UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

SCIENTIA AD SAPIENTIAM

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Sistemas de Amortização na Educação Básica

Marcelo José Ferreira Santos

Instituto de Matemática

Maceió, Fevereiro de 2015

PROFMAT

Universidade Federal de Alagoas
Instituto de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Sistemas de Amortização na Educação Básica

Marcelo José Ferreira Santos

Maceió, Brasil
Fevereiro de 2015

MARCELO JOSÉ FERREIRA SANTOS

SISTEMAS DE AMORTIZAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, ofertado pelo Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, como requisito parcial para obtenção do grau de mestre em matemática.

Orientador: Luis Guillermo Martinez Maza.

Maceió
2015

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário responsável: Valter dos Santos Andrade

S237s Santos, Marcelo José Ferreira.
Sistemas de amortização na Educação Básica / Marcelo José Ferreira Santos. – 2015.
64 f. : il.

Orientador: Luis Guillermo Martinez Maza.
Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós-graduação em Matemática. Maceió, 2015.

Bibliografia: f. 62.
Apêndices: f. 63-64.

1. Matemática financeira – Estudo e ensino. 2. Amortização financeira. 3. Alunos - Ensino Médio. I. Título.

CDU: 51.003

MARCELO JOSÉ FERREIRA SANTOS

SISTEMA DE AMORTIZAÇÃO NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Dissertação submetida ao corpo docente do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Instituto de Matemática da Universidade Federal de Alagoas, sob coordenação nacional da Sociedade Brasileira de Matemática, e aprovada em 27 de fevereiro de 2015.

Banca Examinadora:

Luis Guillermo Martinez M.

(Prof. Dr. Luis Guillermo Martinez Maza, UFAL) (Orientador)

Gregorio Manoel da Silva Neto

(Prof. Dr. Gregório Manoel da Silva Neto, UFAL) (Examinador Interno)

Carlos Argolo Pereira Alves

(Prof. Dr. Carlos Argolo Pereira Alves, IFAL) (Examinador Externo)

Dedico este trabalho primeiramente a meus filhos João Pedro e Maria Clara, para que este possa servir de luz para eles e para muitos.

Dedico também a todas as pessoas que me deram força e ajudaram a concretizar mais uma etapa da minha vida.

RESUMO

A população de uma forma geral não tem conhecimento de como funcionam as operações financeiras como empréstimos, financiamentos ou situações de compra e venda, principalmente neste período, onde grande parte da população está adquirindo sua casa própria e/ou carro novo ou usado através de financiamentos bancários. Nossa proposta é trabalhar com os sistemas de amortização em sala de aula, mais especificamente no ensino médio, esclarecendo assim para o estudante que será o futuro cidadão qual a melhor opção de compra e venda entre outras operações financeiras. Para melhor entender esta situação foi realizada uma atividade numa escola pública no interior de Alagoas, na cidade de Feira Grande, na Escola Estadual Manoel Leandro de Lira, numa turma de 2º ano do ensino médio. Aproveitando o conteúdo de matemática financeira foram aplicadas as definições de sistemas de amortização e na sequência a realização de algumas atividades relacionadas ao tema. O conhecimento de sistemas de amortização, não é tão comum de se encontrar nos livros didáticos, por esse motivo, foi realizada uma entrevista com um especialista bancário e funcionário do Banco do Brasil, além de outras investigações como o trabalho de Ernesto Coutinho Puccini realizado pelo Sistema Universidade Aberta do Brasil, entre outros. O trabalho de uma forma mais completa propõe o uso da matemática para a formação de um cidadão mais consciente e crítico com sua formação não só para ter conhecimento de determinados conteúdos, mas sim para ter a capacidade de tomar decisões em relação a sua vida pessoal e profissional.

Palavras-chave

Sistemas. Amortizar. Financeira.

ABSTRACT

The population in general is unaware of how financial transactions such as loans, financing or conditions of sale work, especially in this period, in which most of the population is buying their own home and or new or used car through bank financing. Our proposal is to work with the systems of amortization in the classroom, specifically in high school, thus clarifying for the student who will be the future citizens which is the best option for buying and selling among other financial transactions. To better understand this situation an activity was held at the public school in the interior of Alagoas, in the city of Feira Grande, in the State School Manoel Leandro de Lira, a class of 2nd year of high school. Taking advantage of the subject of financial mathematics, definitions of amortization systems were applied and in sequence the performing of some activities related to the topic. The amortization systems knowledge is not so common to find in textbooks, therefore, an interview with a banking expert and employee of the Bank of Brazil was held in addition to other investigations with the work performed by Ernesto Coutinho Piccini in the Brazil Open University system. The paper proposes the use of mathematics to the formation of a citizen more aware and critical of their formation not only to have knowledge of certain subject, but to have the ability to make decisions regarding their personal and professional life.

Keywords

Systems. Amortization. Financial.

SUMÁRIO

Introdução

De acordo com entrevista realizada com um especialista bancário e funcionário do Banco do Brasil, amortizar é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do capital ou do pagamento dos juros do saldo devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor. No Brasil dependendo do banco e do tipo do financiamento, você poderá optar por um dentre os seguintes sistemas de amortização: PRICE, SAC, SACRE.

Daí, para o cidadão comum, que durante toda sua vida escolar básica nunca ouviu falar de sistema PRICE, SAC, SACRE ou AMERICANO, ou seja, só teve contato com sistema de juros simples e composto, fica confuso ao se confrontar com valores que na grande maioria o próprio funcionário não sabe explicar como surgiu, só sabe que existe uma tabela e tem que fundamentar-se nela.

Com isso, ao comprar um móvel, um imóvel, um eletrodoméstico parcelado ou mesmo fazer um empréstimo, o cidadão que em outrora era um estudante questiona-se faz suas contas em casa pergunta aos colegas no fim aceita pagar mesmo sem saber se está sendo enganado ou se o sistema funciona justamente. Daí a necessidade de apresentar estes e outros sistemas de amortização no Ensino Básico especialmente no Ensino Médio, para que o aluno no futuro seja um cidadão com capacidade de tomar decisões e optar pela melhor forma de investimento, sem precisar acreditar no que lhe é mostrado primeiramente.

De uma forma geral, os alunos costumam perguntar aos professores, onde alguns conteúdos de sua programação serão usados. Os professores por sua vez, conseguem fazer muitas aplicações voltadas aos conteúdos questionados, ou mesmo os próprios livros já vem com diversas aplicações, no entanto, outro questionamento continua, afirmando que em seu futuro não usará determinados conteúdos. Na perspectiva do aluno e do cidadão comum que não utiliza nenhuma Matemática avançada no seu dia-a-dia, ele tem razão, porém, onde ficariam as grandes descobertas, os grandes avanços, todas as tecnologias computacionais, se fossem ensinados apenas os conteúdos que tem uma aplicação direta e em especial na sua vida e sua profissão, jamais teríamos avançado para a modernidade em relação as tecnologias atuais. Assim, temos que demonstrar ao máximo a importância dos conteúdos estudados, com aplicações e exemplos coerente com a realidade daquele determinado conteúdo.

Para o estudo de Matemática Financeira, temos que conhecer alguns conteúdos anteriores, que são fundamentais para seu desenvolvimento, os mais importantes, são: sequências (progressões aritméticas e geométricas) e logaritmos. Além de outros considerados básicos para o aluno, como: porcentagem, potenciação, radiciação, entre outros. Todos estes, são como já mencionados, fundamentais não só para a Matemática Financeira, mas para outras aplicações em diversas situações do cotidiano. Dessa forma, vemos que todo conteúdo deve ser dado a maior importância na hora de sua apresentação para o aluno, com explicações que mostrem ao aluno onde serão usados esses conteúdos e aplicações que possam formalizar seu entendimento de uma maneira clara e objetiva, já que a educação básica tem além de outras esta finalidade, é o que diz o Título V, capítulo II, Art.22°, da Lei de Diretrizes e Bases da Educação, lei n°9394/96. "A educação básica tem por finalidades desenvolver o educando, assegurar-lhe a formação comum indispensável para o exercício da cidadania e fornecer-lhe meios para progredir no trabalho e em estudos posteriores". Vemos aí que, dando possibilidade ao aluno de progredir em seus estudos e no trabalho, assegurando-lhe uma boa formação para um bom exercício da sua cidadania, é de fundamental importância para o sucesso do educando.

A Matemática Financeira, por sua vez, é um dos conteúdos, onde o cidadão tem mais contato direto com seu convívio, sendo assim, um conteúdo que pode ser digerido pelo aluno com mais facilmente. Acrescentando-se os conhecimentos de outros sistemas de amortização, podemos despertar a capacidade do aluno para lidar situação como as citadas anteriormente, ele saiba tomar melhor suas decisões, como cidadão, pois, de acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação, lei n° 9394/96, logo no início em seu Título I, Art. 1°, § 2°, diz que "A educação escolar deverá vincular-se ao mundo do trabalho e à prática social". Da mesma forma em seu Art. 3°, inciso XI, que relata "vinculação entre a educação escolar, o trabalho e as práticas sociais".

Daí a necessidade de fazer essa aplicação no Ensino Médio, fazendo com que o aluno seja, de acordo com as normas da educação, um cidadão com formação adequada ao seu convívio, com capacidade de criticar, e tomar decisões financeiras por si mesmo. Tendo a certeza de qual a melhor forma de investimento e futuras aplicações. Sabendo decidir o que é mais vantajoso para si, sem ser enganado ou ficar duvidoso em relação a suas transações financeiras de compra e venda.

Neste trabalho, será apresentado uma proposta para o Ensino Médio, que serão desenvolvidos pelos alunos de forma a aprimorar seus conhecimentos em Matemática Financeira, que vem em geral nos livros didáticos muito limitados. Também será abordado o conhecimentos úteis, como progressão aritmética e progressão geométrica, como citado anteriormente, conteúdos fundamentais neste trabalho.

A matemática não deve ser uma matemática com aplicações apenas práticas para o dia-a-dia, mas sim com ambições futuras. Assim, fortificando a ideia de que a Matemática Financeira deve se completar com os Sistemas de Amortização, que em grande parte das aplicações financeiras são utilizadas e não simplesmente os juros simples e juros compostos, que é o mostrado com prioridade na Matemática Financeira do Ensino Regular.

Da mesma forma que será definido, apresentado e desenvolvido, os Sistemas de Amortização, com suas vantagens e benefícios, mostrando como funciona e qual a melhor maneira de fazer suas transações comerciais financeiras, desde empréstimos, financiamentos e até venda de móveis e imóveis.

Capítulo 1

Preliminares

De acordo com Lima, Elon Lages[1], "São comuns, na vida real, grandezas que sofrem variações iguais em intervalos de tempo iguais". É nesse contexto que começaremos nossa discussão sobre progressão aritmética e progressão geométrica, conteúdos que são essenciais ao desenvolvimento deste trabalho e ao entendimento das aplicação nos sistemas de amortização.

1.1 Progressões Aritméticas e Geométricas

1.2 Progressão Aritmética

Começaremos motivando o estudo de progressões aritméticas, através de uma situação-problema.

Exemplo 1.1. Uma fábrica de automóveis produziu 400 veículos em janeiro e aumenta mensalmente sua produção de 30 veículos. Quantos veículos produziu em junho?

Solução:
Os valores da produção mensal, a partir de janeiro, são 400, 430, 460, 490, 520, 550, ... Em junho, a fabrica produziu 550 veículos.

Poderíamos ter evitado escrever a produção mês a mês, raciocinando do modo a seguir. Se a produção aumenta de 30 veículos por mês, em 5 meses ela aumenta de 5 x 30 = 150 veículos. Em junho, a fábrica produziu 400 + 150 = 550 veículos.

Com isso, a sequência (400, 430, 460, 490, 520, 550, ...) é um exemplo de uma progressão aritmética. O aumento constante de cada termo para o seguinte é chamado de razão de progressão. A razão dessa progressão é igual a 30.

Definição 1.2. Uma sequência de números reais é uma função $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, que associa a cada número natural n um número real $a(n)$ que denotaremos por a_n chamado o n-ésimo termo da sequência.

Denotamos $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ ou $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (a_n), para indicar a sequência cujo n-ésimo termo é a_n.

Definição 1.3. Dizemos que uma sequência é uma progressão aritmética se a diferença entre quaisquer dois termos consecutivos a partir do segundo é constante. Essa diferença é chamada razão da progressão aritmética e a representaremos pela letra r.

Dizemos que a progressão aritmética é:

i. Crescente quando $r > 0$

ii. Decrescente quando $r < 0$

iii. Constante quando $r = 0$

Agora, veremos como obter duas das principais fórmulas no estudo de PA, uma para a obtenção do termo geral e outra para a soma dos n primeiros termos dessa progressão aritmética.

Em uma progressão aritmética, temos,

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r$

$a_4 = a_3 + r$

$\vdots$

$a_{n-1} = a_{n-2} + r$

$a_n = a_{n-1} + r$

$a_{n+1} = a_n + r$

Provaremos por indução finita sobre n que $a_n = a_1 + (n-1)r$.

(i) Verifiquemos que $a_n = a_1 + (n-1)r$ é verdadeira para $n = 1$.
$a_1 = a_1 + (1-1)r$
$a_1 = a_1 + 0$
$a_1 = a_1$

(ii) Considere $a_n = a_1 + (n-1)r$ verdadeira para $n = k$ e provemos para $n = k+1$.
$a_k = a_1 + (k-1)r$ somando r a ambos os membros,
$a_k + r = a_1 + (k-1)r + r$
$a_{k+1} = a_1 + (k-1+1)r$
$a_{k+1} = a_1 + [(k+1)-1]r$ $\square$

Daí, podemos encontrar o enésimo termo de uma progressão aritmética, ou termo geral, através da fórmula $a_n = a_1 + (n-1)r$.
Vejamos um exemplo que represente essa fórmula.

Exemplo 1.4. Durante certo período, a produção de uma confecção correspondeu a uma progressão aritmética, onde no 1° dia, essa confecção produziu 4 blusas, no 2°, 7 blusas, no 3°, 10 blusas, e assim por diante até o 10° dia. Quantas blusas essa confecção produziu no 10° dia?

Solução:

De acordo com os dados desse problema, podemos escrever a progressão aritmética $(4, 7, 10, ..., a_{10})$. Calculando a_{10}, obtemos a quantidade de blusas que essa confecção produziu no 10° dia.
$a_n = a_1 + (n-1)r$

$a_{10} = 4 + (10 - 1)3 = 4 + 9.3 = 31$

Portanto, foram produzidas 31 blusas no décimo dia.

Exemplo 1.5. Em certa indústria, uma máquina produz, no primeiro minuto de funcionamento, 20 peças e, á medida que vai aquecendo, produz por minuto 5 peças a mais que no minuto anterior até chegar a sua capacidade máxima de produção após 6 minutos. No quadro está representada a produção dessa máquina nos 6 primeiros minutos de funcionamento.

Tabela 1.1: Progressão Aritmética

tempo (min)	quantidades de peças
1	20
2	25
3	30
4	35
5	40
6	45

Observando o quadro, notamos que a quantidade de peças produzidas de minuto em minuto forma uma progressão aritmética de razão 5.
Podemos saber a quantidade total de peças produzidas durante os 6 primeiros minutos efetuando o seguinte cálculo.

20 + 25 + 30 + 35 + 40 + 45 = 195 peças

Dessa forma, obtemos a soma dos termos de uma progressão aritmética.
No entanto, existem casos em que seria muito trabalhoso obter a soma dos termos de uma progressão aritmética adicionando termo a termo. Por exemplo, para obtermos a soma dos termos da progressão aritmética (10, 19, 28, ..., 199, 208, 217) teríamos de efetuar 10 + 19 + 28 + ... + 199 + 208 + 217. Para não ter todo esse trabalho e nenhum outro desse tipo, vejamos a fórmula que pode nos auxiliar na resolução de situações como esta.
Inicialmente, iremos definir o que são termos equidistantes dos extremos de uma progressão aritmética.

Definição 1.6. Seja $a_1, a_2, \cdots, a_n$ uma sequência finita, os termos a_k e a_p dois termos dessa sequência, são ditos equidistantes dos extremos se $k + p = n + 1$.

Logo, temos que termos equidistantes dos extremos ocorre quando em dois termos tiver a quantidade de elementos precedentes de um é a mesma que sucede o outro.

Analisemos a sequência a seguir onde a_p e a_k são equidistantes em relação aos extremos

$$a_1, ..., a_p, ..., a_k, ..., a_n$$

Daí,

$$p - 1 = n - k$$

$$p + k = n + 1$$

Com isso,

$$a_p + a_k = a_1 + (p - 1).r + a_1 + (k - 1).r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (p + k - 2).r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (1 + n - 2).r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_1 + (n - 1).r$$

$$a_p + a_k = a_1 + a_n$$

Ou seja, a soma de dois termos equidistantes dos extremos de uma progressão aritmética finita é igual à soma dos extremos.

Utilizando essa definição, vamos obter uma fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Considere os n primeiros termos de uma progressão aritmética e indiquemos a soma dos n primeiros termos dessa progressão aritmética por S_n, temos:

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_{n-1} + a_n$ (I)

Trocando a ordem das parcelas de S_n, também podemos escrever:

$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + ... + a_3 + a_2 + a_1$ (II)
Adicionando I e II membro a membro, temos:
$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-2}) + ... + (a_2 + a_{n-2}) + (a_1 + a_n)$

Observe que, ao passar de um parênteses para o seguinte, a primeira parcela aumenta de r e a segunda parcela diminui de r, o que não autera a soma. Portanto, todos os parênteses são formados por termos equidistantes, logo, são iguais ao primeiro, $(a_1 + a_n)$, daí, temos,

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n) + ... + (a_1 + a_n) + (a_1 + a_n)$$

Como há n parcelas $(a_1 + a_n)$, escrevemos a igualdade da seguinte forma,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Encontrando assim a fórmula da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética.

Vejamos o exemplo a seguir,

Exemplo 1.7. Para combater certa praga, um agricultor foi orientado a pulverizar um pesticida sobre sua plantação. Diluídos em certa quantidade de água, foram aplicados 2 L de pesticida no 1° dia, 1,8 L no 2° dia, 1,6 L no 3° dia, e assim por diante, de tal maneira a formar uma progressão aritmética. Sabendo que as aplicações ocorreram em 7 dias ininterruptos, calcule a quantidade de pesticida utilizada.

Solução:
Os dados da questão nos da a seguinte progressão aritmética (2; 1,8; 1,6; ...; a_7), onde o a_7 é a quantidade de pesticida aplicada no 7° dia, e r = - 0,2, pois, $1,8 - 2 = -0,2$. Daí,
$a_n = a_1 + (n-1)r$
$a_7 = 2 + (7-1)(-0,2)$
$a_7 = 2 + 6.(-0,2)$
$a_7 = 2 - 1,2$
$a_7 = 0,8$

Logo, no 7° dia foi usado 0,8 L de pesticida. Com isso, a soma dos 7 dias de pesticidas, será,

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

$$S_7 = \frac{(2+0,8)7}{2}$$

$$S_7 = \frac{2,8.7}{2}$$

$$S_7 = 9,8$$

Assim, foram utilizados 9,8 L de pesticida nos 7 dias.

1.3 Progressão Geomética

Vejamos agora como funciona a progressão geométrica, analisando a situação a seguir.

Exemplo 1.8. A quantia de $R\$$ 1000,00 foi aplicada em certo investimento cujo rendimento é de 2% ao mês. Calcule a quantia obtida ao final de 1 ano.

Solução:
Analisando os 3 primeiros meses, temos:

$$a_1 = 1000 + 1000.\frac{2}{100} = 1000 + 20 = 1020$$

$$a_2 = 1020 + 1020.\frac{2}{100} = 1020 + 20,4 = 1040,4$$

$$a_3 = 1040,4 + 1040,4.\frac{2}{100} = 1040,4 + 20,808 = 1061,208$$

Neste caso, temos os 3 primeiros termos da sequência.

$(1020; 1040,4; 1061,208; ...; a_{12})$

Dessa forma podemos encontrar todos os 12 termos, ou o valor correspondente a cada mês e no final somá-los.

Observando que na sequência anterior não temos um aumento constante relativo a razão da progressão aritmética, por outro lado, encontramos um outro aumento constante ao calcular o quociente entre dois termos consecutivos a partir do 2°, daí, temos uma outra sequência que é a progressão geométrica. Assim, definiremos a progressão geométrica, da seguinte maneira:

Definição 1.9. Dados $a_1 \neq 0$ e $q \in \mathbb{R}$, uma sequência (a_n) em que para cada $n \in \mathbb{N}$ e $n \geqslant 2$, temos, $a_n = a_{n-1}q$, chamando-a de PG de razão q.

Dizemos que uma PG é:

i. Crescente quando $a_1 > 0$ e $q > 1$ ou $a_1 < 0$ e $0 < q < 1$;

ii. Decrescente quando $a_1 > 0$ e $0 < q < 1$ ou $a_1 < 0$ e $q > 1$;

iii. Constante quando $q = 1$;

iv. Oscilante quando $q < 0$.

Agora, veremos como obter duas das principais fórmulas no estudo de PG, uma para a obtenção do termo geral e outra para a soma dos n primeiros termos dessa progressão geomética.

Em uma progressão geométrica, temos,

$a_1 = a_1$
$a_2 = a_1q$
$a_3 = a_2q = a_1qq = a_1q^2$
$a_4 = a_3q = a_1q^3$
$\vdots$
Com isso queremos provar que $a_n = a_1q^{n-1}$.
Provemos por indução finita.

(i) Verifiquemos para $n = 1$.

$a_1 = a_1q^{1-1} = a_1q^0 = a_1.1 = a_1$.

(ii) Suponha a expressão verdadeira para $n = k$, ou seja, $a_k = a_1q^{k-1}$ e provemos para $n = k+1$.

Daí,
$a_k = a_1 q^{k-1}$
multipliquemos ambos os membros da expressão pela razão q.

$a_k q = a_1 q^{k-1} q$

$a_k q = a_{k+1},$

logo,

$a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}$ □

Assim, com $a_n = a_1 q^{n-1}$, podemos encontrar o enésimo termo de uma progressão geométrica, ou termo geral.

Resolveremos agora o exemplo a seguir sobre progressão geométrica, comentado anteriormente, encontrando apenas o valor de a_{12}. Devido ao cálculo de potências com valores altos é sugerido o uso de calculadora científica não só nesta questão, mas em todo o trabalho.

Exemplo 1.10. A quantia de $R\$$ 1000,00 foi aplicada em certo investimento cujo rendimento é de 2% ao mês. Calcule a quantia obtida ao final de 1 ano.

Solução:
Vejamos os 3 primeiros termos dessa PG (1020; 1040,4; 1061,208; ...; a_{12}), logo,
$a_1 = 1020$
q = 1040,4:1020 = 1,02
n = 12

Agora basta aplicar na fórmula do termo geral $a_n = a_1 q^{n-1}$ daí,
$a_{12} = 1020.1,02^{12-1}$
$a_{12} = 1020.1,02^{11}$
$a_{12} = 1268,24$

Portanto, a quantia obtida no 12° mês será $R\$$ 1268,24.

Para calcularmos a soma dos n termos de uma PG, vejamos a seguinte situação:

Exemplo 1.11. Em certa gincana, os participantes ganham pontos em uma modalidade envolvendo perguntas e respostas. O mediador dessa modalidade faz a 1ª pergunta, e se o participante acertar a resposta, ganha 10 pontos. No caso de continuar acertando ganha 20 pontos pela 2ª resposta, 40 pontos pela 3ª e assim por diante, até no máximo 6 perguntas. Veja no quadro os pontos obtidos por um participante que respondeu corretamente todas as perguntas.

Tabela 1.2: Progressão Geométrica

perguntas	pontos
1	10
2	20
3	40
4	80
5	160
6	320

Note que o número de pontos a cada resposta forma uma PG de razão 2.

Podemos saber o número total de pontos desse participante efetuando o seguinte cálculo:

10 + 20 + 40 + 80 + 160 + 320 = 630 pontos

Dessa forma obtemos a soma dos termos de uma PG.

Assim como na PA, existem casos em que é muito trabalhoso obter a soma dos termos de uma PG adicionando termo a termo. Nesse caso, também podemos obter uma fórmula que permite calcular a soma dos n primeiros termos de uma PG, em função de a_1, n e q.
Para isso vamos considerar uma PG de razão q e representando a soma dos n primeiros termos de uma PG por S_n, temos:

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$$

Com isso,

$S_1 = a_1$

$S_2 = S_1 + a_1 q = a_1(1+q) = \dfrac{a_1(1+q)(1-q)}{(1-q)} = \dfrac{a_1(1-q^2)}{(1-q)}$

$S_3 = S_2 + a_1 q^2 = \dfrac{a_1(1-q^2)}{(1-q)} + a_1 q^2 = \dfrac{a_1(1-q^2+q^2(1-q))}{(1-q)} = \dfrac{a_1(1-q^3)}{(1-q)}$

Daí, queremos provar por indução finita sobre n, que $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{(1-q)}$

(i) Verifiquemos a expressão para $n = 1$.

$S_1 = \dfrac{a_1(1-q^1)}{(1-q)} = a_1$

(ii) Suponha a expressão verdaderia para $n = k$ e provemos para $n = k+1$, assim,

$S_k = \dfrac{a_1(1-q^k)}{(1-q)}$

temos também que,

$S_{k+1} = S_k + a_1 q^k$

$S_{k+1} = \dfrac{a_1(1-q^k)}{(1-q)} + a_1 q^k = \dfrac{a_1(1-q^k) + a_1 q^k(1-q)}{1-q}$

$S_{k+1} = \dfrac{a_1(1-q^k+q^k-q^{k+1})}{1-q}$

$S_{k+1} = \dfrac{a_1(1-q^{k+1})}{1-q}$ $\square$

Caso a PG seja decrescente e infinita, temos que calcular o limite da soma de seus termos, assim, com $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, para $q \neq 1$, quando $n \to \infty$ e $-1 < q < 1$, temos,

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.12. Um laboratório bioquímico produziu, em 2006, 10000 unidades de certo medicamento. De 2006 a 2010 a produção desse medicamento teve aumento de 40% a cada ano.

Determine a quantidade total de medicamento produzida no período de 2006 a 2010.

Solução:

A produção desse medicamento de 2006 a 2010 aumentou conforme uma PG, em que a_1 = 10000. Nessa PG, a razão é q = 1,4, pois a produção aumentou 40% a cada ano, isto é, a cada ano a produção foi de 140% em relação ao ano anterior.

A quantidade total de medicamentos produzida nos 5 anos (de 2006 a 2010) é dado por S_5, daí,
a_1 = 10000, n = 5 e q = 1,4, com isso,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$S_5 = \frac{10000(1-1,4^5)}{1-1,4} = \frac{10000(1-5,37824)}{-0,4} = \frac{10000(-4,37824)}{-0,4} = 109456$$

Portanto, foram produzidas 109456 unidades do medicamento no período de 2006 a 2010.

Com isso finalizamos a parte que cabe aos conteúdos de progressões aritméticas e geométricas, no entanto ainda veremos em outro contexto dentro do conceito de Matemática Financeira.

1.4 Matemática Financeira

Veremos agora um tema muito importante para este trabalho, ou seja, a base para a fundamentação dos Sistemas de Amortização a "Matemática Financeira".

A Matemática Financeira pode ser aplicada em várias situações diferentes como compra, venda, empréstimos entre outras situações que envolvem valores financeiros, abordando temas importantes ao nosso estudo sobre sistemas de amortização, como porcentagem, juros simples, juros composto, acrescimos e descontos.

1.5 Porcentagem

Analisemos a seguinte situação:

Exemplo 1.13. Nos restaurantes e bares brasileiros é comum a cobrança de uma tarifa referente ao serviço, ou seja, ao trabalho do garçom. Essa tarifa, chamada taxa de serviço, equivale a 10% (dez por cento) do valor que é consumido pelo cliente. Isto é, a cada $R\$$ 100,00 de consumo, o cliente paga mais $R\$$ 10,00 de taxa de serviço. Assim, se o consumo for $R\$$ 50,00, a taxa de serviço será $R\$$ 5,00; se o consumo for $R\$$ 60,00, a taxa de serviço será $R\$$ 6,00 etc., ou seja, o valor pago pelo cliente é o produto do valor consumido por 1,1.

Definição 1.14. A expressão $x\%$, que lemos "x por cento", é chamada de taxa percentual e representa a fração $\frac{x}{100}$, isto é, $x\% = \frac{x}{100}$, em que x é um número real positivo.

A aplicação do conceito de porcentagem é apresentada também como acréscimos e descontos, ou lucro e prejuízo.

Em uma operação comercial de compra e venda, o preço de custo C do objeto comercializado é o valor monetário pago pelo comerciante ao fornecedor, e o preço de venda V é aquele pelo qual o objeto é vendido. Essa transação pode gerar ganho ou perda financeira ao comerciante e é calculada da seguinte maneira:

$$V - C$$

i. Se $V > C$, então a diferença é positiva e chamamos de lucro ou acréscimo;
ii. Se $V < C$, então a diferença é negativa e chamamos de prejuízo ou desconto.

1.6 Cálculo do percentual de lucro ou prejuízo

O percentual de lucro ou prejuízo pode ser calculado em relação ao preço de venda V ou ao preço de compra C.
Se $V > C$, temos:

$\frac{V - C}{C}$ taxa de lucro sobre o preço de compra.

$\frac{V - C}{V}$ taxa de lucro sobre o preço de venda.

Se $V < C$, temos:

$\left|\frac{V - C}{C}\right|$ taxa de prejuízo sobre o preço de compra.

$\left|\dfrac{V-C}{V}\right|$ taxa de prejuízo sobre o preço de venda.

Exemplo 1.15. Um comerciante comprou um produto por $R\$$ 84,00 e o vendeu por $R\$$ 105,00.

a) Calcule o percentual de lucro sobre o preço de custo.

b) Calcule o percentual de lucro sobre o preço de venda.

Solução:

a) $\dfrac{V-C}{C} = \dfrac{105-84}{84} = 0,25$, logo, o comerciante teve um lucro de 25% sobre o preço de custo.

b) $\dfrac{V-C}{V} = \dfrac{105-84}{105} = 0,20$, logo, o comerciante teve um lucro de 20% sobre o preço de venda.

1.7 Juros simples e juros compostos

Quando alguém dispõe de um valor inicial C (chamado principal), empresta-o a outro por um certo período de tempo t, e após esse período, recebe o seu capital C de volta, acrescido de uma remuneração J pelo empréstimo. Essa remuneração é chamada de juro. A soma C + J é chamada de montante e será representada por M.

Definição 1.16. A razão $i = \dfrac{J}{C}$ que é a taxa de crescimento do capital, será sempre referida ao período da operação e é chamada de taxa de juros.

Neste caso, o percentual de lucro sobre o capital pode ser representada por $\dfrac{M-C}{C} = \dfrac{J}{C}$ também é chamada de taxa de crescimento do capital. Quando esta taxa é condicionada a um período de tempo, ela é chamada de taxa de juros.

Fixado um período de tempo para o fim da operação, pode ocorrer que o montante ou capital inicial seja submetido a uma nova operação num período de tempo equivalente ao da operação inicial.

Definição 1.17. Definiremos que a taxa de juros é simples se em cada período incide sobre o capital inicial.

Podemos também calcular o juro acumulado em n períodos de tempo com a fórmula $J = niC$. Neste caso, o montante a ser pago após n períodos é $M = C + J = C + niC = C(1 + ni)$.

Exemplo 1.18. Douglas fez uma aplicação de $R\$$ 2500,00 a uma taxa de juros simples de $1,5\%$ ao mês. Sabendo que Douglas deixou o dinheiro aplicado durante 4 meses, qual o montante recebido ao final desse período?

Inicialmente, calculamos o juro de $1,5\%$ de $R\$$ 2500,00:

$$\frac{1,5}{100}.2500 = 37,5$$

Depois, multiplicamos pelo período de tempo:

$$4.37,5 = 150$$

Ou podemos fazer de uma só vez:

$$\frac{1,5.2500.4}{100} = 150$$

Daí, o montante é $R\$$ 2650,00.

Com isso, concluimos que para determinar esse valor (juro), multiplicando o capital aplicado, pela taxa de juro e pelo número de período de tempo dessa aplicação.

Portanto, o montante a ser recebido por um capital C submetido a um a taxa de juros simples após n períodos é $M_n = C + J_n = C + Cin = C(1 + in)$.

Definição 1.19. O juros composto é aquele que incide sempre sobre a dívida do período anterior.

Vejamos uma situação problema

Exemplo 1.20. Manoel tomou um empréstimo de $R\$$ 100,00 a juros de 10% ao mês. Após um mês, a dívida de Manoel será acrescida de 0,1.100 = 10 reais de juros, passando a $R\$$

110,00. Se Manoel e seu credor concordarem em adiar a liquidação da dívida por mais um mês, mantida a mesma taxa de juros, o empréstimo será quitado, dois meses depois, que será 0,1.110 = 11 reais de juros, passando a $R\$$ 121,00. Esse juros assim calculado são chamado de juros compostos.

Note que os valores do capital crescem a uma taxa constante i e, portanto, formam uma progressão geométrica de razão 1 + i. Assim, no regimento de juros composto de taxa i, um principal C_0 transforma-se, depois de n períodos de tempo, em um montante M.
Queremos provar por indução que, $M = C_n = C_0(1+i)^n$
daí,

$$C_o = C_o$$
$$C_1 = C_o + C_0 i$$
$$C_1 = C_0(1+i)^1$$

(i) Verifiquemos a expressão para $n = 1$,

$C_n = C_0(1+i)^n$

$C_1 = C_0(1+i)^1$

$C_1 = C_0(1+i)$

(ii) Suponha a expressão verdadeira para $n = k$ e provemos para $n = k+1$.

$C_k = C_0(1+i)^k$

$C_{k+1} = C_k + C_k i$

$C_{k+1} = C_k(1+i)$

$C_{k+1} = C_0(1+i)^k(1+i)$

$C_{k+1} = C_0(1+i)^{k+1}$ $\square$

Exemplo 1.21. Pedro faz um investimento de $R\$$ 150,00 a juros composto com taxa de 12% ao mês. Qual será o montante de Pedro três meses depois?

$C_3 = C_o(1+i)^3 = 150(1+0,12)^3 = 210,74$ reais.

Capítulo 2

Sistemas de Amortização

Amortização é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do capital ou do pagamento dos juros do saldo devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor. Dependendo do banco e do tipo do financiamento, você poderá optar por um dentre os seguintes sistemas de amortização: PRICE, SAC, SACRE e AMERICANO.

Veremos como funcionam os sistemas de amortização mais usados, analisando suas diferenças relacionadas a juros e montante ou capital.

2.1 Sistema Price

O sistema Price foi utilizado primeiramente na França, no século XIX. Foi assim chamado em homenagem ao economista inglês Richard Price que, no século XVIII, incorporou a teoria dos juros compostos às amortizações de empréstimos.

O sistema Price ou sistema francês tem prestações iguais durante o prazo do empréstimo. Atualmente é o sistema mais utilizado nas operações de crédito direto ao consumidor.

Apesar de existir desde o século XVIII quando foi criada pelo matemático e teólogo Richard Price a Tabela Price não era tão popular. Segundo o diretor de habitação da Caixa Econômica Federal Teotônio Rezende, essa oferta nos bancos tornou-se mais comum em 2009, quando a

Lei 11.977, que criou o MCMV, instituiu a obrigatoriedade de outros sistemas de amortização da dívida além do SAC, entre eles a Price.

No sistema Price, os juros, em cada período, são obtidos multiplicando o saldo devedor no período imediatamente anterior pela taxa de juros.

$$J_k = (C - \sum_{r=1}^{k-1} C_r)i$$

Sabemos também que no sistema Price as prestações são todas iguais, com isso,

$$P_1 = P_2 = P_3 = \cdots = P_n = P$$

Daí,

$$\begin{gathered} P_1 = C_1 + Ci \\ P_2 = C_2 + Ci - C_1 i \\ P_3 = C_3 + Ci - C_2 i - C_1 i \\ \vdots \\ P_n = C_n + Ci - \sum_{r=1}^{n-1} C_r i \end{gathered}$$

Onde os C_j, são as respectivas amortizações de cada período.

Dessa forma podemos entender suas amortizações da seguinte maneira.

$$\begin{gathered} P_1 = P_2 \Rightarrow C_1 + Ci = C_2 + Ci - C_1 i \Rightarrow C_2 = C_1(1+i) \\ P_2 = P_3 \Rightarrow C_2 + Ci - C_1 i = C_3 + Ci - C_3 i - C_2 i \Rightarrow C_3 = C_2(1+i) \\ \vdots \\ C_n = C_{n-1}(1+i) = C_1(1+i)^{n-1} \end{gathered}$$

Provemos por indução finita que $C_n = C_1(1+i)^{n-1}$.

(i) Verifiquemos que $C_n = C_1(1+i)^{n-1}$ é verdadeira para $n = 1$.

$$C_1 = C_1(1+i)^{1-1} = C_1$$

(ii) Admitindo $C_n = C_1(1+i)^{n-1}$ verdadeira para $n = k$, provemos para $n = k + 1$.

$$C_k = C_1(1+i)^{k-1}$$

multiplicando ambos os membros da equação por $(1+i)$.

$$C_k = C_1(1+i)^{k-1} \quad .(1+i)$$
$$C_k(1+i) = C_1(1+i)^{k-1}(1+i)$$
$$C_{k+1} = C_1(1+i)^{(k+1)-1}$$

□

Consideremos agora $k < j$, daí, $C_j = C_1(1+i)^{j-1}$ e $C_k = C_1(1+i)^{k-1}$, e façamos $\frac{C_j}{C_k}$.

$$\frac{C_j}{C_k} = (1+i)^{j-k}$$
$$C_j = C_k(1+i)^{j-k}$$

ou

$$C_k = C_j(1+i)^{k-j}$$

2.2 Fórmla da prestação do Sistema Price

Temos que as prestações no sistema Price são obtidas por meio da fórmula.

$$P = C\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}$$

Em que,
P é a prestação
C é o capital
i é a taxa de juros
n é o número de parcelas

A origem desta fórmula pode ser melhor entendida pensando da seguinte maneira, tomemos todas as n prestações P e as descapitalizemos até a data zero, onde teremos o capital C, daí, de acordo com o seguinte teorema, temos,

Teorema 2.1. O valor de uma série de n pagamentos iguais a P, um tempo antes do primeiro pagamento, é, sendo i a taxa de juros, igual a $C = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$.

Prova:

Provaremos inicialmente que uma amortização C_j dado por

$$C_j = \frac{P_j}{(1+i)^{n-j+1}} \Rightarrow P_j = C_j(1+i)^{n-j+1}$$

onde C_j é a j-ésima amortização e P_j é a j-ésima prestação.

Temos também que,

$$P_j = C_j + Ci - \sum_{k=1}^{n} C_k i$$
$$P_j = C_j + \sum_{k=j}^{n} C_j(1+i)^{k-j} i$$
$$P_j = C_j(1 + i\sum_{k=j}^{n}(1+i)^{k-j})$$
$$P_j = C_j\left[1 + \frac{(1+i)^{n-j+1}-1}{i}i\right]$$
$$P_j = C_j(1+i)^{n-j+1}$$

Daí, temos que cada amortização $C_j = \dfrac{P_j}{(1+i)^{n-j+1}}$, com isso,

$$C = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n$$
$$C = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$

■

De acordo com o teorema, em uma série de n pagamentos iguais a P. A soma de todas essas prestações descapitalizadas será o valor inicial, ou o capital inicial C, antes de qualquer cálculo de juros, daí,

$$C = \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \frac{P}{(1+i)^3} + ... + \frac{P}{(1+i)^n}$$
$$C = P\left[\frac{1}{1+i} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + ... + \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$
$$C = P\frac{\frac{1}{1+i}(1-(\frac{1}{1+i})^n)}{1-\frac{i}{1+i}} = P.\frac{1}{1+i}.\frac{1-\frac{1}{(1+i)^n}}{\frac{1+i-1}{1+i}}$$

$$C = \frac{P}{1+i}.\frac{\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}}{\frac{i}{1+i}} = \frac{P}{1+i}.\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n}.\frac{1+i}{i}$$

$$C = P\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^n.i}$$

$$P = C\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}$$

Sendo está a fórmula para o cálculo de uma prestação no sistema Price.

$$P = C\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}$$

Exemplo 2.2.

Em um empréstimo de $R\$$ 20 000,00, que será pago em 6 prestações a uma taxa de 1% ao mês pelo sistema Price, deseja-se saber qual o valor da prestação e o montante desse empréstimo?

Solução:

Conhecendo a fórmula $P = C\frac{(1+i)^n.i}{(1+i)^n - 1}$, podemos encontrar o valor das prestações a serem pagas, assim,
$P = 20000.\frac{(1+0,01)^6.0,01}{(1+0,01)^6 - 1} = 3450,97$
Daí, cada prestação será de $R\$$ 3450,97, num total de $R\$$ 20 705,80.

Poderíamos montar uma tabela mais específica.

Onde o cálculo do juros é $(C - \sum_{r=1}^{k-1} C_r)i$.
As amortizações mensais são $P - J_k$.
O saldo devedor será $C - \sum_{r=1}^{k-1} C_r$.

Cálculo do mês 1.
juros$= 20000.0,01 = 200$
amortização$= 3450,97 - 200 = 3250,97$

saldo devedor$= 20000 - 3250,97 = 16749,03$

Cálculo do mês 2.
juros$= 16749,03.0,01 = 167,49$
amortização$= 3450,97 - 167,49 = 3283,48$
saldo devedor$= 16749,03 - 3283,48 = 13465,56$

Cálculo do mês 3.
juros$= 13465,56.0,01 = 134,66$
amortização$= 3450,97 - 134,66 = 3316,31$
saldo devedor$= 13465,56 - 3316,31 = 10149,24$

Cálculo do mês 4.
juros$= 10149,24.0,01 = 101,49$
amortização$= 3450,97 - 101,49 = 3349,47$
saldo devedor$= 10149,24 - 3349,47 = 6799,77$

Cálculo do mês 5.
juros$= 6799,77.0,01 = 68$
amortização$= 3450,97 - 68 = 3382,97$
saldo devedor$= 6799,77 - 3382,97 = 3416,80$

Cálculo do mês 6.
juros$= 3416,80.0,01 = 34,17$
amortização$= 3450,97 - 34,17 = 3416,80$
saldo devedor$= 3416,80 - 3416,80 = 0$

Função PGTO do EXCEL

Existe uma função no programa EXCEL encontrada no office conhecida como PGTO, onde ela nos dá o valor exato da prestação pelo sistema Price, apenas preenchendo os campos certos com capital, taxa e número de parcelas, facilitando assim nossos cálculos.

Será mostrado agora como utilizar esta função do programa EXCEL. Para isso, consideremos o exemplo a seguir.

Tabela 2.1: Sistema Price

número de parcelas	juros	amortização	prestação	saldo devedor
0	0	0	0	20.000,00
1	200	3.250,97	3.450,97	16.749,03
2	167,49	3.283,48	3.450,97	13.465,56
3	134,66	3.316,31	3.450,97	10.149,24
4	101,49	3.349,47	3.450,97	6.799,77
5	68,00	3.382,97	3.450,97	3.416,80
6	34,17	3.416,80	3.450,97	0,00
total	705,80	20.000,00	20.705,80	0

Exemplo 2.3.

Em um investimento de $R\$$ 50 000,00, que será pago em 10 prestações a uma taxa de 2% ao mês pelo sistema Price, deseja-se saber qual o valor da prestação e o montante desse investimento?

Solução:

1º passo

Após abrir o programa EXCEL, escreva em três células diferentes os valores do seu capital aplicado, da taxa e do período do investimento. A ordem e a posição onde ficará cada célula fica a critério da organização desejada.

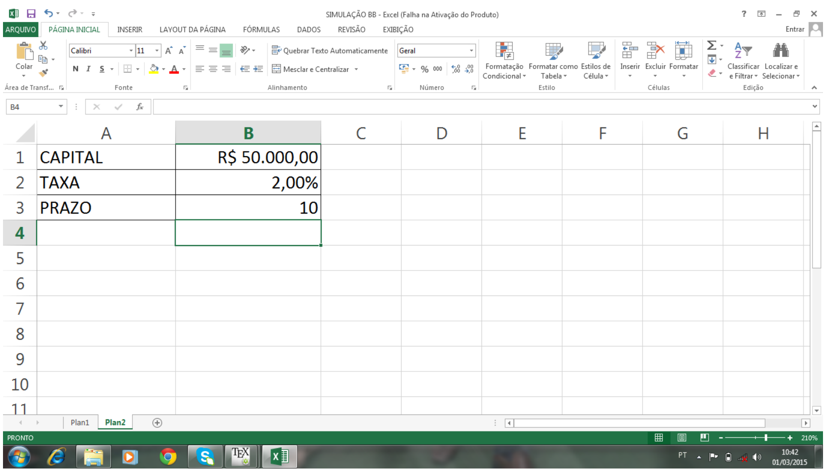


Figura 2.1: 1° passo

2º passo

Crie duas colunas, uma com o número de parcelas e outra com o valor da parcela.

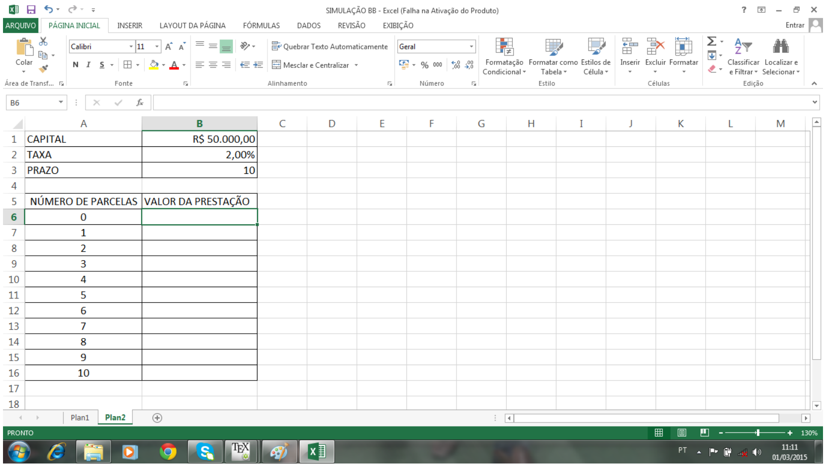


Figura 2.2: 2° passo

3º passo

Selecione a célula que corresponde a prestação de número 1 e façamos o seguinte:

(i) Na barra de ferramentas, clique em fórmula, depois em financeira, logo na função PGTO.

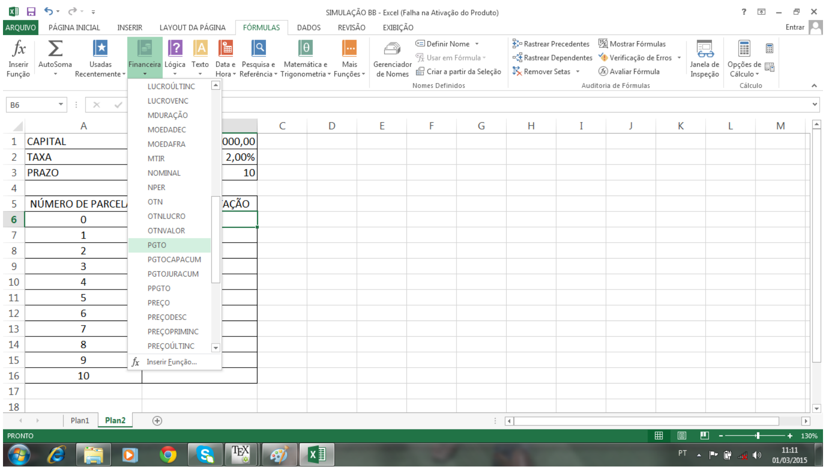


Figura 2.3: 3° passo

(ii) Aparecerá uma janela, onde o primeiro campo é destinado a célula que compõe a taxa, o segundo a célula do número de prestações e o terceiro camo a célula do capital inicial.

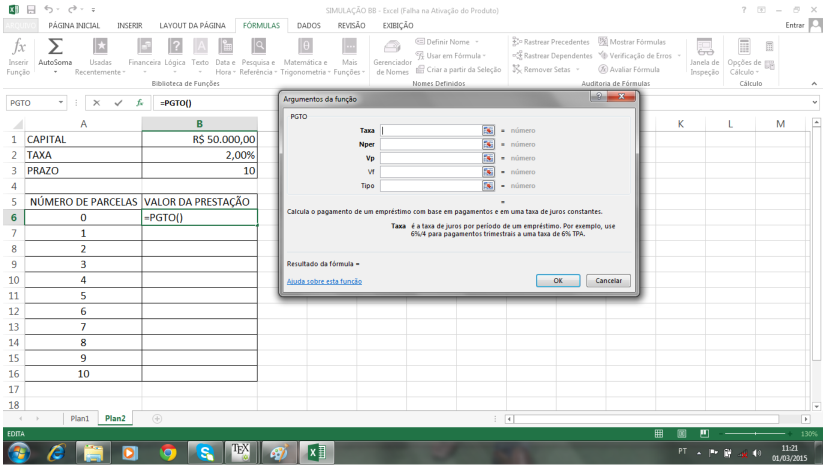


Figura 2.4: 3° passo

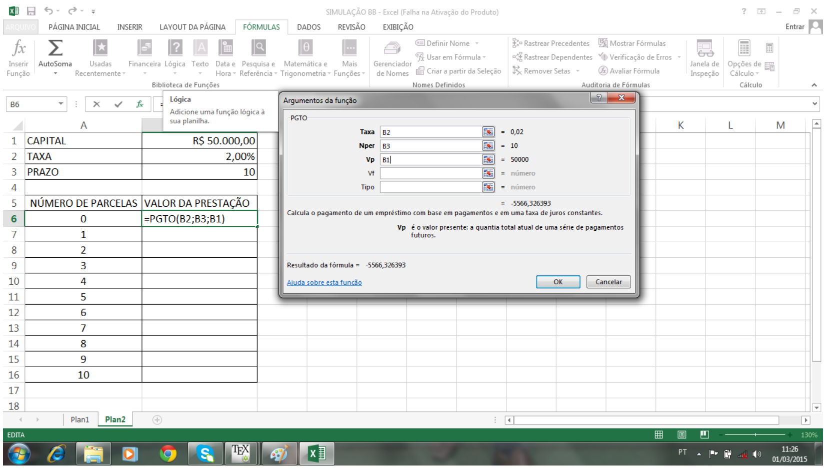


Figura 2.5: 3° passo

(*iii*) Para não gerar erro nas fórmulas do EXCEL, deve selecionar na caixa da função em cada campo a tecla F4, para fixar os valores nos campos. E no campo valor, deve-se acrescentar um sinal negativo, pois o programa entende que está prestação será descontada e aparecerá negativa.

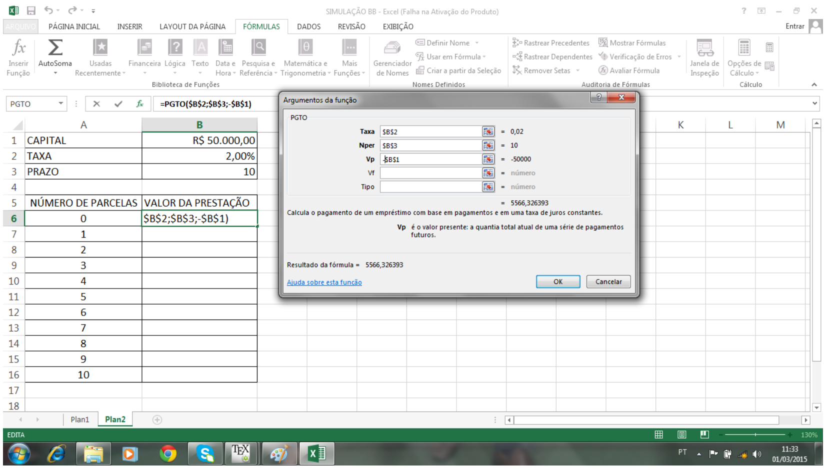


Figura 2.6: 3° passo

4º passo

Após clicar em ok, aparecerá o valor de sua parcela.

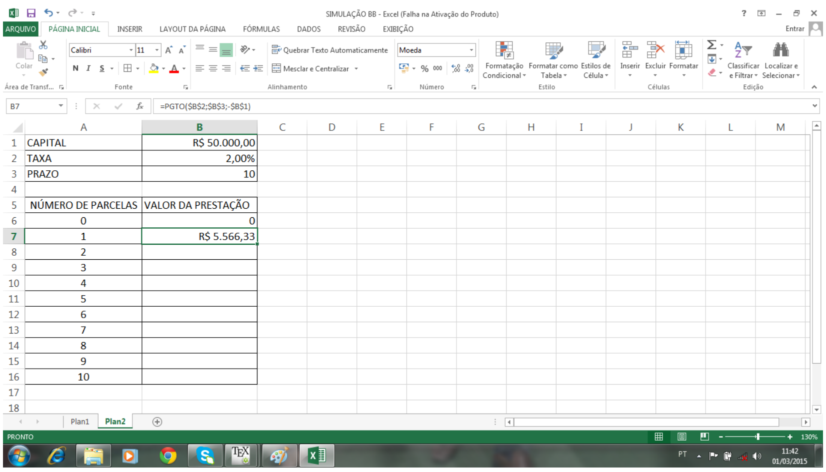


Figura 2.7: 4° passo

Na sequência, clique com o mouse no canto inferior dereito da célula da prestação e arraste até a célula da 10ª prestação em seguida calcule o montante selecionando uma célula qualquer em branco e clicar na função soma e clique em enter.

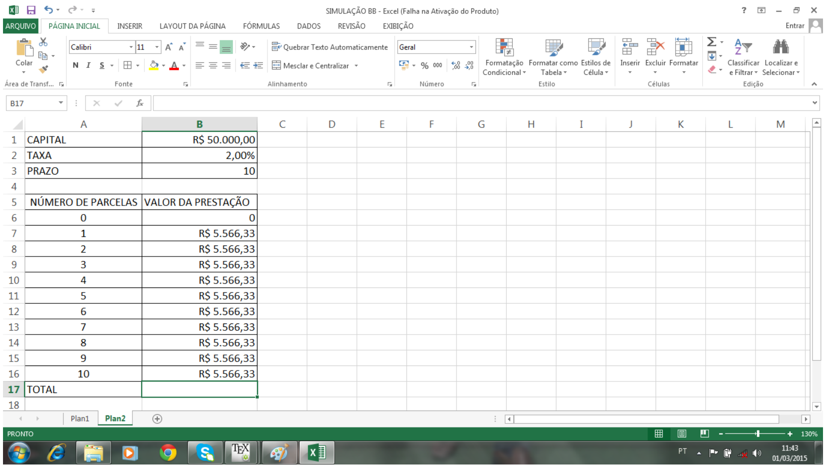


Figura 2.8: 4° passo

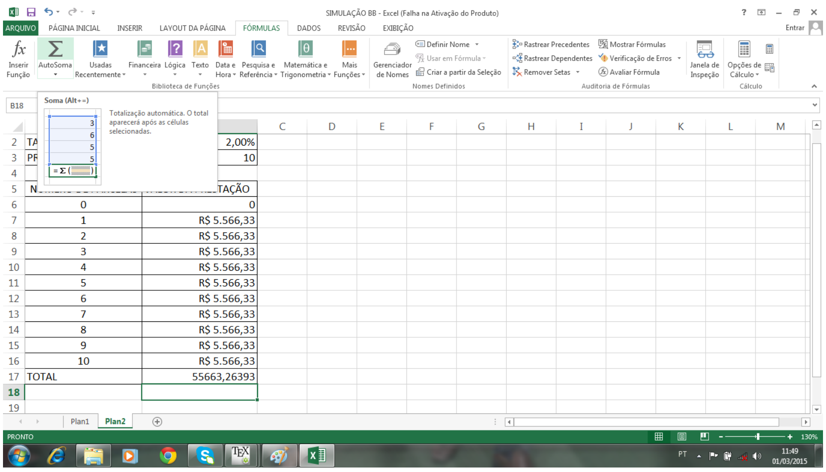


Figura 2.9: 4° passo

Sendo assim, cada prestação custará $R\$ \ 5566,33$ e um montante de $R\$ \ 55663,26$. Dessa forma podemos calcular a prestação, o montante e os juros total.

2.3 Comparação com uma simulação de empréstimo no Banco do Brasil

Foi realizada uma simulação de empréstimo no Banco do Brasil, com o objetivo de comparar os resultados encontrados no valor da prestação, do juros e do montante em relação aos encontrados com a fórmula do sistema Price.

O valor da simulção foi de $R\$ \ 10000,00$ por um período de 20 meses, a uma taxa de $1,95\%$ ao mês.

Inicialmente será apresentado o valor encontrado pela fórmula do sistema Price.

Usando a fórmula do EXCEL, temos,

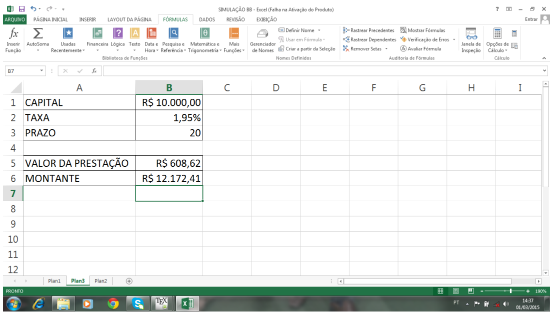


Figura 2.10: PGTO EXCEL

Onde o montante é simplesmente o valor da prestação multiplicado por 20.

Analise a situação avaliada pelo Banco do Brasil.

A proposta dada pelo Banco do Brasil teve uma prestação maior do que a calculada com a função PGTO do EXCEL, pois, foram cobrados tributos(IOF) sobre o valor do empréstimo num total de $R\$ \ 255,86$. O que faz com que nosso valor para a base do cálculo aumente para $R\$ \ 10255,86$.

Calculemos novamente o valor da prestação com a função PGTO do programa EXCEL com o capital inicial de $R\$ \ 10255,86$.

Comparando os resultados da simulação do Banco do Brasil com a fórmula do sistema Price no EXCEL com tributos incluso, temos,

Observe ainda que existem arredondamentos feitos pelos programas, chegando a valores

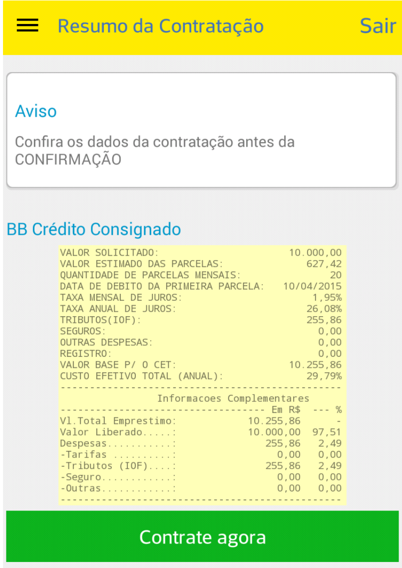


Figura 2.11: Banco do Brasil

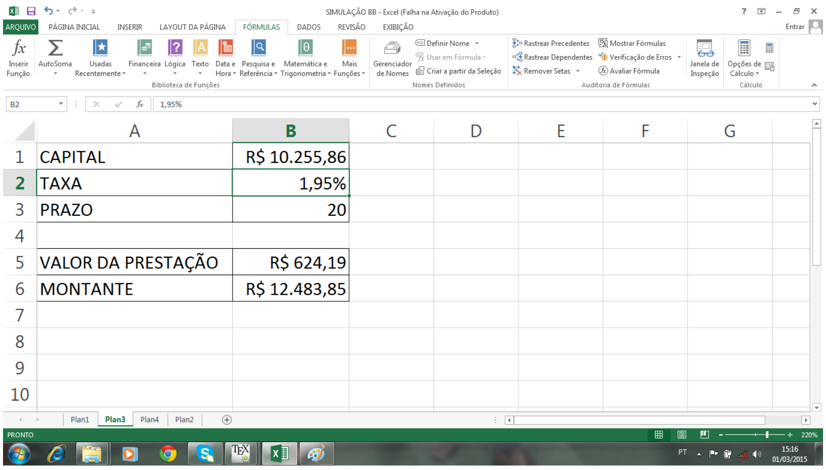


Figura 2.12: PGTO EXCEL

Tabela 2.2: Comparação

	PRESTAÇÃO	MONTANTE
Banco do Brasil	$R\$ \ 627,42$	$R\$ \ 12548,40$
Sistema Price	$R\$ \ 624,19$	$R\$ \ 12483,85$

bem próximos, o que nos garante que a fórmula do sistema Price pode ser usada para a comparação de sistemas financeiros de amortização.

Em relação ao acréscimo dos tributos, podemos afirmar que suas taxas variam mensalmente, outras taxas semanalmente e outras diariamente. Por esse motivo não podemos inserir essas taxas na fórmula do sistema Price. No entanto, ao se fazer uma simulação de crédito o funcionário tem a obrigação de informar essas taxas atualizadas.

2.4 Sistema SAC

Consiste em um sistema de amortização de uma dívida em prestações periódicas, sucessivas e decrescentes em progressão aritmética, em que o valor da prestação é composto por uma parcela de juros uniformemente decrescente e outra de amortização que permanece constante.

Esse tipo de sistema às vezes é usado pelo Sistema Financeiro da Habitação, pelos bancos comerciais em seus financiamentos imobiliários e também, em certos casos, em empréstimos às empresas privadas através de entidades governamentais.

A prestação, em cada período, é obtido somando a amortização e os juros. A amortização é constante, os juros são decrescentes e as prestações também são decrescentes.

$$P_k = J_k + A$$

Onde:
P_k é a prestação do mês k.
J_k é o juros do mês k.
A é a amortização.
A amortização que é constante em cada pagamento é obtida dividindo-se o principal (o valor da dívida inicial) pelo número de parcelas do plano de pagamento.

$$A = \frac{C}{n}$$

Onde:
A é a amortização.
C é o capital.
n é o número de parcelas.
O juros referentes a k-ésima prestação ou renda são calculados com base no saldo devedor inicial do próprio período k.

$$J_k = C_k.i$$

Onde:
J_k é o juros do mês.
C_k é o saldo devedor do mês k.
i é a taxa de juros.

O saldo devedor do período a partir do segundo mês é calculado subtraindo o saldo do mês anterior pela amortização.

$$C_{k+1} = C_k - A$$

Onde:
C_{k+1} é o saldo devedor do mês.
C_k é o saldo devedor do mês anterior.
A é a amortização.

O capital inicial que é a soma de todas as amortizações pode ser calculado a partir de uma j-ésima prestação, ou seja,

$$P_k = A + J_k$$

$$P_k = A + (C - (k-1)A)i$$

$$P_k = Ci + A(1 - (k-1)i)$$

$$P_k = Ci + \frac{C}{n}i - \frac{kC}{n}i + \frac{C}{n}$$

$$nP_k = C(ni - ki + i + 1)$$

$$C = \frac{nP_k}{(n-k+1)i + 1}$$

Exemplo 2.4. Em um financiamento de $R\$$ 20 000,00, que será pago em 6 prestações a uma taxa de 1% ao mês pelo sistema SAC, deseja-se saber qual o valor da prestação e o montante desse financiamento?

Solução:
Inicialmente, calculemos o valor da amortização A.

$$A = \frac{C}{n}$$

$$A = \frac{20000}{6} = 3333,33$$

A partir daí, montaremos uma tabela específica, com juros, amortização, prestação e saldo devedor.

Cálculo do mês 1.
amortização$= 3333,33$
juros$= 20000.0,01 = 200$
saldo devedor$= 20000 - 3333,33 = 16666,67$
prestação$= 3333,33 + 200 = 3533,33$

Cálculo do mês 2.
amortização$= 3333,33$
juros$= 16666,67.0,01 = 166,67$
saldo devedor$= 16666,67 - 3333,33 = 13333,33$
prestação$= 3333,33 + 166,67 = 3500$

Cálculo do mês 3.
amortização$= 3333,33$
juros$= 13333,33.0,01 = 133,33$
saldo devedor$= 13333,33 - 3333,33 = 10000$
prestação$= 3333,33 + 133,33 = 3466,67$

Cálculo do mês 4.
amortização$= 3333,33$
juros$= 10000.0,01 = 100$
saldo devedor$= 10000 - 3333,33 = 6666,67$
prestação$= 3333,33 + 100 = 3433,33$

Cálculo do mês 5.
amortização$= 3333,33$
juros$= 6666,67.0,01 = 66,67$
saldo devedor$= 6666,67 - 3333,33 = 3333,33$
prestação$= 3333,33 + 66,67 = 3400$

Cálculo do mês 6.
amortização$= 3333,33$
juros$= 3333,33.0,01 = 33,33$
saldo devedor$= 3333,33 - 3333,33 = 0$
prestação$= 3333,33 + 33,33 = 3366,67$

Tabela 2.3: Sistema SAC

numero de parcelas	juros	amortização	prestação	saldo devedor
0	0	0	0	20.000,00
1	200	3.333,33	3.533,33	16.666,67
2	166,67	3.333,33	3.500,00	13.333,33
3	133,33	3.333,33	3.466,67	10.000,00
4	100,00	3.333,33	3.433,33	6.666,67
5	66,67	3.333,33	3.400,00	3.333,33
6	33,33	3.333,33	3.366,67	0,00
total	700,00	20.000,00	20.700,00	0

Com isso, a prestações ficarão em $R\$$ 3 533,33, $R\$$ 3 500,00, $R\$$ 3 466,67, $R\$$ 3 433,33, $R\$$ 3 400,00 e $R\$$ 3 366,67 e um total de $R\$$ 20 700,00.

Podemos determimnar a fórmula para calcular a prestação de cada mês, usando os conceitos estudados até este momento.

Inicialmente calcularemos a prestação dos primeiros períodos,

1° período: $P_1 = \dfrac{C}{n} + Ci$
2° período: $P_2 = \dfrac{C}{n} + \left[C - \dfrac{C}{n}\right] i$
3° período: $P_3 = \dfrac{C}{n} + \left[C - 2\dfrac{C}{n}\right] i$

Dessa forma, cada prestação é calculada somando a amortização do mês ou período com o juros do mês ou período equivalente, ou seja,

K-ésimo período: $P_k = \dfrac{C}{n} + \left[C - (k-1)\dfrac{C}{n}\right] i$

2.5 Comparação com uma simulação de financiamento de casa na Caixa Econômica Federal

Foi realizada uma simulação de financiamento na Caixa Econômica Federal, com o objetivo de comparar os resultados encontrados no valor da prestação, do juros e do montante em relação aos encontrados com o do sistema SAC.

Na simulação do imóvel cujo valor foi $R\$$ $100000,00$, a proposta foi dar $R\$$ $10000,00$ de entrada e financiar os $R\$$ $90000,00$ restantes a uma taxa $0,76249\%$ ao mês já acrescida de tributos num período de 420 meses no sistema SAC.

Analisemos a situação dada pela Caixa Econômica na qual ela trata de uma taxa efetiva anual mais tributos de $9,1499\%$, onde a mesma se da $0,76249\%$ ao mês ao ser dividida por 12.

Figura 2.13: Caixa Econômica

Como o procedimento trata-se de uma simulação, a mesma apresenta apenas a primeira prestação, as demais só seram geradas após a efetivação do financiamento.

Analisemos agora como determinaremos os valores das prestações pelos procedimentos do sistema SAC.

Inicialmente, usaremos o programa EXCEL como recurso para facilitar os cálculos.

Após abrir o programa EXCEL, cria-se a estrutura da tabela com capital, taxa, tempo e nesse caso entrada e valor do imóvel, no caso em questão.

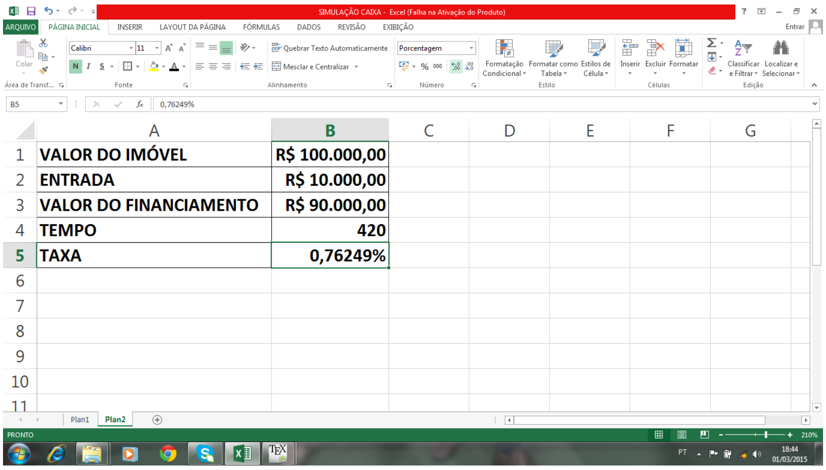


Figura 2.14: Sistema SAC

Em seguida as colunas com número de parcelas, amortização, juros e saldo devedor.

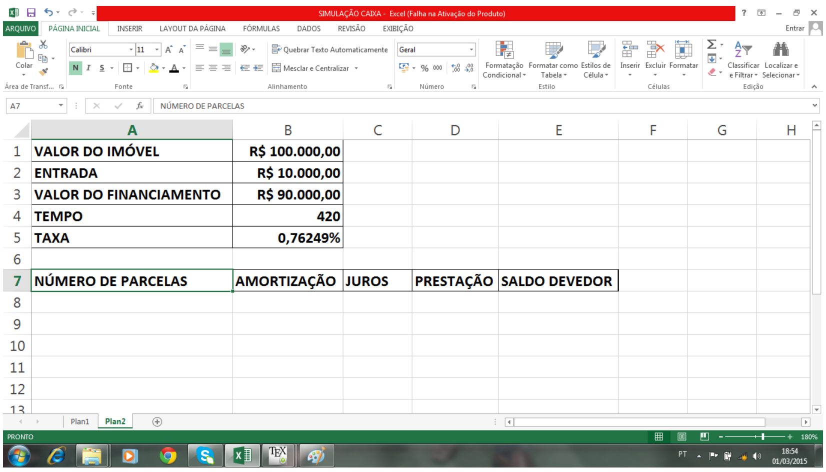
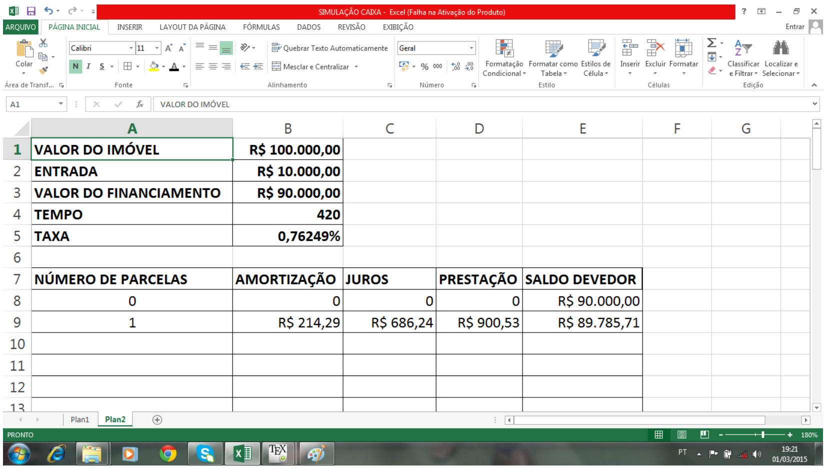


Figura 2.15: Sistema SAC

A partir daí, calculemos o valor da primeira prestação, que será dada pela soma da amortização com o juros do mês, onde o saldo devedor na data zero é $R\$ \ 90000,00$, a amortização é $\dfrac{90000}{420} = 214,19$ e o juros é calculado sobre o saldo devedor $90000.0,0076249 = 686,24$, com isso a prestação é $R\$ \ 900,53$, restando um saldo devedor para o próximo mês de $90000 - 214,19 = 89785,71$.

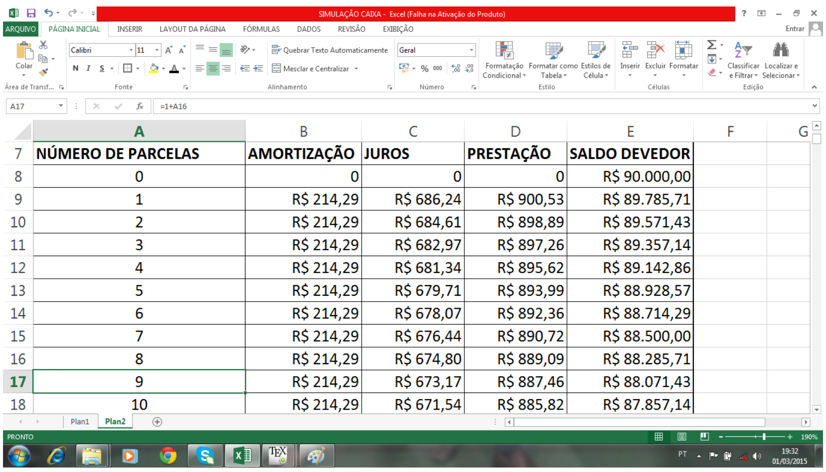


	A	B	C	D	E
1	VALOR DO IMÓVEL	R$ 100.000,00			
2	ENTRADA	R$ 10.000,00			
3	VALOR DO FINANCIAMENTO	R$ 90.000,00			
4	TEMPO	420			
5	TAXA	0,76249%			
6					
7	NÚMERO DE PARCELAS	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR
8	0	0	0	0	R$ 90.000,00
9	1	R$ 214,29	R$ 686,24	R$ 900,53	R$ 89.785,71

Figura 2.16: Sistema SAC

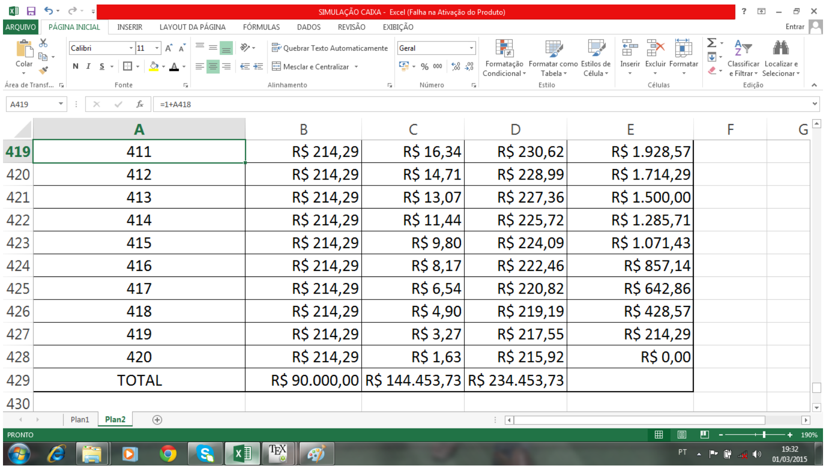
A vantagem de trabalhar com o EXCEL é que ao selecionar toda a linha da primeira prestação e selecionar com o mouse o canto inferior direito da última célula dessa linha e arrastar até a última parcela surgirá o valor das demais parcelas, assim como das amortizações, dos juros e do saldo devedor.

Devido a tabela ser muito grande, será mostrado o início e o fim dessa tabela.



	A	B	C	D	E
7	NÚMERO DE PARCELAS	AMORTIZAÇÃO	JUROS	PRESTAÇÃO	SALDO DEVEDOR
8	0	0	0	0	R$ 90.000,00
9	1	R$ 214,29	R$ 686,24	R$ 900,53	R$ 89.785,71
10	2	R$ 214,29	R$ 684,61	R$ 898,89	R$ 89.571,43
11	3	R$ 214,29	R$ 682,97	R$ 897,26	R$ 89.357,14
12	4	R$ 214,29	R$ 681,34	R$ 895,62	R$ 89.142,86
13	5	R$ 214,29	R$ 679,71	R$ 893,99	R$ 88.928,57
14	6	R$ 214,29	R$ 678,07	R$ 892,36	R$ 88.714,29
15	7	R$ 214,29	R$ 676,44	R$ 890,72	R$ 88.500,00
16	8	R$ 214,29	R$ 674,80	R$ 889,09	R$ 88.285,71
17	9	R$ 214,29	R$ 673,17	R$ 887,46	R$ 88.071,43
18	10	R$ 214,29	R$ 671,54	R$ 885,82	R$ 87.857,14

Figura 2.17: Sistema SAC



	A	B	C	D	E	F	G
419	411	R$ 214,29	R$ 16,34	R$ 230,62	R$ 1.928,57		
420	412	R$ 214,29	R$ 14,71	R$ 228,99	R$ 1.714,29		
421	413	R$ 214,29	R$ 13,07	R$ 227,36	R$ 1.500,00		
422	414	R$ 214,29	R$ 11,44	R$ 225,72	R$ 1.285,71		
423	415	R$ 214,29	R$ 9,80	R$ 224,09	R$ 1.071,43		
424	416	R$ 214,29	R$ 8,17	R$ 222,46	R$ 857,14		
425	417	R$ 214,29	R$ 6,54	R$ 220,82	R$ 642,86		
426	418	R$ 214,29	R$ 4,90	R$ 219,19	R$ 428,57		
427	419	R$ 214,29	R$ 3,27	R$ 217,55	R$ 214,29		
428	420	R$ 214,29	R$ 1,63	R$ 215,92	R$ 0,00		
429	TOTAL	R$ 90.000,00	R$ 144.453,73	R$ 234.453,73			
430							

Figura 2.18: Sistema SAC

Comparando os resultados da simulação da Caixa Econômica com a do sistema SAC, temos,

Tabela 2.4: Comparação

	1ª PRESTAÇÃO
Caixa Econômica	$R\$ \ 922,15$
Sistema SAC	$R\$ \ 900,53$

Observe ainda que existem arredondamentos feitos pelos programas, chegando a valores bem próximos, o que nos garante que o método do sistema SAC pode ser usada para a comparação de sistemas financeiros de amortização.

Em relação ao acréscimo dos tributos, podemos afirmar que suas taxas variam mensalmente, outras taxas semanalmente e outras diariamente. Por esse motivo não podemos inserir essas taxas no sistema SAC. No entanto, ao se fazer uma simulação de crédito o funcionário tem a obrigação de informar essas taxas atualizadas.

2.6 Sistema SACRE

O Sistema de Amortização Crescente (SACRE), também conhecido como sistema misto, foi adotado recentemente pelo Sistema de Financiamento Habitacional (SFH) na liquidação de financiamentos da casa própria. O Sacre é baseado no SAC e no Sistema Price, já que a prestação é igual à media aritmética entre as prestações desses dois sistemas, nas mesmas condições de juros e prazos. Aproximadamente até a metade do período de financiamento, as amortizações são maiores que as do Sistema Price. Como decorrência disso, a queda do saldo devedor é mais acentuada e são menores as chances de ter resíduo ao final do contrato, como pode ocorrer no Sistema Price. Uma das desvantagens do Sacre é que suas prestações iniciais são ligeiramente mais altas que as do Price. Contudo, após a metade do período, o mutuário sentirá uma queda substancial no comprometimento de sua renda com o pagamento das prestações.

As prestações do sistema SACRE são a média aritmética entre as prestações do sistema PRICE e SAC.

$$P_{SACRE} = \frac{P_{PRICE} + P_{SAC}}{2}$$

Os juros são obtidos, em cada período, multiplicando o saldo devedor do período imediatamente anterior pela taxa de juros.

$$J_k = C_{k-1}.i$$

Onde:
J_k é o juros do mês.
C_{k-1} é o saldo devedor da mês anterior.
i é a taxa de juros.
A amortização de cada mês é obtido, subtraindo a prestação do mês pelo juros do mesmo mês.

$$A = P - J$$

Onde:
A é a amortização.
P é a prestação.
J é o juros.

O saldo devedor de cada período é obtido, subtraindo o saldo devedor do mês imediatamente do período anterior, pela amortização do mês.

$$C_k = C_{k-1} - A_k$$

Onde:
C_k é o saldo devedor do mês k.
C_{k-1} é o saldo devedor do mês $k-1$.
A_k é a amortização do mês k.

Exemplo 2.5. Em um financiamento de $R\$$ 20 000,00, que será pago em 6 prestações a uma taxa de 1% ao mês pelo sistema SACRE, deseja-se saber qual o valor da prestação e o montante desse financiamento?

Solução:
Inicialmente, calculemos a prestação, e como nossos dois sistemas anteriores tiveram valores, períodos e taxas iguais em seus exemplos, tomaremos estes como base, para nossos cálculos, assim, construiremos uma tabela e seus valores.

Cálculo do mês 1.

prestação= $\dfrac{3450,97+3533,33}{2} = 3492,15$
juros= $20000.0,01 = 200$
amortização= $3492,15 - 200 = 3292,15$
saldo devedor$20000 - 3292,15 = 16707,85$

Cálculo do mês 2.

prestação= $\dfrac{3450,97+3500}{2} = 3475,48$
juros= $16707,85.0,01 = 167,08$
amortização= $3475,48 - 167,08 = 3308,41$
saldo devedor$16707,85 - 3308,41 = 13399,44$

Cálculo do mês 3.

prestação= $\dfrac{3450,97+3466,67}{2} = 3458,82$
juros= $13399,44.0,01 = 133,99$
amortização= $3458,82 - 133,99 = 3324,82$
saldo devedor$13399,44 - 3324,82 = 10074,62$

Cálculo do mês 4.

prestação= $\dfrac{3450,97 + 3433,33}{2} = 3442,15$
juros= $10074,62.0,01 = 100,75$
amortização= $3442,15 - 100,75 = 3341,40$
saldo devedor$10074,62 - 3341,40 = 6733,22$

Cálculo do mês 5.

prestação= $\dfrac{3450,97 + 3400}{2} = 3425,48$
juros= $6733,22.0,01 = 67,33$
amortização= $3425,48 - 67,33 = 3358,15$
saldo devedor$6733,22 - 3358,15 = 3375,07$

Cálculo do mês 6.

prestação= $\dfrac{3450,97 + 3366,67}{2} = 3408,82$
juros= $3375,07.0,01 = 33,75$
amortização= $3408,82 - 33,75 = 3375,07$
saldo devedor$3375,07 - 3375,07 = 0$

Tabela 2.5: Sistema SACRE

n° de prestações	price	sac	sacre	juros	amortização	saldo devedor
0	0	0	0	0	0	20.000,00
1	3.450,97	3.533,33	3.492,15	200,00	3.292,15	16.707,85
2	3.450,97	3.500,00	3.475,48	167,08	3.308,41	13.399,44
3	3.450,97	3.466,67	3.458,82	133,99	3.324,82	10.074,62
4	3.450,97	3.433,33	3.442,15	100,75	3.341,40	6.733,22
5	3.450,97	3.400,00	3.425,48	67,33	3.358,15	3.375,07
6	3.450,97	3.366,67	3.408,82	33,75	3.375,07	0,00
total	20.705,80	20.700,00	20.702,90	702,90	0	0

Dessa, as prestações ficarão em $R\$$ 3.492,15, $R\$$ 3.475,48, $R\$$ 3.458,82, $R\$$ 3.442,15, $R\$$ 3.425,48 e $R\$$ 3.408,82 e valor final de $R\$$ 20.702,90.

2.7 Sistema AMERICANO

O sistema de amortização americano oferece pagamentos periódicos de juros e amortização total final. Assim, o principal é restituído por meio de uma parcela única ao final da operação. Os juros podem ser pagos periodicamente (mais comum) ou capitalizados e pagos juntamente com o principal no fim do prazo acertado.

A prestação do mês será nesse caso (mais comum), igual ao juro do mês, pois, será o único valor pago, até a penúltima parcela, pois a última parcela será o capital inicial mais o juro do mês, com isso, o saldo devedor de cada mês também será o mesmo do anterior, pois não está sendo amortizado nada periodicamente. Assim, vejamos um exemplo e uma tabela que mostra como esse sistema funciona.

Exemplo 2.6. Em um financiamento de $R\$$ 20 000,00, que será pago em 6 prestações a uma taxa de 1% ao mês pelo sistema AMERICANO, deseja-se saber qual o valor da prestação e o montante desse financiamento?

Solução:
Inicialmente, calculamos os juros do capital inicial, ou os juros de $R\$$ 20 000,00, logo,

$$J = 20000.0,01 = 200$$

Assim, mensalmente será pago 5 prestações de $R\$$ 200,00 e a ultima de $R\$$ 20 200,00.
Veja a tabela:

Tabela 2.6: Sistema Americano

numero de parcelas	juros	amortização	prestação	saldo devedor
0	0	0	0	20.000,00
1	200	0	200	20.000,00
2	200	0	200	20.000,00
3	200	0	200	20.000,00
4	200	0	200	20.000,00
5	200	0	200	20.000,00
6	200	20000	20200	0,00
total	1200,00	20 000,00	21 200,00	0

Veja que neste caso comparando os quatro sistemas, o que dá as melhores vantagens em relação ao montante final ou aos juros, temos o Sistema SAC, e o menos vantaajoso em relação aos juros é o sistema AMERICANO.

2.8 Comparação entre os sistemas

Compare na tabela abaixo, em relação ao mesmo exemplo citado nos quatro sistemas, que tem um capital de $R\$$ 20 000,00, com uma taxa de 1%, num período de 6 meses.

Tabela 2.7: Sistemas Price, SAC, SACRE e Americano

número de prestações	PRICE	SAC	SACRE	AMERICANO
0	0	0	0	0
1	3.450,97	3.533,33	3.492,15	200,00
2	3.450,97	3.500,00	3.475,48	200,00
3	3.450,97	3.466,67	3.458,82	200,00
4	3.450,97	3.433,33	3.442,15	200,00
5	3.450,97	3.400,00	3.425,48	200,00
6	3.450,97	3.366,67	3.408,82	20200,00
TOTAL	20.705,80	20.700,00	20.702,90	21.200,00

No entanto, dos sistemas tratados neste trabalho, os mais usados e trabalhados são o PRICE e o SAC, dos quais o SAC é o mais vantajoso.

Nos procedimentos bancários e administrativos de uma forma geral, teremos um valor diferente dos nossos exemplos, pois os procedimentos reais adicionam taxas administrativas, iof, entre outras. Mesmo assim, podemos ter acesso a essas taxas, simplesmente na hora de fazer o empréstimo tanto nos caixas eletrônicos, como no atendimento pessoal. Observamos que simulação serve apenas como base, pois na simulação não temos acesso as taxas, que aparecem apenas na efetivação da proposta.

Capítulo 3

Sistemas de Amortização em sala de aula

3.1 Proposta para sala de aula

Existe uma necessidade de apresentar alguns dos sistemas de amortização em sala de aula, pois, sabe-se que o cidadão comum não tem a menor ideia de como funcionam suas operações financeiras, desde empréstimos, compras de casas, até financiamentos de carros, seu conhecimento é limitado na educação básica aos juros simples e juros compostos, ficando a dúvida e a necessidade de conhecer esses valores e taxas.

Para sala de aula, é proposto apresentar os sistemas mais básicos e mais usados em nosso dia-a-dia, sendo assim, o entendimento começa a esclarecer-se e formalizando uma ideia de como todas essas taxas são cobradas e a partir dessa ideia o cidadão pode ter uma noção de como fazer seus cálculos sem ter tanta dúvida.

3.2 Atividade proposta para sala de aula

Foi realizada uma atividade numa turma de 2° ano de ensino médio noturno da Escola Estadual Manoel Leandro de Lira, em Feira Grande - Al, com o objetivo de esclarecer-lhes a ideia de sistemas de amortização e ver o grau de interesse e o nível de dificuldade desses alunos, assim como, ver sua capacidade de assimilar outros conteúdos aos sistemas de amortização.

Vejamos agora como foi aplicada essa atividade.

Durante o conteúdo de matemática financeira lecionado na turma em questão, na sequência após porcentagem, juros simples e juros composto, foi mostrado como funcionam os sistemas de amortização com exemplos bem simples reforçando o que já conhecem, com o intuito de fazer comparações entre os resultados finais.

O exemplo mostrado foi o seguinte:

Exemplo 3.1. Num empréstimo de $R\$$ 1000,00, a uma taxa de 2% ao mês, durante 5 meses. Quais são as prestações e qual o juro, no final desse período pelos sistemas PRICE, SAC, SACRE e AMERICANO?

Solução:

Como solução foi feita a construção das tabelas de um por um dos sistemas, com o auxílio de calculadora científica, papel e lápis.

Tabela 3.1: Sistema Price

número de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	1000	0	0	0
1	807,84	192,16	20,00	212,16
2	611,84	196,00	16,16	212,16
3	411,92	199,92	12,24	212,16
4	208,00	203,92	8,24	212,16
5	0	208,00	4,16	212,16
TOTAL	0	1.000,00	60,79,00	1.060,79

Tabela 3.2: Sistema SAC

número de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	1000,00	0	0	0
1	800,00	200,00	20,00	220,00
2	600,00	200,00	16,00	216,00
3	400,00	200,00	12,00	212,00
4	200,00	200,00	8,00	208,00
5	0	200,00	4,00	204,00
TOTAL	0	1.000,00	60,00	1.060,00

Tabela 3.3: Sistema SACRE

número de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	1000	0	0	0
1	803,92	196,08	20,00	216,08
2	605,92	198,00	16,08	214,08
3	405,96	199,96	12,12	212,08
4	204,00	201,96	8,12	210,08
5	0	204,00	4,08	208,08
TOTAL	0	1.000,00	60,40	1.060,40

Tabela 3.4: Sistema Americano

número de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	1000	0	0	0
1	1000	0	20,00	20,00
2	1000	0	20,00	20,00
3	1000	0	20,00	20,00
4	1000	0	20,00	20,00
5	0	1.000,00	20,00	1020,00
TOTAL	0	1.000,00	100,00	1.100,00

Após a apresenrtação dos sistemas e dos cálculos necessários para a formação as tabelas, os alunos observaram que nesse caso em relação aos juros que o sistema mais vantajoso era o SAC, da mesma forma que em relação aos juros o menos vantajoso era o sistema AMERICANO.

Eles observaram também que nos sistemas SAC e SACRE as prestações decrescem em progressão aritmética.

Após a discursão e as dúvidas tiradas, ficou por encerrada a aula de sistemas de amortização.

Na aula seguinte foi aplicada uma atividade para que eles assimilassem o que foi desenvolvido na aula de sistemas de amortização. A atividade foi composta por uma situação bancária, onde a sala foi dividida em equipes de 6 ou 7 alunos, onde cada equipe representaria um banco, onde cada banco usa apenas um único sistema de amortização, dentre os estudados.

A turma foi dividida em 4 equipes das quais uma utilizou o sistema PRICE, outra o sistema SAC, outra o sistema SACRE e por fim a última o sistema AMERICANO, porém usando os mesmo valor, mesmo prazo e mesma taxa de juros, porém com sistemas de amortização diferentes.

As equipes intitularam-se de: Banco Boa Sorte (sistema PRICE), Banco Feiragrandense (sistema SAC), Banco Legal (sistema SACRE) e Banco 100 por cento (sistema AMERICANO), onde a escolha de cada sistema foi feita através de sorteio.

O trabalho foi o seguinte:
Simularemos uma situação de um empréstimos de $R\$10000{,}00$ a uma taxa de 5% ao mês durante 10 meses, onde cada banco dará sua propósta em seu sistema de amortização correspondente.

1ª Proposta

Tabela 3.5: Banco Boa Sorte

N° de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	10000	0	0	0
1	9204,95	795,05	500,00	1295,05
2	8370,16	834,80	460,25	1295,05
3	7493,62	876,54	418,51	1295,05
4	6573,25	920,36	374,68	1295,05
5	5606,87	966,38	328,66	1295,05
6	4592,17	1014,70	280,34	1295,05
7	3526,73	1065,44	229,61	1295,05
8	2408,02	1118,71	176,34	1295,05
9	1233,38	1174,64	120,40	1295,05
10	0	1233,38	61,67	1295,05
Total		10000,00	2950,50	12950,50

2ª Proposta

Tabela 3.6: Banco Feiragrandense

N° de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	10000,00	0	0	0
1	9000,00	1000,00	500,00	1500,00
2	8000,00	1000,00	450,00	1450,00
3	7000,00	1000,00	400,00	1400,00
4	6000,00	1000,00	350,00	1350,00
5	5000,00	1000,00	300,00	1300,00
6	4000,00	1000,00	250,00	1250,00
7	3000,00	1000,00	200,00	1200,00
8	2000,00	1000,00	150,00	1150,00
9	1000,00	1000,00	100,00	1100,00
10	0	1000,00	50,00	1050,00
Total		10000,00	2750,00	12750,00

3ª Proposta

Tabela 3.7: Banco Legal

N° de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	10000,00	0	0	0
1	9102,48	897,52	500,00	1397,52
2	8185,08	917,40	455,12	1372,52
3	7246,81	938,27	409,25	1347,52
4	6286,63	960,18	362,34	1322,52
5	5303,44	983,19	314,33	1297,52
6	4296,08	1007,35	265,17	1272,52
7	3263,37	1032,72	214,80	1247,52
8	2204,01	1059,35	163,17	1222,52
9	1116,69	1087,32	110,20	1197,52
10	0	1116,69	55,83	1172,52
Total		10000,00	2850,23	12850,23

4ª Proposta

Os alunos observaram o uso de conteúdos além dos que usamos comumente em matemática financeira, como média aritmética e de progressões aritméticas que já tinha sido mencionada.

Tabela 3.8: Banco 100 por Cento

N° de prestações	saldo devedor	amortização	juros	prestação
0	10000,00	0	0	0
1	10000,00	0	500,00	500,00
2	10000,00	0	500,00	500,00
3	10000,00	0	500,00	500,00
4	10000,00	0	500,00	500,00
5	10000,00	0	500,00	500,00
6	10000,00	0	500,00	500,00
7	10000,00	0	500,00	500,00
8	10000,00	0	500,00	500,00
9	10000,00	0	500,00	500,00
10	0	10000,00	500,00	10500,00
Total		10000,00	5000,00	15000,00

Concluímos os trabalhos e na aula seguinte encerramos com as apresentações, onde constatamos realmente que o sistema SAC é o mais vantajoso e que neste sistema no Brasil, podemos encontrá-lo nos sistemas habitacionais para obtenção da casa própria.

Observou-se nos alunos em primeiro lugar a curiosidade em relação aos financiamentos de carros e casas e a comparação de alguns cujos pais tem negócios parecidos e daí surgiram diversas perguntas relacionadas aos negócios de seus pais, as quais foram esclarecidas.

Encerramos a aula e as atividades relacionadas aos sistemas de amortização, onde a proposta teve uma aceitação favorável deixando uma boa perspectiva de interesse pelo estudo e continuidade do mesmo.

Capítulo 4

Conclusão

Vimos que com os exemplos e as atividades realizadas que os alunos têm capacidade de entender e de aplicar os sistemas de amortização, daí, chegamos à conclusão que é possível aplicar o conhecimento de sistemas de amortização em sala de aula, em especial no Ensino Médio, mais especificamente nos sistemas PRICE e SAC. Com isso, também observamos que a aplicação de outros conteúdos são importantes, pois o uso de fórmulas, assim como o conhecimento de matemática financeira e em outros como progressão aritmética e geométrica, são fundamentais para o conhecimento de sistemas de amortização. Temos também que a aplicação de sistemas de amortização em sala de aula, além de esclarecer dúvidas dos alunos que são futuros cidadãos vão ajuda-los no futuro a tomar decisões com mais facilidade, pois a matemática financeira além de tudo é um dos conteúdos mais usados pela comunidade de uma forma geral principalmente com o conhecimento de sistemas de amortização.

REFERÊNCIAS

1. Lima, Elon Lages; Carvalho, Paulo Cezar Pinto Carvalho;Wagner, Eduardo; Morgado, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio**. Volume 2, 6ª edição,Rio de Janeiro, SBM, 2006.

2. Ribeiro, Jackson. **Ciência, Linguagem e Tecnologia**. volume 1, 1ª ed. Scipione, 2011.

3. Paiva, Manoel. **Moderna Plus**. volume 1, 2ª ed. Moderna, 2010.

4. BRASIL. LDB. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**: lei n° 9394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. - 5. ed. - Brasília: Câmara dos Deputados, Coordenação Edições Câmara,2010.

5. http://www.proativams.com.br/filesaberto/Livro20MForiginal.pdf

6. Lima, Elon Lages.**Curso de Análise**. Volume 1, 12ª edição, Rio de Janeiro, Projeto Euclides, 2009.

7. http://blog.planalto.gov.br/

APÊNDICE

Entrevista com especialista bancário e funcionário do Banco do Brasil.

Questionário

1. O que é amortizar?

Amortizar é um processo de extinção de uma dívida através de pagamentos periódicos, que são realizados em função de um planejamento, de modo que cada prestação corresponde à soma do reembolso do capital ou do pagamento dos juros do saldo devedor, podendo ser o reembolso de ambos, sendo que os juros são sempre calculados sobre o saldo devedor.

2. O que são sistemas de amortização?

São sistemas desenvolvidos com o objetivo de amortizar uma dívida.

3. Quais os principais sistemas de amortização?

São o sistema:

PRICE, onde pelo sistema Price, as prestações e o saldo devedor são corrigidos mensalmente pela TR, pelos bancos privados e anualmente pela Caixa. A amortização inicial dos juros nesse sistema é menor, fazendo com que apenas a partir da metade do número de anos estabelecido em contrato comece a ser reduzido o saldo devedor do comprador.
SAC, consiste em um sistema de amortização de uma dívida em prestações periódicas, sucessivas e decrescentes em progressão aritmética, em que o valor da prestação é composto por uma parcela de juros uniformemente decrescente e outra de amortização que permanece constante. Esse tipo de sistema às vezes é usado pelo Sistema Financeiro da Habitação, pelos bancos comerciais em seus financiamentos imobiliários e também, em certos casos, em empréstimos às

empresas privadas através de entidades governamentais.

SACRE, onde o sistema SACRE foi desenvolvido com o objetivo de permitir maior amortização do valor emprestado, reduzindo-se, simultaneamente, a parcela de juros sobre o saldo devedor. Por isso, ele começa com prestações mensais mais altas, se comparado à Tabela Price.

AMERICANO, O sistema de amortização americano oferece pagamentos periódicos de juros e amortização total final. Assim, o principal é restituído por meio de uma parcela única ao final da operação. Os juros podem ser pagos periodicamente (mais comum) ou capitalizados e pagos juntamente com o principal no fim do prazo acertado.