

UNICAMP

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE
CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística e
Computação Científica

MARCELO VINICIUS TEMPONI SOLER

**Integrais Elípticas e a Média
Aritmética-Geométrica**

Campinas

2024

Marcelo Vinicius Temponi Soler

Integrais Elípticas e a Média Aritmética-Geométrica

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientador: Lucio Tunes dos Santos

Este trabalho corresponde à versão final da Dissertação defendida pelo aluno Marcelo Vinicius Temponi Soler e orientada pelo Prof. Dr. Lucio Tunes dos Santos.

Campinas

2024

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Sylvania Renata de Jesus Ribeiro - CRB 8/6592

So43i Soler, Marcelo Vinicius Temponi, 1989-
Integrais elípticas e a média aritmética-geométrica / Marcelo Vinicius
Temponi Soler. – Campinas, SP : [s.n.], 2024.

Orientador: Lucio Tunes dos Santos.
Dissertação (mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de
Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Média (Matemática). 2. Aritmética. 3. Elipse (Geometria). 4. Integrais
(Matemática). I. Santos, Lucio Tunes dos, 1962-. II. Universidade Estadual de
Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III.
Título.

Informações Complementares

Título em outro idioma: Elliptic integrals and the arithmetic-geometric mean

Palavras-chave em inglês:

Mean (Mathematics)

Arithmetic

Ellipse (Geometry)

Integrals (Mathematics)

Área de concentração: Matemática em Rede Nacional

Titulação: Mestre

Banca examinadora:

Lucio Tunes dos Santos [Orientador]

Rita Santos Guimarães

Maria Amélia Novais Schleicher

Data de defesa: 02-05-2024

Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Identificação e informações acadêmicas do(a) aluno(a)

- ORCID do autor: <https://orcid.org/0009-0007-5066-9115>

- Currículo Lattes do autor: <http://lattes.cnpq.br/0409331080759944>

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 02 de maio de 2024 e aprovada pela banca examinadora composta pelos Profs. Drs.

Prof(a). Dr(a). LUCIO TUNES DOS SANTOS

Prof(a). Dr(a). MARIA AMÉLIA NOVAIS SCHLEICHER

Prof(a). Dr(a). RITA SANTOS GUIMARÃES

A Ata da Defesa, assinada pelos membros da Comissão Examinadora, consta no SIGA/Sistema de Fluxo de Dissertação/Tese e na Secretaria de Pós-Graduação do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

À Maria Helena Temponi (im memoriam). Minha amada tia "Marlene".

AGRADECIMENTOS

À Deus, por sua graça e amor, por permitir que esse sonho se realizasse e por me ensinar que "há um tempo para todas as coisas".

À minha esposa, Ana Paula, cujo apoio e incentivo a continuar não podem ser expressos em palavras.

Aos meus pais, José Carlos e Madalena, por me darem suporte sempre que necessário, de muitas formas, para que essa caminhada chegasse ao fim.

Ao meu orientador, prof^o. Lúcio, por sua bondade, atenção, inspiração, incentivo, paciência e cuidado durante o desenvolvimento deste trabalho.

Ao IMECC e aos professores do PROFMAT, pela oportunidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

Este trabalho tem por objetivo apresentar a origem e definições das integrais elípticas e do algoritmo da média aritmética-geométrica como ferramenta para resolução destas integrais. Para tanto, mediante revisão bibliográfica, foram levantados os principais pontos históricos e de desenvolvimento matemático que permitissem compreender os processos de descoberta destas integrais e do desenvolvimento das ferramentas necessárias para seu cálculo numérico, observando-se as diferentes contribuições de inúmeros matemáticos para o desenvolvimento desta teoria. Além disso, propõe-se a extensão da discussão sobre o cálculo do comprimento da elipse ao Ensino Médio, mediante técnicas acessíveis ao estudante neste grau de conhecimento.

Palavras-chave: elipse, integrais elípticas, média aritmética-geométrica.

Abstract

This work aims at presenting the origin and definitions of elliptic integrals and the arithmetic-geometric mean algorithm as a tool for solving of these integrals. To this end, through a bibliographical review, the main historical and mathematical development points that allow understand the processes of discovering these integrals and developing easy tools for their numerical calculation, observing the different contributions of mathematical calculations to the development of this theory. In addition, it is proposed to extend the discussion on calculating the length of the ellipse to High School, through techniques accessible to students at this level of knowledge.

Keywords: ellipse, elliptic integrals, arithmetic-geometric mean.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Elipse.	17
Figura 2 – Elipse e elementos.	18
Figura 3 – Elipse e pontos de referências para parametrização.	21
Figura 4 – Elipse e triângulos semelhantes	22
Figura 5 – Arco elíptico no 1º quadrante.	23
Figura 6 – Lemniscata.	25
Figura 7 – Lemniscata e elementos.	25
Figura 8 – Arco da lemniscata no 1º quadrante.	27
Figura 9 – Sequências do cálculo da média aritmética-geométrica nos trabalhos de Lagrange. (LAGRANGE, 1882).	38
Figura 10 – Cálculo da média aritmética-geométrica nos trabalhos de Gauss. (GAUSS, 1866).	38
Figura 11 – Exemplo numérico da média aritmética-geométrica apresentado por Gauss (GAUSS, 1866)	39
Figura 12 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$	54
Figura 13 – Elipse e circunferências de raios iguais a médias entre a e b	56
Figura 14 – Elipse, circunferências de raios iguais a médias entre a e b e circunferência de melhor aproximação.	60

Lista de tabelas

Tabela 1 – Convergência das sequências (a_n) , (b_n) e (c_n)	43
Tabela 2 – Cálculo de $M(\sqrt{2}, 1)$	52
Tabela 3 – Cálculo de S_n	53
Tabela 4 – Cálculo de S_n	55
Tabela 5 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$	58
Tabela 6 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = 5$ e $b = 3$	59
Tabela 7 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = 13$ e $b = 5$	59
Tabela 8 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$	61
Tabela 9 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = 5$ e $b = 3$	61

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	INTEGRAIS ELÍPTICAS	15
2.1	Área Limitada por uma Curva e Comprimento de uma Curva	15
2.2	Elipse	16
2.2.1	Conceitos Preliminares	17
2.2.2	Parametrização da Elipse	20
2.2.3	Área da Região Limitada pela Elipse	22
2.2.4	Retificação da Elipse e a Integral $J(a, b)$	23
2.3	A Curva Lemniscata	24
2.3.1	Conceitos Preliminares	25
2.3.2	Área da Região Limitada pela Lemniscata	27
2.3.3	Retificação da Lemniscata e a Integral $I(a, b)$	28
2.4	Integrais Elípticas	30
2.4.1	Integral Elíptica de Primeira Espécie	31
2.4.2	Integral Elíptica de Segunda Espécie	32
2.4.3	Integral Elíptica de Terceira Espécie	32
2.4.4	Módulo Complementar e Propriedades de $I(a, b)$ e $J(a, b)$	33
3	MÉDIA ARITMÉTICA-GEOMÉTRICA	36
3.1	Média Aritmética-Geométrica	36
3.1.1	Propriedades da Média Aritmética-Geométrica	40
3.2	A Média Aritmética-Geométrica e a Integral $I(a, b)$	43
3.3	A Média Aritmética-Geométrica e a Integral $J(a, b)$	45
4	APLICAÇÕES	51
4.1	Comprimento da Curva Lemniscata	52
4.2	Comprimento da Elipse	53
4.3	Comprimento da Senóide	53
4.4	Comprimento da Elipse para o Ensino Médio	55
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	62
	REFERÊNCIAS	64

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Integrais elípticas surgem naturalmente no cálculo do comprimento da elipse, cônica descoberta na Grécia antiga por Manaecmo (380 AEC – 320 AEC) (NIETTO, 2019) e da curva lemniscata, descoberta por Jacob Bernoulli (1654 – 1705) em 1694 (FILHO, 1990), que era considerada uma elipse modificada.

Inicialmente, o interesse para o cálculo do comprimento da elipse estava relacionado ao comprimento das órbitas planetárias, passando, posteriormente, a ser um problema também voltado a aspectos puramente analíticos de retificação de curvas, se estendendo ao cálculo do comprimento da lemniscata. Curiosamente, enquanto a área da elipse possui uma relação bem definida como $A = \pi ab$, onde a e b são as medidas dos semieixos da elipse, conhecida desde os tempos de Arquimedes (287 AEC – 212 AEC), provável descobridor de tal relação, o problema de se encontrar uma expressão ou método que permitisse o cálculo de seu comprimento perdurou até o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral.

Com as técnicas de integração para o cálculo de comprimentos de curvas, um segundo problema surgiu, pois as integrais originadas no cálculo do comprimento da elipse e da lemniscata não podiam ser expressas em termos de funções mais elementares, impossibilitando o cálculo direto de tais integrais. Face a este problema surgiu o algoritmo da Média Aritmética-Geométrica, uma ferramenta simples e brilhante que permitiu a obtenção de um método para calcular numericamente o valor destas integrais.

A busca pela resolução das integrais elípticas bem como o sucesso em tal cruzada perpassou pelo trabalho de diversos matemáticos, alguns desenvolvidos independentemente e outros como continuação, dentre os quais se destacam Leonhard Paul Euler (1707 –

1783) e Giulio Carlo di Fagnano (1682 – 1766), primeiros a apresentarem estudos sobre o comprimento da elipse, Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), quem primeiramente desenvolveu um método para calcular numericamente as integrais da forma $\int \frac{F(x)}{\sqrt{P(x)}} dx$, com $F(x)$ uma função racional e $P(x)$ um polinômio de grau quatro sem raízes repetidas, que é uma forma genérica das integrais elípticas.

Foi Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855) quem desenvolveu mais objetivamente, paralelamente à Lagrange, a teoria da Média Aritmética-Geométrica, além de obter o teorema da aplicação desta no cálculo das integrais elípticas, Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833), quem apresentou as três formas canônicas das integrais elípticas, além de propriedades básicas e tabelas de resultados numéricos destas integrais e Carl Gustav Jakob Jacobi (1804 – 1851), Niels Henrik Abel (1802 – 1829) e John Landen (1719 – 1790), que desenvolveram a teoria das funções elípticas, que são as funções inversas das integrais elípticas.

Evidentemente, as integrais elípticas e o método para calculá-las não se resumem à aplicação destes à elipse e à lemniscata. Diversos outros problemas relacionados a física e a química, como o cálculo do período de um pêndulo simples (LORD, 1992), o cálculo do potencial do vetor magnético em uma espiral (WEBER, 2003), o estudo da deformação sofrida por uma barra engastada-livre (JÚNIOR; GALVÃO, 2018), o estudo da orientação molecular de um cristal líquido em função de um campo magnético (CABRAL, 1973), o estudo das características cinemáticas de ondas marítimas (FIALHO, 1980), problemas envolvendo cargas equivalentes e o cálculo do dimensionamento de pavimentos flexíveis (CARIM, 1973), o estudo sobre geodésia (JUNIOR, 2001), e o cálculo do comprimento do miolo de uma chapa de papelão ondulado, por exemplo, também recaem em integrais elípticas dos diferentes tipos, algumas completas e outras incompletas, expandindo os horizontes das aplicações da teoria e dos métodos que aqui serão apresentados.

Este trabalho visa apresentar os conceitos relativos às integrais elípticas e o desenvolvimento das ferramentas necessárias para seu cálculo. Nesse sentido, sugerimos ao leitor ter em mente a imagem de um quebra-cabeças onde cada Sessão deste trabalho traz uma nova peça, seja uma definição, conceito ou método de cálculo, até que a imagem completa, o cálculo das integrais elípticas pelo algoritmo da média aritmética-geométrica e suas aplicações, se forme.

Assim, no Capítulo 1 apresentamos uma introdução com citação dos matemáticos e suas contribuições acerca do tema. Em seguida, no Capítulo 2, apresentaremos as definições das curvas base desta teoria, a elipse e a lemniscata, bem como alguns resultados interessantes, como a relação para o cálculo da área de cada uma e as integrais originadas nos cálculos de seus perímetros, além das definições relativas as diferentes integrais elípticas.

O Capítulo 3 será reservado a notas histórias sobre a Média Aritmética-Geométrica, sua definição, algumas propriedades e sua ligação com as integrais elípticas como ferramenta para o cálculo numérico de tais integrais.

Já o Capítulo 4 se destinará a apresentação de alguns exemplos do cálculo das integrais elípticas e da aplicação da teoria apresentada em relação ao cálculo do comprimento da elipse para o Ensino Médio.

Por fim, o Capítulo 5 será reservado às Considerações Finais.

CAPÍTULO 2

INTEGRAIS ELÍPTICAS

A fim de facilitarmos o entendimento deste trabalho, iniciamos recordando as integrais utilizadas para o cálculo do comprimento de uma curva em suas diferentes notações e da área abaixo de uma curva, também em suas diferentes notações. Em seguida, abordaremos a elipse e a curva lemniscata, suas definições, relações de área, cálculos para retificação e as integrais que se originam neste processo, terminando nas definições das integrais elípticas e algumas propriedades delas.

2.1 Área Limitada por uma Curva e Comprimento de uma Curva

Definição 1. (*Área limitada por uma curva descrita em coordenadas cartesianas*) Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b] \subset D$. Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então a área A compreendida entre o gráfico de f , o eixo das abscissas e as retas $x = a$ e $x = b$ é dada por

$$A = \int_a^b f(x) dx, \quad (2.1)$$

e se $f(x) \leq 0$ para $a \leq x \leq b$, então a área A é dada por

$$A = - \int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx. \quad (2.2)$$

Definição 2. (*Área de uma região delimitada por uma curva no plano descrita em coordenadas polares*) Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva definida em coordenadas polares contínua em $[\alpha, \beta] \subset D$. A área A da região delimitada pela curva $r = f(\theta)$ quando θ

percorre o arco de α até β uma única vez é dada por

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (f(\theta))^2 d\theta. \quad (2.3)$$

Definição 3. (Comprimento de uma curva descrita em coordenadas cartesianas) Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com derivada contínua em $[a, b] \subset D$. O comprimento C da curva dada pelo gráfico de $y = f(x)$ para $a \leq x \leq b$ é dado por

$$C = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx. \quad (2.4)$$

Definição 4. (Comprimento de uma curva parametrizada) Seja $L : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva no plano definida parametricamente por $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ com $a \leq t \leq b$ e $x(t)$ e $y(t)$ com derivadas contínuas em $[a, b] \subset D$. O comprimento C da curva L , quando L é percorrida exatamente uma vez quando t aumenta de a até b é dado por

$$C = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt. \quad (2.5)$$

Definição 5. (Comprimento de uma curva descrita em coordenadas polares) Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma curva definida em coordenadas polares com derivada contínua em $[\alpha, \beta] \subset D$. O comprimento C da curva $r = f(\theta)$ quando o ponto $P = (r, \theta)$ percorre a curva exatamente uma vez quando θ varia de α até β é dado por

$$C = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta. \quad (2.6)$$

Os desenvolvimentos pertinentes a estas definições podem ser encontradas em [Stewart \(2013\)](#).

2.2 Elipse

Descobertas por Manacemo a partir do problema de duplicação do cubo, elipses, do ponto de vista geométrico, foram estudadas por diversos matemáticos gregos, com destaque para Euclides de Alexandria (300 AEC), Arquimedes (287 AEC – 212 AEC) e, sobretudo, Apolônio de Perga (262 AEC – 194 AEC) ([EVES, 2011](#); [NIETTO, 2019](#)), que produziu uma extensa obra sobre as cônicas e cujas definições de obtenção de cônicas a

partir de um cone de revolução são utilizadas nos dias modernos. Do ponto de vista da geometria analítica, o qual abordaremos aqui, elipses são lugares geométricos conforme definido abaixo.

De forma geral, o estudo da elipse, bem como das integrais que se originam nos cálculos da área e comprimento da curva, está relacionado à astronomia, mais precisamente à órbitas planetárias, ou a métodos de resolução de integrais com interesse puramente analítico, sendo difícil precisar, devido à pulverização do assunto em diversos trabalhos, o motivo exato pelo qual cada matemático se interessava pela curva.

2.2.1 Conceitos Preliminares

Definição 6. *Elipse.* Dados dois pontos em um plano γ , F_1 e F_2 , tais que $F_1F_2 = 2c$, chama-se elipse ao conjunto de pontos P do plano α para os quais a média aritmética das distâncias de P até F_1 e F_2 é constante, isto é, $\frac{PF_1 + PF_2}{2} = a$, com $a > c$, conforme a Figura 1.

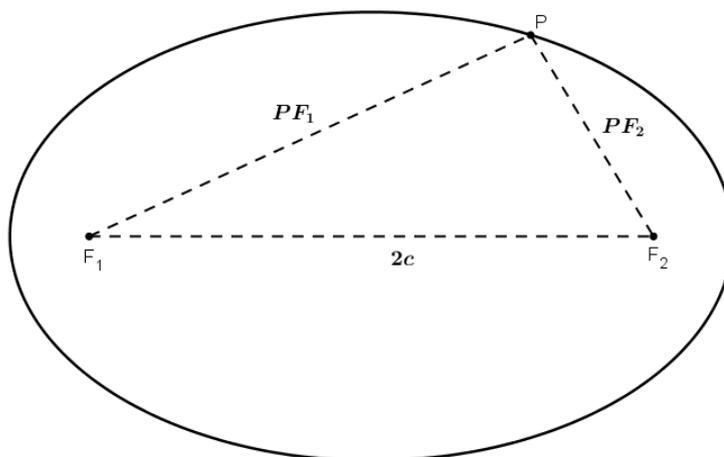


Figura 1 – Elipse.

Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos da elipse*. O ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, denotado por O , é denominado *centro da elipse*. A reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ e a reta perpendicular a esta pelo ponto O determinam sobre a elipse os pontos A_1 e A_2 , pertencentes a $\overleftrightarrow{F_1F_2}$, e B_1 e B_2 , pertencentes à reta perpendicular. O segmento $\overline{A_1A_2}$ é denominado *eixo maior* e o segmento $\overline{B_1B_2}$ é denominado *eixo menor*. Sendo $B_1O = b$, pela simetria da elipse, $B_1O = B_2O$ e pelo triângulo isósceles $\Delta F_1B_1F_2$, $F_1B_1 = F_2B_1 = a$, conforme a Figura 2.

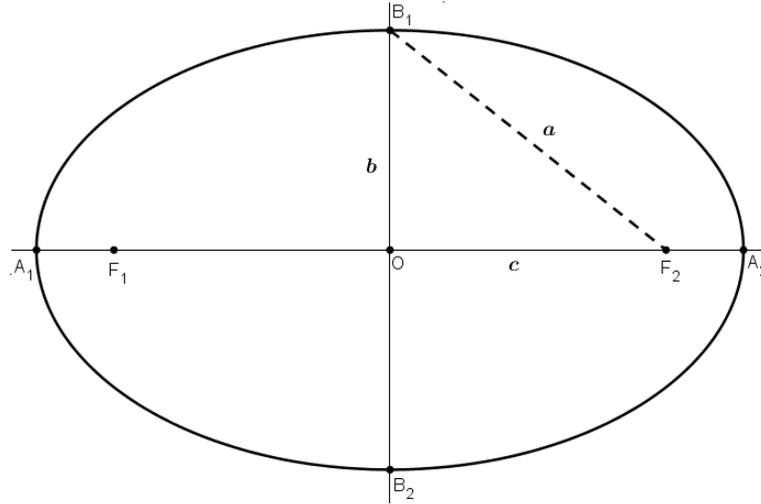


Figura 2 – Elipse e elementos.

Pelo fato de A_1 pertencente à elipse $A_1F_1 + A_1F_2 = 2a$ e como $A_1F_1 = A_1O - F_1O$ e $A_1F_2 = A_1O + F_2O$, então,

$$A_1F_1 + A_1F_2 = 2a \Rightarrow A_1O - F_1O + A_1O + F_2O = 2a \Rightarrow 2A_1O = 2a \Rightarrow A_1O = a$$

e, novamente, pela simetria da elipse, $A_1O = A_2O = a$.

As medidas a e b são os comprimentos dos semieixos maior e menor, respectivamente.

Ainda, conforme a Figura 2, como $\overline{A_1A_2} \perp \overline{B_1B_2}$ então o triângulo ΔF_2OB_1 é retângulo e dele temos

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{2.7}$$

Teorema 1. *Considere um sistema de coordenadas cartesianas sobre o qual traça-se uma elipse \mathcal{E} de eixo maior paralelo ao eixo das abscissas e centro no ponto $O = (x_0, y_0)$ e seja $P = (x, y)$ um ponto pertencente à elipse \mathcal{E} . A equação que descreve a elipse \mathcal{E} , denominada equação reduzida da elipse, é dada por*

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{2.8}$$

Demonstração. Considerando as coordenadas do centro, e pelo fato da elipse \mathcal{E} possuir eixo maior paralelo ao eixo das abscissas, as coordenadas dos focos são dados por $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$. Seja $P = (x, y)$ um ponto pertencente à elipse. Pela Definição 6, temos $\frac{PF_1 + PF_2}{2} = a$, ou seja,

$$\sqrt{(x - x_0 + c)^2 + (y - y_0)^2} + \sqrt{(x - x_0 - c)^2 + (y - y_0)^2} = 2a.$$

Reorganizando a equação acima e denotando $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$, temos

$$\sqrt{(\Delta x + c)^2 + (\Delta y)^2} = 2a - \sqrt{(\Delta x - c)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Agora, elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado e desenvolvendo-a, obtemos,

$$4c\Delta x - 4a^2 = -4a\sqrt{(\Delta x - c)^2 + (\Delta y)^2}.$$

Novamente, elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado e desenvolvendo-a, temos

$$16c^2(\Delta x)^2 + 16a^4 = 16a^2(\Delta x)^2 + 16a^2c^2 + 16a^2(\Delta y)^2$$

e, com isso,

$$(\Delta x)^2(c^2 - a^2) - (\Delta y)^2a^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Como $c^2 - a^2 = -b^2$, conforme a Equação 2.7, substituindo na equação acima e reorganizando-a obtemos

$$b^2(\Delta x)^2 + a^2(\Delta y)^2 = a^2b^2.$$

Por fim, dividindo cada membro da equação acima por a^2b^2 , obtemos

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \quad (2.9)$$

finalizando a demonstração. □

De forma análoga, para a elipse centrada em $O = (x_0, y_0)$ com eixo maior paralelo ao eixo das ordenadas obtêm-se a equação

$$\frac{(y - y_0)^2}{a^2} + \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1. \quad (2.10)$$

Consideraremos, sem perda de generalidade, uma elipse com centro na origem do plano e focos sobre o eixo das abscissas, pois todos os demais casos podem ser reduzidos a este por rotação e/ou translação. Neste caso, a equação desta elipse é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.11)$$

Por fim, observa-se que se $a = b$, a elipse se reduz a uma circunferência de raio $r = a$, cujas análises de comprimento e área da região limitada pela curva possuem as relações $C = 2\pi r$ e $A = \pi r^2$, respectivamente.

Definição 7. Excentricidade. Considere um sistema de coordenadas cartesianas sobre o qual traça-se uma elipse \mathcal{E} de semieixos maior e menor medindo, respectivamente, a e b . A excentricidade e da elipse \mathcal{E} , parâmetro que mede o desvio desta em relação à circunferência de raio $r = a$, é definida como

$$e = \frac{c}{a}. \quad (2.12)$$

Da equação acima e pela Equação 2.7 temos

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \Rightarrow e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} \Rightarrow e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (2.13)$$

com $a \geq b$ e $0 \leq e \leq 1$.

Observamos, ainda, que, para $a = b$, temos $e = 0$, o que implica uma elipse sem achatamento, i.e., reduzida a uma circunferência de raio $r = a$, e para $e = 1$ a elipse se degenerada em um segmento de reta de comprimento $2a$.

2.2.2 Parametrização da Elipse

O teorema a seguir apresenta as coordenadas paramétricas dos pontos da elipse.

Teorema 2. Seja \mathcal{E} uma elipse centrada na origem do plano, com semieixo maior de medida a paralelo ao eixo das abscissas e semieixo menor de medida b e $P = (x, y)$ um ponto pertencente à elipse. As coordenadas paramétricas de P são dadas por $P = (a \cos \alpha, b \sin \alpha)$, com $0 \leq \alpha < 2\pi$.

Demonstração. Considere as circunferências C_1 , de raio a , e C_2 , de raio b , ambas centradas na origem do plano, e, sem perda de generalidade, considere P pertencente ao primeiro quadrante. Por P traça-se o segmento \overline{AM} , no primeiro quadrante, perpendicular ao eixo das abscissas, com A sobre C_1 e M sobre o eixo das abscissas. O segmento \overline{OA} determina o ponto B sobre C_2 e forma o ângulo \widehat{MOA} de medida α , ambos também no primeiro quadrante, conforme a Figura 3.

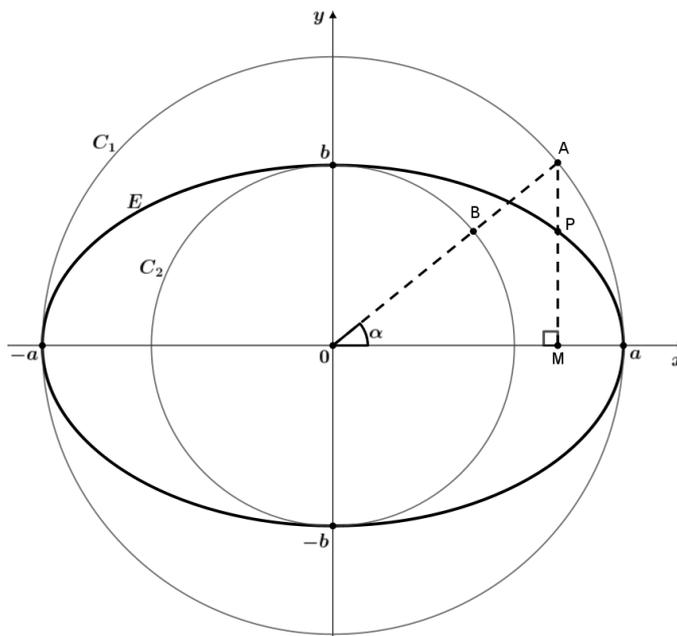


Figura 3 – Elipse e pontos de referências para parametrização.

Por construção, A , P e M , possuem mesmas abscissas e, do triângulo retângulo ΔMOA , temos

$$\cos \alpha = \frac{OM}{AO} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{OM}{a} \Rightarrow OM = a \cos \alpha, \quad (2.14)$$

dessa forma, a abscissa de P é $x = a \cos \alpha$.

Agora, como P pertence à elipse, então, pela Equação 2.11,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \frac{(a \cos \alpha)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2(1 - (\cos \alpha)^2),$$

e como $1 - (\cos \alpha)^2 = (\sin \alpha)^2$, então,

$$y^2 = b^2(\sin \alpha)^2 \Rightarrow y = \pm b \sin \alpha.$$

Entretanto, como P pertence ao primeiro quadrante, temos $y = b \sin \alpha$. Assim, $P = (a \cos \alpha, b \sin \alpha)$. \square

Corolário 1. *Os pontos B e P são colineares.*

Demonstração. Traçando-se o segmento \overline{BQ} paralelo à \overline{AM} , com Q sobre o eixo das abscissas, obtemos o triângulo retângulo ΔOBQ , conforme a Figura 4.

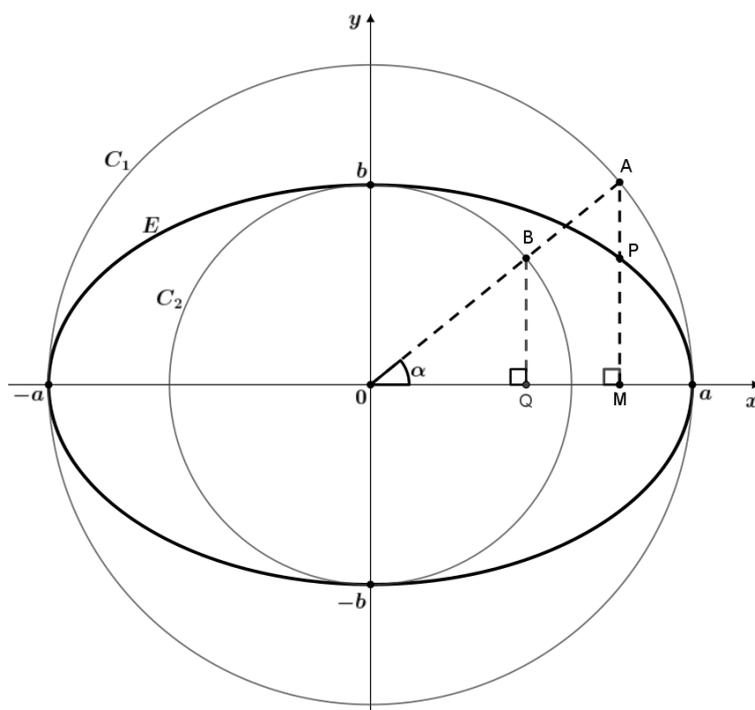


Figura 4 – Elipse e triângulos semelhantes

Do triângulo retângulo $\triangle OBQ$ temos

$$\text{sen } \alpha = \frac{BQ}{OB} \Rightarrow \text{sen } \alpha = \frac{BQ}{b} \Rightarrow BQ = b \text{ sen } \alpha$$

Assim, a ordenada do ponto B é $b \text{ sen } \alpha$, mesma de P . □

Teorema 3. Simetria da elipse. *Seja \mathcal{E} uma elipse definida no plano cartesiano pela equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $P = (x, y)$ um ponto pertencente à elipse. Os pontos $P_1 = (-x, y)$, $P_2 = (x, -y)$ e $P_3 = (-x, -y)$, simétricos de P em relação ao eixo das ordenadas, abscissas e origem do plano, respectivamente, também pertencem à elipse.*

Demonstração. Verifica-se imediatamente, pois $x^2 = (-x)^2$ e $y^2 = (-y)^2$. □

2.2.3 Área da Região Limitada pela Elipse

Teorema 4. *Seja E uma elipse de semieixos maior e menor de medidas a e b , respectivamente. A área da região limitada pela elipse é dada por $A = \pi ab$.*

Demonstração. Devido a simetria da elipse, podemos reduzir a análise do cálculo da área da região limitada pela elipse no 1º quadrante, conforme a Figura 5.

A partir da equação da elipse, dada pela Equação 2.11, isolando a variável y , podemos definir a função $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, com $f(x) = b \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}$, cujo gráfico descreve

o arco elíptico no primeiro quadrante. Assim, a área A limitada pela elipse equivale a 4 vezes a área da região limitada pelo arco.

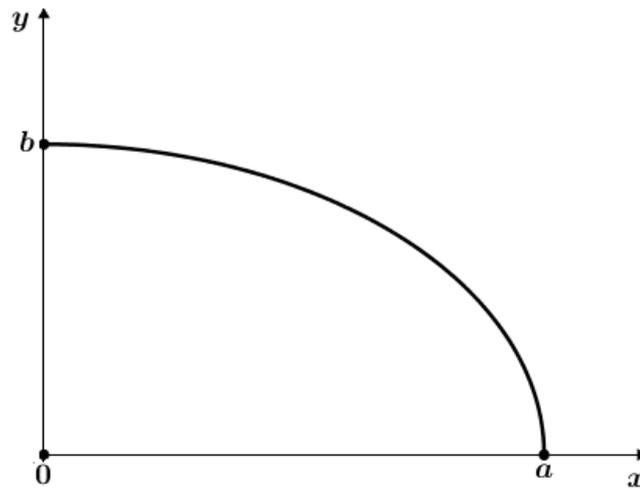


Figura 5 – Arco elíptico no 1º quadrante.

Assim, aplicando integração no arco elíptico, conforme a Definição 1, temos

$$A = 4 \int_0^a f(x) dx = 4 \int_0^a b \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx = 4b \int_0^a \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2} dx.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $\frac{x}{a} = \text{sen } \theta$, com $dx = a \cos \theta d\theta$, temos

$$A = 4b \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\text{sen } \theta)^2} a \cos \theta d\theta = 4ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \theta)^2 d\theta$$

$$= 4ab \left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{4} + \frac{\theta}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi ab. \quad \square$$

2.2.4 Retificação da Elipse e a Integral $J(a, b)$

Analogamente ao cálculo da área, pela simetria axial da elipse, o problema de retificá-la pode ser reduzido à análise da curva descrita no 1º quadrante, conforme a Figura 5. Chamaremos $J(a, b)$ ao comprimento do arco elíptico no 1º quadrante.

Considerando a parametrização definida pelo Teorema 2 para $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ e aplicando a integral dada pela Definição 4, temos

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\alpha}\right)^2} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\left(\frac{d(a \cos \alpha)}{d\alpha}\right)^2 + \left(\frac{d(b \text{sen } \alpha)}{d\alpha}\right)^2} d\alpha \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\text{sen } \alpha)^2 + b^2(\cos \alpha)^2} d\alpha. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Agora, para $\theta = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\sen \alpha)^2 + b^2(\cos \alpha)^2} d\alpha = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sen \theta)^2} d\theta$$

assim,

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sen \theta)^2} d\theta. \quad (2.16)$$

Ainda, partindo da equação acima, como $(\cos \theta)^2 = 1 - (\sen \theta)^2$, então,

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - (\sen \theta)^2) + b^2(\sen \theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)(\sen \theta)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \left(1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) (\sen \theta)^2\right)} d\theta = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) (\sen \theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

e como, pela Equação 2.13, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, temos,

$$J(a, b) = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2(\sen \theta)^2} d\theta. \quad (2.17)$$

Por fim, sendo C o perímetro da elipse, então,

$$C = 4J(a, b). \quad (2.18)$$

No Capítulo 3 abordaremos a teoria necessária para o cálculo da integral $J(a, b)$. Passaremos, agora, à análise da curva lemniscata.

2.3 A Curva Lemniscata

A curva lemniscata, cujo nome se origina da palavra latina *lemniscus*, que significa “fitas com laço”, “fitas de decoração” ou “fitas simétricas” foi descrita por Jacob Bernoulli em 1694 como uma elipse modificada devido ao fato de a elipse ser definida a partir da média aritmética e a lemniscata a partir da média geométrica. Historicamente, foi o matemático e astrônomo Giovanni Domenico Cassini (1625-1712) (FILHO, 1990) quem primeiramente estudou essa curva, em 1680, através das “ovais de Cassini”, porém esse fato era desconhecido de Bernoulli quando a descreveu. Pelo fato de Bernoulli ter dado maior notoriedade à curva, ela é normalmente referenciada como lemniscata de Bernoulli, entretanto, foi Fagnano, cujo interesse estava na geometria das curvas elípticas e sua relação com as integrais elípticas, quem descobriu as principais propriedades dela, publicando-as em seu trabalho *Produzioni Matematiche*.

As descobertas de Bernoulli sobre a lemniscata se deram a partir de seus trabalhos sobre curvas elásticas, onde ele, curiosamente, obteve a integral que calcula um

quarto do comprimento da lemniscata três anos antes de descobrir sua equação, conforme Cox (1984).

2.3.1 Conceitos Preliminares

Definição 8. Lemniscata Dados dois pontos em um plano α , F_1 e F_2 , tais que $F_1F_2 = 2p$, chama-se lemniscata ao conjunto de pontos P do plano α para os quais a média geométrica das distâncias de P até F_1 e F_2 é constante, isto é, $\sqrt{PF_1 \cdot PF_2} = p$, conforme a Figura 6.

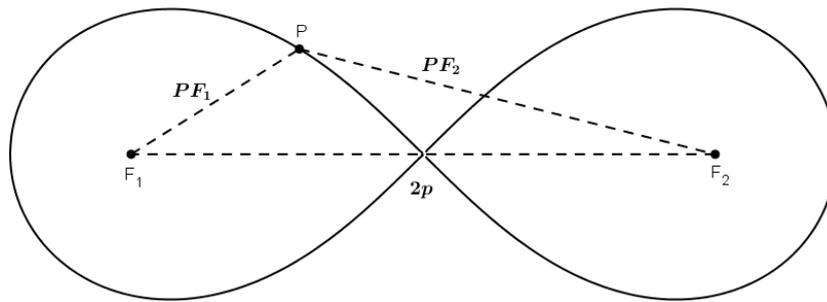


Figura 6 – Lemniscata.

Os pontos F_1 e F_2 são denominados *focos das ovais*. O ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, denotado por O , é o *centro de reflexão* da curva.

A reta $\overleftrightarrow{F_1F_2}$ determina sobre a curva os pontos A_1 e A_2 e o segmento $\overline{A_1A_2}$ será denominado *eixo da lemniscata*. A Figura 7 ilustra esses elementos.

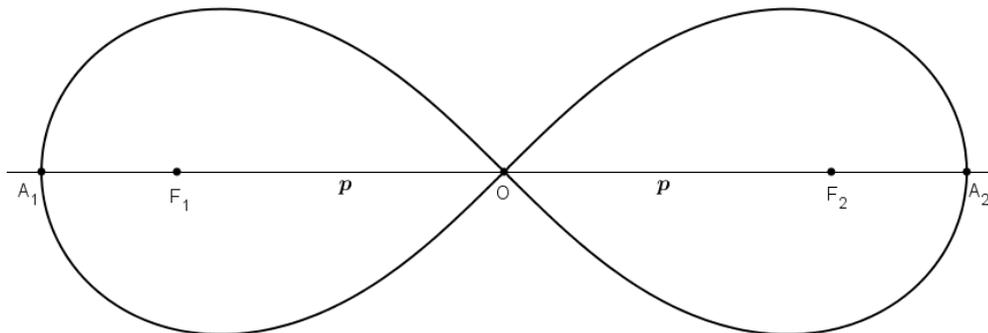


Figura 7 – Lemniscata e elementos.

Ainda, como A_1 pertence à lemniscata, então, pela Definição 8, $\sqrt{A_1F_1 \cdot A_1F_2} = p$, ou seja, $A_1F_1 \cdot A_1F_2 = p^2$ e como $A_1F_1 = A_1O - F_1O$, $A_1F_2 = A_1O + OF_2$, e $F_1O = OF_2$ então,

$$(A_1O - F_1O) \cdot (A_1O + OF_2) = p^2 \Rightarrow A_1O^2 = 2p^2 \Rightarrow A_1O = p\sqrt{2}$$

dessa forma, fazendo $p\sqrt{2} = q$, temos, pela simetria da lemniscata, $A_1O = OA_2 = q$.

Teorema 5. *Seja um sistema de coordenadas cartesianas sobre o qual traça-se uma lemniscata \mathcal{L} de eixo de medida $2q$, paralelo ao eixo das abscissas, e centro no ponto $O = (x_0, y_0)$ e seja $P = (x, y)$ um ponto pertencente à lemniscata \mathcal{L} . A equação que descreve a lemniscata \mathcal{L} é dada por*

$$\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^2 = q^2 \cdot \left((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2\right) \quad (2.19)$$

com $|x - x_0| \geq |y - y_0|$ e $q = p\sqrt{2}$.

Demonstração. Considerando as coordenadas do centro e pelo fato do eixo da lemniscata ser paralelo ao eixo das abscissas, as coordenadas dos focos são dada por $F_1 = (x_0 - p, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + p, y_0)$. Como $P = (x, y)$ pertencente à lemniscata, então, pela Definição 8,

$$\sqrt{PF_1 \cdot PF_2} = p \Rightarrow PF_1 \cdot PF_2 = p^2,$$

ou seja,

$$\sqrt{(x - x_0 + p)^2 + (y - y_0)^2} \cdot \sqrt{(x - x_0 - p)^2 + (y - y_0)^2} = p^2.$$

Agora, elevando ambos os membros da equação acima ao quadrado e denotando $\Delta x = x - x_0$ e $\Delta y = y - y_0$, obtemos

$$\left((\Delta x + p)^2 + (\Delta y)^2\right) \left((\Delta x - p)^2 + (\Delta y)^2\right) = p^4.$$

Desenvolvendo e reorganizando a equação acima, temos

$$\left((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2\right)^2 = 2p^2 \left((\Delta x)^2 - (\Delta y)^2\right)$$

e, dessa forma,

$$\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^2 = q^2 \left((x - x_0)^2 - (y - y_0)^2\right). \quad \square$$

No caso em que a lemniscata de centro $O = (x_0, y_0)$ possui eixo paralelo ao eixo das ordenadas de medida $2q$, a equação que descreve a curva é obtida analogamente e dada por

$$\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)^2 = q^2 \left((y - y_0)^2 - (x - x_0)^2\right). \quad (2.20)$$

com $|y - y_0| \geq |x - x_0|$.

Consideraremos, sem perda de generalidade, uma lemniscata com focos sobre o eixo das abscissas e centro de reflexão na origem do plano cartesiano, pois os demais casos podem ser reduzidos a este por rotação e/ou translação. Neste caso, a equação que descreve a curva lemniscata é dada por

$$(x^2 + y^2)^2 = q^2(x^2 - y^2) \quad (2.21)$$

com $|x| \geq |y|$, e os pontos de interseção com o eixo das abscissas são $A_1 = (-q, 0)$ e $A_2 = (q, 0)$.

Por fim, tomando $x = r \cos \theta$ e $y = r \sin \theta$, com $r \geq 0$ e $|\cos \theta| \geq |\sin \theta|$ para $0 \leq \theta < 2\pi$, a Equação 2.21 é transformada em sua forma polar

$$r^2 = q^2 \cos(2\theta). \quad (2.22)$$

Teorema 6. Simetria da lemniscata. *Seja \mathcal{L} uma lemniscata definida no plano cartesiano pela equação $(x^2 + y^2)^2 = q^2(x^2 - y^2)$, com $|x| \geq |y|$, e $P = (x, y)$ um ponto pertencente à lemniscata. Os pontos $P_1 = (-x, y)$, $P_2 = (x, -y)$ e $P_3 = (-x, -y)$, simétricos de P em relação ao eixo das ordenadas, abscissas e origem do plano cartesiano, respectivamente, também pertencem à lemniscata.*

Demonstração. Verifica-se imediatamente, pois $x^2 = (-x)^2$ e $y^2 = (-y)^2$. □

2.3.2 Área da Região Limitada pela Lemniscata

Teorema 7. *Seja \mathcal{L} uma lemniscata de eixo medindo $2q$. A área da região limitada pela lemniscata é dada por $A = q^2$.*

Demonstração. A simetria da lemniscata permite reduzir o problema à análise no 1º quadrante, conforme a Figura 8. O arco lemniscata, neste quadrante, é definido pelo gráfico da função $r^2 = q^2 \cos(2\theta)$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

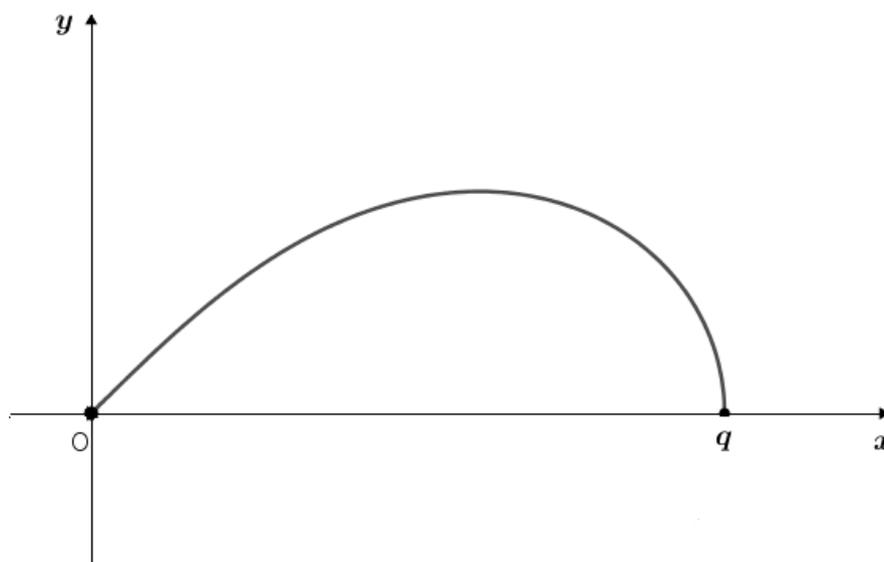


Figura 8 – Arco da lemniscata no 1º quadrante.

Agora, aplicando integração, conforme a Definição 2, temos

$$\begin{aligned} A &= 4 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\theta \right) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} q^2 \cos(2\theta) d\theta = 2q^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(2\theta) d\theta \\ &= 2q^2 \left(\frac{\text{sen}(2\theta)}{2} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2q^2 \cdot \frac{1}{2} = q^2. \quad \square \end{aligned}$$

2.3.3 Retificação da Lemniscata e a Integral $I(a, b)$

Analogamente ao cálculo da área, a simetria da lemniscata permite reduzir o problema à análise do comprimento do arco no primeiro quadrante, conforme a Figura 8.

Chamaremos C_{L1} ao comprimento do arco da lemniscata no primeiro quadrante.

Considerando a equação polar da curva, conforme a Equação 2.22, para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ e aplicando integração, temos

$$\begin{aligned} C_{L1} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{r^2 + \left(\frac{d(\sqrt{q^2 \cos(2\theta)})}{d\theta} \right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{q^2 \cos(2\theta) + \frac{q^2 (\text{sen}(2\theta))^2}{\cos(2\theta)}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{q^2 ((\cos(2\theta))^2 + (\text{sen}(2\theta))^2)}{\cos(2\theta)}} d\theta \\ &= q \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Agora, aplicando a mudança de variável $\cos(2\theta) = \cos^2 \phi$, com $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$ e

$d\theta = \frac{\cos \phi}{\sqrt{1 + (\cos \phi)^2}} d\phi$ na integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta$, temos

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sqrt{\cos(2\theta)}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\cos \phi)^2}} d\phi,$$

e como $(\text{sen} \phi)^2 + (\cos \phi)^2 = 1$, então

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 + (\cos \phi)^2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \phi)^2 + (\text{sen} \phi)^2}} d\phi, \quad (2.24)$$

assim,

$$C_{L1} = q \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \phi)^2 + (\text{sen} \phi)^2}} d\phi. \quad (2.25)$$

Bernoulli conhecia a integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2}} d\phi$ com a notação $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} dz$, obtida a partir da mudança de variável $\cos \phi = z$, conforme Cox (1984).

Gauss (GAUSS, 1917), independentemente, também a conhecia e possuía uma notação particular para ela como

$$\frac{\bar{\omega}}{2} = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-z^4}} dz. \quad (2.26)$$

Observe que a integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2}} d\phi$ é um caso particular da integral de forma $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2(\cos \phi)^2 + \beta^2(\sin \phi)^2}} d\phi$, para $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = 1$, a qual denotaremos por $I(\alpha, \beta)$.

Dessa forma, pela equação Equação 2.25, o perímetro da lemniscata pode ser expresso como

$$C = 4qI(\sqrt{2}, 1). \quad (2.27)$$

Para o caso em que α e β são escolhidos convenientemente e, respectivamente, como as medidas dos semieixos maior e menor de certa elipse, i.e., $\alpha = a$ e $\beta = b$, temos

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi. \quad (2.28)$$

Agora, partindo da integral $I(a, b)$, como $(\cos \phi)^2 = 1 - (\sin \phi)^2$ então

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2(1 - (\sin \phi)^2) + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)(\sin \phi)^2}} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 \left(1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) (\sin \phi)^2\right)}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) (\sin \phi)^2}} d\phi \end{aligned}$$

e como, pela Equação 2.12, $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$, então

$$I(a, b) = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2(\sin \phi)^2}} d\phi. \quad (2.29)$$

Por outro lado, ainda na integral $I(a, b)$ dada pela Equação 2.28, colocando $(\cos \phi)^2$ em evidência, e como $\operatorname{tg} \phi = \frac{\sin \phi}{\cos \phi}$, obtemos

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(\cos \phi)^2(a^2 + b^2(\operatorname{tg} \phi)^2)}} d\phi,$$

porém, como $\cos \phi = \frac{1}{\sec \phi}$ então,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\sec \phi} \sqrt{(a^2 + b^2(\operatorname{tg} \phi)^2)}} d\phi.$$

Agora, fazendo a mudança de variável $x = b \operatorname{tg} \phi$, com $dx = b(\sec \phi)^2 d\phi$, na equação acima e considerando que $(\sec \phi)^2 = 1 + (\operatorname{tg} \phi)^2$ então,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\infty} \frac{\sec \phi}{\sqrt{(a^2 + x^2)}} \cdot \frac{1}{b(\sec \phi)^2} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + x^2)} b \sec \phi} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + x^2)} \cdot b \sqrt{1 + (\operatorname{tg} \phi)^2}} dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + x^2)} \cdot \sqrt{b^2 + b^2(\operatorname{tg} \phi)^2}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + x^2)}} dx, \end{aligned}$$

i.e.,

$$I(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} dx \quad (2.30)$$

que é a forma algébrica da integral $I(a, b)$.

No Capítulo 3, trataremos do método para o cálculo numérico da integral $I(a, b)$.

2.4 Integrais Elípticas

Devido às contribuições de diferentes matemáticos na teoria das integrais elípticas, não é possível precisar quem criou alguns dos teoremas e nomenclaturas, seja pela perda da fonte históricas, seja pela sobreposição dos trabalhos, entretanto, é certo afirmar que Fagnano foi o primeiro matemático a estudar e obter importantes resultados sobre tais integrais em seu trabalho sobre a retificação da curva lemniscata, publicados sob o título *Produzioni Matematiche* (STILLWELL, 2010; SILVA, 2013), sendo o provável criador do termo "*integral elíptica*" para nomear tais integrais.

Genericamente, integrais da forma $\int \frac{F(x)}{\sqrt{P(x)}} dx$ com $F(x)$ uma função algébrica e $P(x)$ um polinômio de terceiro ou quarto grau sem raízes múltiplas são chamadas integrais elípticas e estas, por sua vez, conforme demonstrado por Legendre, não podem ser reduzidas, i.e., calculadas mediante outras funções elementares como algébricas, circulares e suas inversas, exponenciais e logarítmicas. Uma demonstração desse fato pode ser mais facilmente encontrado no trabalho de Piedade (1875).

Legendre também demonstrou que a redução das integrais elípticas originava três outras integrais, as quais definiu e classificou como integrais elípticas de primeira, segunda e terceira espécies. As formas apresentadas por Legendre são conhecidas como formas canônicas das integrais elípticas. Também é de sua autoria a demonstração de que qualquer integral elíptica pode ser expressa como uma soma finita dessas integrais elípticas canônicas, que são calculadas apenas numericamente. As demonstrações podem ser encontrados em Legendre (1825) e Hancock (1910).

2.4.1 Integral Elíptica de Primeira Espécie

Definição 9. A integral elíptica de primeira espécie é definida como

$$\mathcal{F}(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2}} d\theta \quad (2.31)$$

com $0 \leq k \leq 1$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Observa-se que, para $k = 0$ e $k = 1$, a integral se torna bem definida e com resolução possível por técnicas algébricas.

Nas integrais elípticas, ϕ é chamado de *amplitude* e k é chamado de *módulo*. Ainda, para o caso em que $\phi = \frac{\pi}{2}$ na Equação 2.31, a integral é dita completa e denotada como

$$\mathcal{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = F(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2}} d\theta. \quad (2.32)$$

A mudança de variável $t = \sin \theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $dt = \cos \theta d\theta$, transforma a integral dada pela Equação 2.31 em sua forma algébrica

$$\mathcal{F}(x, k) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}} dt \quad (2.33)$$

a qual, para $x = 1$, possui a forma completa

$$\mathcal{F}(1, k) = F(k) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - k^2 t^2)(1 - t^2)}} dt. \quad (2.34)$$

Conforme as Equações 2.29 e 2.32, e tomando $k = e$, onde e é a excentricidade da elipse, definida na Equação 2.13, a integral $I(a, b)$ é dada por

$$I(a, b) = \frac{1}{a} F(e) \quad (2.35)$$

e, por isso, $I(a, b)$ também é uma integral elíptica completa de primeira espécie.

2.4.2 Integral Elíptica de Segunda Espécie

Definição 10. A integral elíptica de segunda espécie é definida como

$$\mathcal{E}(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2} d\theta \quad (2.36)$$

com $0 \leq k \leq 1$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Analogamente a anterior, para $k = 0$ e $k = 1$, a integral se torna bem definida e com resolução possível por técnicas algébricas. Para $\phi = \frac{\pi}{2}$ na Equação 2.36 a integral é dita completa e denotada como

$$\mathcal{E}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2} d\theta. \quad (2.37)$$

Ainda, a mudança de variável $t = \sin \theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $dt = \cos \theta d\theta$, transforma a integral dada pela Equação 2.36 em sua forma algébrica

$$\mathcal{E}(x, k) = \int_0^x \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt, \quad (2.38)$$

cuja forma completa, para $x = 1$ é denotada por

$$\mathcal{E}(1, k) = E(k) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1 - k^2 t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt. \quad (2.39)$$

Conforme as Equações 2.17 e 2.37, e tomando $k = e$, onde e é a excentricidade da elipse, definida na Equação 2.13, a integral $J(a, b)$ é dada por

$$J(a, b) = aE(e) \quad (2.40)$$

e, por isso, $J(a, b)$ também é uma integral elíptica completa de segunda espécie.

2.4.3 Integral Elíptica de Terceira Espécie

Definição 11. A integral elíptica de terceira espécie é definida como

$$\mathcal{P}(\phi, k, n) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 - n^2(\sin \theta)^2)\sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2}} d\theta \quad (2.41)$$

com $0 \leq k \leq 1$ e $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$.

Nestas integrais, n é chamado *parâmetro* da integral. Observamos que, para $n = 0$, a integral se reduz imediatamente a uma integral elíptica de primeira espécie, e para $n^2 = 1$ e $n^2 = k^2$, se reduz à soma de integrais elípticas de primeira e segunda espécies

e quocientes de funções elementares. Além disso, para $k = 0$ e $k = 1$ a integral pode ser resolvida por técnicas algébricas.

Analogamente às anteriores, para $\phi = \frac{\pi}{2}$ na equação 2.41, tem-se a forma completa

$$\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{2}, k, n\right) = P(k, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(1 - n^2(\sin \theta)^2)\sqrt{1 - k^2(\sin \theta)^2}} d\theta \quad (2.42)$$

e, com a mudança de variável $t = \sin \theta$, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ e $dt = \cos \theta d\theta$, a forma algébrica

$$\mathcal{P}(x, k, n) = \int_0^x \frac{1}{(1 - n^2t^2)\sqrt{(1 - k^2t^2)(1 - t^2)}} dt \quad (2.43)$$

cuja forma completa, para $x = 1$ é

$$\mathcal{P}(1, k, n) = P(k, n) = \int_0^1 \frac{1}{(1 - n^2t^2)\sqrt{(1 - k^2t^2)(1 - t^2)}} dt. \quad (2.44)$$

As integrais elípticas de terceira espécie não serão objeto de estudo deste trabalho, entretanto, mais detalhes sobre elas podem ser encontrados em [Byrd e Friedman \(2013\)](#).

2.4.4 Módulo Complementar e Propriedades de $I(a, b)$ e $J(a, b)$

Finalizaremos este capítulo com a definição de módulo complementar e o desenvolvimento de algumas propriedades das integrais $I(a, b)$, que calcula o comprimento da lemniscata e $J(a, b)$, que calcula um quarto do comprimento da elipse, que serão relevantes para o entendimento deste trabalho, através de dois teoremas. Outras propriedades e resultados interessantes sobre as integrais $I(a, b)$ e $J(a, b)$ podem ser encontrados em [Jameson \(s.d.\)](#).

Definição 12. Módulo complementar. O módulo complementar de uma integral elíptica, denominado k' , é definido por

$$k' = \sqrt{1 - k^2}. \quad (2.45)$$

Teorema 8. A integral $I(a, b)$ possui as seguintes propriedades:

1. $I(a, a) = \frac{\pi}{2a}$.
2. $I(a, b) = I(b, a)$.
3. $I(\lambda a, \lambda b) = \frac{1}{\lambda} I(a, b)$, para todo $\lambda > 0$.

4. $I(1, k) = F(k')$ e $I(1, k') = F(k)$, onde $F(k)$ é a integral elíptica completa de primeira espécie.

Demonstração.

1. Calculando a integral $I(a, a)$,

$$\begin{aligned} I(a, a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + a^2(\sin \phi)^2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2)}} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} d\phi = \frac{1}{a} \phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{a} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi}{2a}. \end{aligned}$$

2. Fazendo $\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2(\sin \alpha)^2 + b^2(\cos \alpha)^2}} d\alpha = I(b, a). \end{aligned}$$

3. Calculando a integral $I(\lambda a, \lambda b)$, para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} I(\lambda a, \lambda b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(\lambda a)^2(\cos \phi)^2 + (\lambda b)^2(\sin \phi)^2}} d\phi \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi = \frac{1}{\lambda} I(a, b). \end{aligned}$$

4. Calculando a integral $I(1, k)$,

$$\begin{aligned} I(1, k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{(\cos \phi)^2 + k^2(\sin \phi)^2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (\sin \phi)^2 + k^2(\sin \phi)^2}} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (1 - k^2)(\sin \phi)^2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - (k')^2(\sin \phi)^2}} d\phi = F(k'). \end{aligned}$$

O cálculo para $I(1, k') = F(k)$ é análogo. □

Teorema 9. A integral $J(a, b)$ possui as seguintes propriedades:

1. $J(a, a) = \frac{a\pi}{2}$.
2. $J(a, b) = J(b, a)$.

3. $J(\lambda a, \lambda b) = \lambda J(a, b)$, para todo $\lambda > 0$.
4. $J(1, k) = E(k')$ e $J(1, k') = E(k)$, onde $E(k)$ é a integral elíptica completa de segunda espécie.

Demonstração.

1. Calculando a integral $J(a, a)$,

$$\begin{aligned} J(a, a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + a^2(\sin \phi)^2} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2((\cos \phi)^2 + (\sin \phi)^2)} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a d\phi = a\phi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = a \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{a\pi}{2}. \end{aligned}$$

2. Fazendo $\phi = \frac{\pi}{2} - \alpha$,

$$\begin{aligned} J(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\sin \alpha)^2 + b^2(\cos \alpha)^2} d\alpha = J(b, a). \end{aligned}$$

3. Calculando a integral $J(\lambda a, \lambda b)$, para $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned} J(\lambda a, \lambda b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\lambda a)^2(\cos \phi)^2 + (\lambda b)^2(\sin \phi)^2} d\phi \\ &= \lambda \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2} d\phi = \lambda J(a, b). \end{aligned}$$

4. Calculando a integral $J(1, k)$,

$$\begin{aligned} J(1, k) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos \phi)^2 + k^2(\sin \phi)^2} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (\sin \phi)^2 + k^2(\sin \phi)^2} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (1 - k^2)(\sin \phi)^2} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - (k')^2(\sin \phi)^2} d\phi = E(k'). \end{aligned}$$

O cálculo para $J(1, k') = E(k)$ é análogo. \square

CAPÍTULO 3

MÉDIA ARITMÉTICA-GEOMÉTRICA

A Média Aritmética-Geométrica é um valor associado ao cálculo numérico das integrais elípticas. Neste capítulo abordaremos sua definição, propriedades, relação com as integrais elípticas e algumas notas históricas sobre seu surgimento.

3.1 Média Aritmética-Geométrica

Considere dois números reais positivos a e b , com $a > b$, para os quais se definem, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$a_0 = a \quad , \quad b_0 = b$$

e

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \quad , \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \quad (3.1)$$

i.e., (a_n) uma sequência recursiva de médias aritméticas e (b_n) uma sequência recursiva de médias geométricas.

Pela desigualdade das médias, $a_n > b_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, além disso,

$$a_n > b_n \Rightarrow 2a_n > a_n + b_n \Rightarrow a_n > \frac{a_n + b_n}{2} \Rightarrow a_n > a_{n+1}$$

o que significa que (a_n) é monótona decrescente, e

$$b_n < a_n \Rightarrow b_n^2 < b_n \cdot a_n \Rightarrow b_n < \sqrt{a_n \cdot b_n} \Rightarrow b_n < b_{n+1}$$

que, por sua vez, significa que (b_n) é monótona crescente, dessa forma,

$$b < b_1 < b_2 < b_3 < \dots < b_n < b_{n+1} < \dots < a_{n+1} < a_n < \dots < a_3 < a_2 < a_1 < a \quad (3.2)$$

ou seja, (a_n) e (b_n) são ambas sequências limitadas inferiormente por b e superiormente por a , e, por serem monótonas decrescente e crescente, respectivamente, são convergentes.

Teorema 10. *As sequências (a_n) e (b_n) convergem para o mesmo limite.*

Demonstração. Observe que

$$\begin{aligned} -b_{n+1} < -b_n &\Rightarrow a_{n+1} - b_{n+1} < a_{n+1} - b_n \Rightarrow a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{a_n + b_n}{2} - b_n \\ &\Rightarrow a_{n+1} - b_{n+1} < \frac{a_n - b_n}{2} \Rightarrow a_{n+1} - b_{n+1} < 2^{-1}(a_n - b_n) \end{aligned} \quad (3.3)$$

Aplicando-se iteradamente a desigualdade acima, deduzimos a seguinte desigualdade, para $n \geq 1$, que pode ser provada por indução,

$$a_n - b_n < 2^{-n}(a - b) \quad (3.4)$$

e como $a_n > b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então,

$$0 < a_n - b_n < 2^{-n}(a - b). \quad (3.5)$$

Agora, como $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}(a - b) = 0$ temos,

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n}(a - b) \Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \leq 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n. \quad \square$$

Ao limite comum das duas sequências dá-se o nome de *Média Aritmética-Geométrica*, que denotaremos por $M(a, b)$.

Originalmente, o conceito do cálculo da média aritmética-geométrica apareceu primeiro nos trabalhos de Lagrange que foram publicados apenas entre 1784 e 1785 (LAGRANGE, 1882), que versavam sobre o cálculo de integrais elípticas. Na Figura 9, vemos um fragmento deste cálculo, onde a sequência de termo (p) e (q) são construídos conforme descrito para as sequências (a_n) e (b_n) , respectivamente.

272 SUR UNE NOUVELLE MÉTHODE

On fera

$$\begin{aligned}
 p &= \sqrt[p]{p + \sqrt{p^2 - q^2}}, & q &= \sqrt[p]{p - \sqrt{p^2 - q^2}}, \\
 \sqrt[p]{p} &= \sqrt[p]{p + \sqrt{p^2 - q^2}}, & \sqrt[p]{q} &= \sqrt[p]{p - \sqrt{p^2 - q^2}}, \\
 &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots,
 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
 \sqrt[p]{p} &= \frac{p+q}{2}, & \sqrt[p]{q} &= \sqrt{pq}, \\
 \sqrt[p]{p} &= \frac{\sqrt[p]{p} + \sqrt[p]{q}}{2}, & \sqrt[p]{q} &= \sqrt{\sqrt[p]{p}\sqrt[p]{q}}. \\
 &\dots\dots\dots, & &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

De sorte qu'il est très-facile de continuer les séries $p, \sqrt[p]{p}, \sqrt[p]{p}, \dots, q, \sqrt[p]{q}, \sqrt[p]{q}, \dots$ aussi loin que l'on veut, puisque les termes correspondants sont toujours moyens arithmétiques et géométriques entre les deux précédé-

Figura 9 – Sequências do cálculo da média aritmética-geométrica nos trabalhos de Lagrange. (LAGRANGE, 1882).

Porém, a média aritmética-geométrica é referenciada comumente a Gauss, por ter sido ele a dar este nome ao limite comum das sequências (a_n) e (b_n) e pelas expressivas contribuições no desenvolvimento do algoritmo, das propriedades da média aritmética-geométrica e sobretudo em estabelecer uma relação explícita entre esta e as integrais elípticas, algo que passou despercebido a Lagrange. Na Figura 10 temos um fragmento do único trabalho publicado em vida de Gauss, que abordava a média aritmética-geométrica. Nela, as sequências de termos (m) e (n) são definidas conforme as sequências (a_n) e (b_n) , respectivamente.

Sint m, n duae quantitates positivae, statuamusque

$$m' = \frac{1}{2}(m+n), \quad n' = \sqrt{mn}$$

ita ut m', n' resp. sit medium arithmeticum et geometricum inter m et n . Medium geometricum semper positive accipi supponemus. Perinde fiat

$$\begin{aligned}
 m'' &= \frac{1}{2}(m'+n'), & n'' &= \sqrt{m'n'} \\
 m''' &= \frac{1}{2}(m''+n''), & n''' &= \sqrt{m''n''}
 \end{aligned}$$

et sic porro, quo pacto series m, m', m'', m''' etc., atque n, n', n'', n''' etc. versus *limitem communem* rapidissime convergent, quem per μ designabimus, atque simpliciter *medium arithmetico-geometricum* inter m et n vocabimus. Iam demon-

Figura 10 – Cálculo da média aritmética-geométrica nos trabalhos de Gauss. (GAUSS, 1866).

Segundo Cox (1984) e Almkvist e Berndt (1988), Gauss confidenciou a seu amigo H.C. Schumacher (1780–1850), astrônomo, que ele havia descoberto o algoritmo

da média aritmética-geométrica aos 14 anos, desconhecendo, portanto, os trabalhos de Lagrange. A extensão dos trabalhos de Gauss sobre a média aritmética-geométrica e integrais elípticas só ficou conhecida postumamente, com a publicação de seus diários a partir de 1866.

Gauss verificou numericamente a convergência das sequências, apresentando quatro exemplos, para $a = 1$ e $b = 0, 2$, $b = 0, 6$, $b = 0, 8$ e o mais relevante deles, para $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$, apresentado na Figura 11.

Exemplum 4. $a = \sqrt{2}$, $b = 1$.

${}^{''''}a = 19,17024\ 37557\ 69475\ 31905\ 0$	${}^{''''}b = 0,00000\ 00009\ 32560\ 02627\ 6$
${}^{'''}a = 9,58512\ 18783\ 51017\ 67266\ 3$	${}^{'''}b = 0,00013\ 37064\ 06056\ 69181\ 0$
${}^{''}a = 4,79262\ 77923\ 78537\ 18223\ 7$	${}^{''}b = 0,03579\ 93323\ 67652\ 95745\ 7$
${}^{\prime}a = 2,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$	${}^{\prime}b = 0,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$
$a = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 2$	$b = 1,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 0$
$a' = 1,20710\ 67811\ 86547\ 52440\ 1$	$b' = 1,18920\ 71150\ 02721\ 06671\ 7$
$a'' = 1,19815\ 69480\ 94634\ 29555\ 9$	$b'' = 1,19812\ 35214\ 93120\ 12260\ 7$
$a''' = 1,19814\ 02347\ 93877\ 20908\ 3$	$b''' = 1,19814\ 02346\ 77307\ 20579\ 8$
$a^{''''} = 1,19814\ 02347\ 35592\ 20744\ 1$	$b^{''''} = 1,19814\ 02347\ 35592\ 20743\ 9$

Figura 11 – Exemplo numérico da média aritmética-geométrica apresentado por Gauss (GAUSS, 1866)

Como se observa na Figura 11, em seus exemplos, Gauss apresentava tanto os termos sucessores como os antecessores das sequências (a_n) e (b_n) a partir de a e b . Mesmo não sendo possível afirmar com absoluta certeza, acredita-se que a escolha de Gauss pelos valores $\sqrt{2}$ e 1 não foi aleatória.

Conforme Cox (1984), Gauss deveria ter conhecimento dos trabalho de Bernoulli e de James Stirling (1692-1770) que relacionavam a curva elástica, cuja equação no primeiro quadrante é dada por $y = \int_0^x \frac{z^2}{\sqrt{a^4 - z^4}} dz$ com $0 \leq x \leq a$, à lemniscata e a elipse de semieixos de razão $\sqrt{2} : 1$. A relevância destes fatos está em, a partir dos resultados obtidos para a média aritmética-geométrica entre $\sqrt{2}$ e 1, Gauss (GAUSS, 1917) ter percebido a seguinte relação, que associa esta e o comprimento da lemniscata,

$$M(\sqrt{2}, 1) = \frac{\pi}{\bar{\omega}} \tag{3.6}$$

onde $\bar{\omega}$ é conforme a Equação 2.26.

Cox (1984) reporta que, em 30 de maio de 1799, Gauss escreveu em seu diário: “Nós estabelecemos que a média aritmética-geométrica entre $\sqrt{2}$ e 1 é igual a $\frac{\pi}{\bar{\omega}}$ até a 11ª casa decimal. A demonstração desse fato certamente abrirá um campo completamente novo na análise.”. Historicamente, o único fato sugestivo para Gauss ter percebido esse resultado foi sua familiaridade com o valor de $\frac{\pi}{\bar{\omega}}$ e sua exímia intuição em calcular o valor da média

aritmética-geométrica entre $\sqrt{2}$ e 1. Também acredita-se que foi a partir desse resultado que Gauss formulou seu teorema sobre as integrais elípticas presente em seus trabalhos (GAUSS, 1866) o qual apresentaremos mais tarde.

Por fim, vale ressaltar que, em homenagem as descobertas de Gauss acerca da média aritmética-geométrica, o número $\frac{1}{M(\sqrt{2}, 1)}$, inverso da média aritmética-geométrica entre $\sqrt{2}$ e 1, é conhecido como *Constante de Gauss*, denotado pela letra G .

Passaremos, agora, a algumas propriedades relevantes da média aritmética-geométrica.

3.1.1 Propriedades da Média Aritmética-Geométrica

Teorema 11. Invariância. Para todo $a > 0$ e $b > 0$ tem-se

$$M(a, b) = M\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right), \quad (3.7)$$

i.e.,

$$M(a, b) = M(a_n, b_n), \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.8)$$

com a_n e b_n conforme a Definição 3.1.

Demonstração. Verifica-se imediatamente pela natureza recursiva das sequências (a_n) e (b_n) . \square

Teorema 12. Homogeneidade. Para todo $\lambda > 0$ tem-se

$$M(\lambda a, \lambda b) = \lambda M(a, b). \quad (3.9)$$

Demonstração. Definindo $a_0 = \lambda a$ e $b_0 = \lambda b$, e as notações $A_1 = \frac{a+b}{2}$, $A_n = \frac{A_{n-1} + B_{n-1}}{2}$, $B_1 = \sqrt{a \cdot b}$ e $B_n = \sqrt{A_{n-1} \cdot B_{n-1}}$, vamos mostrar, inicialmente, que ao se multiplicar os valores iniciais a e b por λ , cada termo das sequências (A_n) e (B_n) é multiplicado por λ .

Por indução, para $n = 1$,

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2} = \frac{\lambda a + \lambda b}{2} = \lambda \left(\frac{a+b}{2} \right) = \lambda A_1$$

e

$$b_1 = \sqrt{a_0 \cdot b_0} = \sqrt{\lambda a \cdot \lambda b} = \lambda \sqrt{a \cdot b} = \lambda B_1.$$

Supondo, para $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \lambda A_k$ e $b_k = \lambda B_k$ então,

$$a_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{\lambda A_k + \lambda B_k}{2} = \lambda \left(\frac{A_k + B_k}{2} \right) = \lambda A_{k+1}$$

e

$$b_{k+1} = \sqrt{A_k \cdot B_k} = \sqrt{\lambda A_k \cdot \lambda B_k} = \lambda \sqrt{A_k \cdot B_k} = \lambda B_{k+1}.$$

Agora, calculando o limite das sequências (λA_n) e (λB_n) para $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda A_k = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} A_k = \lambda M(a, b)$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda B_k = \lambda \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} B_k = \lambda M(a, b) \quad \square$$

Corolário 2. *Pela homogeneidade da média aritmética-geométrica*

$$M(a, b) = aM\left(1, \frac{b}{a}\right) = bM\left(\frac{a}{b}, 1\right) = abM\left(\frac{1}{b}, \frac{1}{a}\right). \quad (3.10)$$

Teorema 13. *Para todo k , com $0 \leq k \leq 1$, tem-se*

$$M(1+k, 1-k) = (1+k) \cdot M(1+k^*, 1-k^*) \quad (3.11)$$

com

$$k^* = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}. \quad (3.12)$$

Demonstração. Definindo $a' = (1 + \sqrt{k})^2$ e $b' = (1 - \sqrt{k})^2$ então

$$\frac{a' + b'}{2} = 1 + k$$

e

$$\sqrt{a' \cdot b'} = 1 - k.$$

Pela propriedade da invariância, conforme o Teorema 11 e Equação 3.7,

$$M(a', b') = M(1+k, 1-k). \quad (3.13)$$

Por outro lado, pela propriedade da homogeneidade, conforme o Teorema 12,

$$\begin{aligned} M(a', b') &= M(1 + 2\sqrt{k} + k, 1 - 2\sqrt{k} + k) \\ &= M\left((1+k) \left(1 + \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right), (1+k) \left(1 - \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)\right) \\ &= (1+k) \cdot M\left(1 + \frac{2\sqrt{k}}{1+k}, 1 - \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) \end{aligned}$$

e, fazendo $k^* = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}$, obtemos

$$M(a', b') = (1+k) \cdot M(1+k^*, 1-k^*).$$

Dessa forma, pela Equação 3.13,

$$M(1+k, 1-k) = (1+k) \cdot M(1+k^*, 1-k^*), \quad (3.14)$$

finalizando a demonstração. \square

Definição 13. Sequência (c_n) . Sejam as sequências (a_n) e (b_n) conforme a Definição 3.1. A sequência (c_n) é definida, para todo $n \in \mathbb{N}$, como

$$c_n^2 = a_n^2 - b_n^2 \quad (3.15)$$

com $c_0 = c$.

Teorema 14. Convergência da sequência (c_n) . A sequência (c_n) converge para zero.

Demonstração. Considere a sequência (c_n) . Como

$$c_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 < a_n^2 - b_n^2 = c_n^2 \Rightarrow c_{n+1} < c_n, \quad (3.16)$$

então, (c_n) é uma sequência monótona decrescente e limitada superiormente por $c_0 = c$ e inferiormente por 0 e, portanto, convergente. Agora, calculando o limite de (c_n) quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n^2 - b_n^2} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 - b_n^2)} \\ &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2) - \lim_{n \rightarrow \infty} (b_n^2)} = \sqrt{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n\right)^2 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n\right)^2} \end{aligned}$$

e como $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M(a, b)$, então,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \quad (3.17)$$

finalizando a demonstração. \square

Agora, observe que, partindo da equação 3.15 temos,

$$c_{n+1}^2 = a_{n+1}^2 - b_{n+1}^2 = \frac{(a_n - b_n)^2}{4},$$

i.e.,

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}. \quad (3.18)$$

Ainda, considerando a Equação 3.15,

$$c_n^2 = (a_n + b_n)(a_n - b_n) \Rightarrow \frac{c_n^2}{2 \left(\frac{a_n + b_n}{2} \right)} = (a_n - b_n)$$

$$\Rightarrow \frac{c_n^2}{2a_{n+1}} = (a_n - b_n) \tag{3.19}$$

e, pelas Equações 3.18 e 3.19, temos

$$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2} = \frac{\frac{c_n^2}{2a_{n+1}}}{2} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}}. \tag{3.20}$$

Como $a_{n+1} > b$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então, $\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{b}$ e, assim,

$$c_{n+1} = \frac{c_n^2}{4a_{n+1}} < \frac{c_n^2}{4b} \tag{3.21}$$

o que significa que, à medida que $n \rightarrow \infty$ a sequência $(c_n) \rightarrow 0$ rapidamente, pois cada termo subsequente é minimamente menor que o quadrado do anterior. Dessa forma, a sequência (c_n) tem um rápido aumento de casas decimais nulas a partir de poucas iterações.

A Tabela 1 exemplifica este fato com o cálculo dos termos das sequências (a_n) , (b_n) e (c_n) para $n = 0, 1, 2, 3, 4$, $a_0 = \sqrt{2}$ e $b_0 = 1$, com 12 casa decimais. Os dígitos em vermelho nas sequências (a_n) e (b_n) são os precisos a cada iteração e os dígitos em azul na sequência (c_n) , a quantidade de casas decimais nulas.

n	a_n	b_n	c_n
0	1,414213562373	1,000000000000	1,000000000000
1	1,207106781186	1,189207115002	0,207106781186
2	1,198156948094	1,198123521493	0,008949833091
3	1,198140234793	1,198140234677	0,000016713291
4	1,198140234735	1,198140234735	0,000000000000

Tabela 1 – Convergência das sequências (a_n) , (b_n) e (c_n) .

Na próxima seção, abordaremos a relação entre a média aritmética-geométrica e as integrais elípticas.

3.2 A Média Aritmética-Geométrica e a Integral $I(a, b)$

Conforme já mencionado, uma das grandiosidades do trabalho de Gauss acerca da média aritmética-geométrica e das integrais elípticas foi a descoberta do teorema apresentado a seguir. A demonstração dada por Gauss se vale de mudanças de variáveis e séries

de potências, o que foge, pela complexidade, aos objetivos didáticos deste trabalho, assim, não a abordaremos diretamente. A demonstração que apresentamos foi dada por D. J. Newman (NEWMAN, 1985) que consiste em mostrar que a integral $I(a, b)$, dada pela Equação 2.30, é invariante para quaisquer pares (a_n, b_n) , com a_n e b_n conforme definidos em 3.1, i.e., $I(a, b) = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{a \cdot b}\right)$ e, depois, calcular a integral no limite das sequências (a_n) e (b_n) .

Teorema 15. *Sejam $a \geq b > 0$ e $M(a, b)$ a média aritmética-geométrica entre a e b , então,*

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} dx = \frac{\pi}{2M(a, b)}, \quad (3.22)$$

i.e.,

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}. \quad (3.23)$$

Demonstração. Iniciaremos demonstrando a invariância de $I(a, b)$. Para tanto, considere a mudança de variável $t = \frac{x^2 - ab}{2x}$, com $dt = \frac{x^2 - ab}{2x^2} dx$, e as igualdades

$$t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}{4x^2} \quad (3.24)$$

e

$$t^2 + (\sqrt{ab})^2 = \frac{(x^2 + ab)^2}{4x^2}. \quad (3.25)$$

Assim,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^2 \left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)}} \cdot \frac{2x^2}{(x^2 + ab)} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2}{\sqrt{4x^2 \left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right)} \cdot \sqrt{4x^2(t^2 + (\sqrt{ab})^2)}} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) (t^2 + (\sqrt{ab})^2)}} dt \end{aligned}$$

e, como o integrando é par, então,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) (t^2 + (\sqrt{ab})^2)}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) (t^2 + (\sqrt{ab})^2)}} dt. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right) (t^2 + (\sqrt{ab})^2)}} dt = I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) \end{aligned} \quad (3.26)$$

finalizando, assim, a prova sobre a invariância. Agora, calculando $I(a, b)$ no limites das sequências (a_n) e (b_n) , como $I(a, b) = I(a_n, b_n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $(a_n) \rightarrow M(a, b)$ e $(b_n) \rightarrow M(a, b)$ quando $n \rightarrow \infty$ então, pelo Teorema 8,

$$I(a, b) = I(M(a, b), M(a, b)) = \frac{\pi}{2M(a, b)}. \quad \square$$

3.3 A Média Aritmética-Geométrica e a Integral $J(a, b)$

Para obtermos uma relação que nos permita calcular o valor numérico da integral $J(a, b)$ precisamos, inicialmente, definir duas integrais que auxiliarão no processo.

Ao longo desta seção, conforme definido em 3.1 e 3.15, $a = a_0$, $b = b_0$ e $c = c_0$.

Considerando a integral $I(a, b)$, temos,

$$\begin{aligned} I(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \phi)^2 + (\cos \phi)^2}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin \phi)^2}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \phi)^2}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi. \end{aligned}$$

Denotaremos

$$L(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \phi)^2}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\sin \phi)^2}} d\phi \quad (3.27)$$

e

$$L(b, a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} \phi)^2}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\operatorname{sen} \phi)^2}} d\phi \quad (3.28)$$

pois, aplicando a mudança de variável $\theta = \frac{\pi}{2} - \phi$ na integral da Equação 3.28, obtemos

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} \phi)^2}{\sqrt{a^2(\cos \phi)^2 + b^2(\operatorname{sen} \phi)^2}} d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos \theta)^2}{\sqrt{b^2(\cos \theta)^2 + a^2(\operatorname{sen} \theta)^2}} d\theta. \quad (3.29)$$

Assim, a integral $I(a, b)$ pode ser expressa como

$$I(a, b) = L(a, b) + L(b, a). \quad (3.30)$$

Agora, partindo da integral $L(a, b)$, colocando $(\cos \phi)^2$ em evidência no denominador, obtemos

$$L(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \phi}{\sqrt{(a^2 + b^2(\operatorname{tg} \phi)^2)}} d\phi$$

e, com a mudança de variável $t = b \operatorname{tg} \phi$, com $dt = b(\sec \phi)^2 d\phi$,

$$L(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{\cos \phi}{\sqrt{a^2 + t^2}} \cdot \frac{1}{b(\sec \phi)^2} dt.$$

Como $\cos \phi = \frac{1}{\sec \phi}$ e $(\sec \phi)^2 = 1 + (\operatorname{tg} \phi)^2$, então,

$$\begin{aligned} L(a, b) &= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sec \phi} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} \cdot \frac{1}{b(1 + (\operatorname{tg} \phi)^2)} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{b}{b\sqrt{1 + (\operatorname{tg} \phi)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} \cdot \frac{b}{b^2(1 + (\operatorname{tg} \phi)^2)} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{b}{\sqrt{b^2 + b^2(\operatorname{tg} \phi)^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} \cdot \frac{b}{b^2 + t^2} dt \\ &= \int_0^{\infty} \frac{b^2}{\sqrt{b^2 + t^2} \cdot \sqrt{a^2 + t^2} \cdot (b^2 + t^2)} dt, \end{aligned}$$

i.e.,

$$L(a, b) = \int_0^{\infty} \frac{b^2}{(t^2 + b^2)\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} dt, \quad (3.31)$$

que é a forma algébrica da integral $L(a, b)$. Analogamente, com a mudança de variável $t = a \operatorname{cotg} \phi$, com $dt = -a(\operatorname{cosec} \phi)^2 d\phi$, aplicada na integral $L(b, a)$ obtêm-se sua forma algébrica

$$L(b, a) = \int_0^{\infty} \frac{a^2}{(t^2 + a^2)\sqrt{(t^2 + a^2)(t^2 + b^2)}} dt. \quad (3.32)$$

Agora, retomando a integral $J(a, b)$, conforme a Equação 2.16, temos

$$\begin{aligned}
 J(a, b) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2}{\sqrt{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2}} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2(\cos \theta)^2}{\sqrt{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2}} d\theta + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{b^2(\sin \theta)^2}{\sqrt{a^2(\cos \theta)^2 + b^2(\sin \theta)^2}} d\theta \\
 &= a^2 L(a, b) + b^2 L(b, a) = a^2(I(a, b) - L(a, b)) + b^2 L(a, b), \\
 &= a^2 I(a, b) - (a^2 - b^2)L(a, b) = a^2 I(a, b) - c^2 L(b, a)
 \end{aligned}$$

i.e.,

$$J(a, b) = a^2 I(a, b) - c^2 L(b, a). \quad (3.33)$$

Como $I(a, b)$ é invariante para todos os pares (a_n, b_n) , resta-nos verificar o comportamento da integral $L(b, a)$ ao longo dos pares (a_n, b_n) . Para isso, vamos aplicar a mesma mudança de variável $t = \frac{x^2 - ab}{2x}$ com $dt = \frac{x^2 - ab}{2x^2} dx$, $t^2 + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}{4x^2}$ e $t^2 + (\sqrt{ab})^2 = \frac{(x^2 + ab)^2}{4x^2}$ na integral $L(b_1, a_1)$, dada pela Equação 3.31, cujo integrando é par, com a_n e b_n conforme definidos em 3.1. Assim,

$$\begin{aligned}
 L(b_1, a_1) &= \int_0^\infty \frac{a_1^2}{(t^2 + a_1^2)\sqrt{(t^2 + a_1^2)(t^2 + b_1^2)}} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{a_1^2}{(t^2 + a_1^2)\sqrt{(t^2 + a_1^2)(t^2 + b_1^2)}} dt \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2}{\frac{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}{4x^2} \sqrt{\left(\frac{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}{4x^2}\right) \left(\frac{(x^2 + ab)^2}{4x^2}\right)}} \left(\frac{x^2 - ab}{2x}\right) dx \\
 &= (a+b)^2 \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} dx. \quad (3.34)
 \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned}
 &\frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} \\
 &= \frac{\frac{a^2}{a^2 - b^2}}{(x^2 + a^2)\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}} - \frac{\frac{b^2}{a^2 - b^2}}{(x^2 + b^2)\sqrt{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}}
 \end{aligned}$$

então, retomando a integral 3.34, temos que

$$\begin{aligned}
 L(b_1, a_1) &= (a+b)^2 \int_0^\infty \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} dx \\
 &= (a+b)^2 \left(\int_0^\infty \frac{\frac{a^2}{a^2-b^2}}{(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} dx - \int_0^\infty \frac{\frac{b^2}{a^2-b^2}}{(x^2+b^2)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} dx \right) \\
 &= \frac{(a+b)^2}{a^2-b^2} \left(\int_0^\infty \frac{a^2}{(x^2+a^2)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} dx - \int_0^\infty \frac{b^2}{(x^2+b^2)\sqrt{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}} dx \right) \\
 &= \frac{a+b}{a-b} (L(b, a) - L(a, b)) .
 \end{aligned}$$

Dessa forma, como $L(a, b) = I(a, b) - L(b, a)$, então

$$L(b_1, a_1) = \frac{a+b}{a-b} (2L(b, a) - I(a, b)) . \quad (3.35)$$

Agora, pelas Equações 3.15 e 3.18, $a_1^2 - b_1^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$, então, multiplicando ambos os membros da Equação 3.35 por $a_1^2 - b_1^2$ obtemos

$$4(a_1^2 - b_1^2)L(b_1, a_1) = (a^2 - b^2) (2L(b, a) - I(a, b))$$

e como $a^2 - b^2 = c^2 = c_0^2$ e $a_1^2 - b_1^2 = c_1^2$, reorganizando a equação, temos,

$$c_0^2 I(a, b) = 2c_0^2 L(b, a) - 4c_1^2 L(b_1, a_1) . \quad (3.36)$$

A partir do raciocínio anterior, utilizado para deduzir a Equação 3.36, é possível obter, para cada par (a_n, b_n) uma relação da forma $c_n^2 I(a, b) = 2c_n^2 L(b_n, a_n) - 4c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1})$, com $n \in \mathbb{N}$ e, multiplicando cada equação correspondente a cada par (a_n, b_n) por 2^n e representado-as uma a uma, temos

$$\begin{aligned}
 c_0^2 I(a, b) &= 2c_0^2 L(b_0, a_0) - 4c_1^2 L(b_1, a_1) \\
 2c_1^2 I(a, b) &= 4c_1^2 L(b_1, a_1) - 8c_2^2 L(b_2, a_2) \\
 4c_2^2 I(a, b) &= 8c_2^2 L(b_2, a_2) - 16c_3^2 L(b_3, a_3) \\
 &\vdots \\
 2^n c_n^2 I(a, b) &= 2^{n+1} c_n^2 L(b_n, a_n) - 2^{n+2} c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1}) .
 \end{aligned}$$

Por outro lado, somando membro a membro todas as equações, como o segundo membro torna-se uma soma telescópica, obtemos

$$\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2 I(a, b) = 2c_0^2 L(b_0, a_0) - 2^{n+2} c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1}) . \quad (3.37)$$

Dessa forma, como $\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2 I(a, b) = I(a, b) \left(\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2 \right)$, então, a partir da Equação 3.37, dividindo ambos os membros por 2, temos

$$\frac{1}{2} I(a, b) \left(\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2 \right) = c_0^2 L(b_0, a_0) - 2^{n+1} c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1}). \quad (3.38)$$

Por fim, denotando

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2 \right), \quad (3.39)$$

obtemos

$$S_n I(a, b) = c^2 L(b, a) - 2^{n+1} c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1}). \quad (3.40)$$

Antes de prosseguirmos faremos a demonstração de que S_n é uma série convergente, mediante o teorema a seguir.

Teorema 16. *A série $\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2$ é convergente.*

Demonstração. Pela Equação 3.18, $c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}$, e como $(a_n - b_n)^2 < a_n^2 - b_n^2$, então,

$$c_{n+1}^2 = \frac{(a_n - b_n)^2}{4} < \frac{(a_n^2 - b_n^2)}{4} = \frac{c_n^2}{4} \quad (3.41)$$

e, dessa forma,

$$\frac{c_{n+1}^2}{c_n^2} < \frac{1}{4}. \quad (3.42)$$

Agora, calculando o limite para $n \rightarrow \infty$ em ambos os lados temos $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}^2}{c_n^2} \leq \frac{1}{4}$ e, finalmente, pelo critério de D'Alembert (teste da razão),

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} c_{n+1}^2}{2^n c_n^2} \right| = 2 \cdot \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_{n+1}^2}{c_n^2} \right| \leq 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2^{n+1} c_{n+1}^2}{2^n c_n^2} \right| < 1$, a série é convergente. \square

Agora, retomando, pela Equação 3.42, $c_{n+1}^2 < 4^{-1} c_n^2$, e assim, aplicando iterativamente,

$$c_{n+1}^2 < 4^{-(n+1)} c^2. \quad (3.43)$$

Além disso, como

$$I(a, b) = L(a, b) + L(b, a) \Rightarrow L(b_{n+1}, a_{n+1}) \leq I(a_{n+1}, b_{n+1}) = I(a, b), \quad (3.44)$$

então, pelas Desigualdades 3.43 e 3.44,

$$c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1}) < 4^{-(n+1)} c^2 I(a, b)$$

a qual, multiplicada do 2^{n+1} , resulta em

$$2^{n+1} c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1}) < 2^{-(n+1)} c^2 I(a, b). \quad (3.45)$$

Quanto $n \rightarrow \infty$ temos $2^{-(n+1)} c^2 I(a, b) \rightarrow 0$, e como o primeiro membro da desigualdade é maior do que zero, então $2^{n+1} c_{n+1}^2 L(b_{n+1}, a_{n+1}) \rightarrow 0$. Aplicando este resultado na Equação 3.40, para $n \rightarrow \infty$, obtemos,

$$S_\infty I(a, b) = c^2 L(b, a) \quad (3.46)$$

onde $S_\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, com S_n conforme a Equação 3.39.

Por fim, pelas Equações 3.33 e 3.46

$$J(a, b) = (a^2 - S_\infty) I(a, b). \quad (3.47)$$

A Equação 3.47 é a expressão que permite calcular numericamente a integral $J(a, b)$ em função da média aritmética-geométrica entre a e b , uma vez que $I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}$.

Por c_n convergir rapidamente para zero, S_n adquire uma quantidade significativa de dígitos precisos com poucas iterações.

CAPÍTULO 4

APLICAÇÕES

Neste último capítulo, retomaremos os problemas disparadores de retificação da elipse e da lemniscata, aplicando a teoria desenvolvida para o cálculo das integrais elípticas em exemplos numéricos. Além disso, trazemos uma aplicação derivada da teoria desenvolvida possível de ser realizada no Ensino Médio.

Convém lembrar que, tal como explanado neste trabalho, o processo histórico do desenvolvimento da teoria que agora apresentamos aplicações não foi linear, mas ocorreu mediante a junção de diversos trabalhos em diferentes tempos, com destaque para o estudo da elipse, realizado por diversos matemáticos, a descoberta e estudos sobre a lemniscata por Bernoullia, das técnicas de calculo diferencial integral, da redução das integrais elípticas por Legendre, da descoberta e do desenvolvimento da teoria da média aritmética-geométrica e sua relação com as integrais elípticas por Gauss, o que, conforme mencionado alegoricamente na introdução, são as peças do quebra-cabeça que agora se juntam para formar a imagem completa, i.e., calcular o comprimento da elipse e, em sequência, o comprimento da lemniscata e de curvas que sejam retificadas mediante integrais elípticas.

Para facilitar a compreensão, retomamos também as equações necessárias para as aplicações, já apresentadas ao longo do texto.

- (a_n) : sequência de médias aritméticas cujos termos são definidos como $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.
- (b_n) : sequência de médias geométricas cujos termos são definidos como $b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

- $M(a, b)$: média aritmética-geométrica entre a e b . Limite comum das sequências convergentes (a_n) e (b_n) .

- $I(a, b)$: integral elíptica completa de primeira espécie que calcula o comprimento da lemniscata,

$$I(a, b) = \frac{\pi}{2M(a, b)}.$$

- $J(a, b)$: integral elíptica completa de segunda espécie que calcula um quarto do comprimento da elipse,

$$J(a, b) = (a^2 - S_\infty)I(a, b).$$

- S_∞ : limite da série convergente $S_n = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^n 2^k c_k^2 \right)$ para $n \rightarrow \infty$.

- (c_n) : sequência cujos termos são definidos como $c_n^2 = a_n^2 - b_n^2$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.1 Comprimento da Curva Lemniscata

Conforme a Equação 2.27, o comprimento da curva lemniscata é dado por $C = 4qI(\sqrt{2}, 1)$, onde q é a medida do semieixo da lemniscata. Como exemplo, tomaremos uma lemniscata com centro na origem do plano cartesiano, eixo contido no eixo das abscissas e semieixo de medida $q = 1$, assim, $C = 4I(\sqrt{2}, 1)$. Agora, pela Equação 3.23, temos

$$C = 4I(\sqrt{2}, 1) = 4 \frac{\pi}{2M(\sqrt{2}, 1)} = \frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 1)}. \tag{4.1}$$

A Tabela 2 apresenta os termos das sequências (a_n) , (b_n) e da diferença $a_n - b_n$, para comparação de convergência, após 4 iterações, até a 10ª casa decimal, com $a_0 = \sqrt{2}$ e $b_0 = 1$.

Os dígitos em vermelho nos termos das sequências (a_n) e (b_n) são os precisos à cada iteração em relação ao termo subsequente, e os dígitos em azul na diferença $a_n - b_n$, a quantidade de casas decimais nulas.

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$
0	1,4142135623	1,0000000000	0,4142135623
1	1,2071067811	1,1892071150	0,0178996661
2	1,1981569480	1,1981235214	0,0000334266
3	1,1981402347	1,1981402346	0,000000001
4	1,1981402347	1,1981402347	0,0000000000

Tabela 2 – Cálculo de $M(\sqrt{2}, 1)$.

Assim, tomando $M(\sqrt{2}, 1) \approx 1,19814$ temos,

$$C = \frac{2\pi}{M(\sqrt{2}, 1)} \approx \frac{2\pi}{1,19814} \approx 5,24411 \approx 5,24. \tag{4.2}$$

4.2 Comprimento da Elipse

Conforme a Equação 2.18, o comprimento de uma elipse de semieixos a e b é dado por $C = 4J(a, b)$. Tomaremos, como exemplo, uma elipse centrada na origem do plano cartesiano com eixo maior contido no eixo das abscissas e semieixos de medidas $a = 5$ e $b = 3$. A Tabela 3 apresenta os termos das sequências (a_n) e (b_n) e os valores de c_n^2 e S_n conforme as Equações 3.15 e 3.39 até a 10^a casa decimal.

n	a_n	b_n	c_n^2	S_n
0	5,0000000000	3,0000000000	16,0000000000	8,0000000000
1	4,0000000000	3,8729833462	1,0000000000	9,0000000000
2	3,9364916731	3,9359793425	0,0040333076	9,0080666152
3	3,9362355078	3,9362354995	0,000000656	9,0080668777
4	3,9362355036	3,9362355036	0,000000000	9,0080668777

Tabela 3 – Cálculo de S_n .

Os dígitos em vermelho nos termos a_n , b_n e S_n são os precisos a cada iteração em relação ao termo subsequente, enquanto os dígitos em azul em c_n^2 representam a quantidade de casas decimais nulas. Observe que, devido à rápida convergência de c_n^2 para zero, S_n converge rapidamente para seu limite, adquirindo considerável quantidade de dígitos precisos em 4 iterações.

Assim, utilizando $M(5, 3) \approx 3,93624$ e $S_\infty \approx S_4 \approx 9,00807$, pelas Equações 2.18 e 3.47, temos

$$\begin{aligned}
 C = 4J(5, 3) &= 4(5^2 - S_4)I(5, 3) = \frac{2\pi(25 - S_4)}{M(5, 3)} \\
 &\approx \frac{2\pi(25 - 9,00807)}{3,93624} \approx 25,52696 \approx 25,53.
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

4.3 Comprimento da Senóide

A escolha do cálculo do comprimento da senóide como exemplo de aplicação se deve a dois fatores: o primeiro é que a curva é bastante conhecida tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, com diversas aplicações tanto teóricas quanto práticas em diversos campos de conhecimento. Um exemplo dessas aplicações práticas é relativo ao cálculo da quantidade de material necessário para fabricação de papelão ondulado ou telha ondulada. O segundo é que, nos livros de Ensino Superior, em regra, não há menção ao fato de a integral que calcula o comprimento da curva ser uma integral elíptica, calculada apenas numericamente, e, nas exceções, os métodos empregados para o cálculo

desta integral são os tradicionais do cálculo numérico sem, novamente, qualquer menção ao método baseado na média aritmética-geométrica.

Considere a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \text{sen } x$, cujo gráfico é apresentado abaixo.

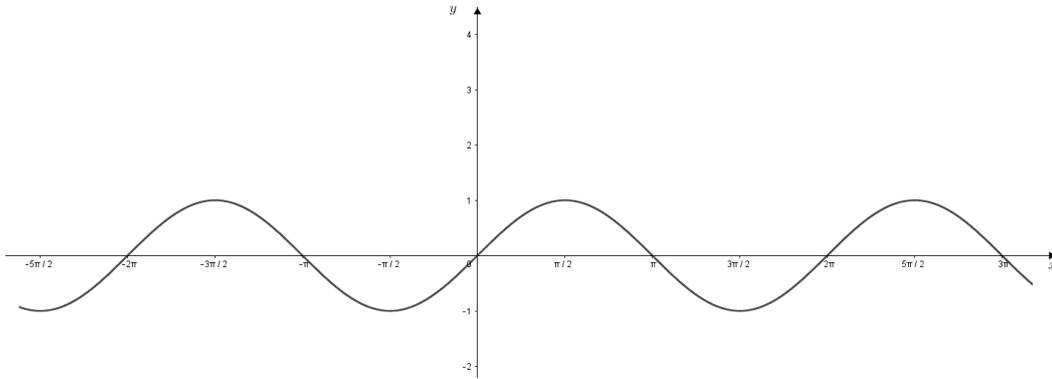


Figura 12 – Gráfico da função $f(x) = \text{sen } x$.

Para fins de análise, consideraremos a curva definida apenas no intervalo $[0, 2\pi[$, assim temos que o comprimento da senoide nesse intervalo é dado por

$$\begin{aligned} C &= \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\text{sen}^2 x + \cos^2 x + \cos^2 x} dx = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 x + \text{sen}^2 x} dx . \end{aligned} \quad (4.4)$$

Como a função é ímpar e possui eixos verticais de simetria em $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$, podemos reescrever seu perímetro como

$$C = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cos^2 x + \text{sen}^2 x} dx = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \cos^2 x + \text{sen}^2 x} dx \quad (4.5)$$

e, dessa forma, pela Equação 2.18, com $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$,

$$C = 4J(\sqrt{2}, 1) . \quad (4.6)$$

Retomando a Tabela 2, com $M(\sqrt{2}, 1) \approx 1,19814$ e calculando S_n para $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$ até a quarta iteração obtemos

Os dígitos em vermelho nos termos a_n , b_n e S_n são os precisos a cada iteração em relação ao termo subsequente, enquanto os dígitos em azul em c_n^2 representam a quantidade de casas decimais nulas.

Por fim, tomando $S_\infty \approx S_4 \approx 0,54305$, pela Equação 3.47,

$$C = 4J(\sqrt{2}, 1) = \frac{2(2 - 0,54305)\pi}{1,19814} \approx 7,64041 \approx 7,64 . \quad (4.7)$$

n	a_n	b_n	c_n^2	S_n
0	1,4142135623	1,0000000000	1,0000000000	0,5000000000
1	1,2071067811	1,1892071150	0,0428932188	0,5428932188
2	1,1981569480	1,1981235214	0,0000800995	0,5430534178
3	1,1981402347	1,1981402346	0,0000000003	0,5430534190
4	1,1981402347	1,1981402347	0,0000000000	0,5430534190

Tabela 4 – Cálculo de S_n .

4.4 Comprimento da Elipse para o Ensino Médio

Nos cursos de Ensino Médio, ao se tratar de cônicas, não é raro um paralelismo entre circunferência e elipse, sobretudo quanto ao aspecto da primeira ser um caso particular da segunda, o que naturalmente instiga os alunos a levantarem questionamentos sobre as relações de área e perímetro delas e os métodos de cálculo.

Mesmo que intuitivamente, é fácil gerar convencimento quanto às relações de área, uma vez que a área da região delimitada pela circunferência de raio r é dada por $A = \pi r^2$ enquanto a área delimitada pela elipse de semieixos a e b é dada por $A = \pi ab$, podendo ser entendidas, genericamente, como π vezes o produto dos semieixos, os quais, na circunferência, são iguais ao raio.

Por outro lado, enquanto o perímetro da circunferência é bem definido como $C = 2\pi r$, não há uma relação simples para o cálculo do perímetro da elipse, como visto ao longo deste trabalho, sendo necessário técnicas demasiadamente sofisticadas para um estudante de nível médio. Entretanto, conforme o desenvolvimento da Equação 2.18 com a Equação 3.47, que resultam no comprimento da elipse como $C = 2\pi \frac{(a^2 - S_\infty)}{M(a, b)}$, e o paralelismo ao cálculo do comprimento da circunferência, tal qual feito com a área, é razoável considerar que o comprimento desta possa ser aproximado por uma expressão da forma $2\pi m$, onde m é um certo valor associado aos comprimentos dos semieixos.

Neste sentido, como a elipse é geometricamente limitada entre as circunferências de raios $r = b$ e $r = a$, é comum tomar m como a média aritmética das medidas dos semieixos, gerando a aproximação $C = 2\pi \left(\frac{a+b}{2} \right) = \pi(a+b)$, o que faz com que o comprimento da elipse seja aproximado pelo comprimento da circunferência de raio $r = \frac{a+b}{2}$. Tal escolha, ainda que inicialmente sustentada pelo caráter estético-geométrico da elipse em relação às circunferências, também se sustenta pelo fato de a média aritmética-geométrica estar intimamente ligada ao cálculo do comprimento da elipse, o que sugere, mesmo que subjetivamente, que m seja tomado como uma média entre os comprimentos dos eixos.

Além disso, evidentemente, escolhendo m como uma média, é natural concluir que diferentes médias gerem aproximações com maiores ou menores erros. Tal fato pode

ser levantado como hipótese e verificado empiricamente pelos alunos, vez que, nesse nível, possivelmente já tiveram contato com as médias harmônica, geométrica, aritmética e quadrática.

De forma geral, tal qual para a escolha da aproximação $C = 2\pi \left(\frac{a+b}{2} \right)$, o processo faz com que o comprimento da elipse seja aproximado pelo comprimento de determinada circunferência, cujo raio guarde relação com os semieixos da elipse, o que também pode ser explorado mediante software de geometria dinâmica, como Geogebra, para, a partir da elipse e de seu comprimento, calculado pelo próprio programa, explorar as circunferências traçadas com raios iguais à média harmônica, geométrica, aritmética e quadrática dos semieixos e localizar, no plano, a circunferência cujo comprimento é igual ou melhor aproximado ao comprimento da elipse.

A Figura 13 exemplifica uma elipse de centro na origem do plano e semieixos a e b e as circunferências de centros na origem do plano e raios $r = b$, $r = \left(\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right)$, média harmônica entre a e b , em azul, $r = \sqrt{ab}$, média geométrica entre a e b , em verde, $r = \left(\frac{a+b}{2} \right)$, média aritmética entre a e b , em vermelho, $r = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$, média quadrática entre a e b , em roxo e $r = a$.

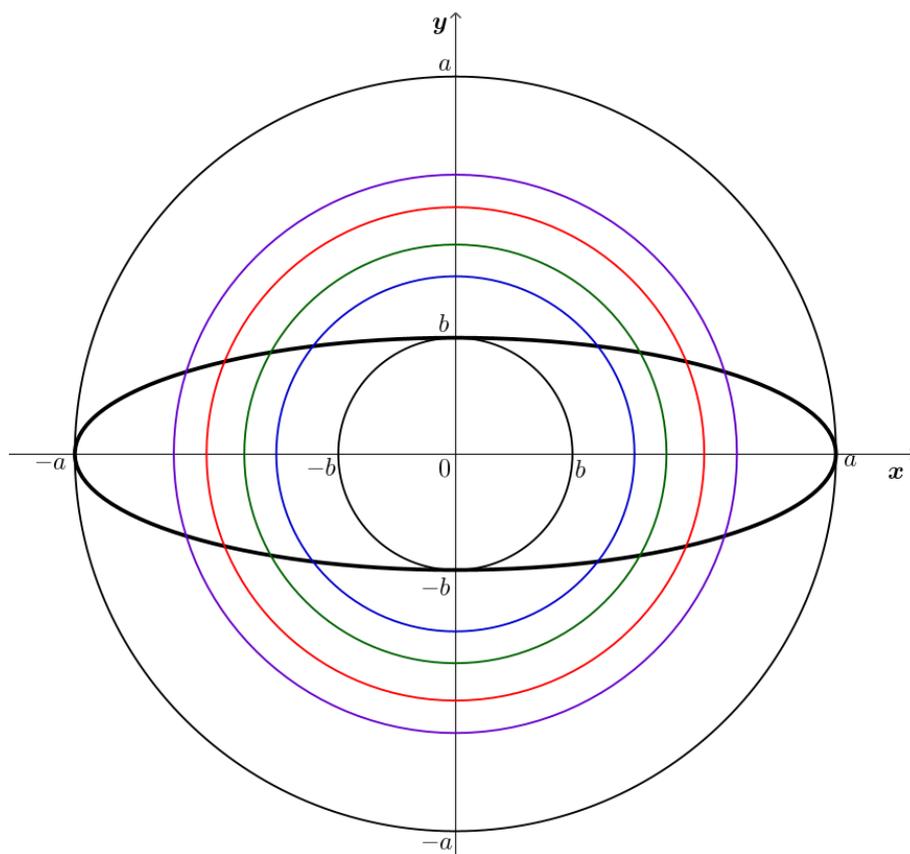


Figura 13 – Elipse e circunferências de raios iguais a médias entre a e b .

Nessa linha, pensando em uma aproximação passível de ser utilizada no Ensino Médio que gere erro mínimo e que também possa ser validada em software de geometria dinâmica, apresentamos uma aproximação derivada da teoria abordada por esse trabalho, que, conforme [Almkvist e Berndt \(1988\)](#), foi obtida primeiramente por B. Enkwall em 1973 como consequência da fórmula de Pál Sipos de 1792 para o cálculo do comprimento da elipse.

Teorema 17. *Seja \mathcal{E} uma elipse de semieixos a e b . O comprimento C da elipse pode ser aproximado como*

$$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2. \quad (4.8)$$

Demonstração. Retomando as Equações [2.18](#), [3.1](#), [3.18](#), [3.23](#) e [3.47](#) temos

$$C = 4J(a, b) = 4(a^2 - S_\infty)I(a, b) = \frac{2\pi(a^2 - S_\infty)}{M(a, b)}. \quad (4.9)$$

Agora, tomando $S_\infty \approx S_1$,

$$S_1 = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^1 2^k c_k^2 \right) = \frac{1}{2} (2^0 c_0^2 + 2^1 c_1^2) = \frac{c_0^2}{2} + c_1^2. \quad (4.10)$$

Por fim, utilizando $M(a, b) = a_2$ pois, neste termo, $M(a, b)$ já possui pelo menos 4 dígitos precisos, pelas Equações [4.9](#) e [4.10](#),

$$C = \frac{2\pi(a^2 - S_\infty)}{M(a, b)} = \frac{2\pi}{a_2} \left(a^2 - \frac{c_0^2}{2} - c_1^2 \right), \quad (4.11)$$

porém, $a^2 - \frac{c_0^2}{2} - c_1^2 = \left(\frac{a+b}{2} \right)^2$ e $a_2 = \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2$, então,

$$C = \frac{2\pi}{\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2} \left(\frac{a+b}{2} \right)^2 = 2\pi \left(\frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2 \quad (4.12)$$

□

Vale observar que o termo $\frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$ é a média aritmética ponderada entre \sqrt{a} e \sqrt{b} com pesos \sqrt{a} e \sqrt{b} , respectivamente.

As Tabelas [5](#), [6](#) e [7](#) trazem os valores do perímetro da elipse calculados tomando-se m como a média harmônica, $C = 2\pi \left(\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \right) = 2\pi \left(\frac{2ab}{a+b} \right)$, geométrica, $C = 2\pi\sqrt{ab}$, aritmética, $C = 2\pi \left(\frac{a+b}{2} \right) = \pi(a+b)$, quadrática, $C = 2\pi\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$ e através da

aproximação $C = 2\pi \left(\frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2$ com arredondamentos da 4ª casa decimal e os erros percentuais aproximados em relação ao cálculo obtido pela Equação 3.47 para $S_\infty \approx S_5$, com arredondamento na 2ª casa decimal. Vale ressaltar que, para $a = b = r$, todas as aproximações geram a relação de comprimento da circunferência.

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO	COMPRIMENTO	ERRO (%)
$C = 4J(a, b)$	7,6404	—
$C = 2\pi \left(\frac{2ab}{a+b} \right)$	7,3612	−3,65
$C = 2\pi\sqrt{ab}$	7,4720	−2,20
$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{2} \right)$	7,5845	−0,73
$C = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	7,6953	0,72
$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2$	7,6411	0,01

Tabela 5 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$.

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO	COMPRIMENTO	ERRO (%)
$C = 4J(a, b)$	25,5270	—
$C = 2\pi \left(\frac{2ab}{a+b} \right)$	23,5619	-7,70
$C = 2\pi\sqrt{ab}$	24,3347	-4,67
$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{2} \right)$	25,1327	-1,54
$C = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	25,9062	1,49
$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^2$	25,5382	0,04

Tabela 6 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = 5$ e $b = 3$.

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO	COMPRIMENTO	ERRO (%)
$C = 4J(a, b)$	59,3775	—
$C = 2\pi \left(\frac{2ab}{a+b} \right)$	45,3786	-23,58
$C = 2\pi\sqrt{ab}$	50,6567	-14,69
$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{2} \right)$	56,5487	-4,76
$C = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$	61,8822	4,22
$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^2$	59,6566	0,47

Tabela 7 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = 13$ e $b = 5$.

Como se verifica nos exemplos supracitados, a aproximação dada pela Equação 4.8 produz o menor erro percentual dentre todas as aproximações utilizadas.

A Figura 14 exemplifica uma elipse de centro na origem do plano e semieixos a e

b e as circunferências de $r = b$, $r = \left(\frac{2ab}{a+b}\right)$, média harmônica entre a e b , $r = \sqrt{ab}$, média geométrica entre a e b , $r = \left(\frac{a+b}{2}\right)$, média aritmética entre a e b , $r = \left(\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^2$, média aritmética ponderada ao quadrado entre \sqrt{a} e \sqrt{b} com pesos \sqrt{a} e \sqrt{b} , respectivamente, em amarelo, raio de melhor aproximação, $r = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, média quadrática entre a e b e $r = a$.

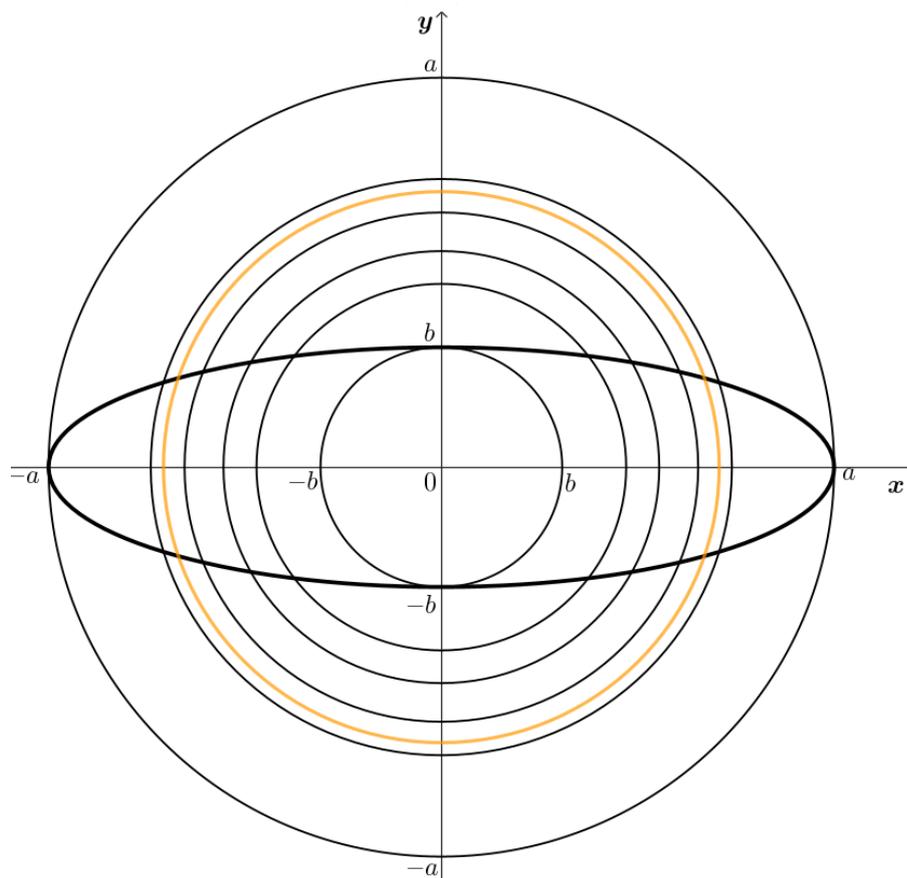


Figura 14 – Elipse, circunferências de raios iguais a médias entre a e b e circunferência de melhor aproximação.

Para além, a título de investigação, uma vez que a relação que produz a melhor aproximação é uma média aritmética ponderada ao quadrado entre \sqrt{a} e \sqrt{b} com pesos \sqrt{a} e \sqrt{b} , respectivamente, apresentamos as Tabelas 8 e 9 abaixo com as médias harmônica ao quadrado, geométrica ao quadrado, aritmética ao quadrado, e quadrática ao quadrado entre os valores \sqrt{a} e \sqrt{b} .

Observa-se, novamente, que a melhor aproximação é dada pela relação

$$C = 2\pi \left(\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} \right)^2.$$

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO	COMPRIMENTO	ERRO (%)
$C = J(a, b)$	7,6404	—
$C = 2\pi \left(\frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2$	7,4162	-2,93
$C = 2\pi \left(\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} \right)^2$	7,4720	-2,20
$C = 2\pi \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2$	7,5282	-1,47
$C = 2\pi \left(\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2}} \right)^2$	7,5842	-0,73
$C = 2\pi \left(\frac{a + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2$	7,6411	0,01

Tabela 8 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = \sqrt{2}$ e $b = 1$.

MÉTODO DE APROXIMAÇÃO	COMPRIMENTO	ERRO (%)
$C = 4J(a, b)$	25,5270	—
$C = 2\pi \left(\frac{2\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2$	23,9421	-6,21
$C = 2\pi \left(\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}} \right)^2$	24,3347	-4,67
$C = 2\pi \left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2} \right)^2$	24,7337	-3,11
$C = 2\pi \left(\sqrt{\frac{(\sqrt{a})^2 + (\sqrt{b})^2}{2}} \right)^2$	25,13278	-1,54
$C = 2\pi \left(\frac{a + b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right)^2$	25,5282	0,04

Tabela 9 – Comparação dos perímetros calculados por diferentes métodos para $a = 5$ e $b = 3$.

CAPÍTULO 5

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Conforme apresentado ao longo deste trabalho, o cálculo do comprimento da elipse foi um problema que perdurou aberto por séculos até o desenvolvimento das ferramentas necessárias, como o cálculo diferencial integral, para os problemas de retificação e área, a teoria das integrais elípticas e o método para o cálculo destas integrais a partir da média aritmética-geométrica.

Para além do mérito analítico, há de se observar a grandeza de tal descoberta a partir da destreza dos matemáticos envolvidos e colaboração, direta ou indiretamente, entre seus trabalhos, o que chama atenção para um ponto pouco explorado sobre a matemática, em especial nos níveis básicos, que é o processo histórico e de descoberta. Costumeiramente, a imagem acerca da matemática e de suas ferramentas (teoremas, fórmulas, relações, técnicas operatórias, dentre outras) é de algo pronto e rígido, em geral ensinadas sem nenhuma preocupação com os processos históricos e as justificativas de tais ferramentas, empobrecendo, neste sentido, a percepção de uma ciência que também é construída a partir de problemas da realidade, com pontos de partida empíricos e posteriormente validados analiticamente, e em muitos casos, especialmente na matemática moderna, colaborativamente.

Outro ponto que merece destaque é a percepção acerca das diversas aplicações de diferentes conhecimentos matemáticos em diferentes áreas. Em regra, por exemplo, livros didáticos definem a elipse como o *"lugar geométrico dos pontos cuja soma das distâncias a dois pontos dados F_1 e F_2 , chamados focos, é $2a$ "*, sem transmitir a percepção de que tal lugar geométrico também pode ser compreendido a partir de uma média aritmética constante, conforme apresentado na definição de elipse presente neste trabalho, assunto este, em geral, ligado à contextos aritméticos, estatísticos e a geometria analítica básica.

Há, porém, de se salientar que tal omissão, em primeira análise, ocorre pelo simples desconhecimento de tal relação.

Como último ponto, deixo um relato pessoal sobre o processo de realização deste trabalho. Primeiro, a admiração após tomar conhecimento da linha histórica, naquilo que os documentos permitem, para se encontrar um processo que permitisse o cálculo do comprimento da elipse, passando por diversos matemáticos em diversos tempos e a descoberta dos trabalhos dessas matemáticos. Trabalhos estes em sua maioria com objetos de estudo completamente diferentes mas que convergiram para as descobertas relatadas aqui. Segundo, a admiração pelo brilhantismo em se desenvolver e encontrar uma aplicação extremamente engenhosa para uma ferramenta que, agora, se mostra razoavelmente simples do ponto de vista operatório, como a média aritmética-geométrica. Para além, o enriquecimento da percepção das relações entre objetos matemáticos trazido a partir da compreensão da elipse como uma curva descrita a partir de uma média aritmética constante e a lemniscata a partir de uma média geométrica constante, uma vez o enriquecimento desta percepção de transversalidade entre os diferentes objetos matemáticos dentro da própria matemática transcende este trabalho e, por fim, a mobilização para novas descobertas.

A partir das descobertas que ocorreram no desenvolvimento deste trabalho, era natural indagar-me se outras médias também gerariam resultados interessantes, entretanto, verifiquei que, definindo-se o lugar geométrico dos pontos cujas distâncias a dois pontos dados no plano eram médias contantes, para a média harmônica e quadrática, os resultados eram curvas que, a depender da média utilizada e da distância, transitavam entre a elipse, a lemniscata e a circunferência, sem apresentarem, portanto, algum acréscimo relativo às curvas obtidas a partir de médias constantes. Em relação ao estudos de outras formas de médias combinadas, como a média harmônica-aritmética e harmônica-geométrica, observei numericamente que, tal qual a média aritmética-geométrica, ocorre a convergência das sequências, porém, sem encontrar na literatura pesquisada alguma relevância para esses resultados. Por fim, a pesquisa acerca das aplicações das integrais elípticas revelou não serem estas um fim em si mesmas, mas integrais que surgem naturalmente em diversos cálculos, como citados na introdução.

Além daquilo que evidentemente pode ser aplicado no Ensino Superior, espero que este trabalho possa ser abordado como ferramenta de discussão, em relação ao comprimento da elipse, do ponto de vista analítico e histórico, em cursos de Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

- ALMKVIST, G.; BERNDT, B. Gauss, landen, ramanujan, the arithmetic-geometric mean, ellipses, , and the ladies diary. *The American Mathematical Monthly*, 1988. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 57.
- BYRD, P. F.; FRIEDMAN, M. D. *Handbook of elliptic integrals for engineers and physicists*. Nova York: Springer-Verlag, 2013. Citado na página 33.
- CABRAL, F. *Influência do campo magnético sobre uma amostra de cristal líquido nemático torcida*. Santa Catarina, Brasil.: [s.n.], 1973. Citado na página 13.
- CARIM, P. R. V. *Cálculo de carga de roda equivalente no dimensionamento de pavimentos flexíveis: programação automática*. Rio de Janeiro, Brasil.: [s.n.], 1973. Citado na página 13.
- COX, D. A. *The arithmetic-geometric mean of Gauss*. [S.l.]: L'Enseignement Mathématique, 1984. Citado 4 vezes nas páginas 25, 29, 38 e 39.
- EVES, H. *Introdução à história da matemática*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011. Tradução: Hygino H. Domingues. Citado na página 16.
- FIALHO, G. O. M. *Estudo das características cinemática das ondas de gravidade*. Rio de Janeiro, Brasil.: [s.n.], 1980. Citado na página 13.
- FILHO, D. C. de M. Sobre a bela lemniscata e outras curvas mais. *Revista do Professor de Matemática*, 1990. Acessado em 25 de março de 2022. Disponível em: <<https://www.rpm.org.br/cdrpm/56/3.htm>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 24.
- GAUSS, C. F. *Werke*. Göttingen: Königlichen gesellschaft der wissenschaften, 1866. v. 3. Citado 4 vezes nas páginas 9, 38, 39 e 40.
- _____. *Werke*. Göttingen: Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, 1917. X.1. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 39.
- HANCOCK, H. *Lectures on the theory of elliptic functions*. Nova York, USA: John Wiley & sons, Inc., 1910. Citado na página 31.

- JAMESON, G. J. O. Elliptic integrals, the arithmetic-geometric mean and the brent-salamin algorithm for π . *Dept. of Mathematics and Statistics*, s.d. Acessado em 02 de fevereiro de 2022. Disponível em: <<https://www.maths.lancs.ac.uk/jameson/>>. Citado na página 33.
- JUNIOR, G. dos S. *Utilização das integrais elípticas para a solução dos problemas direto e inverso da geodésia*. Curitiba, Brasil: [s.n.], 2001. Citado na página 13.
- JÚNIOR, A. C. C.; GALVÃO, A. da S. Um estudo sobre grandes deformações em uma barra engastada-livre por aproximações numéricas. *XIII SIMMEC*, 2018. Citado na página 13.
- LAGRANGE, J. L. *Oeuvres de Lagrange*. Paris: Gauthier-Villars, 1882. Citado 3 vezes nas páginas 9, 37 e 38.
- LEGENDRE, A.-M. *Traité des fonctions elliptiques*. Paris: Huzard-Courcier, 1825. Citado na página 31.
- LORD, N. Recent calculations of π : The gauss-salamin algorithm. *The Mathematical Gazette*, 1992. Citado na página 13.
- NEWMAN, D. J. A simplified version of the fast algorithms of brent and salamin. *Mathematics of Computation*, 1985. Citado na página 44.
- NIETTO, S. *A história das cônicas*. 2019. Acessado em 12 de novembro de 2022. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~apmat/historia-das-conicas/>>. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 16.
- PIEIDADE, A. Z. C. da. *Integraes e funções elípticas*. Coimbra: [s.n.], 1875. Citado na página 30.
- SILVA, P. G. N. da. *Funções elípticas de Jacobi: história e propriedades*. Maringá: [s.n.], 2013. Citado na página 30.
- STEWART, J. *Cálculo*. São Paulo: Cengage Learning, 2013. Citado na página 16.
- STILLWELL, J. Mathematics and its history. In: _____. Nova York: Springer, 2010. cap. 12. Citado na página 30.
- WEBER, G. B. A. H. J. *Essential Mathematical Methods for Physicists*. [S.l.]: Academic Press, 2003. Citado na página 13.