

Marcello Pereira Gomes

***Geometria Esférica: uma proposta de estudo e
atividades para a escola básica***

Niterói – RJ

Junho / 2014

Todos os direitos reservados.

É proibida a reprodução total ou parcial sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Marcello Pereira Gomes

***Geometria Esférica: uma proposta de estudo e
atividades para a escola básica***

Dissertação apresentada à Coordenação do
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional da Universidade Federal Fluminense
para a obtenção do título de Mestre em Ma-
temática

Orientadora:
Lhaylla dos Santos Crissaff

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA
UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

Niterói – RJ

Junho/ 2014

Trabalho de conclusão de curso sob o título “*Geometria Esférica: uma proposta de estudo e atividades para a escola básica*”, defendida por Marcello Pereira Gomes e aprovada em 24 de junho de 2014, em Niterói, Rio de Janeiro, pela banca examinadora constituída pelos professores:

Lhaylla dos Santos Crissaff
Doutora em Matemática pela PUC-Rio
Orientadora

Miriam Abdon
Doutora em Matemática pelo IMPA

Marcelo Ferreira Farias
Doutor em Matemática pela UFRJ

Dedico à Patrícia Lima, companheira querida, cúmplice na realização de meus ideais, e aos meus filhos Beatriz e Felipe pelo incentivo e compreensão durante a realização deste trabalho.

*Dedico à minha mãe, Leni, que está com certeza em outra dimensão torcendo por mim, como
sempre fez*

*“As pessoas que amamos não terminam, continuam conosco e nosso coração percebe isso.
Viram estrelas, e delas, de alguma forma, nos vêm força e clareza”.*(Oswaldo Tórtora)

Agradecimentos

A Deus, por sempre mostrar o caminho a seguir.

À minha orientadora, Professora Doutora Lhaylla dos Santos Crissaff, não só pelo exemplo e dedicação mas também, pela confiança e amizade, propiciando a tranquilidade necessária para a elaboração deste trabalho.

Aos meus familiares, pelo carinho dispensado durante toda esta trajetória.

Aos colegas e amigos que fiz na turma PROFMAT 2012 pela troca de experiências e ensinamentos.

À amiga, Professora Elena Aramis, pelas correções ortográficas.

À Universidade Federal Fluminense - UFF - e aos professores pela formação acadêmica.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES - pelo apoio financeiro.

Enfim, a todos que, de uma forma direta ou indireta, contribuíram para a realização deste trabalho.

Nenhuma Geometria é mais correta do que qualquer outra - apenas é mais conveniente.
(Henri Poincaré)

Sumário

Lista de Figuras

Resumo

Abstract

1	Introdução	p. 12
2	Geometria de Euclides	p. 15
2.1	Introdução	p. 15
2.2	Axiomas e postulados de Euclides	p. 16
3	Geometrias não-Euclidianas	p. 22
3.1	Girolamo Saccheri	p. 22
3.2	Johann Heinrich Lambert	p. 24
3.3	Janos Bolyai	p. 25
3.4	Nikolai Ivanovitch Lobatchevsky	p. 26
3.5	Carl Friedrich Gauss	p. 27
3.6	Georg Friedrich Bernhard Riemann	p. 28
3.7	Algumas considerações	p. 29
4	Geometria Esférica	p. 30
4.1	Introdução	p. 30
4.2	Esfera	p. 31
4.3	Teorema de Girard	p. 38

4.4	Coordenadas esféricas	p. 41
4.5	Distância entre dois pontos de uma esfera	p. 43
4.6	Resultados análogos da Geometria Euclidiana	p. 44
4.7	Congruência de triângulos esféricos	p. 48
4.8	Triângulos esféricos especiais	p. 50
5	Atividades	p. 53
5.1	Introdução	p. 53
5.2	O Modelo de van Hiele	p. 54
5.3	Atividades	p. 55
6	Considerações Finais	p. 67
	Referências Bibliográficas	p. 68

Lista de Figuras

2.1	Euclides. <i>Fonte: www.educ.fc.ul.pt.</i>	p. 16
2.2	Página de rosto da tradução para o inglês de <i>Os Elementos</i> ,(1570). <i>Fonte: [13].</i>	p. 16
2.3	Ilustração do 5º Postulado de Euclides.	p. 18
2.4	John Playfair. <i>Fonte: wikipedia.</i>	p. 18
2.5	Reta s perpendicular às retas m e r	p. 19
2.6	Unicidade da reta paralela à reta r	p. 20
2.7	Ângulos colaterais internos α e β	p. 20
2.8	Reta m paralela a reta r , com $\gamma + \alpha = 180^\circ$	p. 21
3.1	Primeira página do trabalho de Saccheri (1733). <i>Fonte: wikipedia.</i>	p. 22
3.2	Quadrilátero de Saccheri.	p. 23
3.3	J.H.Lambert. <i>Fonte: [13].</i>	p. 24
3.4	Quadrilátero de Lambert.	p. 24
3.5	Farkas e Janos Bolyai. <i>Fonte: Major-world.com.</i>	p. 25
3.6	Lobatchevsky. <i>Fonte: [13].</i>	p. 26
3.7	C.Gauss. <i>Fonte:[13].</i>	p. 27
3.8	B.Riemann. <i>Fonte:[13].</i>	p. 28
4.1	Esfera de centro O e raio r	p. 31
4.2	Plano α exterior à esfera S	p. 32
4.3	Plano α tangente à esfera S em P	p. 32
4.4	Plano α secante à esfera S	p. 32
4.5	Plano α contendo o centro O secante à esfera S	p. 33
4.6	Círculos máximos passando por D e E	p. 33

4.7	A e B pontos não antípodas.	p. 34
4.8	Distância entre os pontos A e B	p. 34
4.9	Ângulo esférico.	p. 35
4.10	A e A' são os pólos da reta polar que passa por C e D	p. 35
4.11	Triângulo esférico ABC	p. 36
4.12	Triângulo esférico ABC com os ângulos subentendidos.	p. 36
4.13	Triângulo ABC contido na semiesfera.	p. 37
4.14	Triângulo ABC não contido na semiesfera.	p. 37
4.15	Triângulo antípoda $A'B'C'$	p. 37
4.16	Lúnulas ou biângulos ou fusos.	p. 38
4.17	Triângulo T' de ângulos a , b e c e triângulo T de ângulos α , β e γ	p. 40
4.18	Coordenadas esféricas do ponto P	p. 42
4.19	Triângulo esférico ABC com ângulo reto em A	p. 44
4.20	Triângulo esférico ABC	p. 45
4.21	Triângulos esféricos ABC e DEF	p. 48
4.22	Triângulo esférico ABC isósceles.	p. 50
4.23	Triângulo esférico ABC equilátero.	p. 51
5.1	Atividade I 1.	p. 56
5.2	Atividade I 2a.	p. 56
5.3	Atividade I 2b.	p. 56
5.4	Atividade II 2.	p. 58
5.5	Atividade II 2a.	p. 58
5.6	Atividade II 4.	p. 58
5.7	Atividade II 5.	p. 59
5.8	Atividade III 3.	p. 60
5.9	Atividade IV 2.	p. 61

Resumo

Neste trabalho fazemos um estudo sobre a história da Geometria Euclidiana, enunciando seus postulados e enfatizando a singularidade do quinto postulado de Euclides. Vamos explorar as tentativas mais relevantes de demonstrar o quinto postulado e como isso propiciou a criação de outras Geometrias, chamadas não-Euclidianas. Também aprofundaremos o estudo da Geometria Esférica, demonstrando seus principais resultados, sendo muitos deles análogos a resultados da Geometria Euclidiana. Terminamos com a apresentação de diversas atividades que podem ser aplicadas para alunos do Ensino Básico, contemplando desde a fixação de conceitos até as aplicações da Geometria Esférica à Geografia e ao cotidiano. O referencial teórico utilizado para elaboração das atividades é o Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico.

Palavras chave: Geometria não-Euclidiana, Geometria Esférica, Modelo de van Hiele, Atividades sobre Geometria Esférica.

Abstract

In this work we make a study of the history of Euclidean Geometry, stating its postulates and emphasizing the uniqueness of the fifth postulate of Euclid. We will explore the most important attempts to prove the fifth postulate and how this led to the creation of other Geometry, called non-Euclidean. We will also deepen the study of Spherical Geometry, showing its main results, many of which were similar to results of Euclidean Geometry. The work finishes with the presentation of various activities that can be applied to students of Basic Education, considering from the fixation of concepts to applications of Spherical Geometry in Geography and daily life. The theoretical basis for the preparation of the activities is the van Hiele Model to the development of geometric thought.

Keywords: non-Euclidean Geometry, Spherical Geometry, van Hiele Model, Activities on Spherical Geometry.

1 Introdução

Na nossa prática docente, percebemos que alguns assuntos ensinados são alvo destas perguntas: “Para que serve isso?” ou “Em que situação vou usar isso?”. Essas perguntas receberam, ao longo dos anos, diferentes respostas dependendo da concepção de sociedade, de educação e da Matemática da época. O ritmo acelerado de mudanças em nossa sociedade exige de todos estudo e aprendizagem constantes. Com relação à Matemática, a sociedade passou a exigir do indivíduo, não só conhecimentos específicos, mas também, novas maneiras de organizar o pensamento e de saber lidar com informações numéricas, interpretar gráficos, ter percepção geométrica e de medidas. Dessa forma, a Matemática ensinada nas escolas deve procurar fazer uso de problemas e situações do cotidiano do aluno. Embora essas situações cotidianas sejam fundamentais no planejamento de diversos conteúdos, cabe aqui ressaltar que essa possibilidade de aplicação não deve ser tomada como único critério para a inclusão de assuntos no ensino da Matemática.

Devemos considerar a possibilidade de oferecer ao aluno a oportunidade de participar do processo de criação e/ou recriação contínua dos conceitos matemáticos, explorando um pouco de sua história e fazendo-o compreender que o conhecimento matemático é fruto de um trabalho contínuo de observação e construção.

Dentre assuntos que são alvos das perguntas descritas anteriormente, podemos incluir a Geometria Euclidiana. Geralmente, quando a Geometria é abordada no Ensino Básico, isto é feito no final do ano letivo como mera repetição de conceitos e teoremas que, muitas vezes, não se vê em uma aplicação prática e, muito menos, num contexto histórico de seu desenvolvimento e desdobramentos.

Em um estudo realizado pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada) no ano de 2001, conforme relatado em [18], constatou-se que, de doze coleções de livros didáticos de Ensino Médio de Matemática utilizados em nosso país, nenhuma tratava das Geometrias não-Euclidianas. As razões para que isto aconteça são as mais variadas possíveis. Elas vão desde a cultura predominante do ensino da Geometria de Euclides, passando pela má formação dos

professores de Matemática, dentre outras. Entretanto, não é o objetivo deste trabalho discutir tais problemas e sim, mostrar que é possível incluir as Geometrias não-Euclidianas em nossos currículos, em especial a Geometria Esférica. Como veremos adiante, isso deve ser feito utilizando metodologias apropriadas de maneira diferente do ensino convencional.

É conveniente destacar que o estado do Paraná, em suas Diretrizes Curriculares para a Educação Básica, sugere a inserção do estudo de noções básicas de Geometrias não-Euclidianas em sua rede de ensino.

[...] Perceba a necessidade das Geometrias não-Euclidianas para a compreensão dos conceitos geométricos, quando analisados em planos diferentes do plano de Euclides; Compreenda a necessidade das Geometrias não-Euclidianas para o avanço das teorias científicas; Articule ideias geométricas em planos de curvatura nula, positiva e negativa; Conheça os conceitos básicos da Geometria Elíptica, Hiperbólica e Fractal (Geometria da superfície esférica). (Paraná, 2008, p.81).

Como docente da rede pública do estado do Rio de Janeiro, até a presente data não encontramos nenhuma menção às Geometrias não-Euclidianas nos currículos mínimos, elaborados pela Secretaria de Estado de Educação.

O objetivo deste trabalho é abordar o ensino das Geometrias não-Euclidianas, em especial da Geometria Esférica, haja vista sua maior facilidade de visualização e integração com outras disciplinas. Essa integração é recomendada nos Parâmetros Curriculares Nacionais:

Através de cortes diversos em bolas de isopor ou de colagem de tiras estreitas de fitas adesivas, e cores diversas, na superfície dessas bolas, concretizar as noções de círculos máximos e circunferências máximas, respectivamente, em esferas e superfícies esféricas, e o fato de que nem todas as circunferências que podem ser traçadas numa superfície esférica, são máximas. É útil que, nesse momento, se mostre aos alunos como esses elementos são aplicados em Geografia na determinação de linhas imaginárias na superfície terrestre (paralelos e meridianos). Nessa perspectiva, e como já definimos o segmento de reta como o menor caminho entre dois pontos de um plano, a noção de arco de circunferência pode ser introduzida através das seguintes etapas[...] (Brasil, 1991, p. 88).

A seguir será apresentada a estrutura deste trabalho.

No capítulo 2, faremos um breve relato da história da Geometria e, em especial, da Geometria de Euclides, com suas noções comuns e postulados, assim como a formulação atual do quinto postulado, dada por Playfair, mostrando a equivalência entre as duas afirmações.

O terceiro capítulo é dedicado a um pequeno histórico sobre as tentativas de provar o quinto postulado de Euclides, onde relatamos as tentativas de Saccheri e Lambert. Também descreve-

mos o processo que culminou com a criação das Geometrias Elíptica e Hiperbólica no século XIX.

O estudo da Geometria Esférica é feito no quarto capítulo deste trabalho. Nele são desenvolvidos o contexto histórico, alguns resultados, definições e teoremas que nos ajudam a compreender um pouco mais dessa Geometria que não é levada em consideração em nossos currículos escolares.

As aplicações da Geometria Esférica serão apresentadas no quinto capítulo, onde fazemos uma série de sugestões de atividades baseadas no Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, a serem realizadas pelos professores com seus alunos.

Ao final deste trabalho esperamos ter contribuído na discussão sobre o ensino da Geometria, mostrando que é possível abrir os horizontes de nossas abordagens como professores, a fim de que nossos alunos percebam e compreendam as diferentes visões geométricas do mundo que o cerca.

O presente texto pode ser utilizado por professores e alunos para uma primeira leitura sobre Geometrias não-Euclidianas e, em especial, sobre a Geometria Esférica.

2 *Geometria de Euclides*

2.1 Introdução

De acordo com [15], a palavra Geometria vem do grego *Geometrein*, que significa *Geo* - terra e *Metrein* - para medir, e por isso, a Geometria era originalmente a ciência para medir a terra. As primeiras ideias geométricas surgiram da necessidade de o homem resolver problemas como construção de casas, delimitação de terrenos e plantações, entre outros. Tal hipótese tem sua origem nos escritos de Heródoto do século V a.C.:

[Quando das inundações do Nilo,] o rei Sésotris enviava pessoas para inspecionar o terreno e medir a diminuição dos mesmos para atribuir ao homem uma redução proporcional de impostos. Aí está, creio eu, a origem da Geometria que migrou mais tarde para a Grécia. (J.B.Pitombeira e T.Roque, 2012, p.60).

Apesar do crédito dado aos egípcios, é conhecido que os babilônios, os hindus e os chineses, também já manipulavam e detinham conhecimentos geométricos. A Geometria dessa época era um campo repleto de experimentações cujas respostas aproximadas eram suficientes para problemas de razões práticas.

Os gregos foram os primeiros a se preocupar com o pensamento dedutivo das afirmações geométricas. A partir de Tales de Mileto, filósofo grego nascido em cerca de 623 a.C., a sistematização do conhecimento matemático começou a tomar forma e foi continuada por Hipócrates (c.460 a.C. - 377 a.C.), Pitágoras (c.580 a.C. - 497 a.C.), Platão (c.427 a.C - 347 a.C.) e Euclides (c.325 a.C. - 260 a.C.), dentre outros.

Cerca de 300 a.C., Euclides, possivelmente um discípulo da escola platônica, organizou e sistematizou todo o conhecimento matemático de sua época em uma obra considerada primorosa, denominada *Os Elementos*. De acordo com [2], a obra *Os Elementos* era constituída de treze volumes considerados livros, que não se resumiram a trabalhar somente com a Geometria. Segundo o mesmo autor, do livro I ao livro VI é tratada a Geometria Plana, do VII ao X, a Teoria dos Números e, do XI ao XIII, a Geometria Espacial.

O caráter lógico e formal do trabalho de Euclides, associado à natureza intuitiva de seus

axiomas, tornaram sua obra um verdadeiro manual de estudo da Geometria. A sua abordagem à Geometria dominou o ensino deste ramo da matemática por mais de dois mil anos. *Os Elementos* de Euclides é considerado o segundo livro mais editado da história, perdendo apenas para a Bíblia. Segundo Eves [13], “*Os Elementos* de Euclides tornaram-se o protótipo da forma matemática moderna” (p.178).

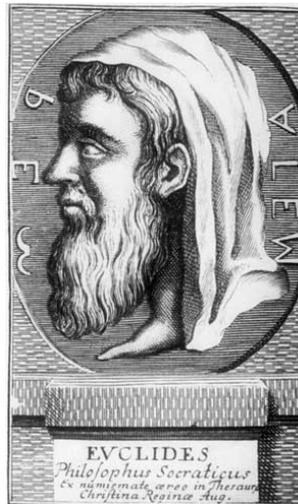


Figura 2.1: Euclides. Fonte: www.educ.fc.ul.pt.

2.2 Axiomas e postulados de Euclides



Figura 2.2: Página de rosto da tradução para o inglês de *Os Elementos*, (1570). Fonte: [13].

De acordo com [24], para Platão, os postulados de uma teoria deveriam ser simples, auto-evidentes e claramente verdadeiros que não precisariam ser provados. E os chamados axiomas ou noções comuns seriam a base do desenvolvimento de uma teoria, tendo relação direta ou não com essa teoria. Atualmente, não se faz mais a distinção entre axiomas e postulados de uma teoria.

De acordo com [25], no início do Livro I de *Os Elementos*, são apresentados os seguintes axiomas e postulados:

- Axiomas:

1. As coisas iguais a uma terceira são iguais entre si.
2. Se a coisas iguais se juntarem outras iguais, os todos serão iguais.
3. Se de coisas iguais se tirarem outras iguais, os restos serão iguais.
4. Se a coisas desiguais se juntarem outras iguais, os todos serão desiguais.
5. Se de coisas desiguais se tirarem coisas iguais, os restos serão desiguais.
6. Quantidades que perfazem cada uma o dobro de outra quantidade são iguais.
7. Quantidades que são metades de uma mesma quantidade são também iguais.
8. Duas quantidades, que se ajustam perfeitamente uma com a outra são iguais.
9. O todo é maior do que qualquer das suas partes.
10. Duas linhas retas não compreendem um espaço (uma superfície).

- Postulados:

1. Pede-se que se desenhe uma reta de um ponto qualquer até outro ponto qualquer.
2. E que se produza uma linha reta finita continuamente em uma linha reta.
3. E que com qualquer centro e qualquer distância se descreva um círculo.
4. E que todos os ângulos retos sejam iguais.
5. E que, se uma linha reta cortando duas linhas retas torna os ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, as linhas retas, se continuadas indefinidamente, se encontrem deste lado no qual os ângulos são menores que dois retos.

O grande feito de Euclides foi deduzir através de alguns axiomas e poucos postulados, 465 proposições que continham todo o conhecimento geométrico de seu tempo. O método axiomático utilizado por ele é considerado um dos marcos iniciais da Matemática Pura, pois em *Os Elementos* não se encontram aplicações, exercícios ou motivações, nem nenhum experimento físico. Conta a lenda que Euclides respondendo a um questionamento de um de seus

alunos, iniciante em Geometria, disse que a Matemática deveria ser estudada por sua própria causa, por sua beleza e elegância.

Os primeiros quatro postulados de Euclides foram aceitos sem nenhuma dúvida ou relutância pelos matemáticos, mas o quinto postulado recebeu um grande número de questionamentos. De acordo com [15], o quinto postulado é diferente dos demais porque nós não conseguimos verificá-lo empiricamente. Parece até que o próprio Euclides sabia que seu quinto postulado era controverso, pois somente começou a usá-lo a partir da proposição 29 de seu livro.

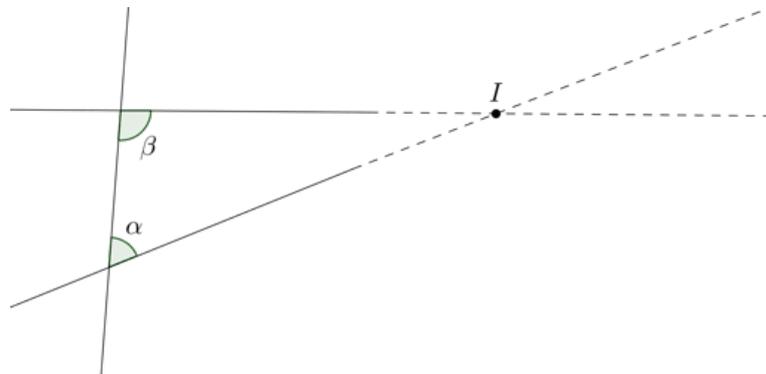


Figura 2.3: Ilustração do 5º Postulado de Euclides.

Atualmente, o quinto Postulado de Euclides é apresentado através de um enunciado equivalente, proposto em 1795 pelo matemático e físico escocês John Playfair (1748-1819). Tal postuladado é conhecido como postuladado das paralelas e pode ser assim enunciado: *por um ponto P , exterior a uma reta r , considerados em um mesmo plano, traçamos uma única reta paralela à reta r .*



Figura 2.4: John Playfair. Fonte: wikipedia.

Uma demonstração que comprova a equivalência do quinto postuladado de Euclides e o pos-

tulado das paralelas de Playfair é a apresentada por [1] e utiliza os quatro outros postulados e as 28 primeiras proposições de Euclides. Veremos a seguir tal demonstração.

Demonstração: Para um melhor entendimento, denotaremos por **pE** o quinto postulado de Euclides, e, por **pF**, o postulado de Playfair.

pE: E que, se uma linha reta cortando duas linhas retas torna os ângulos interiores do mesmo lado menores que dois retos, as linhas retas, se continuadas indefinidamente, se encontrem deste lado no qual os ângulos são menores que dois retos.

pF: Por um ponto P , exterior a uma reta r , considerados em um mesmo plano, traçamos uma única reta paralela à reta r .

Vamos primeiramente mostrar que **pE** implica **pF**.

Sejam r uma reta e P um ponto de modo que $P \notin r$.

Tracemos uma reta s perpendicular a r passando por P e, então, uma reta m perpendicular a s , também passando por P . Veja a figura 2.5.

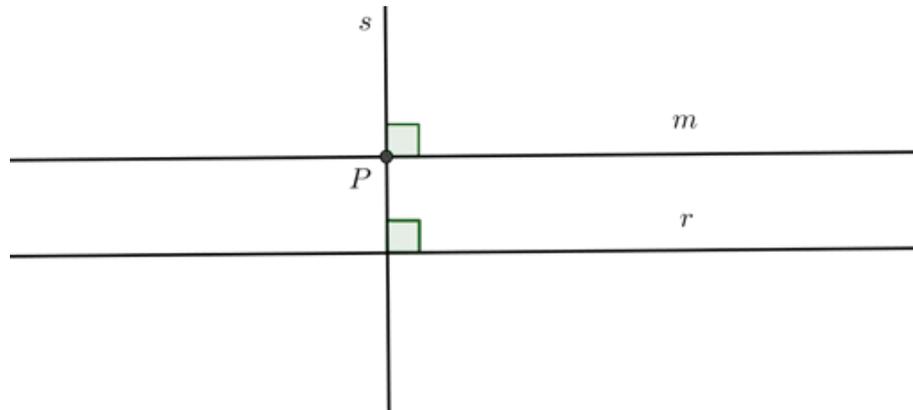


Figura 2.5: Reta s perpendicular às retas m e r .

A proposição 28 de Euclides, segundo [28], afirma que: “se duas retas r e s são cortadas por uma terceira reta t e, a soma dos ângulos internos formados no mesmo lado dessa reta for igual a 180° , então as retas r e s são paralelas”. Pela proposição 28, temos que a reta m é paralela a r e isso prova a existência de uma reta paralela a r passando por P .

Quanto à unicidade, suponhamos que existe uma reta n paralela à reta r , distinta de m , passando por P e seja α o ângulo entre as retas n e s . A situação está ilustrada na figura 2.6.

Logo, $\alpha + 90^\circ \neq 180^\circ$. Sem perda de generalidade, suponhamos que $\alpha + 90^\circ < 180^\circ$. Por **pE**, temos que n e r se encontram, o que contradiz a hipótese de que n seja paralela a r . Concluimos, então, que m e n não podem ser distintas, e portanto, m é única.

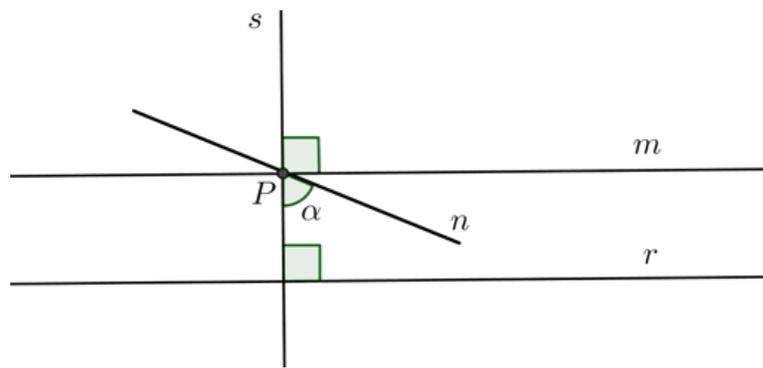


Figura 2.6: Unicidade da reta paralela à reta r .

Agora vamos mostrar que **pF** implica **pE**.

Considere as retas r e s cortadas por uma reta t de tal modo que os ângulos colaterais internos, α e β , somados sejam menores que dois retos e seja P o ponto de interseção entre as retas s e t , conforme a figura 2.7. Devemos mostrar que as retas r e s se encontram.

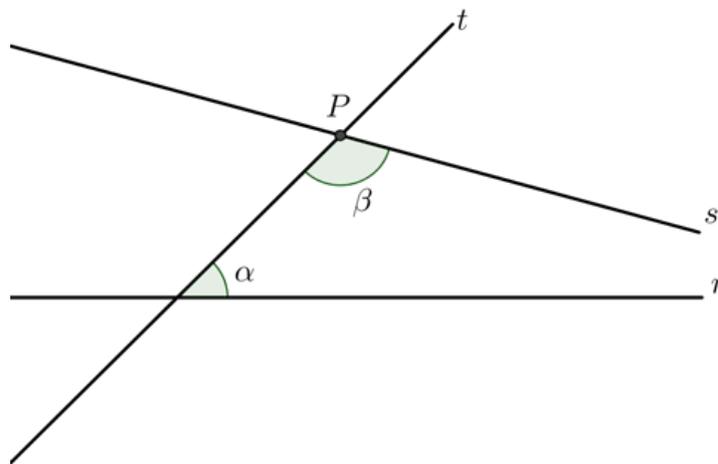


Figura 2.7: Ângulos colaterais internos α e β .

Consideremos uma reta m passando por P tal que os ângulos colaterais internos, α e γ , somados sejam iguais a dois retos, como na figura 2.8.

Pela proposição 28 de Euclides temos que m é paralela a r . Suponhamos que s também seja paralela a r . Pelo **pF**, temos a unicidade da paralela, ou seja:

$$m = s.$$

Daí, $\gamma = \beta \iff \alpha + \gamma = \alpha + \beta$. Isso contradiz a hipótese de que $\alpha + \beta < 180^\circ$, já que $\alpha + \gamma = 180^\circ$. Concluimos, então, que s não é paralela a r , isto é, que s e r se encontram. Portanto,

$$\mathbf{pE} \iff \mathbf{pF}.$$

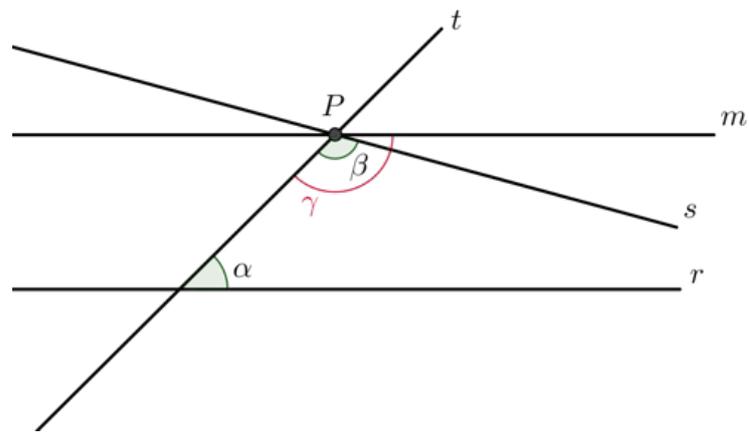


Figura 2.8: Reta m paralela a reta r , com $\gamma + \alpha = 180^\circ$.

O quinto postulado de Euclides foi durante muito tempo alvo de críticas e questionamentos. Importantes matemáticos empenharam-se na tentativa de prová-lo. Esse empenho resultou na descoberta do que hoje conhecemos como Geometria não-Euclidiana. Um breve histórico de algumas dessas tentativas será mostrado no capítulo a seguir.

3 *Geometrias não-Euclidianas*

Como dissemos anteriormente, os quatro primeiros postulados de Euclides foram todos aceitos pelos matemáticos, sendo o quinto o que provocou uma onda de questionamentos. Por mais de dois mil anos, matemáticos tentaram obter o quinto postulado através dos outros quatro ou tentaram trocá-lo por um mais convincente. Tentativas de demonstração do quinto postulado foram apresentadas por Proclus (410-485), Alhazen (965-1039), Omar Khayyan (1050-1122), Nassir Eddin (1201-1274), John Wallis (1616-1703) e muitos outros excelentes matemáticos. Porém, essas tentativas ou apresentavam argumentos sem justificativas ou acabavam se tornando um equivalente lógico do quinto postulado de Euclides.

Algumas dessas tentativas de demonstrações podem ser encontradas em [5] e [26]. No presente capítulo, relataremos os trabalhos efetuados por G.Saccheri (1667-1733), J.H.Lambert (1728-1777), J.Bolyai (1802-1860), N.Lobatchevsky (1792-1856), C.F.Gauss (1777-1855) e G.B.Riemann (1826-1866), em suas tentativas de demonstrar o quinto postulado de Euclides.

3.1 Girolamo Saccheri



Figura 3.1: Primeira página do trabalho de Saccheri (1733). *Fonte: wikipedia.*

Padre jesuíta, italiano de nascimento, Saccheri ensinava filosofia e teologia em Milão quando

tomou conhecimento da obra de Euclides. Após anos de estudo, teve a ideia de demonstrar o quinto postulado de Euclides utilizando a técnica da redução ao absurdo. Em seu livro intitulado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides livre de toda imperfeição, tradução nossa), publicado em 1733, logo após a sua morte, Saccheri assumia a negação do quinto postulado e tentava deduzir uma contradição.

Com este objetivo, Saccheri considerou um quadrilátero $ABCD$ com ângulos retos nos vértices A e B , e dois lados congruentes AD e BC , conforme a figura 3.2.

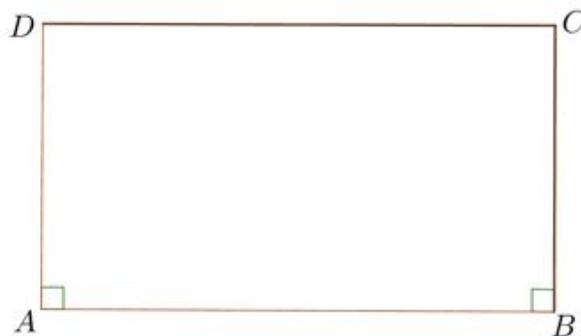


Figura 3.2: Quadrilátero de Saccheri.

Com a ajuda das primeiras 28 proposições de *Os Elementos*, que contêm vários resultados sobre a congruência de triângulos, Saccheri demonstrou que os ângulos C e D são congruentes. Assim, ele dividiu seu estudo em três casos possíveis:

- 1º caso: os ângulos dos vértices C e D são retos.
- 2º caso: os ângulos dos vértices C e D são obtusos.
- 3º caso: os ângulos dos vértices C e D são agudos.

Como o primeiro caso ocorre na Geometria Euclidiana, Saccheri tentou mostrar que os outros dois casos levavam a uma contradição. Ele obteve sucesso apenas no segundo caso. Ao supor que se os ângulos dos vértices C e D fossem obtusos, a soma dos ângulos internos do quadrilátero deveria ser maior que 360° , contrariando o que ficou conhecido posteriormente como Teorema de Saccheri-Legendre. Para um melhor entendimento desse caso, veja [14] (p.327-335). Ao estudar o terceiro caso, Saccheri não conseguiu chegar a uma contradição. Ele deduziu muitos resultados considerados por ele estranhos, pois acreditava ser a Geometria de Euclides a única e verdadeira Geometria e, com isso, abandonou seus trabalhos, por causa do que ele dizia ser a maldição do ângulo agudo.

A hipótese do ângulo agudo é absolutamente falsa; porque é repugnante à natureza das linhas retas. (Saccheri, apud Rooney, 2012, p.116).

Mesmo não reconhecendo, Saccheri descobriu os primeiros resultados de uma Geometria que não satisfaz o quinto postulado de Euclides, que hoje conhecemos como uma Geometria não-Euclidiana.

3.2 Johann Heinrich Lambert



Figura 3.3: J.H.Lambert. Fonte: [13].

Matemático nascido na Suíça, Lambert foi um autodidata. Ele era dotado de uma grande imaginação e primava pelo rigor em seus trabalhos. Por um curto período de tempo foi colega do matemático Leonhard Euler na Academia de Berlim.

Lambert estudou o quinto postulado de Euclides em seu trabalho intitulado *Die Theorie der Parallellinien* (A Teoria das linhas paralelas, tradução nossa). Assim como Saccheri, Lambert tomou um quadrilátero como objeto de estudo, porém seu quadrilátero era mais peculiar, pois continha três ângulos retos, como na figura 3.4.



Figura 3.4: Quadrilátero de Lambert.

Lambert considerou as hipóteses do quarto ângulo ser agudo, reto ou obtuso. No caso

das hipóteses do ângulo ser agudo ou obtuso, obteve resultados mais expressivos que Saccheri. Além de mostrar que a soma dos ângulos internos de um triângulo pode ser menor que, igual ou maior que dois retos, também demonstrou que o valor da soma que ultrapassa 180° , na hipótese do ângulo obtuso, ou o valor que falta para se chegar a 180° , na hipótese do ângulo agudo, é proporcional a área do triângulo. A partir daí, observou que existiria uma semelhança entre a teoria que decorria da hipótese do ângulo obtuso e a Geometria Esférica e também conjecturou possíveis semelhanças no caso da hipótese do ângulo agudo. Entretanto, suas conclusões foram consideradas imprecisas ou insatisfatórias, pois contrariavam os preceitos de Euclides.

Alguns dos resultados obtidos por Saccheri e Lambert podem ser observados em [9].

Apesar da grandiosa contribuição dos quadriláteros criados por esses dois matemáticos para revelar a possível existência de uma Geometria fora dos padrões euclidianos, eles foram abandonados, pois continham construções muito peculiares e consideradas estranhas para aquela época.

3.3 Janos Bolyai



Figura 3.5: Farkas e Janos Bolyai. Fonte: Major-world.com.

Janos Bolyai era um oficial húngaro que desde cedo havia sido encorajado pelo pai, Farkas Bolyai (1775-1856), professor de matemática, a se aventurar pelo estudo da ciência. O próprio Farkas passou grande parte de sua vida estudando o postulado das paralelas e publicou suas tentativas de demonstrá-lo, em 1831, no trabalho *O Tentamen* (O Teste, tradução livre).

Antes disso, porém, por volta de 1823, segundo [15], Janos avisara a seu pai que a partir do nada criara um novo universo. Essa afirmação se referia ao fato de Janos estar estudando o postulado das paralelas com outro enfoque, já que ele assumira que a negação do quinto

postulado de Euclides não era absurda. Seu pai ainda tentou dissuadi-lo de continuar em tal projeto. De acordo com [15], em uma de suas cartas endereçadas a Janos, Farkas diz: “Você não deve tentar essa abordagem das paralelas. Eu sei o caminho para o final. Eu atravessei uma noite sem fundo, na qual extingui toda a luz e alegria da minha vida. Eu suplico a você, deixe a ciência das paralelas sozinha...” (p.161). Não atendendo aos apelos do pai, Janos continuou seus estudos e conseguiu publicá-los como um apêndice do trabalho de seu pai.

Farkas enviou seu trabalho *O Tentamen* para apreciação de Gauss, seu amigo desde os tempos nos quais eram alunos em Gottingen, que brilhante, rapidamente encontrou falhas no trabalho do amigo. Entretanto, Gauss se disse impressionado com o estudo feito por Janos, elogiando os resultados obtidos, mas afirmava que ele mesmo já tinha encontrado os mesmos resultados anteriormente. Janos ficou decepcionado com a declaração de Gauss e nunca mais publicou nenhum de seus trabalhos, mas deixou vários manuscritos referentes às proposições que independiam do postulado das paralelas e que, por conseguinte, valeriam tanto na Geometria de Euclides quanto em uma outra Geometria. Uma tradução do apêndice escrito por Janos pode ser encontrada em [5].

3.4 Nikolai Ivanovitch Lobatchevsky



Figura 3.6: Lobatchevsky. Fonte: [13].

Matemático russo, de origem humilde, Lobatchevsky passou grande parte de sua vida na Universidade de Kazan, onde foi aluno, professor e administrador. Quase que simultaneamente ao trabalho de Janos Bolyai, Lobatchevsky também questionou o quinto postulado de Euclides utilizando-se de argumentos muito semelhantes aos de Bolyai. Em 1830, publicou seu primeiro trabalho que não recebeu a devida atenção, pois estava escrito em russo. Essa publicação

despertou a ira de setores que atacaram a “farsa das novas descobertas”.

Não se deixando abater, ele publicou em 1840, em alemão, um livro intitulado *Geometrische Untersuchungen Zur Theorie der Parallellinien* (Investigações geométricas da teoria das paralelas, tradução nossa). Dessa forma, ele pretendia atingir um número maior de leitores, mesmo contrariando o pensamento filosófico da época, dominado por Immanuel Kant, que afirmava que a Geometria Euclidiana era uma necessidade inevitável do pensamento. De acordo com [15], Gauss, ao tomar conhecimento do tratado de Lobatchevsky, afirmaria que Lobatchevsky realizou a tarefa de desenvolver uma nova Geometria de maneira majestosa e com espírito verdadeiramente geométrico. Mais tarde, em 1855, pouco antes de sua morte, publicou uma abordagem mais concisa de seu tratado, agora em francês, intitulada *Pangeometrie* (Pangeometria). Embora não tivesse vivido para ver o reconhecimento de todo o seu trabalho, a nova Geometria desenvolvida por ele passou a ser conhecida como *Geometria de Lobatchevsky* e, mais tarde como *Geometria Hiperbólica*, nome dado pelo matemático Felix Klein (1849-1925).

De acordo com [13], “A criação da Geometria de Lobatchevsky não só libertou a Geometria como também teve um efeito semelhante com a Matemática como um todo. A Matemática despontou como uma criação arbitrária do espírito humano e não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos” (p.545).

Segundo [21], apenas em 1867, os trabalhos de Bolyai e Lobatchevsky foram incluídos no influente livro *Elemente der Mathematik* de Richard Baltzer [4]. Desta forma, seus trabalhos se tornaram um padrão de referência entre os que trabalhavam com as novas Geometrias.

3.5 Carl Friedrich Gauss



Figura 3.7: C.Gauss. Fonte:[13].

Matemático alemão, considerado por muitos “o príncipe da matemática” devido à varie-

dade e profundidade de seus trabalhos, deu contribuições consideráveis à astronomia e à eletricidade. Sua obra prima é *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (Informações gerais sobre a superfície curva, tradução nossa), de 1827, que inaugura o estudo da Geometria intrínseca das superfícies do espaço.

Em vida, Gauss optou por só divulgar trabalhos que estivessem completos e que não contrariassem a filosofia de Immanuel Kant de que o espaço euclidiano é inerente à estrutura de nossa mente. Assim, o que se sabe sobre Gauss e o desenvolvimento de trabalhos sobre novas Geometrias estão relatados através de correspondências que ele mantinha com alguns amigos que tinham interesse na demonstração do quinto postulado. Segundo [3], suas notas e críticas a alguns trabalhos sobre o postulado das paralelas, nos mostra que ele foi o primeiro a compreender uma Geometria logicamente precisa e diferente da Geometria de Euclides. Ainda de acordo com [3], sua contribuição para o desenvolvimento da nova Geometria foi imenso e ele foi o primeiro a chamar essa nova Geometria de Geometria não-Euclidiana.

3.6 Georg Friedrich Bernhard Riemann



Figura 3.8: B.Riemann. Fonte:[13].

O passo seguinte no desenvolvimento das novas Geometrias foi dado por Riemann, matemático alemão, que iniciou seus estudos na universidade onde Gauss era professor. Foi também nesta universidade que Riemann desenvolveu uma nova Geometria. A nova Geometria, também conhecida como Geometria de Riemann ou Geometria Elíptica, criava uma nova estrutura geométrica, logicamente consistente e sem contradições, que diferia tanto da Geometria Euclidiana como da Geometria criada por Bolyai e Lobatchevsky. Riemann considerou que a reta não é infinita, mas ilimitada. Ele afirmou através do que ficou conhecido como Postulado de Riemann, que “*Por um ponto P qualquer, fora de uma reta r , nenhuma reta que passa por P é paralela a ela*”. Isto nos permite concluir que quaisquer duas retas tem um ponto de encontro.

A Geometria Elíptica foi apresentada por Riemann em sua aula inaugural como professor adjunto da Universidade de Gottingen. Na realidade, ele demonstrou a possibilidade de haverem diversas Geometrias, além da Euclidiana. Para isso, ele aprofundou os estudos realizados por Gauss em *General Investigations of curved Surfaces* (Investigações gerais das superfícies curvas). Nesse trabalho, Gauss utilizou técnicas do cálculo diferencial e integral para descobrir objetos matemáticos característicos de uma determinada superfície, sendo a curvatura o principal deles. Riemann demonstrou em sua aula que esses objetos característicos trazem diversas implicações à Geometria de um espaço. Ele estabeleceu que os conceitos fundamentais de uma Geometria são o que hoje chamamos de espaço topológico, a estrutura diferencial e a métrica riemanniana. Assim, fica claro pelo trabalho de Riemann, que os axiomas e os postulados de Euclides originam um caso particular de Geometria e não “a Geometria”.

3.7 Algumas considerações

O estudo das novas Geometrias forçou os matemáticos a se preocuparem ainda mais com o rigor e a precisão na definição de conceitos, na formulação de axiomas e de deduções lógicas baseadas nesses axiomas.

A “popularização” e o reconhecimento das novas Geometrias, descritas agora como não-Euclidianas, só aconteceu entre os anos de 1860 e 1870, quando matemáticos como Eugenio Beltrami (1835-1900), Henri Poincaré (1854-1912) e Felix Klein (1849-1925), utilizando-se de modelos euclidianos, descreveram e confirmaram a consistência das Geometrias criadas por Bolyai, Lobatchevsky e Riemann.

As Geometrias não-Euclidianas, em um primeiro momento, nos causam estranheza, pois não contém os apelos visuais e intuitivos da Geometria de Euclides. Seu estudo requer um conhecimento mais aprofundado de Matemática. Talvez por isso, é que ela seja deixada em segundo plano nos nossos currículos escolares. Para amenizar a estranheza, podemos iniciar o estudo das Geometrias não-Euclidianas estudando a Geometria presente na superfície de uma esfera, como será verificado no próximo capítulo.

4 *Geometria Esférica*

4.1 Introdução

A Geometria Esférica surgiu e foi desenvolvida como instrumento da Astronomia ainda nos tempos da Antiguidade. Segundo [25], o estudo dos triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito anteriormente a Euclides e o próprio Euclides estudou a Geometria Esférica em seu trabalho intitulado *Fenômenos*. O primeiro trabalho sobre Geometria Esférica que se tem registro é datado do século IV a.C. e conhecido como *Peri Kinoumenes Sphairas* (Sobre a esfera em movimento, tradução nossa), escrito pelo matemático grego Autolycus.

O matemático grego Menelaus (c.100 a.C.), também conhecido por Menelaus de Alexandria, é considerado um dos criadores da Geometria Esférica. Em sua obra *Peri Sphairas* (Sobre a Esfera, tradução nossa), dividida em três livros, Menelaus trata da Geometria Esférica sempre fazendo uma analogia com a Geometria de Euclides. Segundo [26], Menelaus é o primeiro a apresentar uma definição de triângulo esférico que aparece logo no início do livro I de sua obra:

“Um triângulo esférico é o espaço compreendido por arcos de círculos grandes na superfície de uma esfera.[...] estes arcos são sempre menores do que um semicírculo”. (Menelaus, apud Rosenfeld, 1988, p.5).

Além dessa definição, Menelaus apresenta uma série de resultados importantes da Geometria Esférica, como por exemplo, que o excesso angular de um triângulo esférico é proporcional a sua área. Este resultado será demonstrado mais adiante neste trabalho.

Existem relatos de que os árabes e os hindus também se interessavam pela Geometria Esférica. Foram os árabes que apresentaram ao continente europeu os conhecimentos dessa Geometria, pois as obras gregas primeiro foram traduzidas para o árabe e só posteriormente para o latim. Durante toda a Idade Média, a Geometria, como a ciência em geral, praticamente não evoluiu. O matemático e astrônomo alemão Johann Müller (1436-1476), mais conhecido como *Regiomontanus*, foi o primeiro a sistematizar o estudo da Geometria Esférica e dos triângulos esféricos na Europa, através de sua obra *De Triangulis Omnimodis Libri Quinque* (Todos os

tipos de triângulos em cinco livros, tradução nossa). Segundo [29], alguns de seus resultados são semelhantes aos encontrados por Menelaus.

A Geometria Esférica por suas aplicações imediatas em Astronomia sempre foi confundida e batizada de Trigonometria Esférica. O seu estudo ficou muito tempo sem ter destaque, pois o comportamento de duas ou mais linhas em uma superfície curva sempre contrariaram as regras estabelecidas pela Geometria de Euclides. Na Geometria de Euclides, dadas duas retas perpendiculares a uma terceira reta, sabemos que essas duas retas são paralelas. Já na superfície de uma esfera, duas linhas traçadas perpendiculares a uma terceira, certamente se interceptarão. Assim, fica claro que a Geometria Esférica não é estudada dentro do padrão axiomático de Euclides, e, portanto, podemos afirmar que a Geometria Esférica é o primeiro exemplo de uma Geometria não-Euclidiana.

As aplicações da Geometria Esférica, atualmente, estão na navegação marítima, na navegação aérea, na mecânica de satélites artificiais, no GPS, na transmissão de rádio de longo alcance, etc. Neste capítulo, vamos fazer um estudo da Geometria Esférica, apresentando algumas definições e os seus principais resultados.

4.2 Esfera

Definição 4.1 Esfera é um conjunto de pontos do espaço que são equidistantes de um determinado ponto que será chamado centro da esfera. Chamaremos de raio da esfera a distância entre seu centro e qualquer um de seus pontos.

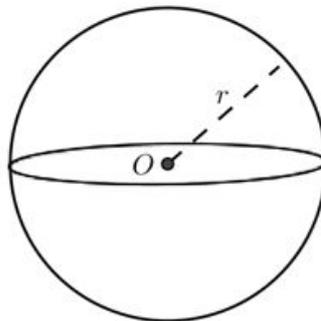


Figura 4.1: Esfera de centro O e raio r .

Considere uma esfera S e um plano α do espaço. Podemos definir as posições relativas desse plano em relação à esfera da seguinte maneira:

- *Plano Exterior à esfera*: a interseção entre o plano e a esfera é o conjunto vazio.

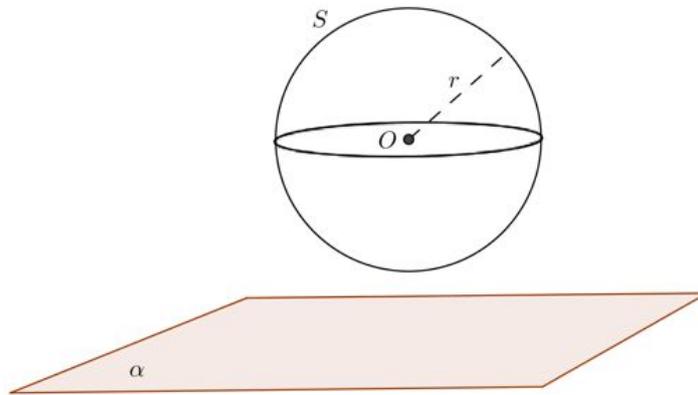


Figura 4.2: Plano α exterior à esfera S .

- *Plano Tangente à esfera*: a interseção entre o plano e a esfera é um único ponto.

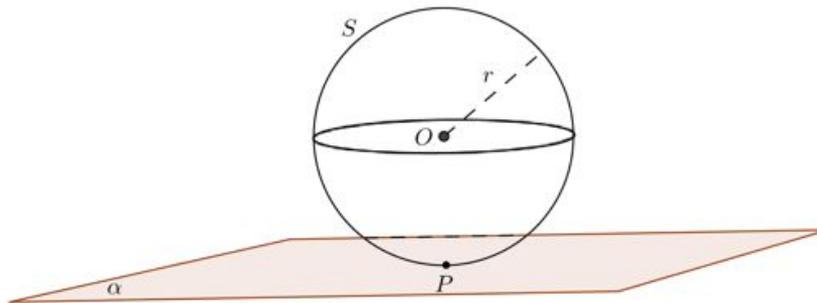


Figura 4.3: Plano α tangente à esfera S em P .

- *Plano Secante à esfera*: a interseção entre o plano e a esfera é um círculo.

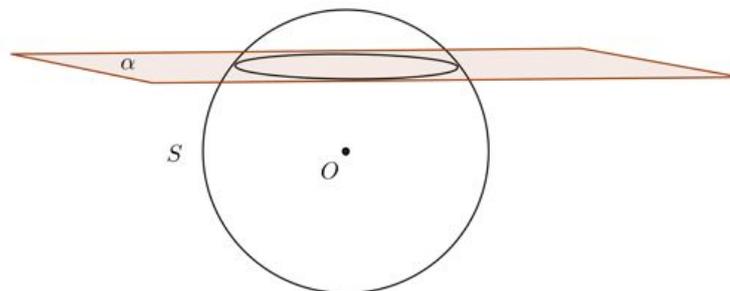


Figura 4.4: Plano α secante à esfera S .

Para maiores detalhes sobre a relação de planos com esferas, ver [10].

Definição 4.2 Seja α um plano secante a uma esfera S . A interseção de S com o plano α será chamada círculo máximo se α contiver o centro da esfera. Veja a figura 4.5.

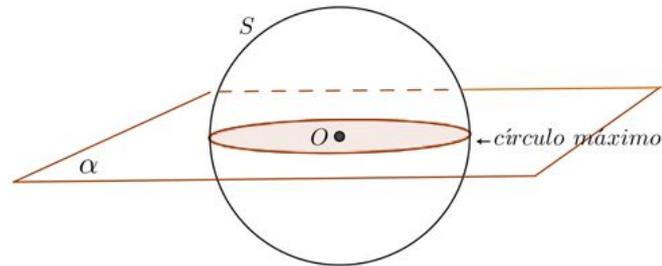


Figura 4.5: Plano α contendo o centro O secante à esfera S .

Observe que o raio do círculo máximo possui a mesma medida do raio da esfera.

Definição 4.3 Dizemos que dois pontos de uma esfera são antípodas, se esses pontos forem os extremos do diâmetro de algum círculo máximo dessa esfera.

Na figura 4.6, os pontos D e E são pontos antípodas. É fácil ver que existem infinitos círculos máximos passando por D e E . Isto decorre do fato de que existem infinitos planos, contendo D , E e O , que interceptam a esfera gerando infinitos círculos máximos.

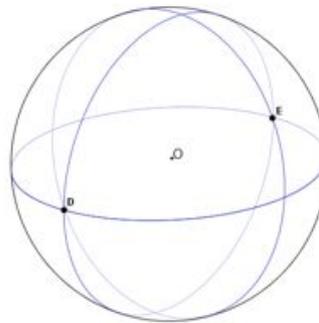


Figura 4.6: Círculos máximos passando por D e E .

Se A e B forem pontos não antípodas de uma esfera, teremos que esses pontos e o centro O da esfera determinarão um único plano passando por eles, o que acarretará na existência de um único círculo máximo que os contém, conforme a figura 4.7.

Os círculos máximos da Geometria Esférica são equivalentes às retas na Geometria de Euclides, mas com suas peculiaridades, como veremos durante este capítulo.

Note que, dados dois círculos máximos em uma esfera, eles sempre irão se interceptar. Assim, como na Geometria Esférica duas retas sempre se interceptam, podemos afirmar que não existem retas paralelas nesta geometria, diferentemente da Geometria de Euclides.

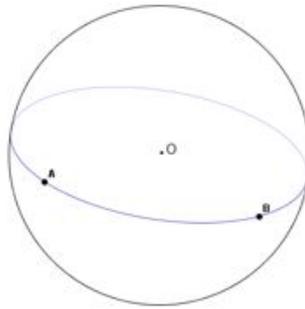


Figura 4.7: A e B pontos não antípodas.

Definição 4.4 Dados dois pontos distintos de uma esfera, eles dividem o círculo máximo que os contém em duas partes denominadas arcos.

Note que se os dois pontos são antípodas, eles determinam arcos que são semicírculos máximos, cuja visualização pode ser observada na figura 4.6. O caso para pontos não antípodas é evidenciado na figura 4.7.

Os arcos de círculos máximos da Geometria Esférica são equivalentes aos segmentos de reta na Geometria de Euclides.

Definição 4.5 Dados dois pontos distintos sobre uma esfera, a distância entre esses pontos é o comprimento do menor arco do círculo máximo que os contém.

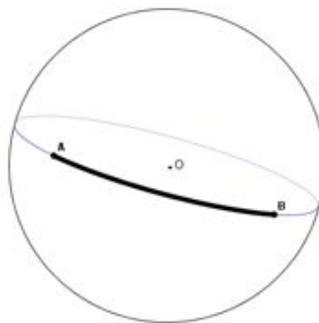


Figura 4.8: Distância entre os pontos A e B .

Para calcular a distância entre os pontos A e B , indicada por $d(A, B)$, consideremos numa esfera de raio r e centro O , o ângulo AOB de amplitude α , em radianos. Assim, efetuando uma regra de três simples encontramos que $d(A, B) = \alpha r$.

Definição 4.6 O ângulo entre dois círculos máximos é chamado de ângulo esférico, e qualquer um dos pontos antípodas onde esses círculos se encontram pode ser considerado o vértice do ângulo. Os arcos dos círculos máximos são chamados de lados do ângulo. Sua medida será

calculada pela medida do ângulo formado pelas tangentes aos círculos no ponto de interseção. Veja a figura 5.9.

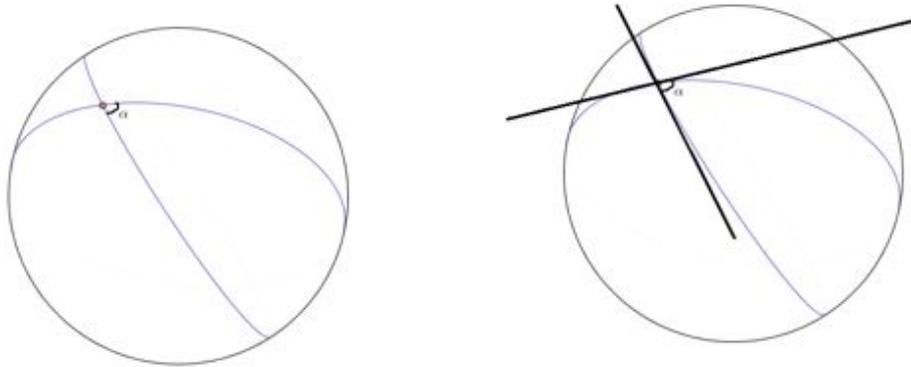


Figura 4.9: Ângulo esférico.

Proposição 4.1 A medida de um ângulo esférico equivale à medida do ângulo formado pelos semiplanos que contém os lados do ângulo.

Demonstração: Sejam r e s duas retas tangentes a dois círculos máximos em um dos pontos de interseção entre eles. Sejam α e β , os planos que contém cada um desses círculos máximos e seja t a reta interseção entre α e β . Como t é perpendicular às retas r e s no ponto de interseção (pela propriedade das retas tangentes serem perpendiculares ao diâmetro no ponto de tangência), teremos que a reta t será perpendicular ao plano determinado pelas retas r e s . Assim, obtemos um plano perpendicular à reta t , que secciona os planos α e β , segundo as retas r e s , respectivamente. Portanto, a medida do ângulo entre os planos α e β é igual a medida do ângulo entre as retas r e s .

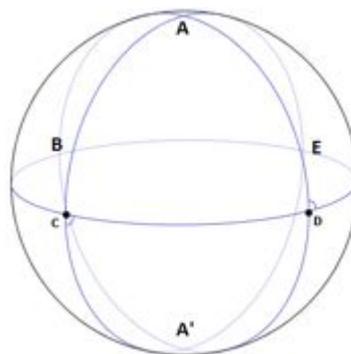


Figura 4.10: A e A' são os pólos da reta polar que passa por C e D .

Definição 4.7 Sejam dois círculos máximos passando por dois pontos antípodas A e A' . O círculo máximo perpendicular aos círculos máximos que passam por A e A' será denominado reta polar e os pontos A e A' serão chamados de pólos da reta.

Na figura 4.10, os pontos A e A' são pontos antípodos; os círculos máximos que passam por A, C e A' e por A, D e A' são perpendiculares ao círculo máximo que passa pelos pontos B, C, D e E , que é chamado de reta polar. Note que a distância dos pólos a qualquer ponto da reta polar é constante e igual ao comprimento de um quarto do círculo máximo que contém o pólo e o ponto da reta polar.

Definição 4.8 Consideremos três pontos distintos, A, B e C , pertencentes a uma esfera e não pertencentes a um mesmo círculo máximo. A figura formada pelos menores arcos dos círculos máximos determinados por esses pontos dois a dois será chamada de triângulo esférico. Os pontos A, B e C são chamados vértices do triângulo esférico e os arcos AB, AC e BC são chamados de lados do triângulo esférico. Além disso, os círculos máximos que passam por A e B , por A e C e por B e C , determinam os ângulos internos do triângulo esférico.

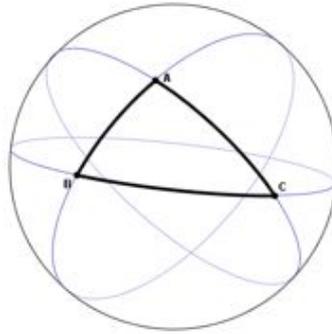


Figura 4.11: Triângulo esférico ABC .

Note que, na definição anterior, os pontos A, B e C , dois a dois, não podem ser pontos antípodos, pois haveria uma infinidade de arcos de círculos máximos definidos por eles e, ainda, qualquer um desses pontos não poderia pertencer ao menor arco do círculo máximo formado pelos outros dois. Os lados de um triângulo esférico subentendem ângulos com vértice no centro da esfera, assim, podem ser medidos em graus e em radianos. Veja a figura 4.12.

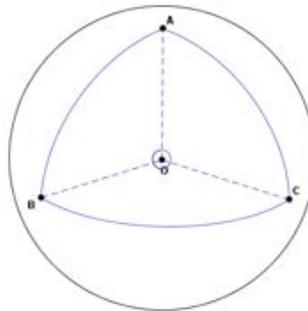


Figura 4.12: Triângulo esférico ABC com os ângulos subentendidos.

Diferentemente da Geometria Euclidiana, onde três pontos não colineares determinam um

único triângulo, na Geometria Esférica, esses pontos determinarão dois triângulos. Na figura 4.13, temos a representação de um triângulo contido em uma semiesfera.

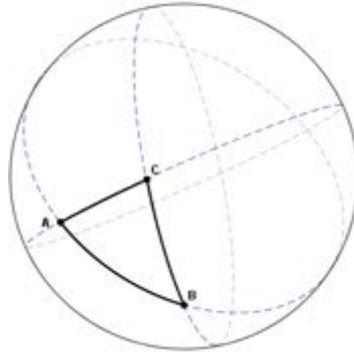


Figura 4.13: Triângulo ABC contido na semiesfera.

É imediato observarmos que também fica formado um outro triângulo, com os mesmos vértices do triângulo anterior, porém, não contido na mesma semiesfera. A esse triângulo daremos o nome de triângulo complementar, que pode ser visto na figura 4.14.

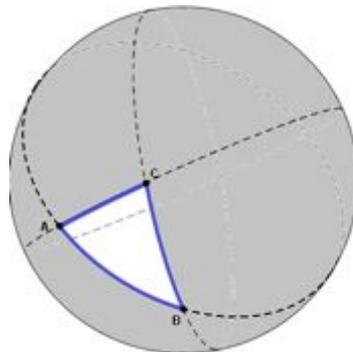


Figura 4.14: Triângulo ABC não contido na semiesfera.

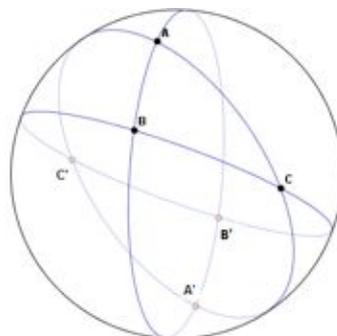


Figura 4.15: Triângulo antípoda $A'B'C'$.

Definição 4.9 Considere um triângulo esférico de vértices A , B e C . Chamaremos de triângulo antípoda ao triângulo esférico determinado pelos pontos antípodas dos pontos A , B e C .

Considerando um triângulo esférico T , de área $A(T)$, e seu triângulo antípoda T' , de área $A(T')$, podemos afirmar que $A(T) = A(T')$. Uma demonstração para esse fato pode ser encontrada em [17], p.120 a 122.

Definição 4.10 Considere dois pontos antípodas obtidos pela interseção de dois círculos máximos. Os arcos dos círculos máximos determinados por esses pontos dividem a esfera em quatro regiões, que chamaremos de lúnulas ou biângulos ou fusos. O ângulo de uma lúnula é igual ao ângulo esférico formado pelos arcos dos círculos máximos que estão associados a ela.

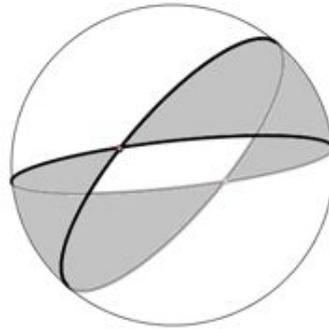


Figura 4.16: Lúnulas ou biângulos ou fusos.

Considerando a área de uma esfera de raio r como $4\pi r^2$, para uma demonstração deste fato ver [11], e conhecendo a medida do ângulo de uma lúnula, podemos calcular o valor de sua área através de uma regra de três simples. Assim, a área de uma lúnula de ângulo α , dado em graus, será dada por $A = \frac{\alpha\pi r^2}{90^\circ}$. Se utilizarmos o ângulo α , medido em radianos, teremos a fórmula $A = 2\alpha r^2$.

Definição 4.11 Chamamos de polígono esférico à figura fechada sobre a esfera delimitada pelos menores arcos de dois ou mais círculos máximos.

Observe que uma lúnula é um exemplo de polígono esférico. Os lados desse polígono (lados da lúnula) são os semicírculos dos círculos máximos. Veja a figura 4.16.

A partir dessa definição, podemos estabelecer mais uma diferença entre a Geometria de Euclides e a Geometria Esférica. Enquanto a primeira não admite um polígono de dois lados, na segunda, uma lúnula é um exemplo de um polígono deste tipo.

4.3 Teorema de Girard

O matemático francês Albert Girard (1595-1632) se destacou nas áreas de álgebra, aritmética e trigonometria. Ele foi oficial do exército holandês, onde fazia pesquisas em engenharia

e fortificações, ministrando também aulas de Matemática, Física e Cartografia. Foi Girard quem apresentou, em um tratado de trigonometria, as primeiras abreviaturas para as funções seno, cosseno e tangente. Ele mostrou também que uma equação pode apresentar raízes reais e imaginárias e encontrou uma fórmula para o cálculo da área de um triângulo esférico, que ficou conhecida como Teorema de Girard e veremos a seguir.

Teorema 4.1 Considere um triângulo esférico T sobre uma esfera S de raio r . Se α , β e γ são os ângulos internos de T , medidos em radianos, então

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A(T)}{r^2},$$

onde $A(T)$ é a área de T .

Demonstração: Esta demonstração será dividida em duas partes. Na primeira, consideraremos que o triângulo esférico T está contido em uma semiesfera, e na segunda, que o triângulo T não está contido em uma semiesfera.

1ª parte: Consideremos que o triângulo esférico T está contido em uma semiesfera.

Sejam A , B e C os vértices do triângulo esférico T . Note que os círculos máximos que passam por A , B e C determinam seis lúnulas das quais três se interceptam no interior do triângulo T e as outras três se interceptam no interior do triângulo T' antípoda a T que possui vértices A' , B' e C' e área $A(T')$. Note que os ângulos das seis lúnulas coincidem com os ângulos internos de T . Veja a figura 4.16.

A soma das áreas das seis lúnulas é igual a área da esfera, somada com o dobro da soma das áreas do triângulo esférico T e de seu triângulo antípoda T' . Como a área do triângulo esférico T é igual a área de seu triângulo antípoda T' , temos:

$$\begin{aligned} 2(2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2) &= 4\pi r^2 + 2(A(T) + A(T')) \\ \iff 4r^2(\alpha + \beta + \gamma) &= 4\pi r^2 + 2(2A(T)) \\ \iff r^2(\alpha + \beta + \gamma) &= \pi r^2 + A(T). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} r^2(\alpha + \beta + \gamma) - \pi r^2 &= A(T) \\ \iff \alpha + \beta + \gamma - \pi &= \frac{A(T)}{r^2} \\ \iff \alpha + \beta + \gamma &= \pi + \frac{A(T)}{r^2}, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

2ª parte: Consideremos agora que o triângulo esférico T não está contido em uma semiesfera.

O triângulo T determinará um triângulo complementar T' , com área menor, que está contido em uma semiesfera.

Podemos calcular a área do triângulo T fazendo a diferença entre a área da esfera com a área do triângulo T' . Para isso, vamos chamar os ângulos do triângulo T' de a , b e c medidos em radianos e sua área de $A(T')$. Assim, temos $A(T) + A(T') = 4\pi r^2$.

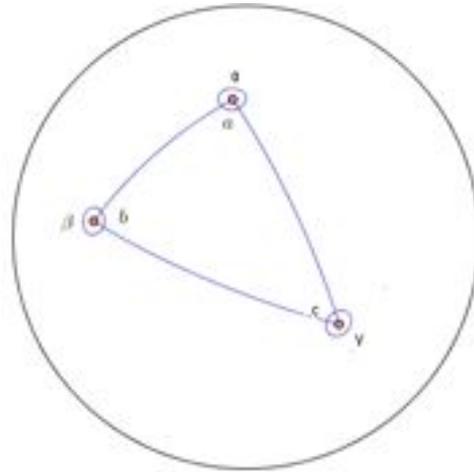


Figura 4.17: Triângulo T' de ângulos a , b e c e triângulo T de ângulos α , β e γ .

Utilizando a fórmula obtida no caso anterior, temos:

$$\begin{aligned} A(T) &= 4\pi r^2 - r^2(a + b + c - \pi) \\ &= 4\pi r^2 - r^2(2\pi - \alpha + 2\pi - \beta + 2\pi - \gamma - \pi) \\ &= r^2(4\pi + \alpha - 2\pi + \beta - 2\pi + \gamma - 2\pi + \pi) \\ &= r^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A(T)}{r^2},$$

como queríamos demonstrar.

Definição 4.12 Em um triângulo esférico T , com ângulos internos medindo α , β e γ , em radianos, o número $\alpha + \beta + \gamma - \pi$ é chamado excesso angular do triângulo esférico T .

A partir do Teorema de Girard podemos chegar às seguintes conclusões:

- A área de um triângulo esférico é diretamente proporcional ao seu excesso angular.
- Na Geometria Euclidiana, o excesso angular de qualquer triângulo é zero.

• Considere um triângulo esférico T contido em uma esfera de raio r . Sejam α , β e γ os ângulos internos de T e $A(T)$ sua área. Pelo Teorema de Girard, como $\frac{A(T)}{r^2} > 0$, temos que $\alpha + \beta + \gamma > \pi$. Além disso, se T está contido em uma semiesfera, então

$$A(T) < \frac{4\pi r^2}{2} = 2\pi r^2.$$

Daí,

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{A(T)}{r^2} + \pi < \frac{2\pi r^2}{r^2} + \pi < 3\pi,$$

e, portanto,

$$\pi < \alpha + \beta + \gamma < 3\pi.$$

Consideremos agora que T não esteja contido em uma semiesfera. Assim,

$$\frac{4\pi r^2}{2} < A(T) < 4\pi r^2.$$

Daí,

$$3\pi = \frac{2\pi r^2}{r^2} + \pi < \alpha + \beta + \gamma = \frac{A(T)}{r^2} + \pi < \frac{4\pi r^2}{2} + \pi = 5\pi,$$

donde concluímos que

$$3\pi < \alpha + \beta + \gamma < 5\pi.$$

4.4 Coordenadas esféricas

Considere uma esfera S de centro na origem de \mathbb{R}^3 e raio r , cuja equação é $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Tomemos um ponto $P = (x, y, z)$ pertencente a S .

Em alguns casos, torna-se mais interessante e conveniente não trabalharmos com as coordenadas cartesianas (x, y, z) de um ponto P da esfera e sim, trabalhar com a terna (r, θ, φ) que é chamada de coordenadas esféricas do ponto P , definidas da seguinte forma:

r é a distância do ponto P ao centro da esfera, isto é, r é o raio da esfera;

θ é o ângulo, em radianos, entre a projeção de OP sobre o plano XY e o eixo X ;

φ é o ângulo, em radianos, entre OP e o eixo Z .

Os ângulos θ e φ são chamados *longitude* e *latitude* do ponto P , respectivamente. Note que $\theta \in [0, 2\pi]$ e $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

Veja a figura 4.18.

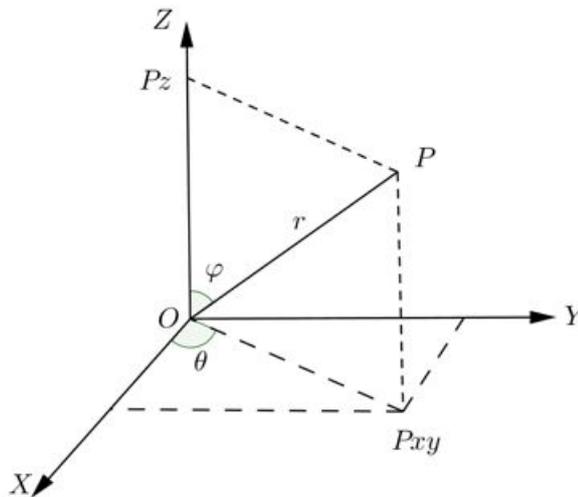


Figura 4.18: Coordenadas esféricas do ponto P .

Podemos relacionar as coordenadas cartesianas do ponto P com as suas coordenadas esféricas.

Seja $OP_{xy} = a$. Daí,

$$x = a \cdot \cos \theta, \quad (4.1)$$

$$y = a \cdot \sen \theta. \quad (4.2)$$

Além disso,

$$z = r \cdot \cos \varphi, \quad (4.3)$$

$$a = r \cdot \sen \varphi. \quad (4.4)$$

Substituindo (4.4) em (4.1) e (4.4) em (4.2) encontramos, respectivamente, $x = r \cdot \sen \varphi \cos \theta$ e $y = r \cdot \sen \varphi \sen \theta$. Portanto,

$$x = r \cdot \sen \varphi \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sen \varphi \sen \theta$$

$$z = r \cdot \cos \varphi.$$

Analogamente, também podemos relacionar as coordenadas esféricas com as coordenadas cartesianas do ponto P .

Observando a figura 4.18, temos que $a = \sqrt{x^2 + y^2}$. Assim, por (4.1),

$$\cos \theta = \frac{x}{a} \iff \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \iff \theta = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

e por (4.2),

$$\sen \theta = \frac{y}{a} \iff \sen \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \iff \theta = \arcsen \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Ainda de acordo com a figura 4.18 e por (4.4), temos:

$$\operatorname{sen} \varphi = \frac{a}{r} \iff \operatorname{sen} \varphi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \iff \varphi = \operatorname{arcsen} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

e por (4.3),

$$\operatorname{cos} \varphi = \frac{z}{r} \iff \operatorname{cos} \varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \iff \varphi = \operatorname{arccos} \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

4.5 Distância entre dois pontos de uma esfera

Considere dois pontos P e Q pertencentes a uma esfera de centro O e raio r . As coordenadas esféricas de P e Q são dadas por:

$$P = (r \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \theta_1, r \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \theta_1, r \cdot \operatorname{cos} \varphi_1),$$

$$Q = (r \cdot \operatorname{sen} \varphi_2 \cos \theta_2, r \cdot \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \theta_2, r \cdot \operatorname{cos} \varphi_2).$$

Como vimos na seção 4.3, a distância entre os pontos P e Q é calculada através do produto do raio da esfera pelo ângulo $\alpha = P\hat{O}Q$, ou seja, $d(P, Q) = r\alpha$. Para determinarmos o valor de α , façamos $\vec{OP} = \vec{u}$, $\vec{OQ} = \vec{v}$ e $\vec{PQ} = \vec{v} - \vec{u}$.

Aplicando a lei dos cossenos, temos:

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \alpha \\ \iff \cos \alpha &= \frac{\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2}{2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{r^2}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{r^2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 + r^2 \cdot \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2 + r^2 \cdot \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2}{r^2} \\ &= \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2 \\ &= \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos (\theta_1 - \theta_2) + \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2. \end{aligned}$$

Fazendo $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos \Delta\theta + \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2 \\ &= \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 \cos \Delta\theta + \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2 + \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2 \cos \Delta\theta - \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2 \cos \Delta\theta \\ &= \cos \Delta\theta (\operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2 + \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2) + \operatorname{cos} \varphi_1 \operatorname{cos} \varphi_2 (1 - \cos \Delta\theta). \end{aligned}$$

Fazendo agora $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ e utilizando a relação trigonométrica $1 - \cos \Delta\theta = 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right)$, escrevemos:

$$\cos \alpha = \cos \Delta\theta \cos \Delta\varphi + 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2,$$

o que implica que

$$\alpha = \arccos \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\varphi + 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right).$$

Daí, como $d(P, Q) = r\alpha$, teremos

$$d(P, Q) = r \cdot \arccos \left(\cos \Delta\theta \cos \Delta\varphi + 2 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\Delta\theta}{2} \right) \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \right).$$

Observe que, sem perda de generalidade, podemos realizar rotações e translações dos eixos coordenados de forma que P pertença ao plano XY . Neste caso, $\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ e, assim,

$$d(P, Q) = r \cdot \arccos (\cos \Delta\theta \cos \Delta\varphi).$$

4.6 Resultados análogos da Geometria Euclidiana

Teorema 4.2 (Teorema de Pitágoras Esférico) Seja T um triângulo esférico ABC com um ângulo reto no vértice A e o lado oposto medindo a . Se os comprimentos dos lados opostos aos vértices B e C medem, respectivamente, b e c , então

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c.$$

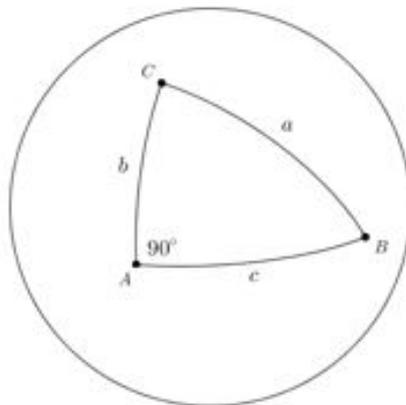


Figura 4.19: Triângulo esférico ABC com ângulo reto em A .

Demonstração: Sem perda de generalidade, tomemos o lado AB do triângulo T sobre o equador de uma esfera centrada na origem e raio r tal que $A = (r, 0, 0)$. Assim, teremos que

$B = (r \cdot \cos c, r \cdot \sin c, 0)$ e $C = (r \cdot \cos b, 0, r \cdot \sin b)$. Então,

$$\begin{aligned} \langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle &= \|\vec{OB}\| \cdot \|\vec{OC}\| \cdot \cos a \\ \iff r \cdot \cos c \cdot r \cdot \cos b + r \cdot \sin c \cdot 0 + 0 \cdot r \cdot \sin b &= r^2 \cdot \cos a \\ \iff \cos c \cdot \cos b &= \cos a, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 4.3 (Lei dos cossenos) Seja T um triângulo esférico com vértices A , B e C e ângulos internos medindo α , β e γ e cujos lados opostos medem, respectivamente, a , b e c . Então,

$$\begin{aligned} \cos a &= \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha, \\ \cos b &= \cos a \cdot \cos c + \sin a \cdot \sin c \cdot \cos \beta, \\ \cos c &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \cdot \cos \gamma. \end{aligned}$$

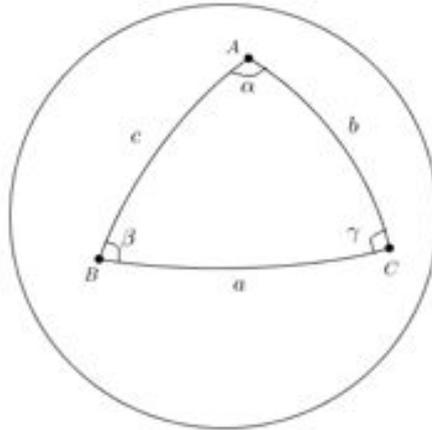


Figura 4.20: Triângulo esférico ABC .

Demonstração: Sem perda de generalidade, consideremos o lado AB do triângulo T sobre o equador de uma esfera centrada na origem e raio r tal que $A = (r, 0, 0)$ e $B = (r \cdot \cos c, r \cdot \sin c, 0)$. Seja $C = (r \cdot \cos \theta_c \cos \varphi_c, r \cdot \sin \theta_c \cos \varphi_c, r \cdot \cos \varphi_c)$, onde (r, θ_c, φ_c) são as coordenadas esféricas do ponto C .

Como $\langle \vec{OA}, \vec{OC} \rangle = \|\vec{OA}\| \cdot \|\vec{OC}\| \cdot \cos b$, temos que

$$r \cdot r \cdot \cos \theta_c \cos \varphi_c = r \cdot r \cdot \cos b \iff \cos \theta_c \cdot \cos \varphi_c = \cos b. \quad (4.5)$$

Analogamente, $\langle \vec{OB}, \vec{OC} \rangle = \|\vec{OB}\| \cdot \|\vec{OC}\| \cdot \cos a$, o que implica que

$$r \cdot \cos c \cdot r \cdot \cos \theta_c \cos \varphi_c + r \cdot \sin c \cdot r \cdot \sin \theta_c \cos \varphi_c = r \cdot r \cdot \cos a.$$

Assim,

$$\cos c \cdot \cos \theta_c \sin \varphi_c + \sin c \cdot \sin \theta_c \sin \varphi_c = \cos a. \quad (4.6)$$

Substituindo (4.5) em (4.6), temos,

$$\cos c \cdot \cos b + \sin c \cdot \sin \theta_c \sin \varphi_c = \cos a. \quad (4.7)$$

Afirmação: $\sin \theta_c \sin \varphi_c = \sin b \cos \alpha$.

Sejam π_1 o plano determinado por O, A e B , π_2 o plano determinado por O, A e C , e, finalmente, o plano π_3 determinado por O, B e C . Utilizando a proposição 4.1 da seção 4.2, façamos $\alpha = \angle(\pi_1, \pi_2)$, $\beta = \angle(\pi_1, \pi_3)$ e $\gamma = \angle(\pi_2, \pi_3)$.

Da Geometria Euclidiana, sabemos que o ângulo entre dois planos é igual ao ângulo entre as normais a esses planos. Daí, calculando os vetores normais \vec{N}_1 e \vec{N}_2 , respectivamente, dos planos π_1 e π_2 , obtemos:

$$\vec{N}_1 = \vec{OA} \times \vec{OB} = (0, 0, r^2 \cdot \sin c),$$

$$\vec{N}_2 = \vec{OA} \times \vec{OC} = (0, -r^2 \cdot \cos \varphi_c, r^2 \cdot \sin \theta_c \sin \varphi_c).$$

Assim, $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = \|\vec{N}_1\| \cdot \|\vec{N}_2\| \cdot \cos \alpha$, e daí,

$$r^2 \cdot \sin c \cdot r^2 \cdot \sin \theta_c \sin \varphi_c = \left(\sqrt{r^4 \cdot \sin^2 c} \right) \cdot \left(\sqrt{r^4 \cdot \cos^2 \varphi_c + r^4 \cdot \sin^2 \theta_c \sin^2 \varphi_c} \right) \cdot \cos \alpha.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \sin \theta_c \sin \varphi_c &= \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_c + \sin^2 \theta_c \sin^2 \varphi_c} \cdot \cos \alpha \\ &= \sqrt{1 + \sin^2 \varphi_c (-1 + \sin^2 \theta_c)} \cdot \cos \alpha \\ &= \sqrt{1 - \sin^2 \varphi_c \cos^2 \theta_c} \cdot \cos \alpha \\ &= \sqrt{1 - (\sin \varphi_c \cos \theta_c)^2} \cdot \cos \alpha. \end{aligned}$$

Usando a expressão (4.5) na equação acima, obtemos:

$$\sin \theta_c \sin \varphi_c = \sqrt{1 - \cos^2 b} \cdot \cos \alpha = \sin b \cdot \cos \alpha, \quad (4.8)$$

que prova a afirmação.

Portanto, substituindo (4.8) em (4.7), obtemos:

$$\cos c \cdot \cos b + \sin c \cdot \sin b \cdot \cos \alpha = \cos a,$$

como queríamos demonstrar.

Teorema 4.4 (Lei dos senos) Seja T um triângulo esférico com vértices A, B e C e ângulos internos medindo α, β e γ e cujos lados opostos medem, respectivamente, a, b e c , com $0 < a, b, c < \pi$ e $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$. Então,

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} c}.$$

Demonstração: Sabemos que $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, $\operatorname{sen}^2 \beta + \cos^2 \beta = 1$ e $\operatorname{sen}^2 \gamma + \cos^2 \gamma = 1$. Utilizando a lei dos cossenos para os triângulos esféricos, podemos escrever:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \left(\frac{\cos a - \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c} \right)^2,$$

$$\operatorname{sen}^2 \beta = 1 - \left(\frac{\cos b - \cos a \cdot \cos c}{\operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c} \right)^2,$$

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = 1 - \left(\frac{\cos c - \cos b \cdot \cos a}{\operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} a} \right)^2.$$

Desenvolvendo a primeira expressão acima, encontramos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 \alpha &= 1 - \frac{\cos^2 a - 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c + \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c} \\ &= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c - \cos^2 b \cdot \cos^2 c}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c}, \end{aligned}$$

e assim,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c}. \quad (4.9)$$

Analogamente, temos:

$$\operatorname{sen}^2 \beta = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 c}, \quad (4.10)$$

$$\operatorname{sen}^2 \gamma = \frac{1 - \cos^2 b - \cos^2 c - \cos^2 a + 2 \cdot \cos a \cdot \cos b \cdot \cos c}{\operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 a}. \quad (4.11)$$

Como os numeradores das expressões (4.9), (4.10) e (4.11) são iguais, podemos concluir que:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^2 \beta \cdot \operatorname{sen}^2 a \cdot \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^2 \gamma \cdot \operatorname{sen}^2 b \cdot \operatorname{sen}^2 a$$

Da primeira igualdade , temos:

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 b = \operatorname{sen}^2 \beta \cdot \operatorname{sen}^2 a \iff \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 b}.$$

Analogamente, da segunda igualdade,

$$\operatorname{sen}^2 \alpha \cdot \operatorname{sen}^2 c = \operatorname{sen}^2 \gamma \cdot \operatorname{sen}^2 a \iff \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\operatorname{sen}^2 c}$$

e, a partir daí, encontramos

$$\frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen}^2 a} = \frac{\operatorname{sen}^2 \beta}{\operatorname{sen}^2 b} = \frac{\operatorname{sen}^2 \gamma}{\operatorname{sen}^2 c}.$$

Como $0 < a, b, c < \pi$ e $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$, concluímos que

$$\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen} b} = \frac{\operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen} c}.$$

4.7 Congruência de triângulos esféricos

Definição 4.13 Um triângulo esférico de vértices A, B e C é congruente a um outro triângulo esférico de vértices D, E e F se as seguintes relações são válidas:

$$\hat{A} \cong \hat{D}, \hat{B} \cong \hat{F}, \hat{C} \cong \hat{E} \quad \text{e} \quad AB \cong DF, BC \cong EF, AC \cong DE.$$

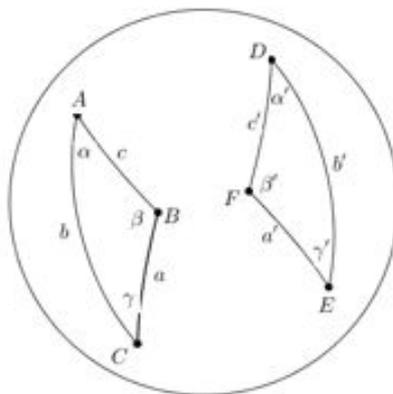


Figura 4.21: Triângulos esféricos ABC e DEF .

Assim como é feita na Geometria Euclidiana plana, a congruência de triângulos esféricos pode ser estudada através de diversas proposições, mais conhecidas como casos de congruência. A seguir, apresentaremos quatro proposições sobre congruência de triângulos esféricos. Para tal, vamos considerar os triângulos esféricos ABC e DEF de acordo com a figura 4.21.

Proposição 4.2 (Caso LLL) Se os triângulos esféricos ABC e DEF são tais que $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Demonstração: Pela Lei dos Cossenos podemos escrever:

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot \sin c \cdot \cos \alpha,$$

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos \alpha'.$$

Por hipótese $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, daí, temos que $\cos \alpha = \cos \alpha'$. Como $\alpha, \alpha' \in [0, \pi]$ e o cosseno é unicamente definido neste intervalo, concluímos que $\alpha = \alpha'$.

Analogamente, encontramos $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$. Portanto, os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Proposição 4.3 (Caso LAL) Se os triângulos esféricos ABC e DEF são tais que $a = a'$, $b = b'$ e $\gamma = \gamma'$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Demonstração: Pela Lei dos Cossenos podemos escrever:

$$\cos c = \cos b \cdot \cos a + \sin b \cdot \sin a \cdot \cos \gamma,$$

$$\cos c' = \cos b' \cdot \cos a' + \sin b' \cdot \sin a' \cdot \cos \gamma'.$$

Por hipótese $a = a'$, $b = b'$ e $\gamma = \gamma'$, daí, temos que $\cos c = \cos c'$. Como $c, c' \in [0, \pi]$ e o cosseno é unicamente definido neste intervalo, concluímos que $c = c'$.

Analogamente, encontramos $b = b'$ e $a = a'$. Utilizando agora a proposição 4.2, podemos concluir que os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Proposição 4.4 (Caso AAA) Se os triângulos esféricos ABC e DEF são tais que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $\gamma = \gamma'$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes.

Proposição 4.5 (Caso ALA) Se os triângulos esféricos ABC e DEF são tais que $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $c = c'$, então os triângulos ABC e DEF são congruentes.

As demonstrações das proposições 4.4 e 4.5 podem ser encontradas em [12].

4.8 Triângulos esféricos especiais

Definição 4.14 Um triângulo esférico é dito triângulo esférico isósceles quando possui dois lados congruentes.

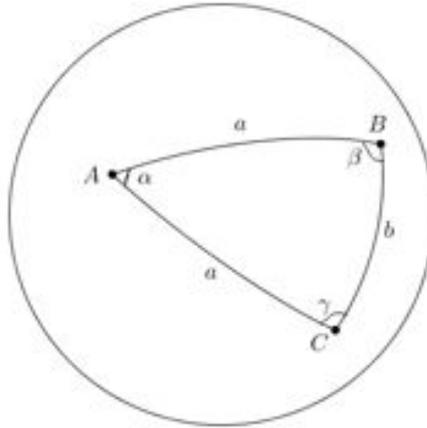


Figura 4.22: Triângulo esférico ABC isósceles.

Proposição 4.6 Se um triângulo esférico é isósceles, então os ângulos opostos aos lados congruentes são congruentes.

Demonstração: Vamos considerar um triângulo esférico isósceles cujos lados congruentes medem a , o terceiro lado mede b e cujos ângulos internos medem α , β e γ , conforme a figura 4.22. Queremos mostrar que $\beta = \gamma$.

Pela Lei dos Senos dos triângulos esféricos, temos que

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \gamma} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} \beta} \iff \operatorname{sen} \beta = \operatorname{sen} \gamma. \quad (4.12)$$

Pela Lei dos Cossenos dos triângulos esféricos, temos que:

$$\cos a = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos \gamma,$$

$$\cos a = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos \beta,$$

donde,

$$\cos \gamma = \cos \beta. \quad (4.13)$$

Logo, de (4.12) e (4.13), concluímos que $\gamma = \beta$.

Definição 4.15 Um triângulo esférico é dito triângulo esférico equilátero quando apresenta todos os lados congruentes.

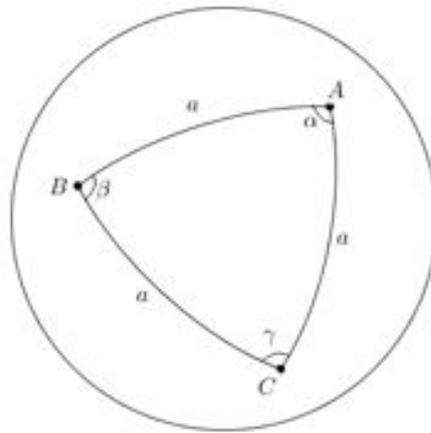


Figura 4.23: Triângulo esférico ABC equilátero.

Proposição 4.7 Se um triângulo esférico é equilátero, então os seus ângulos internos são congruentes.

Demonstração: Como o triângulo equilátero apresenta todos os lados congruentes, em particular, apresenta dois lados congruentes. Assim, para demonstrar essa proposição, basta utilizar os mesmos argumentos da prova da proposição para os triângulos isósceles que deduziremos imediatamente que os ângulos internos do triângulo apresentam a mesma medida.

Na proposição a seguir, mostraremos as relações existentes entre a medida de um lado e a medida de um ângulo de um triângulo esférico equilátero.

Proposição 4.8 Seja T um triângulo esférico equilátero cujos lados medem a e cujos ângulos internos medem α . As seguintes fórmulas são válidas:

$$(a) \cos \alpha = \frac{\cos a}{1 + \cos a}$$

$$(b) \cos a = \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

Demonstração:

(a) Pela Lei dos Cossenos em um triângulo esférico aplicada a T , temos:

$$\cos a = \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos \alpha.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{\cos a - \cos^2 a}{\operatorname{sen}^2 a} \\ &= \frac{\cos a(1 - \cos a)}{1 - \cos^2 a}. \end{aligned}$$

E assim,

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\cos a(1 - \cos a)}{(1 + \cos a)(1 - \cos a)} \\ &= \frac{\cos a}{1 + \cos a}.\end{aligned}$$

(b) Pela Lei dos Cossenos em um triângulo esférico aplicada a T , temos:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos^2 a + \operatorname{sen}^2 a \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a &= \cos^2 a + (1 - \cos^2 a) \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a - \cos^2 a &= (1 - \cos^2 a) \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a \cdot (1 - \cos a) &= (1 + \cos a)(1 - \cos a) \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a &= (1 + \cos a) \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a &= \cos \alpha + \cos a \cdot \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a - \cos a \cdot \cos \alpha &= \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a \cdot (1 - \cos \alpha) &= \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \cos a &= \frac{\cos \alpha}{1 - \cos \alpha}.\end{aligned}$$

5 *Atividades*

5.1 Introdução

Como dissemos anteriormente, o ensino de Geometria na escola básica, quando é feito, é pautado somente no estudo da Geometria Euclidiana de uma forma em que memorizações de fórmulas e teoremas são a sua base principal, sem contemplar as aplicações, a história e o seu desenvolvimento. Diante disso, o aluno é levado a pensar que essa Geometria é única.

O objetivo deste capítulo é propor atividades que possam mostrar para os alunos que existem outras Geometrias além da Geometria de Euclides. Para isso, utilizaremos o Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico [27], procurando desenvolver os conceitos da Geometria Esférica e conectando-os com o que o aluno já conhece do Globo Terrestre e da própria Geometria de Euclides.

O estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias, reconhecer as propriedades das formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medidas[...]. (Brasil, 2002, p.75).

Teremos como finalidade, através de uma nova leitura da Geometria Euclidiana, a construção dos conceitos básicos da Geometria Esférica fazendo com que o aluno perceba semelhanças e diferenças existentes entre as duas Geometrias. Além disso, procuraremos relacionar e integrar esses conceitos em atividades interdisciplinares, propondo conexões com a Geografia e o Desenho Geométrico, conforme é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN).

O estudo de diferentes sistemas de coordenadas para o plano e o espaço (cartesianas, polares, esféricas), provoca um pensamento matemático generalizador ao ir além do até então restrito universo de retas e círculos, [...]. Nesse sentido, tem-se também a possibilidade de um interessante trabalho interdisciplinar[...]. (Brasil, 2002, p.93).

5.2 O Modelo de van Hiele

O Modelo de van Hiele para o desenvolvimento do pensamento geométrico, que chamaremos apenas de Modelo de van Hiele, foi criada por Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele Geldof em seu trabalho de doutorado na Holanda, cuja primeira publicação ocorreu em 1959. Segundo [22], esta teoria estabelece cinco níveis hierárquicos, onde cada um deles é caracterizado por relações entre os objetos de estudo e linguagens próprias.

Apresentamos a seguir, um resumo de cada um dos níveis de van Hiele:

- 1^o nível - *Visualização ou reconhecimento*: o raciocínio é feito basicamente por meio visual. As figuras são reconhecidas apenas pelo aspecto global.
- 2^o nível - *Análise*: o raciocínio é feito sobre a observação e a experimentação. As figuras são reconhecidas através de suas características e propriedades.
- 3^o nível - *Abstração*: o raciocínio é desenvolvido através da necessidade de encontrar definições mais precisas para a compreensão e ordenação dos conceitos geométricos.
- 4^o nível - *Dedução*: o raciocínio é construído através do desenvolvimento de sequências lógicas de afirmações.
- 5^o nível - *Rigor*: o raciocínio matemático está em seu maior nível. O aluno é capaz de comparar e estudar vários modelos geométricos sem a necessidade de utilizar modelos concretos.

De acordo com [16], van Hiele admitiu, em comunicação pessoal com o professor norte-americano Allan Hoffer em 1985, que estaria particularmente interessado nos três primeiros níveis que vão das séries escolares mais elementares ao início do ensino superior.

Segundo o Modelo de van Hiele, o professor tem um papel de destaque no desenvolvimento do aluno, pois é ele quem vai selecionar as atividades que o aluno terá de fazer para avançar o nível seguinte. Cabe aqui ressaltar que segundo este modelo, o crescimento cronológico do aluno não gera automaticamente o crescimento nos níveis de pensamento e para progredir de nível é necessário que o aluno passe por cinco fases de aprendizagem.

Abaixo, descreveremos as principais características de cada uma dessas fases.

- 1^a fase - *Informação*: é a fase em que os alunos passam a ter um primeiro contato com o objeto de estudo. Nesta fase, o professor faz o diagnóstico sobre os conhecimentos anteriores de seus alunos sobre determinado conteúdo.

- 2ª fase - *Orientação*: nesta fase, os alunos passam a explorar diretamente o objeto de estudo, através de atividades escolhidas pelo professor, cujas soluções devem ser simples e objetivas.
- 3ª fase - *Explicitação*: é a fase em que os alunos, já familiarizados com o objeto de estudo, passam a fazer suas indagações e questionamentos sobre o mesmo, devendo aqui não haver muita interferência por parte do professor.
- 4ª fase - *Orientação Livre*: nesta fase, o professor deve apresentar atividades um pouco mais elaboradas, que façam com que o aluno busque seu próprio caminho para a resolução das mesmas com o objetivo de que os conceitos estudados se tornem mais claros.
- 5ª fase - *Integração*: é a fase em que o aluno deve rever e resumir tudo o que aprendeu devendo formar uma visão geral do objeto de estudo. O papel do professor nesta fase será o de auxiliar na construção desse processo, não devendo portanto, introduzir conceitos novos ou discordantes.

No presente trabalho, estaremos propondo atividades que contemplem alunos das séries finais do Ensino Fundamental II e alunos do Ensino Médio. Entretanto, deve ficar a cargo do professor e de suas condições, a melhor etapa para a aplicação das mesmas. É recomendável que o professor certifique-se de que os alunos já tenham tido um primeiro contato com alguns conceitos específicos de Geografia, como latitude, longitude, Linha do Equador, dentre outros. Os principais conceitos da Geometria Euclidiana, bem como o estudo do triângulo, da circunferência e do círculo, são pré-requisitos para um bom desenvolvimento das atividades propostas.

5.3 Atividades

1ª parte

As atividades desta parte estão baseadas nos níveis de visualização e análise do Modelo de van Hiele. Para o desenvolvimento das atividades, é recomendável que os alunos sejam divididos em grupos e que sejam disponibilizadas folhas de papel, régua, cola, tesoura, alfinetes, bolas de isopor, fita métrica, lápis, caneta e elásticos para cada um dos grupos. Ao término desta primeira parte, o professor deve efetuar uma discussão com os alunos sobre os conceitos desenvolvidos.

Atividade I

Objetivos: despertar no aluno a ideia de que existe outra Geometria além da Euclidiana.

Procedimentos:

1) Você recebeu duas folhas de papel. Em uma delas, desenhe e corte dois triângulos. A seguir, cole um dos triângulos sobre a outra folha de papel e cole o segundo triângulo sobre a bola de isopor. O que aconteceu com os triângulos recortados após a colagem? Discuta com seus colegas de grupo.



Figura 5.1: Atividade I 1.

2) Uma pessoa saiu de sua casa e caminhou 10 km para o sul. Depois virou para o oeste e caminhou mais 10 km. Então, virou e caminhou rumo ao norte, mais 10 km.

a) Desenhe em uma folha de papel o caminho percorrido por essa pessoa.

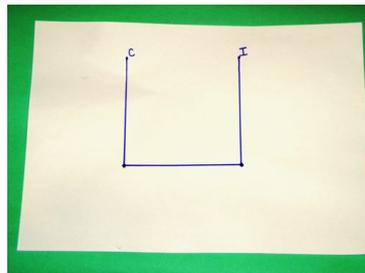


Figura 5.2: Atividade I 2a.

b) Desenhe agora, o caminho percorrido por essa pessoa sobre a bola de isopor.



Figura 5.3: Atividade I 2b.

c) Após fazer os dois desenhos, o que o seu grupo observou?

3) Marque um ponto em uma folha de papel e trace com a régua uma reta que passe por esse ponto. Agora, com auxílio do alfinete e de um elástico, marque um ponto na bola de isopor e trace com o elástico um “caminho” passando por esse ponto. Você consegue com esse “caminho” retornar ao ponto de partida em alguma das situações pedidas? Discuta com seus colegas de grupo.

Você deve ter observado no exercício 1, que na colagem do triângulo sobre a bola de isopor, este triângulo fica deformado, o que não acontece na colagem do triângulo sobre a folha de papel. Já no exercício 2, percebe-se que “caminhando” sobre a bola de isopor, a pessoa consegue voltar ao lugar de partida, diferentemente do “caminhar” descrito na folha de papel, o que ficou ratificado no exercício 3. Ao realizarmos esses exercícios, verificamos que ao passar de uma superfície plana para uma superfície curva, ocorrem situações que fogem à “normalidade” da Geometria Plana. Será que outros tipos de Geometrias são possíveis? A resposta é sim. Existem outras Geometrias e a que realizamos sobre a esfera é denominada Geometria Esférica.

Atividade II

Objetivos: construir retas e segmentos de reta em uma superfície esférica e estabelecer o conceito de distância em uma superfície esférica.

Sugestão ao professor: a fim de evitar problemas com a utilização de objetos cortantes, é recomendável que o professor leve para a aula algumas bolas de isopor que já estejam “fatiadas”. Sugerimos que se façam no mínimo dois cortes na bola, sendo que um deles divida a bola ao meio. Para “colar” as partes podemos utilizar ímãs que facilitarão a montagem e desmontagem das mesmas.

Procedimentos:

1) Utilizando uma folha de papel e uma régua, faça o que se pede:

a) Desenhe um ponto na folha de papel. Quantas retas podemos traçar passando por esse ponto?

b) Agora, desenhe dois pontos distintos na folha de papel. Quantas retas podemos traçar passando por esses pontos? Quantas retas podemos traçar passando, simultaneamente, por esses pontos?

2) Observe a bola de isopor que parece estar “fatiada”.

a) Desmonte essa bola e apoie cada pedaço sobre uma folha de papel. Com o auxílio de uma caneta desenhe o contorno de cada um desses pedaços. Que figuras você observa que ficaram

formadas?



Figura 5.4: Atividade II 2.

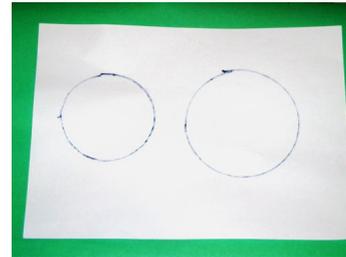


Figura 5.5: Atividade II 2a.

b) Existe algum corte que dividiu a bola em duas partes iguais?

Após terminar esse exercício podemos concluir que o maior círculo desenhado, o de maior raio, foi aquele que dividiu a bola em duas partes iguais. Na nova Geometria que estamos estudando, a Geometria Esférica, esse círculo máximo será como a reta na Geometria Euclidiana.

3) Utilizando a bola de isopor, alfinete e elástico, faça o que se pede:

a) Marque um ponto (representado pelo alfinete) na bola de isopor. Quantos círculos máximos podemos traçar por esse ponto?

b) Agora, marque dois pontos distintos sobre a bola de isopor. Quantos círculos máximos passam por esses dois pontos? Quantos círculos máximos passam, simultaneamente, por esses dois pontos?

4) Em uma folha de papel, marque dois pontos distintos e trace o menor caminho entre eles.

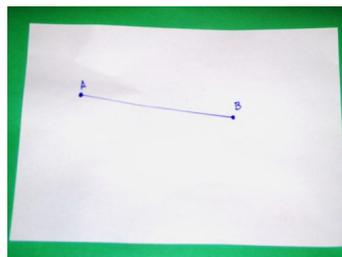


Figura 5.6: Atividade II 4.

5) Utilizando alfinetes e elástico, marque dois pontos sobre uma bola de isopor e trace o círculo máximo que passa por eles. Utilizando uma caneta e com o auxílio do círculo máximo, trace o menor caminho entre esses pontos.

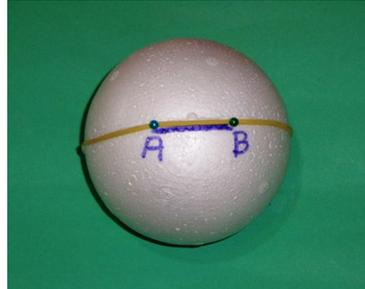


Figura 5.7: Atividade II 5.

No item (4) dessa atividade, você observa que o menor caminho entre dois pontos é determinado por um segmento de reta. Já na Geometria Esférica, podemos observar que o menor caminho entre dois pontos é um arco do círculo máximo que contém esses pontos. A esse arco de círculo definiremos como segmento de reta na Geometria Esférica.

A medida do comprimento do menor caminho entre dois pontos, tanto na Geometria de Euclides quanto na Geometria Esférica é chamada de distância entre esses dois pontos.

Atividade III

Objetivos: fazer com que os alunos percebam que na superfície esférica não existem retas paralelas.

Sugestão ao professor: é recomendável que o professor, antes de iniciar a Atividade III, lembre com os alunos as posições relativas entre duas retas no plano, fazendo também alusão ao quinto postulado de Euclides. Após o término desta atividade, o professor deve aproveitar para realizar um breve histórico sobre a criação de novas Geometrias, enfatizando a questão do quinto postulado e reafirmando a condição da não existência de retas paralelas na Geometria Esférica.

Procedimentos:

1) Desenhe uma reta em uma folha de papel e marque um ponto fora dela. Quantas retas podemos traçar por este ponto que não interceptam a reta inicialmente desenhada?

2) Marque, com o auxílio de um alfinete, um ponto *A* sobre a bola de isopor. Com um elástico, trace um círculo máximo que passe por esse ponto. Compare o resultado que você obteve com o resultado do seu colega. O círculo que você obteve é igual ao dele?

3) Agora, sobre a mesma bola, marque um ponto *B*, distinto de *A*, e trace um círculo máximo

que contenha B e não passe pelo ponto A . Houve alguma interseção entre os círculos máximos traçados? Compare o seu resultado com o do seu colega.



Figura 5.8: Atividade III 3.

4) Trace vários outros círculos máximos que passem pelos pontos A e B marcados por você no exercício anterior. Eles apresentam pontos de interseção? Discuta com seu grupo e anote suas conclusões.

Você deve ter observado que todos os círculos máximos se interceptaram, isto significa que não existem círculos máximos que não possuem pontos de interseção.

Assim, podemos observar aqui uma grande diferença entre a Geometria de Euclides e a Geometria Esférica. Enquanto que na primeira duas retas podem não ter ponto comum (são as chamadas retas paralelas), na segunda, é impossível que dois círculos máximos não tenham ponto em comum, isto nos permite afirmar que na Geometria Esférica não existem círculos máximos paralelos.

Atividade IV

Objetivos: construir pontos antípodas e ângulo esférico, determinar o ângulo entre duas retas na superfície esférica e calcular a distância entre dois pontos.

Sugestão ao professor: é recomendável ao professor que faça uma revisão com seus alunos sobre a medida do comprimento de uma circunferência, bem como a relação entre a medida do ângulo central e a medida do arco correspondente.

Procedimentos:

1) Sobre uma bola de isopor marque um ponto A e trace dois círculos máximos passando por esse ponto. Com exceção do ponto A , existe alguma outra interseção entre esses círculos máximos?

2) Observe que os dois círculos máximos que você traçou passando por A interceptam-se em um outro ponto. Esse ponto de interseção será chamado de ponto antípoda do ponto A . Note que o ponto A e o seu antípoda são extremos de um mesmo diâmetro de um círculo máximo.



Figura 5.9: Atividade IV 2.

Esses pontos dividem esse círculo máximo em quantas partes? Essas partes são iguais?

3) Imagine que a bola de isopor represente o planeta Terra. Utilizando seus conhecimentos de Geografia, marque os pólos Norte e Sul da Terra. Agora, responda:

a) Você conseguiria traçar dois círculos máximos passando por esses dois pontos?

b) Você conseguiria traçar três círculos máximos passando por esses dois pontos?

c) Quantos círculos máximos você conseguiria traçar passando por esses dois pontos? Discuta com seu grupo.

Note que aqui podemos perceber mais uma diferença entre a Geometria de Euclides e a Geometria Esférica. Na Euclidiana, por dois pontos passa uma única reta, enquanto que na esférica, por dois pontos podem passar mais de um círculo máximo.

d) Você conseguiria traçar dois círculos máximos passando por esses dois pontos que dividam a bola de isopor em quatro partes iguais?

e) Na Geometria de Euclides, duas retas que se interceptam formam um ângulo. É possível formar um ângulo entre dois círculos máximos na Geometria Esférica?

f) Voltando aos círculos máximos desenhados no item (d), qual seria a medida do ângulo formado por eles?

4) Com o auxílio da fita métrica, calcule a medida do raio da bola de isopor.

5) Marque dois pontos que não estejam sobre um mesmo diâmetro nesta bola e calcule a distância entre eles.

6) Marque dois pontos na bola de isopor de modo que a distância entre eles seja de 45° .

2ª parte

As atividades desta segunda parte deverão ser iniciadas pelo professor após sua percepção

de que os principais conceitos da Geometria Esférica foram assimilados pelos alunos. As atividades desta parte se enquadram no terceiro nível do Modelo de van Hiele, denominado abstração. Para o desenvolvimento das atividades, é recomendável que os alunos sejam divididos em grupos e que sejam disponibilizadas folhas de papel, régua, cola, tesoura, alfinetes, bolas de isopor, fita métrica, transferidor, lápis, caneta e elásticos para cada um dos grupos.

Atividade I

Objetivos: definir triângulo esférico e polígono esférico.

Sugestão ao professor: relembrar com os alunos a definição de polígono na Geometria Euclidiana.

Procedimentos:

1) Em uma bola de isopor, utilizando uma caneta, marque dois pontos antípodas A e B . A seguir, trace dois círculos máximos que passam por esses pontos e responda:

a) Em quantas regiões fica dividida a esfera? Cada uma dessas regiões é chamada de lúnula ou biângulo e é considerada um polígono na Geometria Esférica.

b) Há alguma figura equivalente a encontrada no item anterior na Geometria de Euclides? Discuta com seus colegas.

2) Em uma bola de isopor, marque, a caneta, três pontos A , B e C , distintos e não alinhados. A seguir, trace os arcos menores AB , AC e BC e descreva a figura encontrada.

A figura que você construiu é denominada de triângulo esférico.

3) Você deve ter percebido que em cada vértice A , B e C do triângulo que você desenhou no exercício anterior, está determinado um ângulo. Agora, cada integrante do grupo deve medir os ângulos de seu triângulo e determinar as suas medidas.

4) Faça a soma dessas medidas e compare os resultados encontrados.

5) Após a comparação dos resultados, a que conclusão pode-se chegar?

Podemos observar com as atividades acima que, enquanto na Geometria de Euclides, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a 180° , na Geometria Esférica, essa soma é sempre maior do que 180° .

6) Marque dois pontos antípodas sobre uma bola de isopor. Trace dois círculos máximos que passem por esses pontos de tal forma que a esfera seja dividida em quatro partes iguais.

7) Escolha dois semicírculos, dentre aqueles que você traçou no exercício anterior, e marque

os pontos que irão dividi-los ao meio. A seguir, trace o círculo que passa por esses dois pontos.

8) Com relação ao item anterior, responda:

- Quais as medidas dos ângulos formados pelos círculos máximos traçados?
- Que figura representa cada uma das partes da figura formada?
- Quanto vale a soma dos ângulos internos de cada uma dessas figuras?

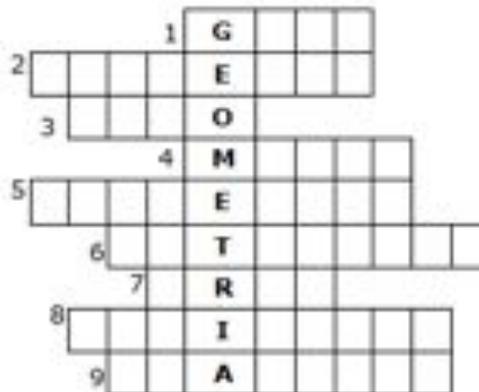
Observe que, na Geometria Esférica, existe a possibilidade de um triângulo com os três ângulos internos medindo 90° , o que é impossível na Geometria de Euclides.

Atividade II

Objetivos: revisão de conceitos já estudados.

Procedimentos:

- Complete a palavra cruzada abaixo, de acordo com as informações dadas:



- Unidade de medida de arcos.
- Nome que se dá ao plano que apresenta um único ponto de interseção com uma esfera.
- Distância entre dois pontos distintos de uma superfície esférica.
- Em um triângulo esférico, a soma dos ângulos internos é sempredo que 180° .
- Nome que se dá à curva que minimiza a distância entre dois pontos sobre uma esfera.
- Nome que se dá aos pontos distintos de uma esfera que são diametralmente opostos.
- Número máximo de ângulos retos que um triângulo esférico pode ter.
- Quantidade de circunferências máximas que passam por dois pontos antípodas.
- Nome do polígono com menor número de lados na Geometria Esférica.

Atividade III

Material: Atlas, lápis, caneta.

Objetivos: mostrar como os conceitos da Geometria Esférica podem ser utilizados na Geografia.

Sugestão ao professor: sugerir ao professor de Geografia que relembre com os alunos os conceitos de latitude e longitude.

Procedimentos:

1) Você já estudou em suas aulas de Geografia o Globo Terrestre. Então, usando o que você aprendeu, responda:

a) Pelos pólos do Globo passam infinitos círculos máximos. Que nome é dado a esses círculos em Geografia?

b) Em Geografia, qual é o nome do principal círculo máximo que passa pelos pólos?

c) Que nome você deu ao círculo máximo que é perpendicular a dois círculos máximos que passam pelos pólos?

d) Qualquer ponto do Globo Terrestre pode ser localizado em um mapa desde que você conheça suas coordenadas geográficas. Essas coordenadas recebem nomes especiais. Você lembra que nomes são esses e como essas coordenadas são obtidas?

e) Há uma música famosa da dupla Kleiton e Kledir que fala sobre a cidade de Porto Alegre e em um de seus trechos diz “paralelo 30”. Observando no Atlas a cidade de Porto Alegre, podemos entender o porquê desta expressão? Discuta com seus colegas de grupo.

f) Um avião está exatamente na metade da distância entre a linha do Equador e o pólo Norte e a leste do Meridiano de Greenwich, na sexta parte do comprimento, em graus, da linha do Equador. Para relatar a sua exata posição, o piloto avisa à torre de controle suas coordenadas geográficas. Qual deve ser o relato do piloto? (Questão adaptada do livro [19]).

3ª parte

A terceira parte das atividades será baseada nos resultados da Geometria Esférica que apresentam correlatos na Geometria Plana e nas aplicações da Geometria Esférica no nosso dia a dia. Para o desenvolvimento das próximas atividades os grupos devem estar munidos de um Globo Terrestre, de calculadora científica, lápis, caneta e régua. Essas atividades se enquadram

nos níveis de abstração e dedução do Modelo de van Hiele.

Atividade I

Objetivos: calcular a distância entre dois pontos do planeta Terra.

Sugestão ao professor: é recomendável que o professor lembre como fazer a conversão entre grau e radiano e as funções trigonométricas principais. O professor poderá trabalhar em conjunto com o professor de Geografia a fim de estudar os locais do planeta que estejam sendo estudados em Geografia.

Procedimentos:

1) Vivemos na cidade do Rio de Janeiro, cuja latitude, aproximada, é de $22^{\circ}S$. Considerando o raio da Terra igual a 6400 km, a quantos quilômetros nos encontramos da Linha do Equador?

2) Segundo o Google Earth, as cidades de Dourados(MS) e Santarém(PA) apresentam coordenadas, em termos de latitude e longitude, respectivamente iguais a $(22^{\circ}S, 54^{\circ}W)$ e $(2^{\circ}S, 54^{\circ}W)$. Considerando o raio da Terra igual a 6400 km, determine a distância entre essas cidades.

3) As cidades de Quito no Equador e de Macapá no Brasil estão situadas sob a Linha do Equador. Consulte no Atlas e determine as longitudes dessas cidades. A seguir, encontre a distância entre elas.

Atividade II

Objetivos: calcular a área de um triângulo esférico e calcular a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico.

Sugestão ao professor: é sugerido ao professor que trabalhe a área de um triângulo sendo conhecidas as medidas de seus lados.

Procedimentos:

1) As cidades do Rio de Janeiro, de São Paulo e de Belo Horizonte, são capitais de três importantes estados da região sudeste do Brasil.

a) Localize-as no atlas. A seguir, trace com um lápis, o triângulo que possui como vértices essas três cidades.

b) Meça os segmentos encontrados no item anterior e calcule a área do triângulo que você marcou.

2) Com o auxílio do Globo Terrestre, vamos localizar as cidades do exercício anterior e traçar um triângulo esférico com vértices nessas cidades. Considerando que o raio da Terra é

igual a 6400 km, faça o que se pede:

a) Encontre a distância entre a cidade do Rio de Janeiro ($22^{\circ}S, 43^{\circ}W$) e a cidade de São Paulo ($23^{\circ}S, 46^{\circ}W$).

b) Encontre a distância entre as cidades do Rio de Janeiro ($22^{\circ}S, 43^{\circ}W$) e Belo Horizonte ($19^{\circ}S, 44^{\circ}W$).

c) Encontre a distância entre as cidades de São Paulo ($23^{\circ}S, 46^{\circ}W$) e Belo Horizonte ($19^{\circ}S, 44^{\circ}W$).

d) Chamemos de α o ângulo cujo lado oposto liga o Rio de Janeiro e São Paulo. Nessas condições, quanto mede o ângulo α ?

e) Chamemos de β o ângulo cujo lado oposto liga Belo Horizonte e São Paulo. Nessas condições, quanto mede o ângulo β ?

f) Chamemos de γ o ângulo cujo lado oposto liga Belo Horizonte e Rio de Janeiro. Nessas condições, quanto mede o ângulo γ ?

g) O que podemos afirmar sobre $\alpha + \beta + \gamma$?

h) O matemático francês Albert Girard, que viveu no século XVII, dentre suas contribuições à Matemática, nos apresentou uma fórmula que permite o cálculo da área de um triângulo esférico. Ele afirma que se α , β e γ são as medidas dos ângulos internos, em radianos, de um triângulo esférico sobre uma esfera de raio r , então, $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \frac{A}{r^2}$, onde A é a área do triângulo. Utilizando essas informações e os valores encontrados no exercício anterior, calcule a área do triângulo esférico formado pelas cidades do Rio de Janeiro, São Paulo e Belo Horizonte.

Acreditamos que estas atividades possam ser realizadas com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com a finalidade principal de desenvolver nesse aluno a capacidade de enxergar outras geometrias no mundo que o cerca, não se limitando apenas à visão da Geometria de Euclides.

6 *Considerações Finais*

O presente estudo partiu de uma ideia de tentar fazer com que nossos alunos possam ampliar seus conhecimentos sobre o mundo da Geometria. É fato que o ensino da Geometria em nossas escolas, quando acontece, é restrito à Geometria de Euclides. Várias são as razões para que isso aconteça, mas nossa proposta não é discutir sobre essas questões e sim levantar uma bandeira para a inclusão do estudo das Geometrias não-Euclidianas em nossos currículos, em particular, da Geometria Esférica, que ao nosso ver, é a que mais se aproxima do mundo real do aluno.

Com este propósito, este trabalho foi dividido em etapas com a finalidade de implementar o estudo de uma Geometria não-Euclidiana para professores e acessível aos alunos da escola básica. No início, fizemos um breve resumo histórico da Geometria de Euclides, com seus principais postulados e axiomas. A seguir, verificamos algumas tentativas de se provar o quinto postulado de Euclides, o que desencadeou o aparecimento das Geometrias não-Euclidianas. Para uma melhor compreensão desse novo olhar geométrico, estudamos a Geometria Esférica através de seus conceitos e resultados, estabelecendo comparações e diferenças com a Geometria Euclidiana.

Acreditamos que a participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais para que o aprendizado se internalize. Sendo assim, utilizando o Modelo de van Hiele, propusemos várias atividades que exigem a atuação do aluno, mostrando a ele uma maneira interativa de aprender. As atividades sugeridas, devem ser conduzidas e trabalhadas pelo professor obedecendo a sua própria realidade. Mostrar a aplicação da Geometria Esférica, suas interações com outras disciplinas e resgatar um pouco da história da Matemática pode ser um item motivador e instigador para nossos alunos.

Por fim, esperamos que este texto possa servir de base para o professor que tenha o desejo de desenvolver as atividades aqui propostas e que trabalhos futuros possam ser desenvolvidos na escola básica, objetivando a inserção das Geometrias não-Euclidianas nos currículos, fazendo uma conexão da Matemática com outras Ciências, contribuindo desta maneira para que o aluno aumente a compreensão do mundo que o cerca.

Referências Bibliográficas

- [1] ARCARI, I., *Um texto de Geometria Hiperbólica*. Dissertação de mestrado em Matemática, UNICAMP, Campinas, 2008.
- [2] ARTMANN, B., *Euclid: the creations of mathematics*. New York, 1999.
- [3] BARBOSA, J. L. M., *Geometria Hiperbólica*. IMPA, 2002.
- [4] BALTZER, R., *Elemente der Mathematik*. Leipzig, 1870.
- [5] BONOLA, R., *Non-Euclidean Geometry*. Traduzido para o inglês por H. S. Carslaw. Nova York, Dover Publications, 1949.
- [6] BRANNAN, D. A.; ESPLEN, M. F.; GRAY, J. J., *Geometry*. Cambridge University, 2ª edição, 2012.
- [7] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. Brasília, MEC, 1998.
- [8] BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio. Brasília, MEC, 1999.
- [9] COUTINHO, L., *Convite às geometrias não-euclidianas*. Rio de Janeiro, Editora Interciência, 2001.
- [10] DELGADO, J.; FRENSEL, K.; CRISSAFF, L. S., *Geometria Analítica*. Coleção Profmat, SBM, 2013.
- [11] DOLCE, O.; POMPEO, J. N., *Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria espacial*. São Paulo, Atual Editora, 2005.
- [12] DORIA, M. C., *Geometrias Não Euclidianas: Exemplos*. In. Bienal de Matemática, Rio de Janeiro, SBM, 2004.
- [13] EVES, H., *Introdução à História da Matemática*. Campinas: Editora da Unicamp, 2004.
- [14] GARBI, G. G., *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática*. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2009.
- [15] GREENBERG, M. J., *Euclidean and Non-Euclidean Geometries: development and history*. 3ª edição, New York: Freeman, 2001.
- [16] KALLEF, A. M., HENRIQUES, A. S., REI, D. M., FIGUEIREDO, L. G., *Desenvolvimento do Pensamento Geométrico - O Modelo de van Hiele*. 2º Congresso Nacional de Iniciação Científica em Matemática - UFRJ, 1989.

- [17] LIMA, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro, SBM, 1987.
- [18] LIMA, E. L., *Exames de Textos: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio*. Rio de Janeiro, SBM, 2001.
- [19] LUCCI, E. A., *Geografia - o homem no espaço global*. São Paulo, Editora Saraiva, 1999.
- [20] McCLEARY, J., *Geometry from a Differentiable Viewpoint*. Cambridge University, 1994.
- [21] MLODINOW, L., *A Janela de Euclides: a História da Geometria, das linhas paralelas ao hiperespaço*. São Paulo, Geração Editorial, 2005.
- [22] NASSER, L.; SANT'ANNA, N. F. P., *Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele*. IM-UFRJ, Projeto Fundão, 2010.
- [23] PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática. SEED: Curitiba, 2008.
- [24] ROONEY, A., *A História da Matemática: Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*. São Paulo, M. Brooks do Brasil, 2012.
- [25] ROQUE, T.; PITOMBEIRA, J. B., *Tópicos de História de Matemática*. Coleção Profmat, SBM, 2012.
- [26] ROSENFELD, B. A., *A History of Non-euclidean Geometry*. Tradução U. Moscou, 1988.
- [27] VAN HIELE, P., *Structure and Insight*. Orlando, FL, Academic Press, 1986.
- [28] VIGLIONI, H. H. B.; SANTOS, A. R. S., *Geometria Euclidiana Plana*. UFS, 2011.
- [29] ZELLER, M. C., *The development of trigonometry from Regiomontanus to Pitiscus*. Dissertação de doutorado, U. Michigan, 1944.