apontam os fracassos dessa filosofia, como resultado, podemos citar que a concentração exclusiva da educação na oralização, fez com que o nível da educação dos surdos caiu muito em relação ao nível do ouvinte.

Com o fracasso da filosofia educacional do Oralismo, surge uma nova filosofia que não enfatiza a linguagem oral, mas todo e qualquer meio de comunicação, chamada de Comunicação Total.

A Comunicação Total é uma filosofia que visa a educação de surdos tendo como preocupação principal facilitar a comunicação para que a criança surda possa adquirir linguagem. Para que a comunicação ocorra, todas as estratégicas são válidas: gestos naturais, língua de sinais, alfabeto digital, expressão facial, linguagem oral, ou seja qualquer estratégia que possa transmitir ideias e conceitos [6]. O que acontece na prática é o uso simultâneo de dois códigos: a língua oral e a língua de sinais (no caso do Brasil, língua portuguesa e LIBRAS). Vale ressaltar que a LIBRAS tem estrutura gramatical diferente da Língua Portuguesa, ou seja, usar os sinais de LIBRAS na estrutura da Língua Portuguesa, o que é chamado de Português sinalizado [7].

Um aspecto positivo dessa filosofia foi a melhora da comunicação entre pessoas surdas e a comunidade ouvinte. Entretanto, os problemas relacionados à leitura e à escrita dos alunos surdos não foram resolvidos. Outro aspecto positivo da Comunicação Total foi o de deslocar o foco da surdez como patologia passando a enxergar como uma característica que interfere no desenvolvimento afetivo, social e cognitivo da pessoa surda. A surdez é vista como uma característica natural, traço de qualidade do ser humano que deve ser respeitado e a pessoa surda é vista como diferente, o que significa admitir a existência da comunidade surda, da língua de sinais, das identidades surdas e de uma forma diferente de perceber o mundo: o das experiências visuais. Assim, surge um novo conceito para a surdez que é o oposto ao conceito clínico, o conceito social que tem como visão de minoria sociolinguística e cultural de surdez [13]. Com o reconhecimento e aceitação da língua de sinais como sendo a língua natural dos surdos surge uma nova filosofia para a educação, o bilinguismo, no qual a língua portuguesa e língua de sinais convivem lado a lado, mas não simultaneamente.

O Bilinguismo é uma filosofia de ensino, cujo discurso propõe a diversidade cultural e a aceitação social do surdo por meio do bilinguismo (duas línguas, Língua de Sinais e segunda língua) [13]. Assim, Educação Bilíngue de Surdos consiste em reconhecer a coexistência de duas línguas ao redor da criança surda e do direito que esta tem de adquirir uma língua natural, LIBRAS e também de aprender a língua oficial do Brasil na modalidade escrita [13].

O quadro a seguir, extraído de Cunha Coutinho [7], resume as principais ideias referentes às três modalidades de educação dos surdos com cada uma das filosofias citadas.

Filosofia	Visão do Surdo	Visão de língua de sinais	Procedimento escolar
Oralismo	O surdo é deficiente, um ouvinte que não deu certo.	A língua de sinais é considerada uma mímica, sem estrutura gramatical. Seu uso prejudica a aprendizagem da língua oral.	Práticas reabilitadoras com o objetivo de aproximar o surdo do ouvinte. O objetivo maior é o domínio da língua oral como forma de integração na comunidade ouvinte.
Comunicação Total	O surdo é uma pessoa com uma marca que interfere em suas relações sociais e em seu desenvolvimento afetivo e cognitivo.	A língua de sinais é utilizada como recurso para tornar visível a estrutura da língua majoritária, propiciando o surgimento de diversos códigos diferentes da língua de sinais.	Utilização de todas as formas de comunicação: gestos naturais, línguas de sinais, alfabeto digital, expressão facial, acompanhados da fala emitida através de aparelhos de amplificação sonora individuais.
Educação Bilíngue	O surdo é diferente, pertence a uma minoria linguística.	A língua de sinais é considerada uma língua com todos os níveis linguísticos (fonológico, sintático e semântico) presentes nas línguas orais.	Valorização da língua de sinais como 1ª língua do surdo e utilização desta como língua de instrução. A língua majoritária assume uma perspectiva de 2ª língua com ênfase na modalidade escrita e/ou oral.

Com a proposta de uma Educação Bilíngue, as disciplinas de fato focaram para o seu próprio conteúdo, pois o objetivo principal deixou de ser a oralização desses alunos. Mesmo assim o conteúdo de Matemática é focado nas áreas de Aritmética e Álgebra, deixando sempre a Geometria em segundo plano. Porém, essa omissão em relação ao ensino da geometria contrasta com a percepção viso-espacial, que é a forma pela qual o aluno surdo adquire o conhecimento, sendo que esta modalidade é muito mais desenvolvida nos surdos do que nos ouvintes [10] ,[9]. E esta forma de percepção é, reconhecidamente, uma das mais necessárias à compreensão dos conteúdos de Geometria.

Nesse sentido, como são adquiridos conceitos geométricos por esses alunos na sua língua materna, ou seja, em LIBRAS? E como eles expõem os seus pensamentos na segunda língua, ou seja, português escrito? Para auxiliar na busca por respostas a esses questionamentos, pretendemos, no presente trabalho, propor atividades que levem à construção do conceito geométrico de congruência de segmentos.

A escolha de trabalhar o conceito de congruência foi feita pois:

- É uma relação entre objetos muito perceptível do ponto de vista visual, o que pode ser interessante como primeiro contato com a geometria, além de poder ser utilizada na solução de diversos problemas.
- O fato de ser muito visual é, em si, um grande apelo ao uso com surdos.
- A congruência está por trás, de certa forma, de alguns objetos muito importantes, como o círculo (conjunto dos pontos X tais que os segmentos XC, onde C é o centro, são congruentes), que é ponto central nas construções geométricas.

3 Fundamentação Teórica Matemática

Essa seção é voltada para subsidiar, em nível de teoria matemática, o professor. Assim, será desenvolvido o conceito de isometria para definir o conceito de congruência, uma vez que no ensino básico é trabalhado somente o conceito por meio de argumentos físicos/mecânicos. O professor não deve aplicar essa teoria de isometria ao aluno do ensino básico.

O conceito de congruência é usualmente apresentado no ensino básico na forma, segundo Dante [16]:

> “Imagine duas figuras tal que seja possível transportar uma sobre a outra de modo que coincidam. Dizemos que essas figuras são congruentes.”[16]

> “Dizemos que duas figuras planas são congruentes quando podemos sobrepô-las exatamente, isto é sem “faltar” nem “sobrar” um ponto em nenhuma das duas, mesmo que isso seja necessário virar uma delas “ ao avesso” (isto é, quando uma é imagem da outra refletida num espelho).”[18]

Ou seja, essas duas definições apresentadas, definem congruência por meio de argumentos físicos/mecânicos como “pode ser sobreposta”, “superposição”, “transportar” etc, apelando fortemente para a intuição física e visual. Até mesmo Euclides, em seu livro Elementos, na proposição IV, que estabelece a congruência de dois triângulos, usa uma prática experimental de deslocamento e coincidência de figuras.[12].

Porém, existe uma definição mais formal ou precisa para o conceito de congruência que não apela para a intuição visual, que pode ser enunciada, a qual é apresentada geralmente no ensino superior. Isto não significa que o conceito de congruência usado no Ensino Fundamental seja “fraco” ou “ruim”, apenas é adequada para o nível, porém do ponto de vista formal, as definições apresentadas carecem de maior sustentação, pois a própria condição de sobreposição acaba sendo mero sinônimo de congruência. Além disso, não permite obter algumas conclusões que serão apresentadas aqui.

A própria noção de "deslocamento" ou "sobreposição" pressupõe que não haja deformação, isto é, que nenhuma medida (comprimento de um segmento, medida de um ângulo, etc.) seja alterada, mas para isso, precisamos estudar o que seriam esses deslocamentos sem deformação. Assim, vamos introduzir o conceito de isometria.

3.1 Isometrias

Etimologicamente, a palavra isometria significa a "mesma medida". Mas para definir a isometria, vamos falar sobre o que é uma transformação e distância.

Uma transformação no plano π é uma função $T : \pi \to \pi$ que associa a cada ponto P do plano em outro ponto $P' = T(P)$ do plano chamado de imagem de P por T .

Um tipo interessante de transformações são aquelas em que pontos diferentes possuem imagens diferentes e que cada ponto do plano é imagem de um outro ponto desse plano. Essas transformações são ditas *bijetoras.*

Se dados dois pontos distintos P e Q (isto é, $P \neq Q$), tivermos $T(P) \neq T(Q)$, isto é, se pontos diferentes possuírem imagens diferentes, a transformação será dita *injetora.* Como consequência, pode-se dizer que se $T(P) = T(Q)$, então $P = Q$.

Além disso, precisamos que cada ponto do plano seja imagem de algum ponto, o que significa que para todo $Y \in \pi$, existe P tal que $T(P) = Y$. Transformações assim são ditas *sobrejetoras.*

Portanto, as transformações bijetoras são as que são injetoras e sobrejetoras.

Uma transformação bijetora $T : \pi \to \pi$ possui uma inversa $T^{-1} : \pi \to \pi$ definida de forma que, para todo ponto P' do plano, $T^{-1}(P')$ é o único ponto P do plano tal que $T(P) = P'$.

A transformação identidade $Id : \pi \to \pi$ é definida por $Id(P) = P$ para todo ponto P do plano.

Além disso, dadas duas transformações T_1 e T_2 no plano definimos a composta $T_2 \circ T_1 : \pi \to \pi$ como a transformação que a cada ponto P do plano, associa o ponto $P' = T_2 \circ T_1(P) = T_2(T_1(P))$. E em particular, para qualquer transformação bijetora T, temos $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = Id$.

O conceito de distância é formalizado como uma função que associa a dois pontos do plano um número não negativo, denotado por $d(A, B)$, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $d(A, B) \geq 0$;
2. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
3. $d(A, B) = d(B, A)$;
4. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (desigualdade triangular);
5. $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Leftrightarrow A, B$,e C são colineares e C está entre A e B

Mas a noção intuitiva de distância utilizada pelos alunos é baseada em se calcular "quantas vezes um segmento de reta cabe em outro", ou seja, em comparações que pode ter o maior ou menor cuidado no tratamento das imprecisões e inexatidões. No presente trabalho, a distância coincide com a medida de um segmento, isto é,

$$d(A, B) = \overline{AB}.$$

Uma isometria é uma transformação $T : \pi \to \pi$ que preserva distância, isto é, para quaisquer pontos A e B do plano π, a distância entre eles satisfaz

$$d(A, B) = d(T(A), T(B)) \tag{3.1}$$

ou, equivalentemente,

$$\overline{AB} = \overline{T(A)T(B)}. \tag{3.2}$$

Em (3.1) estamos utilizando a notação de distância e em (3.2) a de medida de um segmento. Essa definição já dá uma ideia de que a isometria é uma transformação que não deforma (estica ou comprime), pois as distâncias serão mantidas.

Proposição 1. *Uma isometria T é injetora.*

Prova: Suponhamos que T não seja injetora. Assim, existirão dois pontos distintos P e Q tais que $T(P) = T(Q)$, o que implica que $d(T(P), T(Q)) = 0$. Por outro lado, como $P \neq Q$, temos $d(P, Q) \neq 0$. Com isso, $0 = d(T(P), T(Q)) = d(P, Q) \neq 0$, o que é um absurdo.$\square$

Proposição 2. *Se T é uma isometria e R pertence ao segmento AB então $T(R)$ pertence ao segmento $T(A)T(B)$*

Prova: Vamos supor que $T(R) \notin T(A)T(B)$. Então $T(A)T(R)T(B)$ é um triângulo, com segmentos $T(A)T(R)$, $T(R)T(B)$ e $T(B)T(A)$ conforme a figura 3.1.

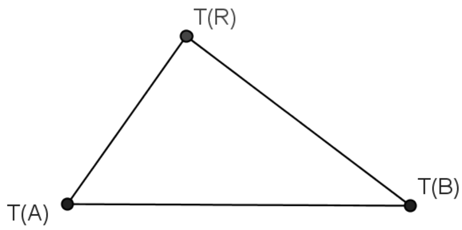


Figura 3.1: Triângulo$T(A)T(R)T(B)$

Logo, pela desigualdade triangular, temos:

$$\overline{T(A)T(B)} < \overline{T(A)T(R)} + \overline{T(R)T(B)}.$$

Mas T é uma isometria, e assim $\overline{AB} < \overline{AR} + \overline{RB}$, o que é um absurdo, pois $R \in AB$. Com isso, provamos que $T(R) \in T(A)T(B)$. $\square$

Se C é um conjunto de pontos no plano, denotaremos $T(C) = \{T(X), X \in C\}$, isto é, consideramos como $T(C)$ o conjunto das imagens $T(X)$ de todos os pontos X de C.

Proposição 3. *Se r é uma reta, sua imagem pela isometria T, isto é, $T(r)$, é uma reta.*

Prova: Temos que mostrar que se r é uma reta então $T(r)$ também é uma reta. Vamos considerar A, B e R pontos da reta r, tal que R está entre A e B e T uma isometria. Pela Proposição 2, temos que $T(R)$ está entre $T(A)$ e $T(B)$. Se R não estiver entre A e B, porém podemos garantir que A ou B está entre R e B ou R e A, e aplicar novamente a Proposição 2. Com isso, $T(r)$ está contido na reta determinada pelos pontos $T(A)$ e $T(B)$.

Agora vamos mostrar que todo ponto da reta determinada por $T(A)$ e $T(B)$ pertence a $T(r)$.

Se $Y \in T(A)T(B)$ e denote $d(Y, T(A)) = a$ e $d(Y, T(B)) = b$. Seja $X \in r$ tal que $d(X, A) = a$ e $d(Y, B) = b$. Temos então $d(T(X), T(A)) = a$ e $d(T(X), T(B)) = b$, e, como já provamos que $T(r)$ está contido na reta determinada por $T(A)$ e $T(B)$, X pertencerá a esta reta. Podemos concluir que $Y = T(X) \in T(r)$ pela afirmação a seguir, e então, como Y é qualquer em na reta determinada por $T(A)$ e $T(B)$, temos que esta reta está contida em $T(r)$.

Afirmação: Dados $S_1 \neq S_2$ pontos de uma reta s, e $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$, existe no máximo um ponto R de s tal que $d(R, S_1) = d_1$, $d(R, S_2) = d_2$.

Prova da Afirmação: Suponha que existe um ponto $R \in s$ tal que $d(R, S_1) = d_1$ e $d(R, S_2) = d_2$, vamos mostrar que R é único. O ponto R será a interseção de duas circunferências, $\mathcal{C}_1$ de centro S_1 e raio d_1 e $\mathcal{C}_2$ de centro S_2 e raio d_2. Note que, como os centros das circunferências estão em s, s contém os diâmetros de ambas. Se um outro ponto $R' \neq R$ é tal que $d(R', S_1) = d_1$ e $d(R', S_2) = d_2$, então R' também está na interseção destas duas circunferências. Se $R' \in s$, então RR' será diâmetro das duas circunferências, logo $S_1 = S_2$, contrariando a hipótese.

Isto conclui a prova da Afirmação e também da Proposição. $\square$

Proposição 4. *Se T é uma isometria e r e s são retas paralelas, então $T(r)$ e $T(s)$ também são paralelas.*

Prova: Suponha que $T(r)$ e $T(s)$ não sejam paralelas, então existe um ponto Y tal que $Y \in T(r) \cap T(s)$. Portanto $Y \in T(r)$, assim existe R em r tal que $T(R) = Y$. Mas também $Y \in T(s)$, logo, existe S em s tal que $T(S) = Y$. Assim, $T(R) = T(S)$. Mas r e s são paralelas, temos $R \neq S$. Isto é um absurdo, pois $T(R) = T(S)$ com $R \neq S$, o que contradiz a injetividade (Proposição 1). $\square$

Proposição 5. *A isometria preserva ângulos, isto é, $\angle(XPY) = \angle(T(X)T(P)T(Y))$.*

Prova:

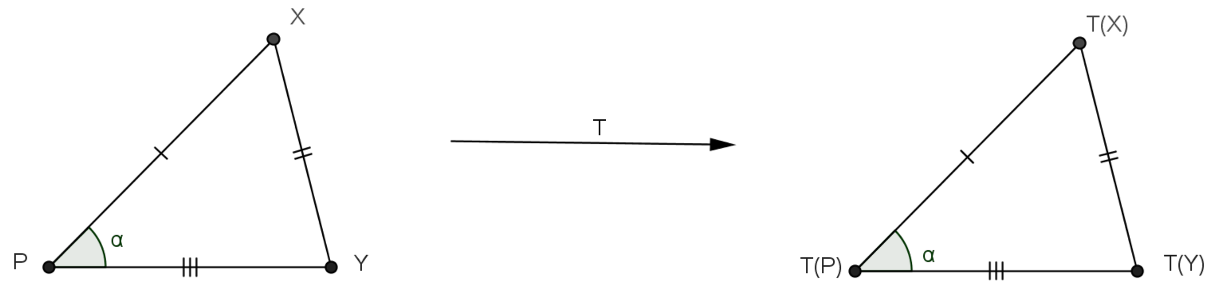


Figura 3.2: Isometria do triângulo XPY

Com $\angle(XPY)$, podemos formar o triângulo XPY com lados XP,PY e YX. Se T é uma isometria, temos $\overline{(T(X)T(P))} = \overline{(XP)}$, $\overline{(T(P)T(Y))} = \overline{(PY)}$ e $\overline{(T(Y)T(X))} = \overline{(YX)}$, ou seja formamos um triângulo $T(X)T(P)T(Y)$ congruente ao triângulo XPY, pelo caso LLL. Concluímos, então, que $\angle(XPY) = \angle(T(X)T(P)T(Y))$. $\square$

A proposição acima nos mostra que as isometrias não alteram os ângulos e, por definição, sabemos também que não alteram as medidas. Isso reforça a ideia de que estas transformações não "deformam" os objetos, sendo assim, uma boa aproximação teórica do conceito de "deslocamento".

Agora vamos nos concentrar em um caso particular das isometrias, aquelas que preservam um ponto, isto é, iremos supor que exista um ponto P_0 tal que $P_0 = T(P_0)$.

Considere um ponto X tal que $X \neq P_0$. Onde estaria $T(X)$? Qual o lugar geométrico destes pontos $T(X)$?

Observe que $\overline{P_0T(X)} = \overline{T(P_0)T(X)} = \overline{P_0X} = r$, logo $T(X)$ está no círculo de centro P_0 passando por X.

Proposição 6. *Dados três pontos X, Y e Z no círculo de centro P_0 e raio r, de forma que Y esteja no menor arco $\overset{\frown}{XZ}$, então $T(Y)$ está no menor arco de $\overset{\frown}{T(X)T(Z)}$.*

Prova: Por hipótese, Y está no menor arco $\overset{\frown}{XZ}$, logo

$$\begin{aligned}\angle(XP_0Z) &= \overset{\frown}{XZ} \\ &= \overset{\frown}{XY} + \overset{\frown}{YZ} && \text{, pois } Y \text{ está entre } X \text{ e } Z \\ &= \angle(XP_0Y) + \angle(YP_0Z)\,.\end{aligned} \tag{3.3}$$

Mas

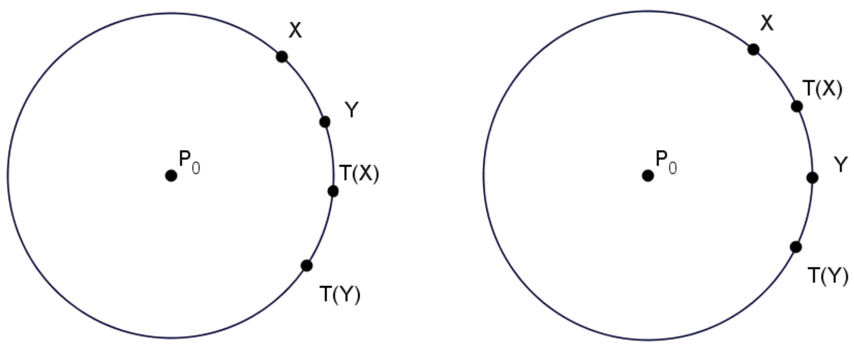
$$\begin{aligned}\overset{\frown}{T(X)T(Z)} &= \angle(T(X)P_0T(Z)) \\ &= \angle(T(X)T(P_0)T(Z)) && , T(P_0) = P_0 \\ &= \angle(XP_0Z) && \text{, pela Proposição 5} \\ &= \angle(XP_0Y) + \angle(YP_0Z) && \text{, por (3.3)} \\ &= \angle(T(X)T(P_0)T(Y)) + \angle(T(Y)T(P_0)T(Z)) && \text{, pela Proposição 5} \\ &= \overset{\frown}{T(X)T(Y)} + \overset{\frown}{T(Y)T(Z)}.\square\end{aligned}$$

Segue que $T(Y)$ está no menor arco de $\overset{\frown}{T(X)T(Z)}$. □

Seja T uma isometria que leva o ponto P_0. Se tomarmos dois pontos X e Y no círculo de centro P_0 e raio r, diremos que a isometria *preserva o sentido* de $\overset{\frown}{XY}$,

1. se tivermos em ordem X, Y e $T(X)$,então teremos, em ordem, X, Y, $T(X)$ e $T(Y)$, conforme ilustra a figura 3.3(a).

2. ou sempre que tivermos em ordem X, $T(X)$ e Y, então teremos, em ordem, X, $T(X)$, Y e $T(Y)$, conforme ilustra a figura 3.3(b).



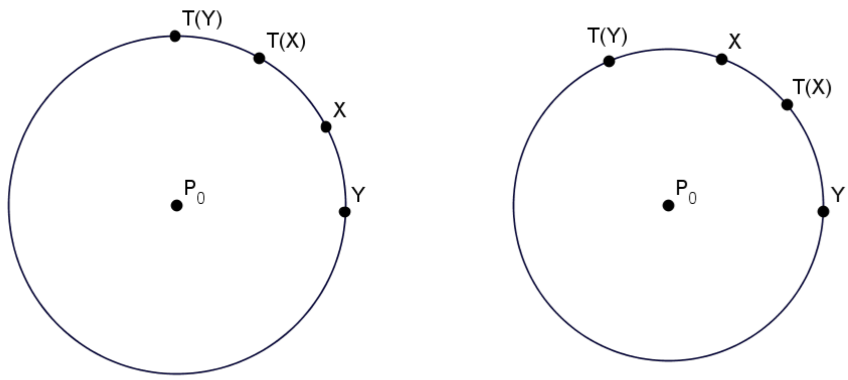
(a) Situação 1 (b) Situação 2

Figura 3.3: Isometria que preserva sentido

Diremos que a isometria *inverte o sentido* de $\overset{\frown}{XY}$,

3. se tivermos em ordem $T(X)$, X e Y, então teremos, em ordem, $T(Y)$, $T(X)$, X e Y,conforme ilustra a figura 3.4(a).

4. ou sempre que tivermos em ordem X, $T(X)$ e Y, então teremos, em ordem, $T(Y)$, X, $T(X)$ e Y,conforme ilustra a figura 3.4(b).



(a) Situação 3 (b) Situação 4

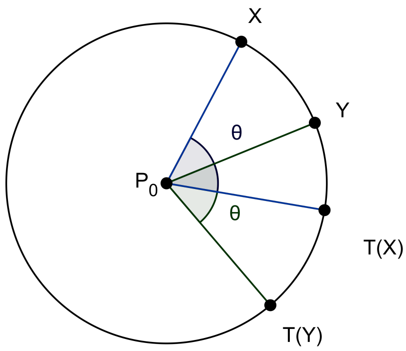
Figura 3.4: Isometria que inverte o sentido

Agora vamos mostrar que a isometria que preserva um ponto ou é uma rotação ou é uma reflexão. Para que isso seja feito vamos analisar separadamente quando o sentido é preservado e quando não é.

Primeiro caso: O sentido é preservado, isto é, se XY é percorrido em um sentido (horário por exemplo), então $T(X)T(Y)$ é percorrido no mesmo sentido. Diremos, neste caso, que a isometria é *positiva* e provaremos que essa isometria é uma rotação de um ângulo θ.

Façamos $\theta = \angle(XP_0T(X))$.

Considere o caso em que X,Ye $T(X)$ esteja nesta ordem, isto é, Y no arco $\overset{\frown}{XT(X)}$. Como a ordem é preservada, teremos, em ordem X,Y,$T(X)$ e $T(Y)$.



Como a isometria preserva ângulos, temos as igualdades nos arcos

$$Y\overset{\frown}{T}(Y) = Y\overset{\frown}{T}(X) + T(X\overset{\frown}{)}T(Y),$$

mas, como Y está no arco $X\overset{\frown}{T}(X)$, temos que

$$\begin{aligned} X\overset{\frown}{T}(X) &= X\overset{\frown}{Y} + Y\overset{\frown}{T}(X), \qquad\qquad X\overset{\frown}{Y} = T(X\overset{\frown}{)}T(Y) \\ &= T(X\overset{\frown}{)}T(Y) + Y\overset{\frown}{T}(X). \end{aligned}$$

Assim,

$$T(X\overset{\frown}{)}T(Y) = X\overset{\frown}{T}(X) - Y\overset{\frown}{T}(X)$$

Logo,

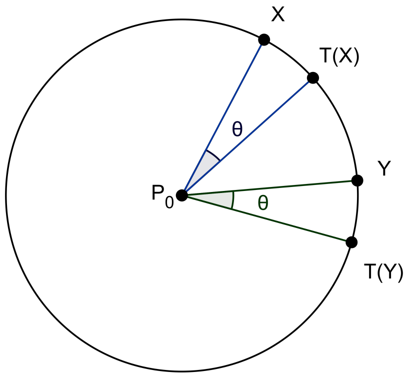
$$\begin{aligned} Y\overset{\frown}{T}(Y) &= Y\overset{\frown}{T}(X) + T(X\overset{\frown}{)}T(Y) \\ &= Y\overset{\frown}{T}(X) + [X\overset{\frown}{T}(X) - Y\overset{\frown}{T}(X)] \\ &= X\overset{\frown}{T}(X) \end{aligned}$$

Logo,

$$Y\overset{\frown}{T}(Y) = \theta.$$

Isto mostra que a isometria T é uma rotação de um ângulo θ.

Considere agora o caso X, $T(X)$, Y, isto é, $T(X)$ no arco $X\overset{\frown}{Y}$. Como a ordem é preservada, teremos, em ordem X, $T(X)$, Y e $T(Y)$.



Como a isometria preserva ângulos, temos as igualdades nos arcos

$$\begin{aligned}
\overset{\frown}{YT(Y)} &= \overset{\frown}{T(X)T(Y)} - \overset{\frown}{T(X)Y} & \qquad \overset{\frown}{XY} = \overset{\frown}{T(X)T(Y)} \\
&= \overset{\frown}{XY} - \overset{\frown}{T(X)Y}, & \qquad T(X) \text{ entre } X \text{ e } Y \\
&= \overset{\frown}{XT(X)} + \overset{\frown}{T(X)Y}] - \overset{\frown}{T(X)Y} & \\
&= \overset{\frown}{XT(X)} &
\end{aligned}$$

Logo

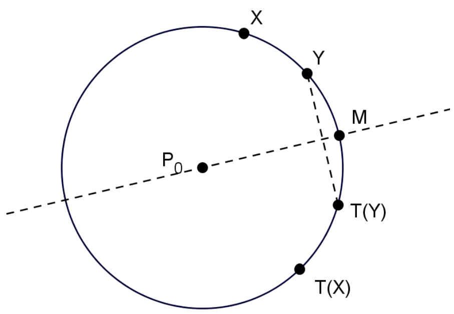
$$\overset{\frown}{YT(Y)} = \theta.$$

Isto mostra que a isometria T é uma rotação de um ângulo θ.

Concluímos que a isometria roda todos os pontos do círculo em um arco θ, para o mesmo sentido. Como vale para todos os círculos, temos uma **rotação** de um ângulo θ. Ou seja, quando a isometria preserva o sentido, temos uma rotação de um ângulo θ vamos denotar essa isometria por R.

Segundo caso: O sentido não é preservado, isto é, se XY é percorrido em um sentido (horário por exemplo), então $T(X)T(Y)$ é percorrido em sentido anti-horário. Diremos neste caso, que a isometria é *negativa* e provaremos que é uma reflexão em torno de uma reta.

Façamos $\theta = \angle(XP_0T(X))$. Seja M o ponto médio do arco $XT(X)$. Assim, temos que $\angle(XP_0M) = \angle(MP_0T(X))$. Vamos mostrar que a medida do arco $\overset{\frown}{T(Y)M}$ é igual a medida do arco $\overset{\frown}{MY}$.



Seja $T(M) = M$. Vamos considerar o caso X, Y, $T(X)$, isto é, Y no arco $\overset{\frown}{XT(X)}$. Além disso, Y está no arco $\overset{\frown}{XM}$. Como o sentido não é preservado temos que $\overset{\frown}{XY} = \overset{\frown}{T(Y)T(X)}$

Pela definição de isometria, temos:

$$\overset{\frown}{MX} = \overset{\frown}{T(X)T(M)} = \overset{\frown}{T(X)M} \tag{3.4}$$

$$\overset{\frown}{YX} = \overset{\frown}{T(X)T(Y)}. \tag{3.5}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\overset{\frown}{MY} &= \overset{\frown}{MX} - \overset{\frown}{YX} \\
&= \overset{\frown}{T(X)M} - \overset{\frown}{T(X)T(Y)} \text{por (3.4) e por (3.5), repectivamente} \\
&= \overset{\frown}{T(Y)M}
\end{aligned}$$

e

$$\angle(MP_0Y) = \overset{\frown}{MY} = \overset{\frown}{T(Y)M} = \angle(MP_0T(Y)).$$

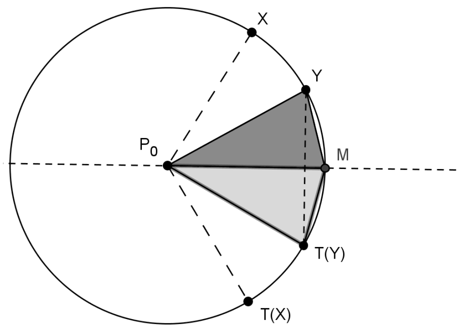


Figura 3.5: Triângulos MP_0Y e $MP_0T(Y)$

Considere os triângulos MP_0Y e $MP_0T(Y)$, conforme a figura 3.5.

Temos $\overline{P_0Y} = \overline{P_0T(Y)}$, $\overline{P_0M} = \overline{P_0T(M)}$ e $M\hat{P_0}Y = M\hat{P_0}T(Y)$, logo, pelo caso LAL, temos $\overline{MY} = \overline{MT(Y)}$. Logo, os triângulos MP_0Y e $MP_0T(Y)$ são congruentes.

Assim, as alturas YH e $T(Y)H^{'}$ são congruentes. Mas como P_0H e $P_0H^{'}$ também são congruentes, $H^{'} = H$, logo, $YT(Y)$ é um segmento perpendicular a MP_0, que tem H como ponto médio.

$T(Y)$ é obtido refletindo Y em relação a reta P_0M

Quando a isometria não preserva o sentido, temos uma reflexão em torno de uma reta, vamos denotar essa isometria por F. Com os fatos demonstrados acima, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.1.1. *Toda isometria T que preserva um ponto é uma rotação ou reflexão.*

A partir de agora, vamos estudar outro tipo de isometria, o que acontece quando a isometria não preserva um ponto, isto é, quando $T(P) \neq P$, para todo ponto P.

Antes, porém, vamos relembrar a notação de vetores.

Se $A \neq B$, $C \neq D$, dizemos que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $AB \equiv CD$, $AB \parallel CD$ e os segmentos são percorridos no mesmo sentido. Se os pontos não forem colineares, isto equivale, em particular, a dizer que $ABDC$ é um paralelogramo.

Proposição 7. *Se existirem dois pontos P e Q no plano tais que $\overrightarrow{PT(P)} = \overrightarrow{QT(Q)}$, então, para todo N no plano, $\overrightarrow{NT(N)} = \overrightarrow{PT(P)}$.*

Prova: Considere um ponto N do plano tal que $N \neq P \neq Q$ e $T(N) \neq N$, temos os triângulo PQN e $T(P)T(Q)T(N)$, conforme a figura 3.6.

Pela definição de isometria, temos que

$$\overline{PQ} = \overline{T(P)T(Q)},$$
$$\overline{QN} = \overline{T(Q)T(N)}e$$
$$\overline{NP} = \overline{T(N)T(P)}$$

Logo, pelo caso LLL, os triângulos PQN e $T(P)T(Q)T(N)$ são congruentes. Com isso,

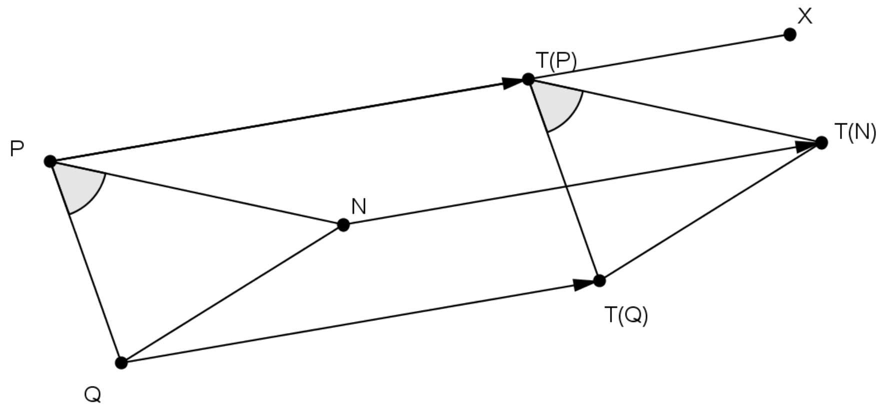


Figura 3.6: Proposição 8

temos que $T(Q)\widehat{T(P)}T(N) \equiv Q\hat{P}N$. Além disso, PQ e $T(P)T(Q)$ são paralelos, pois $PT(P)T(Q)Q$ é um paralelogramo. Assim, temos que:

$$\angle(Q\ P\ T(P)) = \angle(QPN) + \angle(N\ P\ T(P))$$

e

$$\angle(T(Q)\ T(P)\ X) = \angle(T(Q)\ T(P)\ T(N)) + \angle(T(N)\ T(P)\ X).$$

Os ângulos $Q\hat{P}T(P)$ e $T(Q)\widehat{T(P)}X$ são correspondentes e, como $PQ \parallel T(Q)T(P)$, temos que $Q\hat{P}T(P) \equiv T(Q)\widehat{T(P)}X$.

Logo, $N\hat{P}T(P) \equiv T(N)\widehat{T(P)}X$, que implica que $PN \parallel T(P)T(N)$. Como $PN = T(P)T(N)$ e $PN \parallel T(P)T(N)$, $PNT(N)T(P)$ será um paralelogramo, e, assim, $\overrightarrow{NT(N)} = \overrightarrow{PT(P)}$. $\square$

Isometrias deste tipo serão ditas *translação*. A translação transforma toda reta em outra reta paralela. Como podemos observar a figura 3.7, translação corresponde a mover a folha de papel sem girá-lo.

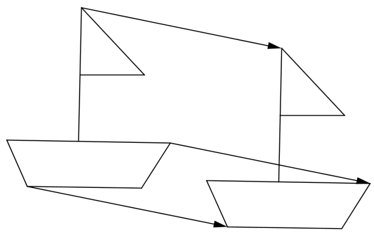


Figura 3.7: Figura deslocada por um vetor

Teorema 3.1.2. *Toda isometria T tal que $T(P) \neq P$, para todo ponto P do plano é uma translação.*

Mas se a isometria não for nenhum dos casos acima, ou seja, não for uma rotação, simetria ou translação?
Considere uma isometria T que não seja como nestes casos. Seja P um ponto qualquer do plano. Teremos $T(P) \neq P$, pois se fosse $P = T(P)$ teríamos uma rotação ou reflexão. Agora, seja S a translação que leva $T(P)$ em P. A composta $S \circ T$ será uma isometria que leva P em P, isto é, uma isometria que preserva o ponto P. De fato,

$$S \circ T(P) = S(T(P)) = P.$$

Com isso, pelo Teorema 3.1.1, $S \circ T = R$ ou $S \circ T = F$, onde R é uma rotação e F uma reflexão. Mas aí teremos

$$S \circ T = R$$

Logo:

$$T = Id \circ T = (S^{-1} \circ S) \circ T = S^{-1} \circ R$$

ou

$$S \circ T = F$$

Logo

$$T = Id \circ T = (S^{-1} \circ S) \circ T = S^{-1} \circ F.$$

Ou seja, T será a composição de uma translação com uma rotação ou reflexão.

Teorema 3.1.3. *Toda isometria T tal que $S \circ T(P) = S(T(P)) = P$, é uma composição de uma translação com uma rotação ou reflexão.*

Repare então que toda isometria envolve apenas rotação, translação e reflexão, que são as transformações que não provocam deformações. Se pensarmos no plano como uma folha de papel, poderemos girá-la (rotação), deslocá-la (translação) ou virá-la (reflexão). Este resultado mostra então que a formalização aqui apresentada é uma abordagem teórica mais precisa para a ideia de se definir congruência a partir de deslocamentos rígidos

Definição 1. Dois conjuntos de pontos são ditos *congruentes* se um é a imagem do outro por uma isometria. Isto é, O_1 e O_2 são congruentes se $O_2 = T(O_1)$ para alguma isometria T.

4 Atividades

Nessa seção, descrevemos as atividades que foram desenvolvidas pelos alunos e sugestões de atividades a serem desenvolvidas. de forma a construir o conceito de congruência de segmentos,usando construções geométricas.

4.1 Atividades Ministradas

Para a realização das atividades no INES, foi apresentado previamente um projeto à instituição, que foi apreciado pelo Departamento de Desenvolvimento Humano, Científico e Tecnológico (DDHCT) do Instituto. Após a aprovação da pesquisa, foi feito o contato inicial com o professor regente da turma que participaria do estudo.

Explicamos a proposta e chegamos a um consenso que o estudo seria desenvolvido na turma do oitavo ano do Ensino Fundamental. E, por uma questão de insegurança e falta de tempo para nos reunirmos a fim de explicitar as atividades, quem aplicou as atividades foi a própria autora, cabendo ao professor regente registrar as atividades ministradas através de filmagem. Ao final de cada aula, conversávamos sobre as dificuldades e as descobertas dos alunos.

Foram aplicadas cinco atividades nos meses de outubro e novembro do ano de 2013. Combinamos com o professor regente que iriamos utilizar somente dois tempos de 45 minutos do total dos cinco tempos semanais disponíveis para a disciplina de Matemática, visto que o professor tinha um currículo para cumprir e o assunto abordado pelo presente trabalho não consta explicitamente no currículo de Matemática do Instituto. Em princípio, seriam oito semanas, mas, por vários motivos (chuva forte, enjoo, aula suspensa para palestras e reuniões), ocorreram somente quatro.

As atividades foram ministradas em LIBRAS, língua de instrução dos alunos. Destacamos que, ao descrever as nossas atividades desenvolvidas, quando aparecerem os verbos *falar*, *dizer*, *perguntar*, *responder* e *sinalizar*, bem como suas respectivas conjugações, significa que a comunicação se deu em LIBRAS.

4.1.1 Participantes do estudo

A turma em questão era constituída por 13 alunos entre 16 a 24 anos, sendo 7 do sexo feminino e 5 do sexo masculino. Somente 6 alunos, 4 meninas e 2 meninos, estiveram presentes em todas as atividades, mas não descartamos os demais alunos, pois alguns se destacaram na atividade de que participaram.

Para os alunos menores de idade, os responsáveis assinaram o termo de esclarecimento e livre consentimento (anexo A) que os alunos levaram para suas casas. E, aos alunos maiores de idade, explicamos do que se tratava e eles assinaram. Os nomes aqui apresentados são fictícios.

Descreveremos a seguir algumas informações de cada aluno participante:

- Adriane - 17 anos - Ingressou no INES aos 10 anos no 1° ano do Ensino Fundamental. Participou somente da última atividade e demonstrou bastante interesse.

- Bento - 19 anos - Ingressou na educação precoce do INES dos três aos quatro anos (1997/1998). Foi transferido em 1999 para uma escola particular inclusiva,retornando ao INES em 2008 para o 3^o ano do Ensino Fundamental. Participou na segunda parte da Atividade 1 e da Atividade 2.

- Brendo - 19 anos - Ingressou no INES aos 15 anos no 4° ano do Ensino Fundamental. Participou ativamente de todas as atividades.

- Diana - 17 anos - Ingressou no INES aos seis anos na Educação Infantil. Repetiu o 7° ano do Ensino Fundamental em 2011. Participou ativamente das Atividades 1, 2 e 5.

- Flavia - 16 anos -Ingressou no INES aos três anos na educação precoce. Participou ativamente de todas as atividades.

- Lailene - 18 anos - Ingressou no INES aos 11 anos no 1° ano do Ensino Fundamental. Participou das Atividades 3, 4 e 5.

- Laura - 19 anos -Ingressou no INES aos dois anos na educação precoce. Foi transferida para uma escola municipal, retornando ao INES em 2009, no 4° ano do Ensino Fundamental. Participou ativamente de todas as atividades.

- Leandro - 19 anos - Ingressou no INES aos 18 anos no 7° ano do Ensino Fundamental. Participou da primeira parte da Atividade 1 e Atividades 3 e 4.

- Mariana - 20 anos - Ingressou no INES aos 18 anos no 6° ano do Ensino Fundamental. Participou ativamente de todas as atividades.

- Marlin - 19 anos -Ingressou no INES aos 17 anos no 6° ano do Ensino Fundamental. Participou das atividades 3, 4 e 5.

- Paulo - 16 anos - Ingressou no INES aos 10 anos no 2° ano do Ensino Fundamental. Participou na segunda parte da Atividade 1 e da Atividade 2.

- Thaianne - 24 anos - Ingressou no INES aos 23 anos no 7° ano do Ensino Fundamental. Participou ativamente de todas as atividades.

- Yari - 19 anos – -Ingressou no INES com um ano na educação precoce. Repetiu o 3° e o 6° ano do Ensino Fundamental. Não participou da atividade 5.

Explicamos que a turma iria participar de uma pesquisa para um trabalho de Mestrado. A maioria dos alunos dessa turma participou, no ano de 2012, do projeto de pesquisa do doutorado de uma professora do Instituto, assim, eles já estão acostumados com as situações decorrentes (filmadora e mais de um professor na sala, por exemplo). Além disso, pedimos que eles inventassem um nome que seria a "identidade secreta"deles, que somente nós saberíamos.

Explicamos também que iríamos estudar uma parte da Matemática chamada Geometria, e acabamos falando de maneira muito simples das três grandes áreas da Matemática: Aritmética("as contas"), Álgebra ("letras") e Geometria ("figuras"). Sabemos que estas áreas são muito mais do que isso, mas, por não temos proficiência em LIBRAS, foi assim que resumimos para eles. Não podemos afirmar que eles identificam essas áreas, mas as reconhecem. Quando aparece pela primeira vez as equações (Álgebra), os alunos sentem muita dificuldade e até um pouco de resistência, pois até então só lidavam com contas (Aritmética).

4.1.2 Termos e sinais utilizados

A Matemática possui uma linguagem própria, dita linguagem matemática, com simbologias próprias. Além da linguagem matemática escrita (simbologia), temos a linguagem matemática falada em português. Por sua vez, a LIBRAS possui um número reduzido de sinais em relação às palavras orais. Assim, não há sinais para diversos termos científicos em diversas áreas.

No curso Bilíngue de Pedagogia do INES, há um grupo de pesquisa que, desde 2011, está elaborando um dicionário terminológico bilíngue Português – LIBRAS de termos acadêmicos usados no Curso, intitulado "Manuário Acadêmico".[20]

Na literatura, encontramos um artigo de Oliveira [19] que iniciou um dicionário matemático em LIBRAS, mas que ainda está sendo testado. Segundo a autora, esse dicionário possuirá todas as palavras matemáticas comumente usadas no Ensino Fundamental, com seu respectivo significado em LIBRAS e com as representações gestuais ao lado.

Assim, devido a inexistência ou desconhecimento de sinais para alguns termos matemáticos, criamos dentro da própria sala sinais para os conceitos trabalhados nas atividades (segmento de reta, congruência). Sabemos que a falta de sinais é um grande problema, mas não podemos deixar de ensinar um conceito devido a isso. No entanto, compreendemos que nossa abordagem não corrobora com uniformização da língua. Mas essa prática é comum, os professores não deixam de ensinar, e é o que acontece em maneira geral.

4.1.3 Atividade 1

Objetivos:

- Reconhecer que, dado um segmento de reta AB, quando fixo um ponto A e giro o outro ponto B o percurso percorrido por B é o círculo;
- Reconhecer que todos os segmentos com um extremo no centro do círculo e o outro em cima do círculo têm a mesma medida, ou seja, são congruentes.

Enunciado/tarefa: Dado uma folha de papel com um segmento AB e o mesmo segmento em folha transparente. Fixar uma sobre a outra com um alfinete em A e girar a folha transparente.(Anexo B)

As seguintes indagações foram submetidas aos alunos:

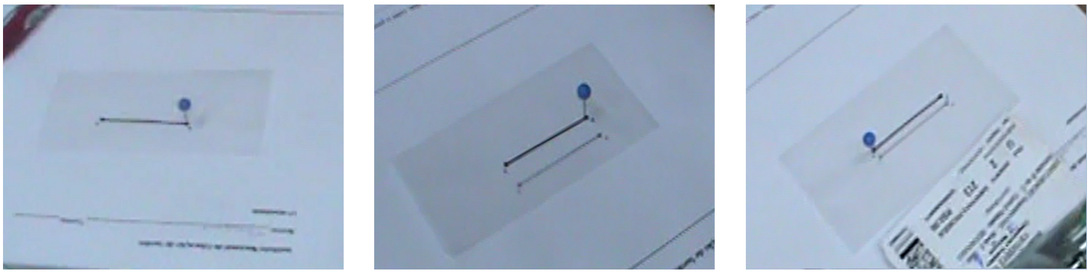
1. Ao completar uma volta completa girando a folha, com o ponto A fixado, qual o conjunto de todos os pontos por onde B passou?
2. Marcar os pontos M, P, Q, no circulo.
   (a) O segmento AM tem o mesmo comprimento de AB?
   (b) O segmento AP tem o mesmo comprimento de AB?
   (c) O segmento AQ tem o mesmo comprimento de AB?
3. Considerando o ponto M marcado acima. O segmento BM tem *sempre* o mesmo comprimento de AB?

Descrição:

Para aplicar esta atividade, definimos que segmento é um pedaço retilíneo que tem começo e fim e reta é o que não tem começo e nem fim. Foram distribuídos a cada aluno uma prancheta de madeira, um papel com o roteiro da atividade, um pedaço de papel transparente com o desenho do segmento AB e um alfinete.

Pedimos que os alunos colocassem o papel transparente sobre o papel branco e fixassem com o alfinete. Dois alunos colocaram corretamente em cima do segmento AB com A fixo (4.1(a)). Quatro alunos colocaram o papel transparente abaixo do segmento AB, porém fixando no ponto A (4.1(b)), e um aluno fixou em B (4.1(c)). Alguns tiveram dificuldade de fixar o alfinete no papel.

Após todos terem posicionado corretamente os materiais da atividade, pedimos aos alunos que movessem o papel transparente e perguntamos qual o percurso do ponto B e se eles sabiam o nome da figura que o percurso formava. Eles não sabiam o nome da figura, mas fizeram sinais característicos de círculo. Porém no momento de desenhar o percurso (atividade realizada por alguns alunos) não conseguiram chegar à figura do círculo. Foram quatro tentativas realizadas por alunos distintos, sendo a última a que mais se aproximou da figura correta, porém a aluna que tentou não manteve o segmento (raio)



(a) Correto (b) Abaixo com ponto fixo A (c) Abaixo com ponto fixoB

Figura 4.1: Posições do papel transparente.

constante. Desta forma, perguntamos a todos os alunos se a figura tinha sido desenhada corretamente e dois alunos perceberam que o segmento não mudava de tamanho. Da primeira tentativa de desenhar o percurso até chegar à figura do círculo passaram-se oito minutos. No final, falamos que aquela figura se chamava círculo. Assim, a primeira pergunta do roteiro foi respondida.

Na próxima etapa, apresentamos os seguintes objetos: régua, transferidor de 180°, transferidor de 360° e compasso. Para a nossa surpresa eles fizeram o sinal para o compasso, embora pensássemos que eles desconheciam o instrumento. Um aluno mencionou que o compasso era melhor para fazer o percurso de B. Mesmo assim, perguntamos porque não poderia usar a régua, o transferidor de 180° ou o transferidor de 360°. Alguns alunos teceram os seguintes comentários acerca do instrumentos apresentados: a régua era para fazer retângulo, o transferidor de 180° ficava faltando uma parte do círculo, o transferidor de 360^o não poderia fazer qualquer círculo e o compasso poderia desenhar qualquer círculo. Desta forma, os alunos identificaram o compasso como sendo o instrumento mais apropriado para realizar o desenho do percurso do ponto B.

Entregamos para cada aluno um compasso, porém não nos atentamos em explicar como usar, ou seja, a ponta seca fixa no ponto A e a outra no B. A maioria dos alunos utilizou corretamente o instrumento, porém dois alunos usaram como se fossem lápis. Uma aluna fixou o B como centro (Figura 4.2).

Outra observação é que dois alunos, apesar de fixarem a ponta seca no ponto A, fizeram o raio de tamanho aleatório (Figura 4.3).

Após todos terem feito o círculo no papel com o compasso corretamente, recolhemos os papéis, deixando o restante da atividade para o próximo encontro.

Retomamos a atividade a partir da segunda questão do roteiro.

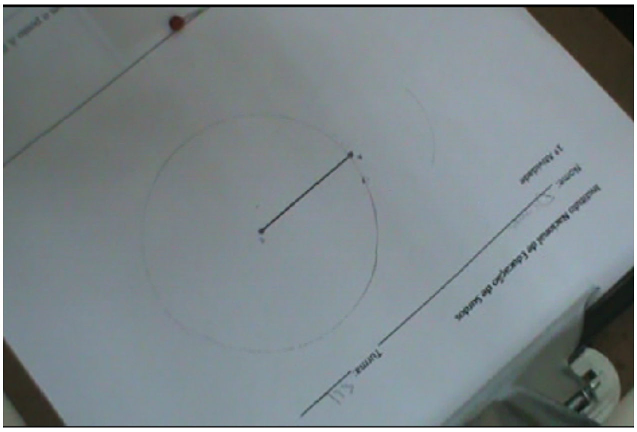


Figura 4.2: Círculo com centro em B

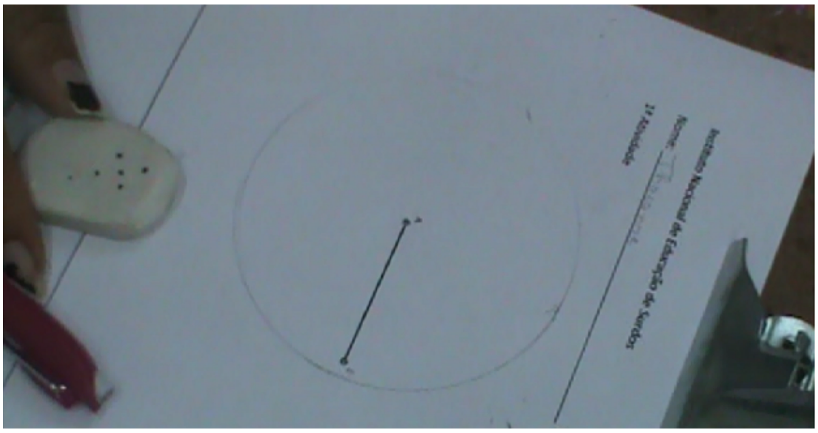


Figura 4.3: Circulo com raio aleatório

Pedimos para que lessem a segunda questão sozinhos e, depois, fizemos a leitura juntos. Perguntamos se eles conheciam a palavra ponto, um sinalizou “nota de uma avaliação”e uma outra fez o sinal de ponto. Aqui podemos observar a questão de vários significados para a palavra, que dependem do contexto em que ela está inserida.

Explicamos que eles precisavam marcar 3 pontos da maneira que quisessem, sobre o círculo, e dessem aos pontos os nomes de M, N e Q. O aluno Yari teve que ir ao quadro para marcar e depois fazer no seu papel, pois ele não tinha entendido que era para marcar livremente esses 3 pontos. A aluna Thaianne chegou atrasada e a aluna Laura imediatamente foi explicar a atividade para ela. Ao ler a segunda pergunta, a aluna Thaianne pensou que o segmento AM era o AM do Relógio, ou seja, ela não leu a palavra que vinha na frente. Isso poderia ser evitado se não usássemos o ponto M, optando por outra letra.

Quando foi responder as perguntas da questão 2, a aluna Diana usou o esquadro sem medida para medir o comprimento, percebeu que não tinha numeração e trocou com a colega, e interviemos destrocando, pois ela tinha que usar o material que possuía. A partir desse momento, ela usou o compasso para comparar o segmento AM e AB. Tivemos que tirar o esquadro de todos os alunos para que usassem o compasso. Assim, essa mesma aluna pegou o compasso, colocou a ponta seca em A, abriu até o ponto M e percorreu até o ponto B, concluindo que AM e AB têm o mesmo comprimento. Disse ainda que todos teriam o mesmo comprimento. O esquadro foi distribuído para que pudessem desenhar os segmentos.

Para responder a questão 3, o aluno chamado Brendo entendeu a pergunta e fez sozinho. Esse aluno explicou para duas alunas o que tinha que ser feito. Para elas, o segmento tinha que sair do centro e ele explicou que, quando fala do segmento BM, começa em B e termina em M. Para comparar se o segmento tinha o mesmo comprimento de AB, ele fixou a ponta seca do compasso no ponto B e abertura de tamanho do segmento AB, fazendo um novo círculo, mas como não tocava em M, ele concluiu que não tem o mesmo comprimento.

Percebemos que alguns alunos estranharam que poderia ser feito um segmento não partindo do centro.

Em alguns casos, era visível que o segmento BM não tinha o mesmo comprimento do segmento AB, porém, em outros casos, deixava dúvidas, assim como poderiam comparar? Para que eles verificassem se o segmento BM tinha o mesmo comprimento de AB, explicamos que deveriam construir um círculo com centro em B e raio AB. Se o círculo passasse por M eles teriam o mesmo comprimento. Nenhum aluno marcou o ponto M de modo que BM tivesse o mesmo comprimento de AB.

Conclusão: Todos os objetivos foram alcançados. Foi uma atividade em que os alunos participaram ativamente. Quanto à figura do círculo, apesar de alguns alunos terem feito o sinal de círculo, eles tiveram dificuldade de expor no quadro o desenho, o que não prejudica a atividade, pois foram estimulados a pensar até concluírem que a figura correta era o círculo. Eles entenderam que o segmento (raio) era constante, mas não exploramos os nomes na língua portuguesa. Poderia ter apresentado os nomes dos elementos do círculo: centro e raio. Além disso, outras ressalvas devem ser feitas: poderíamos ter perguntado quando o segmento BM teria o mesmo comprimento de AB uma vez que os alunos fizeram o círculo com centro em B e raio AB e ter introduzido a notação de congruência nas perguntas (b) e (c).

4.1.4 Atividade 2

Objetivo: Reconhecer quando dois segmentos são congruentes em posições arbitrárias.

Enunciado/tarefa: Distribuir uma folha com dois segmentos congruentes em posições arbitrárias e perguntar se os dois segmentos têm comprimentos iguais ou diferentes? Como eles podem comprovar? (Anexo C)

Descrição:

Perguntamos quantos segmentos havia na folha e se os comprimentos dos segmentos eram iguais.

A aluna Flávia disse que era igual, nós perguntamos como ela poderia provar, usando o compasso. Ela não soube responder. Enquanto isso, alguns alunos pegaram o compasso e "mediram"o segmento AB e com a mesma abertura do compasso colocaram em cima de CD como na figura 4.4. Como não precisou mexer na abertura, concluíram que tinham o mesmo comprimento. Podemos dizer que eles reconheceram o compasso como instrumento de medição.

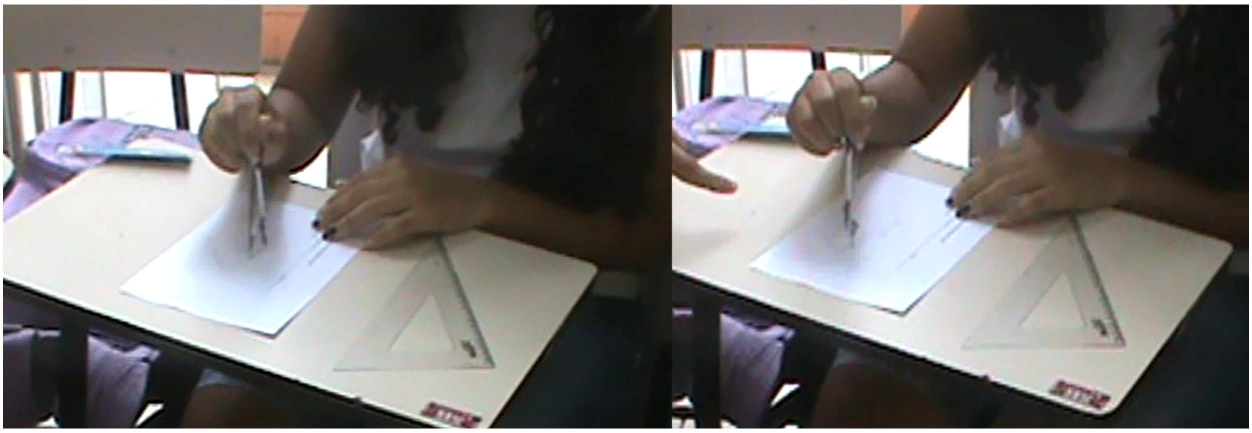


Figura 4.4: Compasso como instrumento de medição

Pedimos aos alunos que fizessem os círculos correspondentes aos segmentos AB e CD, com centro em A e raio AB e centro em C e raio CD.

Aqui mostramos a forma de denotar quando dois segmentos têm o mesmo comprimento (Congruência) $AB \equiv CD$.

O aluno Bento disse que os segmentos eram congruentes mas os círculos não.

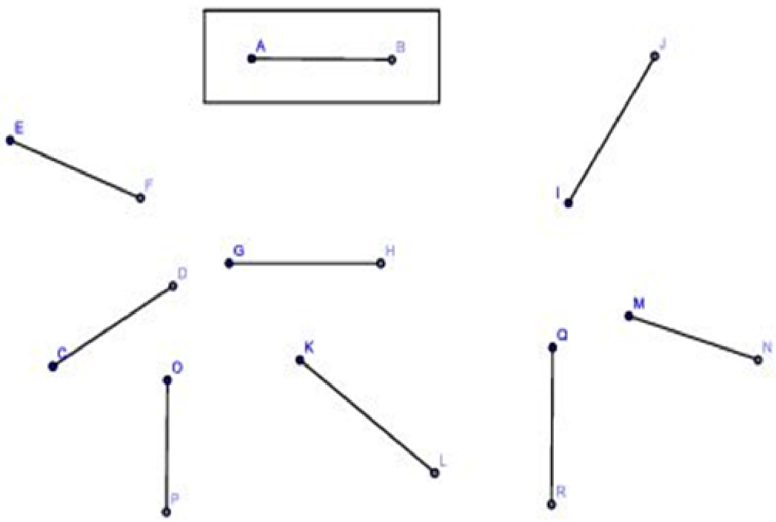
Para mostrar que os círculo eram congruentes, pegamos uma folha transparente e fizemos o círculo com o raio AB e colocamos em cima do círculo com raio CD, concluindo que os círculos também eram congruentes (iguais).

Conclusão: O objetivo da atividade foi alcançado. Os alunos não tiveram muita dificuldade em executar a tarefa. É importante salientar que os alunos reconheceram o compasso como instrumento de medição. Apesar deles desconhecerem a palavra "Congruência"e derivações, eles entenderam o conceito de congruência de segmentos. Entretanto, para que eles compreendessem congruência de figuras foi necessária uma abordagem explicativa adicional.

4.1.5 Atividade 3

Objetivo: Reconhecer quais são os segmentos congruentes ao segmento AB.

Enunciado/tarefa: Utilizando o compasso, diga quais são congruentes a AB.(Anexo D)



Descrição:

Antes de distribuir a folha com a atividade, colocamos no quadro, um exemplo parecido com o da folha, porém com três segmentos além do segmento AB para comparar. Explicamos que queríamos comparar os diversos segmentos com o segmento AB e como eles deveriam registrar no papel.

Distribuímos o papel e o compasso para os alunos. Demos em torno de 30 minutos para realizar a atividade sozinhos. Nesse tempo, notamos a dificuldade de alguns alunos no manuseio do compasso, como pode ser observado na figura 4.5

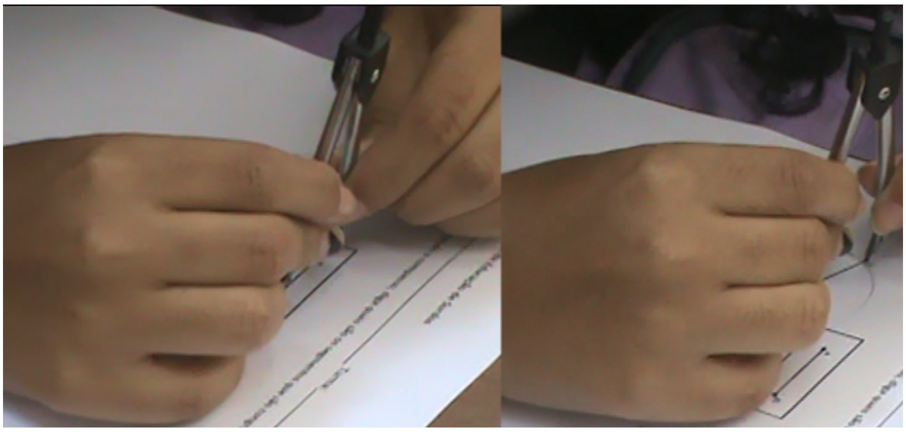


Figura 4.5: Uso do compasso

Os alunos utilizaram os sinais de igual e diferente para dizer se os segmentos eram congruentes ou não.

Ao final do tempo, colocamos no quadro os pares de segmentos e perguntamos a cada aluno qual foi o resultado encontrado. Houve somente divergência de resposta no segmento MN. Somente as alunas Thaianne e Mariana não encontraram congruência no referido segmento. Então pedimos para que elas verificassem novamente o segmento MN. De fato, as medições das alunas estavam corretas, sendo assim o segmento MN não era congruente com o segmento AB. Desta forma, pedimos para que uma delas mostrasse a não congruência aos demais alunos.

Conclusão: O objetivo da atividade foi alcançado. Entretanto, as diferenças das respostas entre os alunos se justifica pela variação do posicionamento da ponta seca do compasso. Apesar de o ponto não ter dimensão, a ponta seca do compasso deveria estar no "centro" do ponto. Desta forma, posicionamento distintos no ponto geraram conclusões igualmente distintas. Vale ressaltar que somente o segmento EF era congruente ao segmento AB.

4.1.6 Atividade 4

Objetivo: Construir segmentos em uma reta de modo que sejam congruentes a um segmento dado.

Enunciado/tarefa: Distribuir uma folha com um segmento AB e uma reta CD. Pedir para que obtenha na reta CD um ponto E tal que CE seja congruente a AB.(Anexo E)

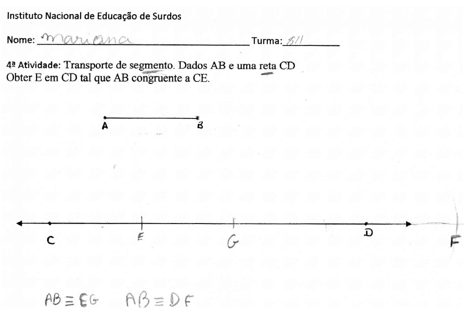
Descrição:

Distribuímos a folha para cada aluno. Colocamos no quadro o enunciado e fizemos a leitura juntos. Perguntamos como poderíamos proceder para obter o ponto na reta CD e não obtivemos resposta. Quando mostramos o compasso, as alunas Thaianne e Lailane imediatamente começaram a realizar a tarefa corretamente. Em seguida os demais alunos fizeram a atividade.

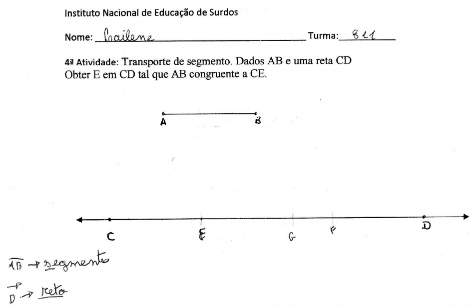
Como essa atividade foi concluída rapidamente pelos alunos, incluímos mais dois itens e colocamos os enunciados no quadro:

Obter F em CD tal que $\overline{AB} \equiv \overline{DF}$;

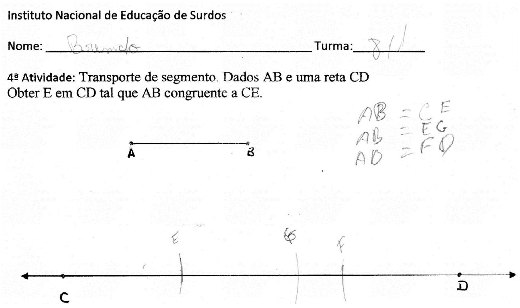
Obter G em CD tal que $\overline{AB} \equiv \overline{EG}$;



(a) F a direita de D



(b) F a esquerda de D sem registro



(c) F a esquerda de D com registro

Figura 4.6: Algumas respostas da Atividade 4

Notamos diferenças nas respostas, apesar de todas estarem corretas. Metade dos alunos construíram o segmento DF colocando o ponto F à direita de D conforme a figura 4.6(a). E a outra metade dos alunos marcaram o ponto F à esquerda do ponto D, veja a figura 4.6(b). Chamou a atenção a resposta do aluno Brendo que registrou na folha o segmento FD como podemos ver na figura 4.6(c)

Conclusão: Conseguimos alcançar o objetivo da atividade. Os alunos compreenderam o que deveriam fazer sem a necessidade de instrução prévia. Reavaliando a atividade, poderíamos ter explorado com os alunos as diferentes respostas que eles encontraram discutindo quais seriam as corretas, pois seria uma oportunidade de os alunos compreenderem que não haveria uma única resposta para a atividade.

4.1.7 Atividade 5

Objetivo: Construir triângulos equiláteros a partir da construção geométrica.
Enunciado/tarefa: Distribuir uma folha A4 em branco.

Roteiro:

1. Construir um círculo C_1;
2. Com o mesmo raio, construir um outro círculo sobre C_1
3. No ponto de interseção dos círculos, construir um 3° círculo de mesmo raio.
4. Marcar os pontos de interseção.

Descrição: Esta atividade foi desenvolvida em dois encontros. O primeiro não foi filmado pois a filmadora, que era patrimônio do INES, estava com outro profissional. O registro dessa primeira parte da atividade foi feito somente através de fotos.

Colocamos o roteiro no quadro. Antes de distribuir o papel em branco, fizemos a leitura juntos com os alunos. A palavra "interseção"era desconhecida por eles. Assim, começamos dando exemplo de dois círculos que possuíam interseção e perguntamos "onde tem dois círculos". Aqui, o verbo ter em LIBRAS foi empregado no sentido de existir. Alguns alunos responderam apontando para o meio, ou seja, para região de interseção dos círculos. Os alunos desconheciam a palavra interseção, porém tinham o conceito de interseção de área. Mas desconheciam o ponto de interseção de dois círculos. Assim, nomeamos os círculos C_1 e C_2. Marcamos dois pontos (A e C) no círculo C_1 e mais dois pontos (B e D) no círculo C_2, sendo os pontos A e B os pontos de interseção dos círculos. Podemos aqui levantar a questão de definição de círculo ou de circunferência como a linha. Alguns autores definem como circunferência a linha e o círculo como a região interna limitada pela circunferência, tanto que os alunos ouvintes confundem interseção de círculos/circunferências e de regiões delimitadas por eles. Mas no caso dos alunos surdos, que participaram do presente estudo, essa confusão de nomes (definição) círculo e circunferência não ocorreu, pois desconheciam estes nomes, como relatamos na atividade 1.

Perguntamos se o ponto A “tem no círculo C_1”? e registramos no quadro ”$A \in C_1$”. E o ponto A “tem no círculo C_2”? e também registramos no quadro ”$A \in C_2$”. Para cada ponto fizemos a mesma pergunta e registramos no quadro se o ponto pertencia ou não ao círculo C_1 e ao círculo C_2. Olhando para o quadro, perguntamos quais os pontos que “tem nos dois círculos C_1 e C_2”. E definimos que para estar na interseção é necessário estar nos dois círculos ao mesmo tempo (Figura 4.7).

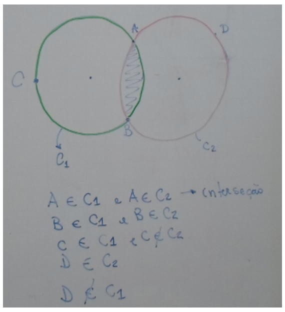
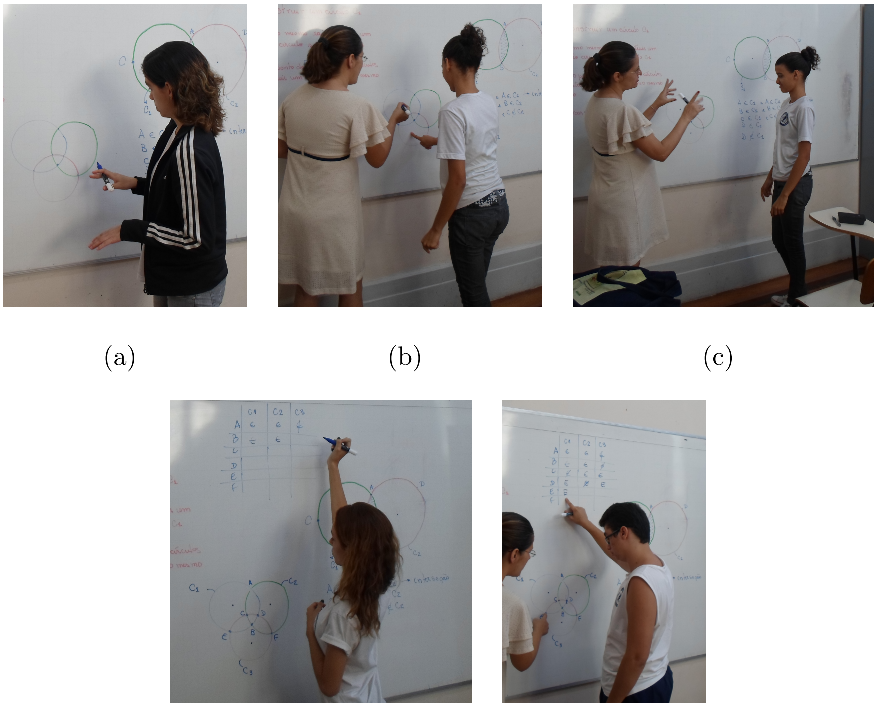


Figura 4.7: Interseções de dois círculos.

Colocamos no quadro exemplo de três círculos que se intersectam para marcar as interseções, sendo que não marcamos os raios desses círculos. Alguns alunos foram ao quadro para marcar as interseções que existiam (Figura 4.8(a)). Após marcar todos os pontos de interseção, um fato curioso ocorreu: foi que a aluna Flávia foi ao quadro e marcou os centros dos círculos. Explicamos que aqueles pontos que ela estava indicando eram os raios dos círculos, como pode ver nas figuras 4.8(b) e 4.8(c). Nomeamos os círculos e os pontos de interseção e construímos um quadro para que os alunos dissessem em quais círculos pertenciam os referentes pontos (4.8(d) e 4.8(e)).

Voltamos para o roteiro e terminamos de fazer a leitura. Distribuímos para cada aluno: papel em branco, compasso e esquadro. Demos um tempo para que os alunos construíssem os círculos e marcassem os pontos de interseção (4.9(a)), à medida em que cada aluno concluía, nós os orientávamos a construírem triângulos com vértices nos pontos de interseção (4.9(b)). Notamos que dois alunos construíram o círculo C_2 de maneira errada, como se pode ver na figura 4.9(c), porém em nenhum momento eles solicitaram ajuda, de forma que só percebemos os erros no final da aula. O tempo acabou e não pudemos concluir que os triângulos que eles construíram eram equiláteros, ficando para a próxima aula.

Resolvemos que, na próxima aula, os alunos fariam de novo a construção. Assim, começamos a aula falando do que foi feito na aula passada e se eles lembravam



(a) (b) (c)

(d) (e)

Figura 4.8: Interseções de dois e três círculos

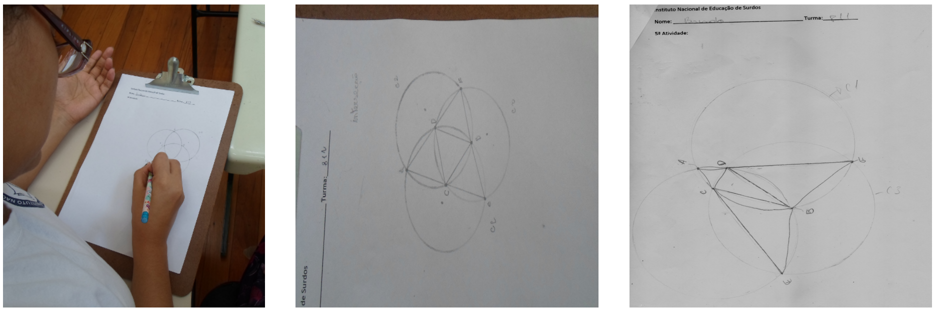
como construir o triângulo usando o compasso. Distribuímos uma nova folha e compasso. Dois alunos faltaram a aula anterior e, para esses alunos, demos a instrução passo a passo. A aluna Laura não lembrou da sequência da construção.

O terceiro passo do roteiro consiste em fazer o 3° círculo a partir de um dos pontos de interseção dos outros dois círculos, somente 3 alunas lembraram, assim explicamos novamente o que é interseção de dois círculos. E assim, construíram o terceiro círculo.

Para obter o triângulo, apresentamos no quadro a construção dos três círculos e pedimos para que eles escolhessem três pontos de interseção, nomeassem os pontos e ligassem com a régua. Notamos que alguns alunos nomearam os círculos de C_1, C_2 e C_3.

Após todos terem construído o triângulo, chamamos a atenção de todos para o quadro, colocando um exemplo do que eles tinham construído (Figura: 4.10). Perguntamos qual o nome da figura, alguns tentaram digitar[1], trocaram e/ou esqueceram algumas letras, mas o sinal todos sabiam. Pedimos para que eles nomeassem os pontos do nosso triângulo que estava no quadro. Perguntamos quantos lados tem o triângulo, obtivemos como resposta 3. Nomeamos os lados, perguntamos se a medida do lados do triângulo

[1] *Digitar* uma palavra é soletrá-la utilizando os sinais correspondentes a cada uma das letras.



(a) (b) (c)

Figura 4.9: Atividade 5

era iguais ou diferentes, como mostra a figura 4.10, a figura que desenhamos no quadro, foi feita à mão livre, assim, não tinha os padrões. Como os alunos responderam que eram diferentes, questionamos "aqui no quadro é diferente, e no seu papel?". A aluna Diana pegou imediatamente o compasso para verificar, concluindo que são iguais. É interessante destacar que ela fixou a ponta seca no vértice que era comum aos lados e abriu o compasso até outro vértice e girou o compasso até o terceiro vértice, concluindo que eram iguais.

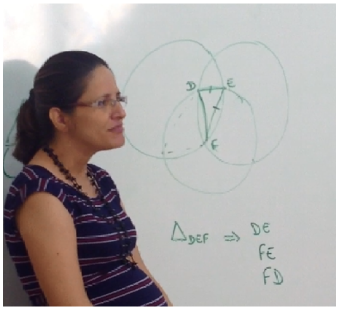
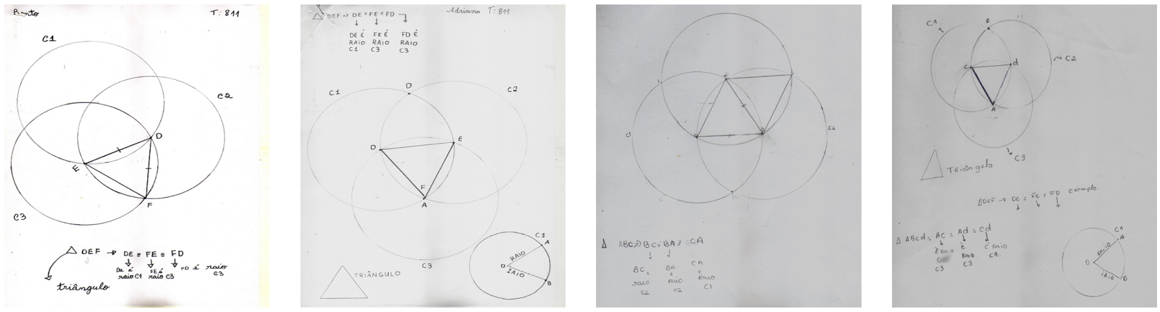


Figura 4.10: Desenho do quadro.

Nesse momento, tentamos auxiliar os alunos como eles poderiam registrar no papel que os lados são iguais. Colocamos no quadro a figura do círculo e nomeamos os elementos do círculo (raio e centro) e utilizamos a figura 4.10, mesmo sabendo que não estava perfeita. Nomeamos C_1 o círculo de centro D, C_2 o círculo de centro E e C_3 o círculo de centro F. Perguntamos quais os segmentos que eram raio do círculo C_1 e assim por diante. Após, para cada segmento que estava escrito no quadro, registramos qual círculo pertencia, DE é raio C_1, FE é raio C_3 e FD é raio C_3, mas FD também é raio C_1, logo $DE \equiv FE \equiv FD$. Pedimos que os alunos registrassem no papel deles, como mostram as figuras 4.1.7. A figura 4.11(a) mostra que o aluno copiou do quadro; em 4.11(b), a aluna modificou os nomes dos pontos para ficar igual ao exemplo dado; 4.11(c) e 4.11(d) mostram que as alunas fizeram com autonomia o registro no papel.



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.11: Algumas respostas da Atividade 5

Conclusão: O objetivo foi alcançado parcialmente, os alunos conseguiram construir o triângulo. Justificamos e concluímos juntos que os lados tinham a mesma medida, ou seja, eram congruentes, mas não nomeamos o triângulo como equilátero.

Deixamos como sugestão um roteiro mais completo, para o professor:

1. Construir um círculo C_1 com um raio arbitrário;
2. Com o mesmo raio e centro sobre o círculo anterior, construir um outro círculo C_2
3. Perceba que, quando construímos o círculo C_2, temos dois pontos de interseção (explicar o que é interseção de figuras) dos círculos C_1 e C_2. Com centro em um dos dois pontos de interseção e mesmo raio, construir um terceiro círculo C_3.
4. Construir um triângulo com os vértices dados pelas interseções.
5. Os lados do triângulo têm o mesmo comprimento? Por quê? Explique.

4.2 Propostas de atividades

Além das atividades acima aplicadas, deixaremos como proposta algumas atividades adicionais que não foram aplicadas devido à falta de tempo.

4.2.1 Atividade Proposta 1

Objetivo: Construir um triângulo equilátero a partir de um segmento dado.

Enunciado/tarefa: Distribuir um papel ofício com um segmento e pedir para construir um triângulo ABC.

Caso os alunos tenham feito a atividade 5, dê um tempo para os alunos tentarem fazer a atividade. Caso contrário, siga o roteiro abaixo.

Roteiro

1. Marque um ponto no papel nomeando de A
2. Construir um círculo C_1 com medida do raio igual ao comprimento do segmento dado com centro em A;
3. Marque um ponto B no círculo C_1;
4. Com o mesmo raio e centro em B, construir um outro círculo C_2
5. Perceba que quando construímos o círculo C_2 temos dois pontos de interseção (lembrar o que é interseção de figuras) dos círculos C_1 e C_2. Com centro em um dos dois pontos de interseção e mesmo raio, construir um terceiro círculo C_3.
6. Perceba que o círculo C_3 passa pelos pontos A e B;
7. Construir um triângulo ABC tal que o ponto C é uma das interseções dos círculos C_1 e C_2.

Após feita a construção, pergunte: Os lados do triângulo têm o mesmo comprimento? Porque? Explique.

E no final anuncie que o triângulo construído tem o nome de *triângulo equilátero*.

4.2.2 Atividade Proposta 2

Objetivo: Discutir quando os círculos se intersectam; Preparar os alunos a concluírem a desigualdade triangular.

Enunciado/tarefa: Distribua a folha do anexo F.

Para cada caso, os alunos deverão construir dois círculos com os seus centros no segmento AB da forma que é pedido. Faça a leitura junto com alunos, relembre os nomes dos elementos do círculo. Esperamos que os alunos façam os círculos sem dificuldade.

Questione, para cada caso, se os círculos se intersectam e por que isso acontece.

Se os alunos não conseguirem chegar a uma resposta, para cada caso peça que marquem um ponto C tal que $AC = r_1$ e depois um ponto D tal que $CD = r_2$ e assim por diante. Para que eles possam visualizar os tamanhos dos raios (segmentos) sobre o segmento AB e chegarem a conclusão que:

- têm dois pontos de interseção se a soma dos dois segmentos dados é *maior* que o segmento AB,
- um ponto de interseção se a soma dos dois segmentos dados é *igual* que o segmento AB e
- não têm interseção se a soma dois segmentos dados é menor que o segmento AB.

4.2.3 Atividade Proposta 3

Objetivo: A partir de três segmentos, construir um triângulo.

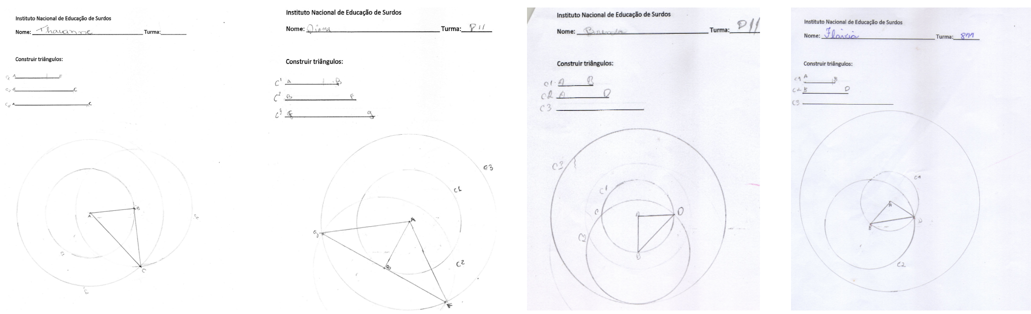
Enunciado/tarefa: Prepare três folhas cada uma com três segmentos de modo que:

1. a soma dos tamanhos dos dois primeiros segmentos sejam maior que o do terceiro segmento.
2. a soma dos tamanhos dos dois primeiros segmentos sejam igual ao do terceiro segmento.
3. a soma dos tamanhos dos dois primeiros segmentos sejam menor que o do terceiro.

Coloque no quadro a palavra triângulo e pergunte se eles conhecem essa palavra. Explique e enuncie os elementos do triângulo (vértices e lados). Após, explique que serão distribuídas folhas que contêm segmentos e que eles deverão construir um triângulo usando o compasso de forma que os segmentos dados sejam os lados do triângulo. Lembre os alunos que o compasso constrói círculos ou pergunte o que o compasso faz. E lance o desafio de construir um triângulo a partir das construções de círculos. Fale para os alunos que eles podem começar a construir por qualquer segmento, que não precisa ser na ordem dada.

Distribuir uma folha de cada vez, começando com a folha onde é possível construir o triângulo. Distribua uma folha para cada aluno e os deixem à vontade para fazer em dupla ou sozinhos. Após construírem, pergunte aos alunos se os triângulos que cada um construiu, têm as mesmas medidas de lados, ou seja, são congruentes. Pois, sob o ponto de vista das medidas, são o mesmo triângulo, ainda que em posições diferentes ou “refletidos”.

Colocar uma folha sobre a outra, com os triângulos alinhados, e colocá-los contra a luz pode ser uma boa forma de mostrar a congruência. Pode ser um bom momento para introduzir o conceito de congruência de triângulos e o caso LLL. Distribua a outra folha (inexistência do triângulo) para cada aluno e, novamente, dê um tempo para eles fazerem. Nesse momento, espera-se que os alunos comecem a perguntar como construir, instigue-os e questione: será que sempre é possível construir triângulos? Porque não foi possível construir? O que está errado?



(a) (b) (c) (d)

Figura 4.12: Algumas construções dos alunos

Chegamos a aplicar esta atividade na última semana de aula a alguns alunos da turma, os que não ficaram em recuperação, mas não registramos nem com filmagem e nem com fotos, pois o professor regente deu aula para os alunos em recuperação. Assim não consideramos como atividade desenvolvida. Mas, ainda assim, gostaríamos de tecer alguns comentários.

Não aplicamos a Atividade Proposta 2 antes dessa atividade, fazendo exatamente como está descrito acima. Distribuímos a folha que era possível construir o triângulo. Os alunos conseguiram executar como se pode ver nas figuras 4.12(a) e 4.12(d). A medida que os alunos terminavam, nós distribuímos a outra folha que não era possível construir o triângulo. Com essa atitude, perdemos a chance de questionar se os triângulos que eles construíram eram únicos sob o ponto de vista de medição. Quanto a “construção”do triângulo inexistente, os alunos tentaram fazer como pode ver nas figuras, mas ficou faltando uma explicação ou talvez a Atividade Proposta 2, pois os alunos não perceberam que não era possível construir, assim eles construíram triângulos mas que não possuíam os segmentos dados. Assim, não conseguimos concluir a atividade e chegar à desigualdade triangular.

5 Considerações Finais

Trabalhar com os alunos surdos não é uma tarefa simples, contudo a busca por diferentes alternativas pedagógicas pode ser de extrema importância no processo de ensino e aprendizagem desses alunos. As atividades propostas no presente trabalho proporcionaram a construção do conhecimento geométrico (congruência de segmentos) através do desenvolvimento do raciocínio lógico. Ou seja, as atividades objetivaram o entendimento do conceito de congruência. De fato, observou-se que os alunos foram capazes de realizar as atividades propostas com a devida supervisão dos professores.

É importante salientar que apesar das atividades propostas terem sido adequadamente realizadas, em alguns momentos sentimos falta do auxílio de um profissional surdo na elaboração e/ou realização das atividades. De fato, o cenário ideal para nós professores ouvintes seria termos professores ou assistentes educacionais surdos para nos auxiliar no planejamento e execução das atividades.

O presente trabalho se configura como uma proposta inicial para o aprendizado do conceito de congruência de segmentos entre alunos surdos. As atividades poderiam ter sido realizadas através de softwares de Geometria Dinâmica. Contudo, consideramos importante para um primeiro contato que os alunos conhecessem e manuseassem os materiais(régua e compasso) de modo a tornar a experiência mais táctil e concreta. Novos estudos poderão ser desenvolvidos para outros tipos de congruência e o uso de softwares de Geometria Dinâmica.

Referências Bibliográficas

[1] S.M. Rocha, *O INES e a Educação de Surdos no Brasil:*, Vol. 1, INES, Rio de Janeiro, 2008.

[2] M. L. C. Rogenski and S. M. D. Pedroso, *O Ensino da Geometria na Educação Básica: Realidade e Possibilidades*, O Professor PDE e os desafios da escola Pública Paranaense,Versão Online,Cadernos PDE **1** (Paraná, 2007).

[3] Brasil, *Serie Audiologia*, Instituto Nacional de Educação de Surdos - INES, Rio de Janeiro, 2005.

[4] ———, *Parâmetros Curriculares nacionais: Matemática*, Ministério da Educação - Secretaria de Educação Fundamental, Brasília, 1998.

[5] ———, *Diretrizes Curriculares Nacionais*, Ministério da Educação, Brasília, 2005.

[6] F. C. Capovilla, *Filosofias educacionais em relação ao surdo: do oralismo à comunicação total ao bilingüismo.*, Revista Brasileira de Educação Especial **6** (2007), no. 1.

[7] M.D.M. da Cunha Coutinho, *A mediação de esquemas na resolução de problemas de matemática por estudantes surdos: um estudo de caso.*, Dissertação de Mestrado - Faculdade de Letras, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,2003.

[8] S. Lorenzato, *Por que não ensinar geometria?*, Educação em Revista **9/10** (2001).

[9] R. M. Quadros and L.B. Karnopp, *Língua de Sinais Brasileira – Estudos Lingüísticos.*, ArtMed Editora, Porto Alegre, 2004.

[10] O. W. Sacks, *Vendo vozes: uma viagem ao mundo dos surdos.*, translated by Laura Teixeira Motta, Companhia das Letras, São Paulo, 1998.

[11] J. W. Vieira, *O Ensino da Geometria Descritiva para Alunos Surdos Apoiado em um Ambiente Hipermídia de Aprendizagem – VISUAL GD*, Tese de Doutorado - Universidade Federal de Santa Catarina, 2005.

[12] S. T. Mabuchi, *Transformações geométricas: a trajetória de um conteúdo ainda não incorporado às práticas escolares nem à formação de professores*, Dissertação de Mestrado - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2000.

[13] V.G Slomski, *Educação bilíngue para surdos: concepções e implicações práticas*, Juruá Editora, Curitiba, 2010.

[14] A. J. L Bigode, *Matemática hoje é feita assim*, FDT, São Paulo, 2000.

[15] L. R. Dante, *Tudo é matemática*, Ática, São Paulo, 2002.

[16] ———, *Matemática: contexto e aplicações*, Vol. 1, Ática, São Paulo, 2010.

[17] G. Iezzi, O. Dolce, and A. Machado, *Matemática e realidade*, Atual, São Paulo, 2005.

[18] E. L. C. Ferreira, I. L. Rios, and F.F. Neto, *Matemática: Geometria Básica.*, Consórcio CEDERJ/Fundação CECIERJ - Curso de Extensão para professores, Rio de Janeiro, 2004.

[19] P. L. A. Oliveira, *A Matemática Surda.*, Caderno Dá Licença **Março, 2012** (2012).

[20] J. Mandelblatt and W. Favorito, *Manuário acadêmico: dicionário terminológico do Curso de Pedagogia Bilíngue.*, XII Congresso Internacional do INES e XVIII Seminário Nacional do INES (A educação de surdos em países de Língua Portuguesa) (Rio de Janeiro, 2013).

A Termo de Consentimento Livre e Esclarecido

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Programa de Pós Graduação em Matemática em Rede Nacional

Mestrado Profissional(PROFMAT) - CCET/UNIRIO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

Prezado(a) Senhor(a)

Eu, Manoela do Vale de Oliveira, professora de matemática do Instituto Nacional de Educação de Surdos e aluna do mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do polo UNIRIO, telefone (21) xxxxx-xxxx, estou desenvolvendo minha dissertação de mestrado com o título provisório "Conceito de congruência na visão do Aluno Surdo", sob orientação do Professor Doutor Leonardo Tadeu Silvares Martins. Assim, solicito a participação de seu filho(a) na pesquisa a ser realizada na Instituição, durante as aulas de matemática, na condição de aluno do Ensino Fundamental e de sujeito de pesquisa. Esse estudo tem como finalidade aplicar um plano de aula com o tema de congruência para verificar como o aluno surdo compreende o conceito de congruência através de atividades propostas. Esclareço que a participação é *voluntária* e, portanto, este consentimento poderá ser retirado a qualquer tempo.

Convém ressaltar que a autorização de participação de seu filho (a) na pesquisa implica, unicamente, na participação das aulas de matemática previstas na grade de disciplinas da turma. Outras observações:

1. Serão registradas imagens das aulas através de filmagem e fotografias, que poderão ser divulgadas posteriormente em Seminários, Congressos e através de artigos publicados em revistas especializadas, assim como no trabalho a ser apresentada no final do curso de mestrado.

2. Será utilizado, durante as aulas, um diário de campo, onde serão registradas informações importantes para o estudo, que somente serão utilizados para atender aos

fins da pesquisa em questão.

3. As informações colhidas só serão utilizadas para atender aos fins da pesquisa; portanto, não haverá nenhum risco ou prejuízo para aqueles que participarem, ou, em dado momento, optarem por desligar-se do estudo.

4. Não serão divulgadas informações pessoais como nome, matrícula, etc, que possam identificar individualmente os participantes da pesquisa.

Email: Manoelavale@gmail.com

Rua das Laranjeiras, 232 – Laranjeiras – Rio de Janeiro – CEP: 22240-001 – Tel. 22057037 – Setor : SEF2

Identificação do Projeto

Título do Projeto: Conceito de congruência na visão do Aluno Surdo

Pesquisador Responsável: Manoela do Vale de Oliveira (INES, UNIRIO)

Professor Orientador: Leonardo Tadeu Silveira Martins (UNIRIO)

Programa de Pós-Graduação: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Nome do aluno voluntário:

Telefones para contato:

Idade:

R.G.:

Responsável legal:

R.G. Responsável legal

Autorização

Eu, xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx, RG nº 000000000000, declaro ter sido informado(a) e concordo em autorizar a participação de meu filho(a) yyyyyyyyyyyyy como voluntário do projeto de pesquisa de autoria da mestranda Manoela do Vale de Oliveira, sob a orientação do Profº Leonardo Tadeu Silvares Martins, da UNIRIO, na condição de sujeito-aluno. Estou ciente de que a participação de meu filho (a) é anônima, ou seja, em nenhum momento seu nome será exposto, e que tenho total liberdade de interromper sua participação em qualquer momento, sem nenhum prejuízo. Estou ciente de que o pesquisador, cujo endereço, e-mail e telefones de contato se encontram abaixo, está à minha disposição para sanar qualquer tipo de dúvida e fornecer mais informações acerca deste estudo, caso seja de meu interesse.

Rio de Janeiro, 00 de xxxxxxxxxx de 2013

Nome e assinatura do responsável legal

Manoela do Vale de Oliveira

Testemunha

Testemunha

B Atividade 1

Instituto Nacional de Educação de Surdos

Nome:xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx Turma:888

1^a Atividade

Roteiro:

1. Ao completar uma volta completa girando a folha, com o ponto A fixado, qual o conjunto de todos os pontos por onde B passou?

2. Marcar os pontos M, P, Q, no circulo.

   (a) O segmento AM tem o mesmo comprimento de AB?

   (b) O segmento AP tem o mesmo comprimento de AB?

   (c) O segmento AQ tem o mesmo comprimento de AB?

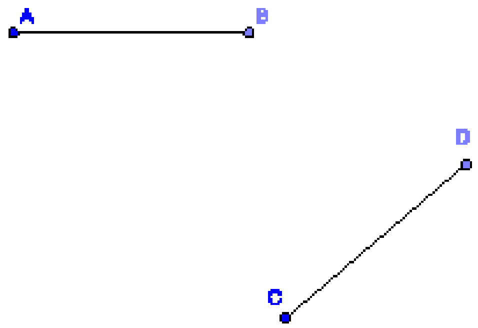
3. Considerando o ponto M marcado acima. O segmento BM tem *sempre* o mesmo comprimento de AB?

C Atividade 2

Instituto Nacional de Educação de Surdos

Nome:xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx Turma:888

2^a Atividade

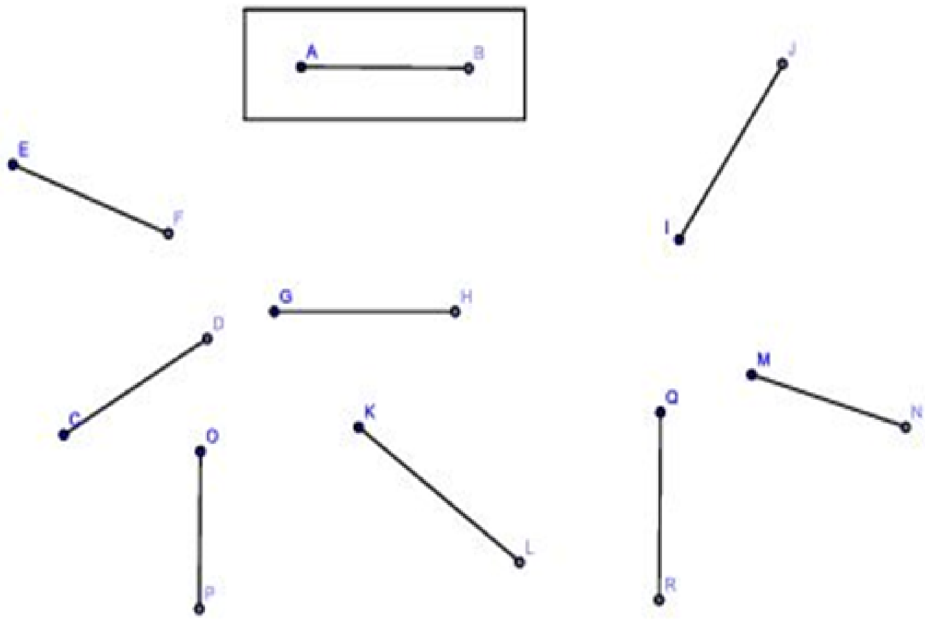


D Atividade 3

Instituto Nacional de Educação de Surdos

Nome:xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx Turma:888

3^a Atividade: Utilizando o compasso, diga quais são congruentes a AB.



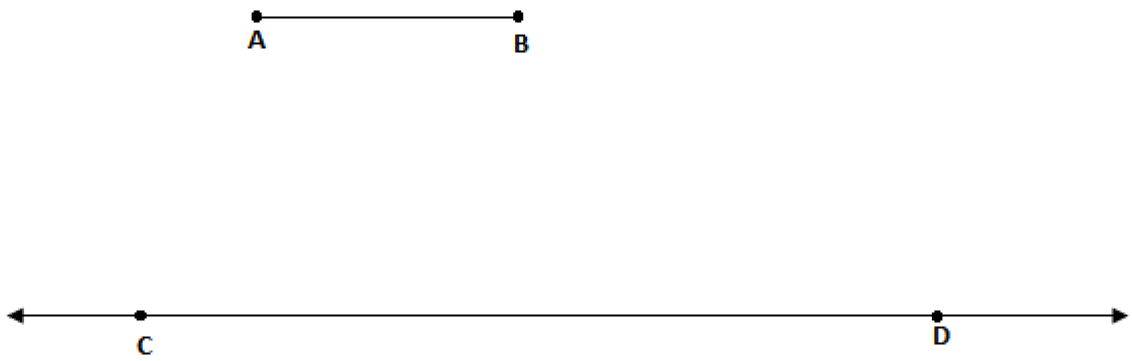
E Atividade 4

Instituto Nacional de Educação de Surdos

Nome:xxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxxx Turma:888

4^a Atividade: Transporte de segmento

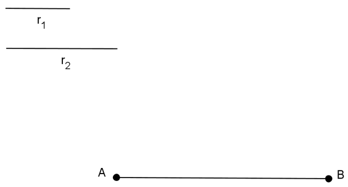
Dados AB e uma reta CD. Obter E em CD tal que AB congruente a CE



F Atividade Proposta 2 - folha do aluno

1. Construa:

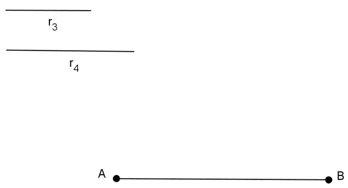
   - um círculo C_1 com centro em A e raio r_1
   - um círculo C_2 com centro em B e raio r_2



   Os círculos C_1 e C_2 têm pontos de interseção? () sim () não. Quantos?

2. Construa:

   - um círculo C_3 com centro em A e raio r_3
   - um círculo C_4 com centro em B e raio r_4

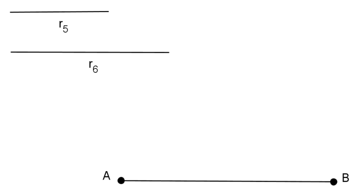


   Os círculos C_3 e C_4 têm pontos de interseção? () sim () não. Quantos?

3. Construa:

   - um círculo C_5 com centro em A e raio r_5
   - um círculo C_6 com centro em B e raio r_6

   Os círculos C_5 e C_6 têm pontos de interseção? () sim () não. Quantos?


r_5
r_6
A
B