Universidade Federal do Rio Grande do Norte
Centro de Ciências Exata e da Terra
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Márcio Vieira da Silva

Equações do Segundo Grau e Mudança de Variáveis

Natal, julho de 2014

Márcio Vieira da Silva

Equações de Segundo Grau e Mudança de Variáveis

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Equações do Segundo Grau

Orientador:
Prof^o. Dr^o. Andre Gustavo Campos Pereira

Co-orientador:
Prof. Dr. Nome do co-orientador

Natal, julho de 2014

Márcio Vieira da Silva

Equações do Segundo Grau e Mudança de variáveis

Trabalho apresentado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT da Universidade Federal do Rio Grande do Norte, em cumprimento com as exigências legais para obtenção do título de Mestre.

Área de Concentração: Equações do Segundo Grau

Aprovado em: / /

Banca Examinadora:

Prof^a. Dr^a. ANDRE GUSTAVO CAMPOS PEREIRA
Departamento de Matemática - UFRN
Orientador(a)

Prof. Dr. JAQUES SILVEIRA LOPES
Departamento de Matemática - UFRN
Examinador Interno

Prof. Dr. LUIZ ANTONIO DA SILVA MEDEIROS
Departamento de Matemática - UFCG
Examinador Externo

Dedicatória

Dedico a Deus e a toda minha família, em especial a minha mãe Esmeraldinha Vieira da Silva e a meu pai Francisco José da Silva (o seu Chagas), a meus filhos Ludmila Maele Vieira da Silva, Lucas Matheus Vieira da Silva e a minha querida esposa Damiana Patrícia Gomes da Silva.

Agradecimentos

Começo agradecendo a Deus, por mais uma conquista em minha vida. A meu pai, Chagas (in memoriam) que sempre me ensinou que deveria seguir uma vida honesta e com muito trabalho, à minha mãe, Esmeraldina, por ter sempre me incentivar a estudar.

À minha esposa, por me apoiar durante toda minha vida acadêmica. A minha filha Ludmila pelo carinho e as alegrias que me proporciona, ao meu filho Lucas pelos incentivos carinhos e alegrias, a um grande amigo e incentivador Manoel Sabino. Aos membros da banca de avaliação. Em especial ao professor André Gustavo, pelas discussões e pelo direcionamento do trabalho.

Aos professores do PROFMAT, pelas belíssimas aulas e discussões que muito me enriqueceram. Aos colegas de curso Antônio Roberto, Almir, Claudio, Jonimar, Roberto e Venicio, pela força e pelos estudos em grupo.
Agradeço também a banca examinadora, a CAPES pelo apoio financeiro e à Sociedade Brasileira de Matemática pela criação e implantação do PROFMAT no Brasil.

À todos meus mais sinceros agradecimentos.

A dúvida é a ante-sala do conhecimento.”

Provérbio chinês

Resumo

Neste trabalho são apresentados, como revisão e num contexto histórico, os métodos mais utilizados de resolver equações de 2º grau. É apresentado também o tipo mais simples de mudança de variáveis, a saber: $x = Ay + B$ onde $A, B \in \mathbb{R}$, e mostrado como algumas mudanças de variáveis foram utilizadas na resolução de equações do segundo grau ao longo da história. Finalmente, uma mudança de variável, que tem sido utilizada pelo autor em sala de aula como um método alternativo, é apresentada e o resultado da aplicação de tal método é ilustrado através das respostas de um teste.

Palavras-chave: Equações de Segundo Grau. Soluções. Mudança de Variáveis

Abstract

In this work are presented, as a review and in a historical context, the most used methods to solve quadratic equations. It is also shown the simplest type of change of variables, namely: $x = Ay + B$ where $A, B \in \mathbb{R}$, and some changes of variables that were used to solve quadratic equations throughout history. Finally, a change of variable, which has been used by the author in the classroom as an alternative method, is presented and the result of this methodoly is illustrated by the responses of a test that was done by the students in classroom.

Keywords: Equations of Second Degree. Solutions. Change of Variables

Sumário

Introdução

As equações polinomiais de segundo grau, ou equações de segundo grau como são mais conhecidas, tem sido um tema abordado em várias épocas e por matemáticos de diversos lugares do mundo. Dentre os conhecidos matemáticos de época e nacionalidade diferentes podemos citar Bhaskara (indiano) e Viète (francês).

Neste TCC é abordado mais destes matemáticos, suas épocas e suas contribuições na resolução destas equações. Além de explicar como eles fizeram para encontrar as soluções, algumas informações adicionais, e importante, sobre o sistema de numeração utilizada na época também é mencionado.

A contribuição real deste TCC é abordar uma técnica que foi utilizada por muitos matemáticos para resolver as equações de segundo grau, a saber: Mudança de Variáveis. Estes métodos de mudança de variáveis, não são tão conhecidos como a fórmula de Bhaskara (que não é de Bhaskara, como explicado no texto) ou o completamento de quadrado.

A escolha do tema deste TCC se deve ao contato muito forte do autor com o tema: Durante o segundo grau do autor (Ensino Médio, hoje em dia) o único assunto estudado em matemática foi : Equações de Segundo grau. Ao longo destes três anos de equações do segundo grau, o autor observou que algumas modificações feitas na equação original, resultava numa equação de segundo grau mais simples de resolver. Além disso, com as soluções obtidas ele conseguia obter a solução da equação inicial.

Ele procurou durante todos esses anos responder o por que dessas transformações resultarem na solução da equação estudada. Finalmente, com o estudo das mudanças de variáveis foi possível responder a esse questionamento. Com essas dúvidas elucidadas, o autor se sentiu seguro para dividir suas descobertas com seus alunos.

Esse TCC está dividido em 5 capítulos. No Capítulo 1 é abordado um pouco da história dos povos que trabalharam com as equações de segundo grau e suas contribuições. No Capítulo 2 é mostrado algumas contribuições que são mais utilizadas atualmente. No Capítulo 3 é apresentada as mudanças de variáveis e como elas foram utilizadas para resolver as equações de segundo grau. No Capítulo 4 é apresentado a mudança de variável que o autor se deparou em suas observações e como elas são utilizadas para resolução das equações de segundo grau. Finalmente, no Capítulo 5 é apresentado o resultado de testes aplicados na escola onde o autor trabalha após apresentados os métodos tradicionais e o método via mudança de variáveis.

Capítulo 1

Equações do Segundo Grau

1.1 Abordagem Histórica

Historicamente as equações do segundo grau foram objetos de interesse de matemáticos egípcios, babilônios, gregos e hindus. Sendo os babilônios os primeiros a registrarem esse interesse. De acordo com [4] [1], os babilônios foram os primeiros a resolver equações quadráticas, por volta de 4000 anos a.C.. No entanto, eles não tinham nenhuma noção de simplificação ou de equações, eles conheciam apenas algumas fórmulas de fatoração e desenvolveram um algoritmo para resolver problemas envolvendo equações do segundo grau. Esse algoritmo é citado por muitos historiadores matemáticos como uma "receita matemática", a qual fornece somente uma raiz positiva, pelo fato de que os valores envolvidos representavam as dimensões de objetos concretos. Mais adiante nesse texto mostramos o algoritmo desenvolvido pelos babilônios.

1.1.1 Egito

Segundo [17] [2] , os textos egípcios escritos no Médio Império, só lidam com equações do segundo grau bem simples. Por exemplo, no papiro de Moscou, que data de aproximadamente 1850 a.C.. É pedido para calcular a base de um retângulo cuja altura l é igual a $\frac{3}{4}$ de sua base e cuja área é igual a 12. Este problema, em linguagem moderna,

[1]Carl Benjamin Boyer, Carl B. Boyer, ou apenas Carl Boyer foi um matemático e historiador da matemática norte americano. É autor da obra máxima História da Matemática, editada na década de 1960.

[2]João Bosco Pitombeira Professor Emérito Doutor da PUC, Áreas: Educação Matemática. É autor do artigo REVISITANDO UMA VELHA CONHECIDA

se escreve $\frac{3}{4}l^2 = 12$.

Historicamente não se sabe qual o tratamento dado pelos egípcios as equações do segundo grau, porém os historiadores matemáticos suspeitam que eles dominavam alguma técnica para resolução de tais equações, essa suspeita é baseada no papiro *Kahum*[3] onde é apresentada uma resolução da equação hoje escrita como $x^2 + y^2 = k$, sendo k um número positivo é também observado que o método utilizado é o falsa posição (ver [18], págs. 18-22).

1.1.2 Babilônios

Atualmente escrevemos uma equações quadrática da seguinte forma $ax^2+bx+c = 0$, onde a, b e c são chamados de coeficientes, porém como a álgebra não existia no período dos babilônios então eles usavam uma forma dissertativa para resolver as equações quadráticas, ou seja, não usavam símbolos para descrever o algoritmo, faziam apenas manipulações de dados. Para exemplificar o que estamos dizendo, vamos analisar mais adiante dois casos concretos de problemas babilônicos, recuperados de tabletes de argila. Antes, porém, é importante saber como funcionava o sistema de numeração babilônico que, diferentemente do egípcio, era posicional, mas com base 60.

Para representar os números babilônicos na base 60 utilizamos a notação moderna de Neugebauer[4]. Por exemplo, escrevemos 4,19;14,35 para indicar o número:

$$4.60 + 19.60^0 + 14.60^{-1} + 35.60^{-2} = 259\frac{35}{144}$$

Exemplo 1. O tablete de argila BM 13 901, que se encontra no Museu Britânico British Museum, contém o seguinte problema, que foi traduzido por *Donald John Wiseman*[5] e na linguagem atual significa: Encontrar o lado de um quadrado cuja área, somada com o lado, é igual a 0;45.

Lembrando que os babilônios utilizavam um sistema numérico posicional, porém na base 60, então 0;45 transformando na base 10 que é a base que utilizamos atualmente

[3]Papiro da 12ªdinastia egípcia (1991–1786 a.C.), atualmente em Londres.

[4]Otto Eduard Neugebauer (26 de maio de 1899 — 19 de fevereiro de 1990) foi um matemático e historiador da ciência austro-estadunidense.

[5](25 de outubro de 1918 - 2 de fevereiro 2010), foi um estudioso da Bíblia, arqueólogo e assiriólogo. Ele foi professor de Assiriologia na Universidade de Londres 1961-1982.

fica da seguinte forma.

$$0;45 = 60.0 + 45.60^{-1} = \frac{45}{60} = \frac{3}{4}$$

Atualmente esse problema consiste apenas em resolver a equação quadrática:

$$x^2 + x = \frac{3}{4}$$

Os babilônios apresentaram a seguinte solução para esse problema:

Tome metade de 1, que é 0;30, e multiplique 0;30 por 0;30, que é 0;15. Some isso a 0;45 para obter 1. Este é o quadrado de 1. Agora subtraia 0;30 de 1. O resultado é 0;30, o lado do quadrado.

Queremos acreditar pelos relatos que lemos dos feitos dos babilônios em relação a áreas que o conhecimento das áreas de retângulos e quadrados era total, ou seja, que a área de um retângulo de lados a e b era $a.b$ e a área de um quadrado de lado x era x^2, também acreditamos que se eles queriam uma área que fosse nominalmente igual a medida de um lado c bastava fazer o outro lado do retângulo ser igual a 1, também acreditamos que eles sabiam manusear áreas com desenvoltura e por isso cremos que sabiam que todas as figuras a seguir tinham a mesma área $x^2 + x$.

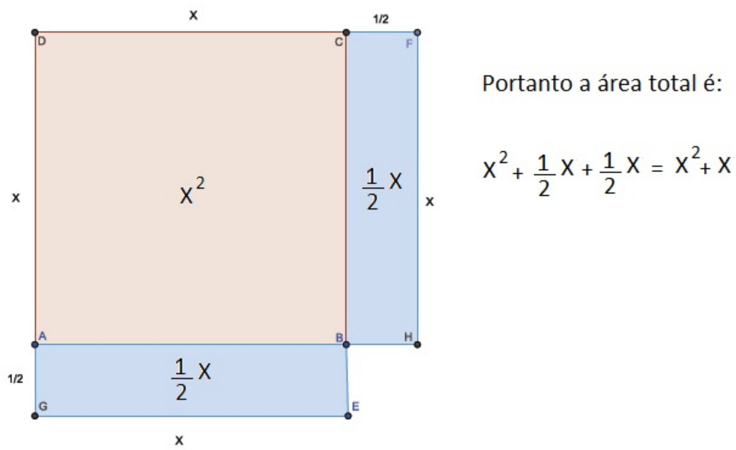


Figura 01

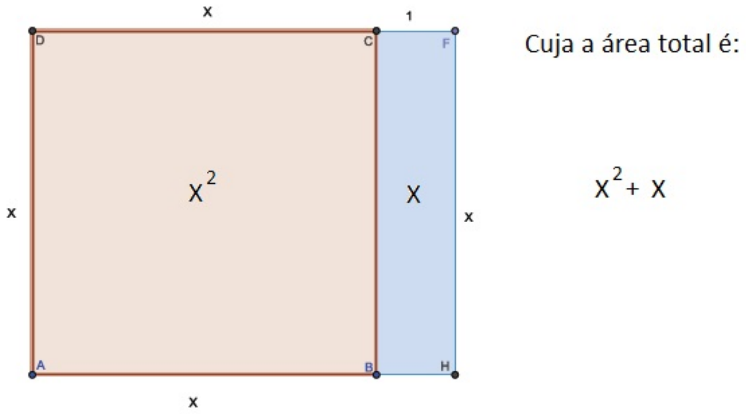


Figura 02

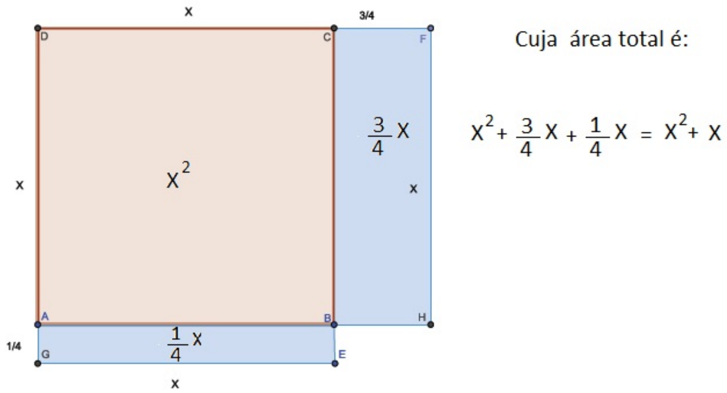
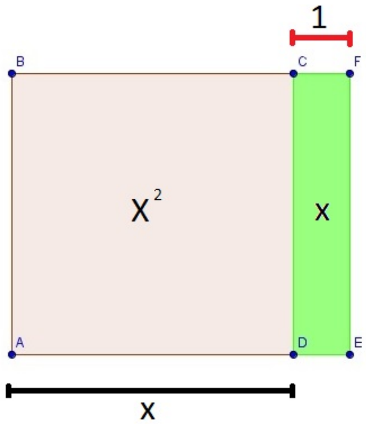


Figura 03

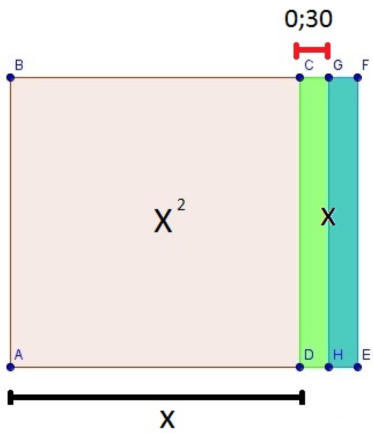
Olhando novamente para o problema do exemplo 1, ele diz exatamente que a área da figura 2 é 0;45. Bom, mais a área da figura 2 é igual a área da figura 1, note que a frase multiplique 0;30 por 0;30 é 0;15 é também exatamente a área do quadradinho que está faltando na figura 1 para completar a quadrado maior.

A frase some isso, ou seja some 0;15 a 0;45 para obter 1 significa somar esta área ao quadrado, desta forma temos que: a área do quadrado de lado $x + \frac{1}{2}$ é igual a 0;45+0;15=1, segundo os babilônios.

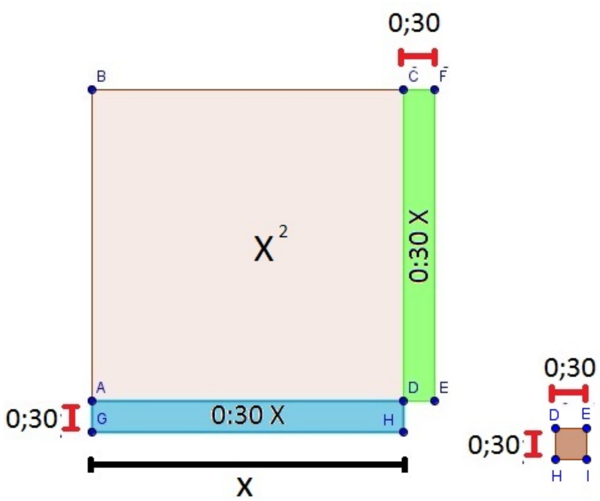
Geometricamente temos que a figura abaixo representa o problema apresentado pelos babilônios:



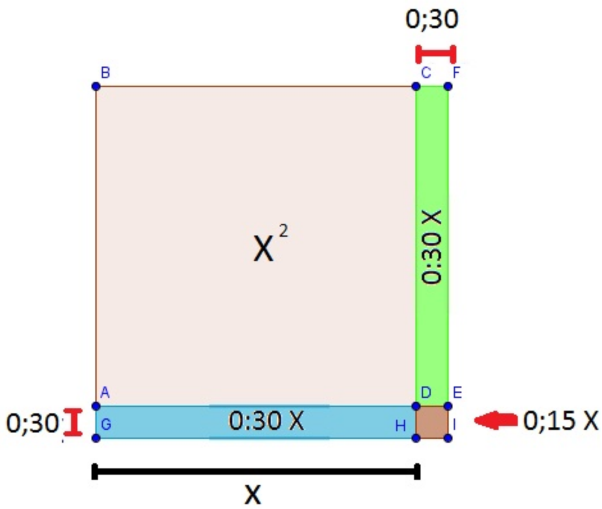
Tome metade de um:



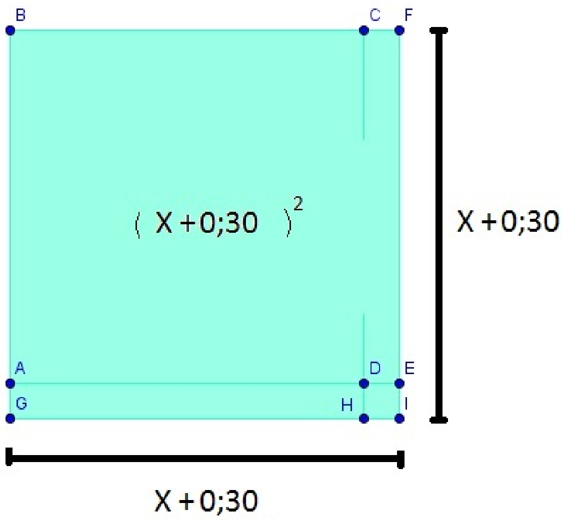
Multiplique 0;30 por 0;30, que é 0;15



Some isso a 0;45 para obter 1



Que é igual a:



Algebricamente temos:

$$x^2 + x = 0;45 \Rightarrow x^2 + x + 0;15 = 0;45 + 0;15 \Rightarrow$$

$$(x + 0;30)^2 = 1 \Rightarrow (x + 0;30) = \sqrt{1} \Rightarrow x + 0;30 = 1 \Rightarrow$$

$$x = 1 - 0;30 \Rightarrow x = 0;30.$$

onde 0;30 representa a solução do problema proposto.

Exemplo 2. O tablete de argila YBC 6967, que se encontra na Universidade de Yale, contém o problema que foi traduzido por Donald John Wiseman para a linguagem atual:

Um recíproco excede seu recíproco em 7. Quais são: o recíproco e seu recíproco? Esse problema é essencialmente numérico, pois os recíprocos são números que multiplicados perfazem 1,0. Entretanto, como o sistema babilônico é de base 60, lembremos que nessa base $1,0 = 1 \times 60 + 0 = 60$. O problema então consiste em se obter dois números, x e y, cujo produto é 60 e a diferença é 7, isto é:

$$x.y = 60 \text{ e } x - y = 7$$

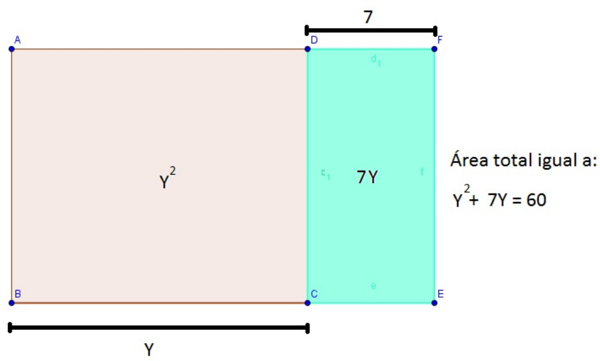
Desse modo, obtemos um sistema de duas equações, que por substituição se reduz à equação quadrática $(y + 7).y = 60$, ou seja, $y^2 + 7y = 60$.

A solução apresentada no tablete babilônico para esse sistema é a seguinte:

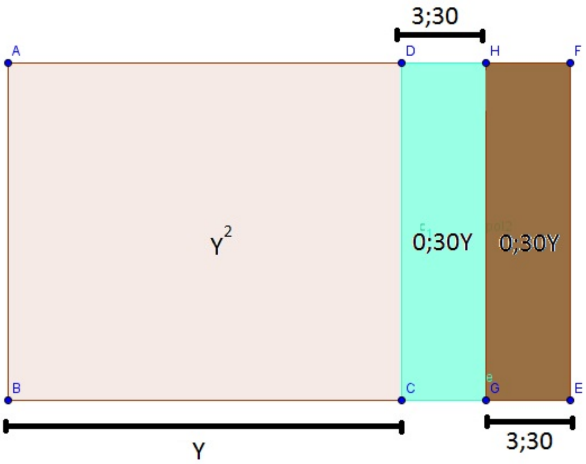
Tome metade de 7, que é 3;30. Multiplique 3;30 por 3;30, que é 12;15. Some isso a o produto 1,0 e o resultado é 1,12;15.

Dado que a raiz quadrada de 1,12;15 é 8;30. Tome 8;30 que você obteve e subtraia 3;30 dele; some 3;30 a 8;30. Um é 12 o outro é 5.
O recíproco é 12 e seu recíproco 5.

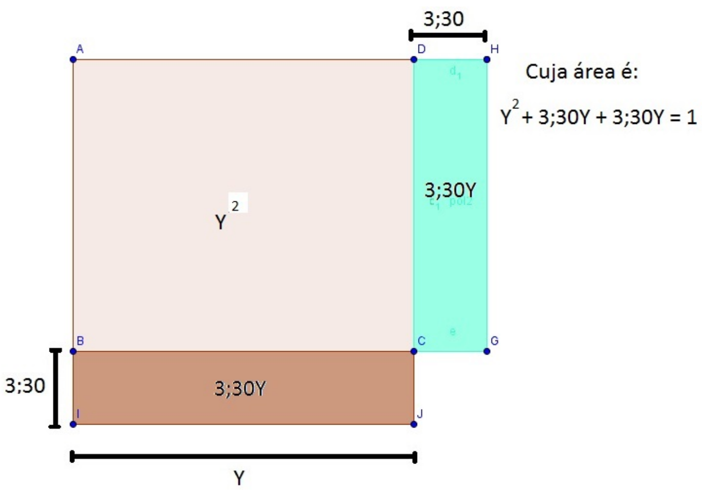
Uma solução geométrica equivalente a solução proposta pelos babilônios é:



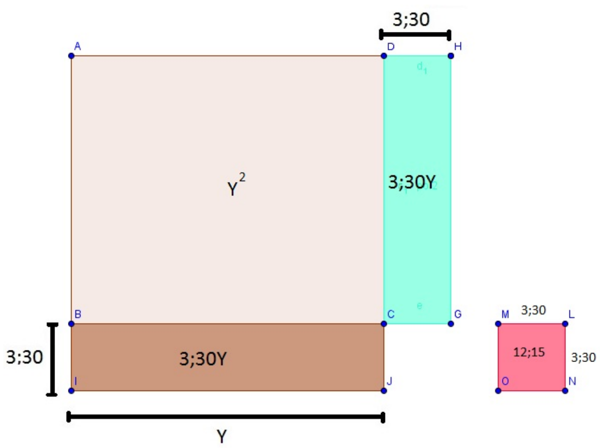
Tome metade de 7 que é $3;30$:



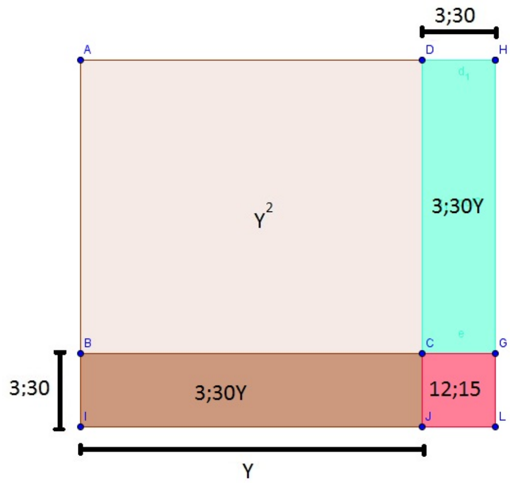
Reorganizando teremos:



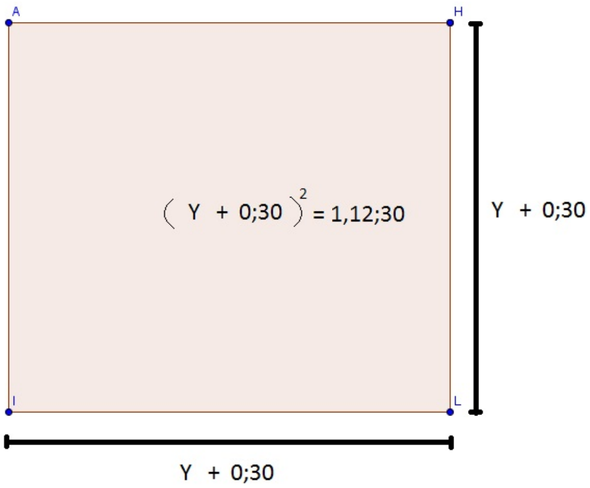
Multiplique $3;30$ por $3;30$, que é $12;15$



Some isso ao produto 1,0 e o resultado é $1,12;15$.



Onde finalmente teremos:



Algebricamente temos:

$$y^2 + 7y = 1,0;0 \Rightarrow y^2 + 7y + 12;15 = 1,0;0 + 12;15 \Rightarrow$$

$$(y + 3;30)^2 = 1,12;15 \Rightarrow y + 3;30 = \sqrt{1,12;15} \Rightarrow y + 3;30 = 8;30 \Rightarrow$$

$$y = 8;30 - 3;30 \Rightarrow y = 5.$$

Com isso teremos que o outro valor é:

$$x - y = 7 \Rightarrow x = 7 + y \Rightarrow x = 7 + 5 \Rightarrow x = 12.$$

Vemos que em ambos os exemplos o método utilizado foi o de completar quadrados.

1.1.3 Gregos

Séculos se passaram até que aproximadamente em 300 A.C. os gregos desenvolveram um tratamento geométrico para vários problemas matemáticos, dentre os quais, a solução de equações do segundo grau. Para os gregos, assim como os babilônios, a álgebra simbólica ainda estava muito longe de ser inventada, por isso, esses matemáticos usavam construções geométricas para estudar determinadas equações do segundo grau. O exemplo que vamos mostrar foi proposto por Euclides em sua obra prima "Os Elementos".

Exemplo 3. Deseja-se achar dois lados de um retângulo cujo perímetro mede 80cm e cuja área vale $256cm^2$.

Em linguagem atual, os lados desse retângulo que queremos encontrar são chamados de x e y, e o problema pode ser escrito como um sistema de equações:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ x.y = 256 \end{cases}$$

que é equivalente a equação $(40 - x)x = 256$, organizando essa equação termos a seguinte expressão, $x^2+256 = 40x$, podemos dizer então que é uma equação do segundo grau com o formato:

$$x^2 + c^2 = bx \tag{1.1}$$

Para um bom entendimento da solução desse tipo de equação temos o livro do [23].[6] A solução a seguir está presente no livro "Elementos"de Euclides. Ela é adequada para o que hoje chamamos de equações do segundo grau que possuam o formato da equação (1.1), onde b e c^2 representam números comensuráveis (inteiros e fracionários positivos), vale ressaltar que na sua época, a Geometria era a única forma de se fazer matemática. A álgebra nem sonhava em aparecer. Assim, b significava o comprimento de um segmento e c^2 a área de um quadrado de lado c . Assim, apenas os números positivos eram admitidos.

Passo a passo da solução proposta por Euclides, ver também [14].[7]

1 – Constrói-se o segmento $\overline{\mathbf{AB}}$ de comprimento b e o ponto médio **C**.

2 – Faz-se a mediatriz de $\overline{\mathbf{AB}}$.

[6]WAGNER, E., Construções Geométricas. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007

[7]Flodoaldo Moreno Júnior autor do TCC Métodos de Resolução de Equações do Segundo e do Terceiro Grau

3 – Nela, marca-se o ponto **O** de forma que a medida de $\overline{\mathbf{CO}}$ seja igual ao lado c do quadrado de área conhecida.
4 – Com centro em **O**, traça-se o arco do círculo de raio $\dfrac{b}{2}$. Marca-se **D** na interseção do arco com $\overline{\mathbf{AB}}$.

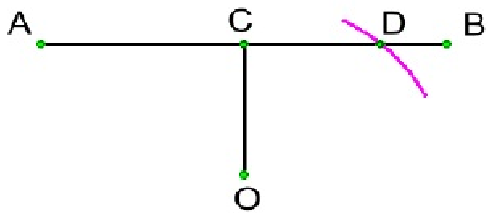
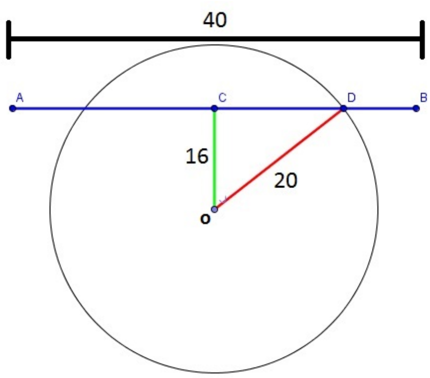


Figura 01 - figura final do passo a passo da solução de Euclides.

As soluções do problema (e consequentemente da equação) são os segmentos $\overline{\mathbf{AD}}$ e $\overline{\mathbf{DB}}$.

Vamos verificar esse resultado da questão proposta seguindo os passos propostos por Euclides. Seguindo todos os quatro passos chegamos a figura abaixo:

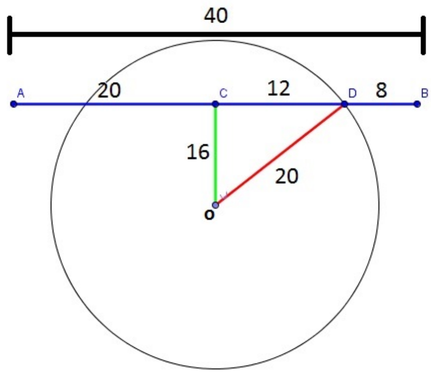


Aplicando pitágoras no triângulo $\mathbf{D\widehat{C}O}$, obteremos o valor do seguimento $\overline{\mathbf{CD}}$, ou seja:

$$\overline{OD}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CD}^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = \overline{OC}^2 - \overline{OD}^2 \Rightarrow \overline{CD}^2 = 20^2 - 16^2 \Rightarrow$$

$$\overline{CD}^2 = 400 - 256 \Rightarrow \overline{CD}^2 = 144 \Rightarrow \overline{CD} = \sqrt{144} \Rightarrow \overline{CD} = 12.$$

Com isso temos que
$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} \Rightarrow \overline{AD} = 20 + 12 = 32$, consequentemente $\overline{DB} = 8$



Fazendo a verificação da soma e do produto das raízes obtidas, podemos confirmar a veracidade dos resultados. Assim, retornando ao sistema do problema do exemplo 3:

$$\overline{\mathbf{AD}} = x = 32$$

$$\overline{\mathbf{DB}} = y = 8$$

Se substituirmos esses valores na equação: $x^2 + 256 = 40x$, teremos a equação satisfeita em cada caso.

1.1.4 Hindus

Segundo [4] as equações do 2º grau surgem pela primeira vez na matemática hindu nos *Sulvasutras* [8], sob as formas $ax^2 = c$ e $ax^2 + bx = c$, sem que sejam apresentadas soluções. Mais tarde, no manuscrito *Bakshali*[9], é descrito um procedimento de solução que corresponde à fórmula moderna

$$x = \frac{\sqrt{b^2 + 4ac} - b}{2a}, \tag{1.2}$$

para a equação $ax^2 + bx = c$.

Veja a seguir os passos realizados pelo matemático hindu Brahmagupta para a de-

[8] Os sulvasutras tratam dos conhecimentos teóricos necessários para a construção de altares. Eles são escritos em versos, e parecem terem sido escritos em torno de 600 a.C.

[9] Manuscrito matemático, encontrado em 1881, em péssimo estado, próximo a uma aldeia indiana chamada Bakshali. Supõe-se que ele data do século VII d.C.

terminação das raízes de equações do tipo (1.2) ver [5] pg.13. [10]
1º Passo: à soma (note que a soma $ax^2 + bx$ vale c) multiplicada pelo coeficiente do quadrado (a), você adiciona o quadrado da metade do coeficiente da incógnita (b):

$$a.c + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \tag{1.3}$$

2º Passo, extrai-se a raíz quadrada de (1.3).

$$\sqrt{a.c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} \tag{1.4}$$

3º Passo, em seguida subtrai-se a metade do coeficiente da incógnita.

$$\sqrt{a.c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2} \tag{1.5}$$

4º Passo, a seguir divida (1.5) pelo coeficiente do quadrado.

$$\frac{\sqrt{a.c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}}{a} \tag{1.6}$$

5º Passo, desenvolvendo (1.6) se tem:

$$x = \frac{\sqrt{4a.c + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - b}{2a}. \tag{1.7}$$

Obs: Nos exemplos anteriores utilizamos a terminologia moderna, pois como veremos no próximo Capítulo que tal terminologia só aparece a partir do século XVI.

[10] Silvia Beatriz Fagundes de Carvalho autora do TCC RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU: UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA

Capítulo 2

Fórmula Moderna

2.1 Contribuições de Viète e Descartes

Foi só por volta do século XVl que, segundo [17] o matemático francês François Viète [1] introduziu o uso de vogais para as incógnitas, adotou também o uso do símbolo (+) para substituir a palavra mais e o símbolo (−) para substituir a palavra menos, além de determinar um método para encontrar a solução da equação quadrática, método esse que apresentaremos no terceiro Capítulo deste TCC.

Ainda no século XVl o francês René Descartes[2] introduziu o símbolo (=) para substituir a palavra igual, o símbolo x^2 para substituir a palavra área que antes era utilizada.

Podemos observar que a expressão matemática utilizada atualmente para a resolução de uma equação do 2º grau não deve ser atribuída somente a uma pessoa, mas a vários pesquisadores que através de inúmeros trabalhos, desenvolveram a seguinte expressão:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1}$$

No Brasil, costuma-se chamar (2.1) de fórmula de Bhaskara. Apenas aqui no Brasil, a fórmula foi atribuída ao matemático indiano. Não se sabe ao certo o porquê e nem quem começou com essa ideia. Mas, de fato, Bhaskara não foi o criador da fórmula, o que não isenta a sua grande contribuição à disciplina, além de ser historicamente incor-

[1] Matemático francês que viveu de 1540 a 1603. Desempenhou papel extremamente importante no desenvolvimento da álgebra. Entre outras contribuições, introduziu o uso de letras para representar números, em seu In artem analyticem isagoge, de 1591.

[2] Filósofo e matemático francês (1596, 1650). Fez trabalhos fundamentais em filosofia e em matemática. Foi um dos criadores do que hoje se conhece como geometria analítica. Seu livro, La Géométrie, um dos apêndices ao seu Discours de la Méthode, revolucionou a matemática, mostrando como inter-relacionar a álgebra e a geometria.

reta, esta nomenclatura não é usada em nenhum outro país (veja a respeito em [19] p. 54). Vale salientar que as equações quadráticas na forma $ax^2+bx+c=0$ são chamadas de equações quadráticas completas, enquanto que as equações do tipo $ax^2+bx=0$ e $ax^2+c=0$, são chamadas de equações incompletas. Neste trabalho falamos apenas das equações quadráticas que são completas, sabendo que todos os métodos utilizados, também podem ser usados nas equações incompletas.

Os livros didáticos brasileiros abordam poucos métodos de solução das equações quadráticas, a seguir citamos os mais utilizados, ver [20] e [6] .

2.2 Alguns métodos de solução das equações quadráticas

2.2.1 Completando quadrados

No Ensino Fundamental, ver [13] ao estudarmos produtos notáveis aprendemos que:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \tag{2.2}$$

e

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \tag{2.3}$$

Utilizando esse método é possível obter a fórmula (2.1). De fato, dada a equação $ax^2+bx+c=0$, com $a \neq 0$ dividindo ambos os membros da equação por a, teremos:

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$$

Completando quadrado.

$$x^2 + \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a} \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

Note que só podemos continuar nossos cálculos caso $b^2-4ac \geq 0$. Assim,

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} + \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Que representa às soluções de (2.1).

De posse desse conhecimento podemos utilizá-lo para a determinação das raízes de equações quadráticas, da seguinte maneira:

Exemplo 1. Determine a solução da equação $x^2 + 2x - 3 = 0$

Solução:

$$x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 3.$$

Somando 1 em ambos os membros da igualdade teremos.

$$x^2 + 2x + 1 = 3 + 1 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 4$$

Por (2.2) temos que:

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 = 4$$

$$(x + 1)^2 = 4 \Rightarrow x + 1 = \pm\sqrt{4}$$

$$x + 1 = \pm\sqrt{4} \Rightarrow x = -1 \pm 2$$

$$x = -1 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 1 \text{ ou } x_2 = -3$$

2.2.2 Fórmula de Bhaskara

Esse método é muito prático, pois só trabalha com os coeficientes da equação, ver [10].

Exemplo 2. Determine a solução da equação $x^2 + 5x + 6 = 0$.

Para este problema, usaremos (2.1).

Temos ainda que $a = 1, b = 5$ e $c = 6$. Substituindo os valores em (2.1), obtemos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4.1.6}}{2.1} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2} \Rightarrow x = \frac{-5 \pm 1}{2}$$

Ou seja, $x_1 = \dfrac{-4}{2} = -2$ ou $x_2 = \dfrac{-6}{2} = -3$

2.2.3 Método da soma e do produto (relação de Girard)

Nos livros didáticos brasileiros não existe referência do método de Girard [3] para obtenção de raízes de equações do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, cujo $a \neq 0$ e $a \neq 1$, ver [20]. Porém, nos casos em que $a = 1$, a relação de Girard é bastante prática, como

[3] Albert Girard viveu de 1595 a 1632 e passou a maior parte de sua vida na Holanda, embora tenha nascido na França. Devemos a ele a primeira formulação do teorema fundamental da álgebra, sobre o número de raízes de uma equação polinomial.

ilustramos a seguir. Já discutimos anteriormente que se $b^2 - 4ac \geq 0$, então as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, cujo a≠0. é dada por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Note que:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-b}{a} \tag{2.4}$$

$$x_1.x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) . \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) = \left(\frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}\right) =$$

$$\left(\frac{b^2 - b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}. \tag{2.5}$$

Vale salientar que (2.4) e (2.5) são conhecidas como as fórmulas de Girard para equações do segundo grau.

Exemplo 2. Determinar as raízes da equação $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Solução:

Sabemos que, $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1.x_2 = \frac{c}{a}$ logo:

$$x_1 + x_2 = 7 = 3 + 4$$

$$x_1.x_2 = \frac{c}{a} = 12 = 3.4.$$

A conclusão que tiramos das informações acima é que $x_1 = 3$ ou $x_2 = 4$.

No próximo Capítulo falamos da mudança de variáveis como um método para determinar as raízes de equações do segundo grau.

Capítulo 3

Mudança de variáveis

3.1 Mudança de variável no decorrer da história

3.1.1 Mudança de variável feita pelos babilônios

Segundo [4], escritos antigos datados de aproximadamente 2000 a.C., mostram que os babilônios usavam certas transformações, que auxiliavam na resolução das equações quadráticas, transformações essas que na linguagem atual podemos classificar como mudança de variável. Vimos no Capítulo l, que os babilônios não possuíam nenhuma dificuldade de resolver equações quadráticas, cujo coeficiente do termo x^2 fosse igual a um. Porém em [4] é dito que eles também sabiam resolver equações quadráticas em que o coeficiente de x^2 era diferente de um, o procedimento que faziam era similar ao que apresentamos agora.

Quando os babilônios se deparavam com uma equação do tipo

$$ax^2 + bx = c, \tag{3.1}$$

com $a \neq 1$ e $a \neq 0$, dado que a, b e $c \in \mathbb{Z}$ eles reorganizavam a equação, de maneira a facilitar a determinação de suas raízes.

O método era o seguinte:

1º Multiplicavam ambos os membros da equação 3.1 por a, obtendo a expressão abaixo:

$$(ax)^2 + a.bx = a.c$$

2º Substituíam ax por outra quantidade desconhecida, ou seja, faziam uma mudança de variável, que podemos supor ser a seguinte $w = ax$. Com isso a nova equação em termos da variável w, podia ser escrita na forma:

$$w^2 + bw = a.c \tag{3.2}$$

3º Aplicavam o método que foi apresentado, na página 5 do Capítulo 1. Assim conseguiam obter as raizes da equação (3.2).
4º Finalmente desfaziam a mudança de variável e obtinham a solução da equação inicial. Este é seguramente um dos primeiros casos registrado de mudança de variáveis, o que é uma prova de que a matemática dos babilônios era muito desenvolvida.

3.1.2 Substituição feita por François Viète

Séculos depois o matemático francês François Viète (1540 a 1603), também recorreu a uma mudança de variável para determinar a solução das equações quadráticas. Com o propósito de deduzir a chamada fórmula de Bhaskara, ele procedeu da seguinte maneira:

Dada à equação $x^2 + bx + c = 0$, ele fez a substituição de $x = y + z$, obtendo a expressão abaixo:

$$a(y + z)^2 + b(y + z) + c = 0,$$

que ao desenvolvê-la obteve:

$$ay^2 + (2az + b)y + az^2 + bz + c = 0 \tag{3.3}$$

Ele achou os valores de z para os quais esta equação em y não tivesse o termo de primeiro grau,$(2az + b)y$: obtendo a seguinte equação:

$$2az + b = 0,$$

$$z = \frac{-b}{2a}. \tag{3.4}$$

Depois substituiu o valor de z na equação (3.3), obtendo:

$$ay^2 + a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0 \Rightarrow 4a^2y^2 = b^2 - 4ac,$$

isolando y concluiu-se que:

$$y^2 = \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

De onde, $y = \dfrac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Como desde o inicio substituiu-se $x = y + z$, então:

$$x - z = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$$
$$x = z + \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e como foi visto na equação (3.4), substituindo na equação anterior obtêm-se:

$$x = \frac{-b}{2a} + \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Que é exatamente a fórmula de Bhaskara.

3.1.3 Substituição feita por G.C.Fagnano

Mais um século se passou até que em 1735 o matemático italiano G.C.Fagnano propôs uma solução para a equação quadrática, este método também se utilizava de uma mudança de variável. Passamos a descrevê-la.

Fagnano propôs a seguinte mudança de variável, na equação quadrática $ax^2 + bx + c = 0$, ele chamou

$$x = \frac{z_1 - uz_2}{1 - u} \tag{3.5}$$

Substituindo o valor de x na equação $ax^2 + bx + c = 0$, ele obteve:

$$a\left(\frac{z_1 - uz_2}{1 - u}\right)^2 + \left(\frac{z_1 - uz_2}{1 - u}\right) + c = 0$$

Desenvolvendo a expressão anterior chegou a equação:

$$(az_2^2 + bz_2 + c)u^2 - 2\left[az_1z_2 + \frac{1}{2}b(z_1 + z_2) + c\right]u + (az_1^2 + bz_1 + c) = 0 \tag{3.6}$$

Assim como Viéte, ele forçou esta equação em u para que ela tivesse o termo do primeiro grau nulo, ou seja, uma possibilidade é:

$$az_1z_2 + \frac{1}{2}b(z_1 + z_2) + c = 0.$$

Se

$$z_2 = 0 \Rightarrow z_1 = \frac{-2c}{b} \tag{3.7}$$

Substituindo esses valores em (3.6) obteve-se:

$$cu^2 = -a\frac{4c^2}{b^2} + \frac{2bc}{b} - c \Rightarrow$$

$$u^2 = \frac{b^2 - 4ac}{b^2} \Rightarrow$$

$$u = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{b}$$

De (3.7) temos que $z_2 = 0$, logo (3.5) se reduz a:

$$x = \left(\frac{z_1 - uz_2}{1 - u}\right) = \frac{z_1}{1 - u}$$

E, portanto teremos:

$$x = \frac{z_1}{1 - u} = \frac{\frac{-2c}{b}}{1 \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{b}} = \frac{-2c}{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

O que foi uma solução brilhante para a época.

Vemos que, durante toda a história do estudo das equações quadráticas, os matemáticos utilizaram-se de mudanças de variáveis, que é uma ferramenta poderosa no que diz respeito a determinação de suas raízes. Vamos começar a analisar o que ocorre com a equação $ax^2 + bx + c = 0$, quando fazemos uma mudança de variável. Para tanto ampliaremos um pouco mais nossa visão em relação as equações do segundo grau, introduzindo o conceito de função polinomial do segundo grau.

3.2 Definição de função polinomial do segundo grau

Segundo [6], chama-se função quadrática, ou função polinomial do segundo grau, qualquer função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, cuja lei de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$, onde a, b,$c \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$.

Chamamos de zero ou raiz de f, o número $x \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$. Como $f(x) = ax^2 + bx + c$, então uma raiz de f é o valor de x tal que $ax^2 + bx + c = 0$, que é exatamente o que estávamos fazendo até o momento. Então resolver $ax^2 + bx + c = 0$ equivale a encontrar os zeros da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Note que a quantidade de zeros de f ou a quantidade de soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$, vai depender da possibilidade de poder ou não calcular a raiz de $b^2 - 4ac$, isto é:

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \in \mathbb{R}. \tag{3.8}$$

Com isso observamos que o número $b^2 - 4ac$ vai ser importante e a partir desse momento chamaremos o mesmo de $\Delta = b^2 - 4ac$. Se $\Delta < 0$ não podemos calcular (3.8) e portanto não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bx + c = 0$, se $\Delta = 0$ então $\pm\sqrt{\Delta} = 0$, ou seja só existirá um valor de $x = \frac{-b}{2a} \in \mathbb{R}$ que satisfaz $ax^2 + bx + c = 0$, se $\Delta > 0$, então $\sqrt{\Delta} > 0$ logo $\sqrt{\Delta} \neq -\sqrt{\Delta}$ que implicará que existem dois valores diferentes $x \in \mathbb{R}$ tal que $ax^2 + bx + c = 0$.

3.2.1 Mudança de variável não altera o número de raízes das equações do segundo grau

Uma pergunta que poderá surgir é: A mudança de variável não vai alterar a quantidade de soluções da equação $ax^2 + bx + c = 0$?

Para responder a pergunta devemos analisar o discriminante das equações, após a substituição, pois sabemos qual é o sinal do Δ na equação após uma mudança de variável. Geralmente as mudanças de variável são da forma $x = Ay + B$, que vamos substituir na equação $ax^2 + bx + c = 0$ e em seguida observar o que ocorre com o discriminante da nova equação, então procedemos da seguinte forma.

$$a(Ay + B)^2 + b(Ay + B) + c = 0$$

$$a(A^2y^2 + 2ABy + B^2) + bAy + bB + c = 0$$

$$aA^2y^2 + 2aABy + aB^2 + bAy + bB + c = 0$$

$$aA^2y^2 + (2aAB + bA)y + aB^2 + bB + c = 0 \tag{3.9}$$

Sendo:
$a' = aA$, $b' = (2aAB + bA)$ e $c' = aB^2 + bB + c$.

Com isso podemos usar o discriminante de (3.9), para investigar o que ocorre com o número de raízes de (3.9), observemos que:
$b'^2 - 4a'c' = (2aAB + bA)^2 - 4(aA^2).(aB^2 + bB + c) = 4a^2A^2B^2 - 4aA^2bB - 4aA^2c = A^2(b^2 - 4ac)$, ou seja, o discriminante não muda de sinal quando aplicamos uma mudança de variável, logo a quantidade de raízes não se altera.

3.2.2 Cisalhamentos

Procuramos agora investigar quais o tipos de transformações ocorrem nas funções quadráticas, a partir do momento em que fazemos uma mudança de variável, ver [1] [1] . Utilizaremos a função $f(x) = x^2 + 3x + 2$ para ilustrar o que ocorre com o gráfico de uma função quadrática após a mudança de variável. Os gráficos foram construídos com o auxilio do Geogebra.

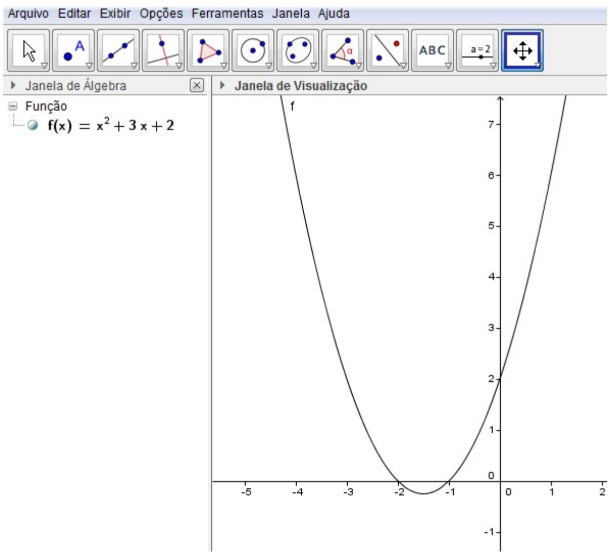


Figura 01: Gráfico da f

Agora observemos o que ocorrerá quando mudarmos a variável x pela variável $2x$, na mesma f. Com o auxilio do Geogebra vamos construir o gráfico da função $f(2x) = (2x)^2 + 3(2x) + 2$. Para melhor organização escreveremos $f(2x) = g(x) = 4x^2 + 6x + 2$.

[1] Rubens Leão de Andrade e Ronaldo Freire de Lima, autores dos Módulos Matemáticos de Pré-Cálculo da SEDIS UFRN

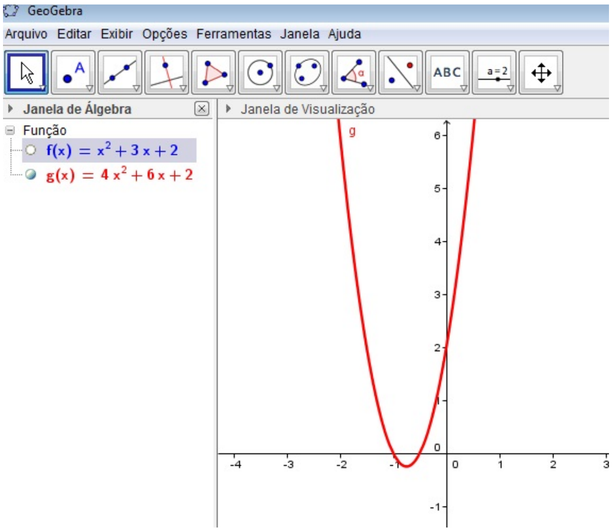


Figura 02: Gráfico da g

Comparando os gráficos de f e g teremos:

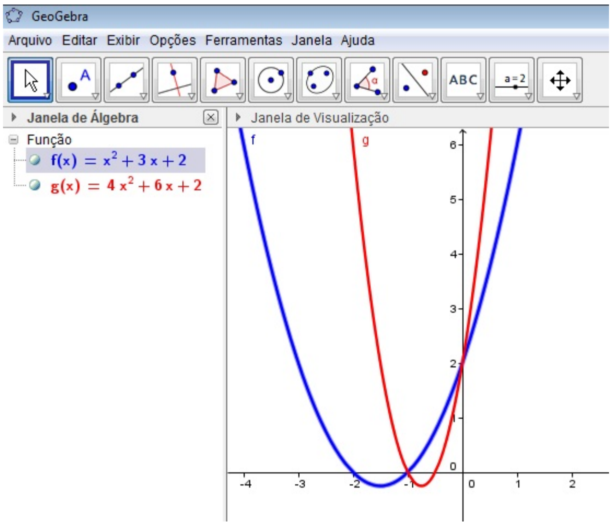


Figura 03: Gráfico da g e da f

Dessa forma, um ponto qualquer $P_0 = (x_0, y_0)$ será um ponto do gráfico de f, se, e somente se, $f(x_0) = g\left(\dfrac{x_0}{2}\right) = y_0$, ou seja, se, e somente se, $P_1 = (2x_0, y_0)$, pertencer ao gráfico de g. Por outro lado, geometricamente, obtemos o ponto P_1 deslocando o ponto P_0 ao longo da reta horizontal $y = y_0$ até que este ocupe a posição daquele. A essa operação geométrica chamamos cisalhamento horizontal (de fator 2).

De um modo geral a transformação que leva um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ num ponto $P_1 = (ax_0, y_0)$, com $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, é chamada de cisalhamento horizontal de fator a. Se duas funções f e g são tais que $g(ax) = f(x)$, então o gráfico de g é obtido pelo cisalhamento horizontal de fator **a** do gráfico de f.

3.2.3 Translações

Agora vamos substituir a variável x pela variável $x+1$ e usando a mesma f da seção anterior, então $f(x+1) = (x+1)^2 + 3(x+1) + 2$, para melhor organização escrevemos: $f(x+1) = g(x) = x^2 + 5x + 6$, e com o auxilio do Geogebra vamos observar o que ocorre geometricamente com essa substituição.

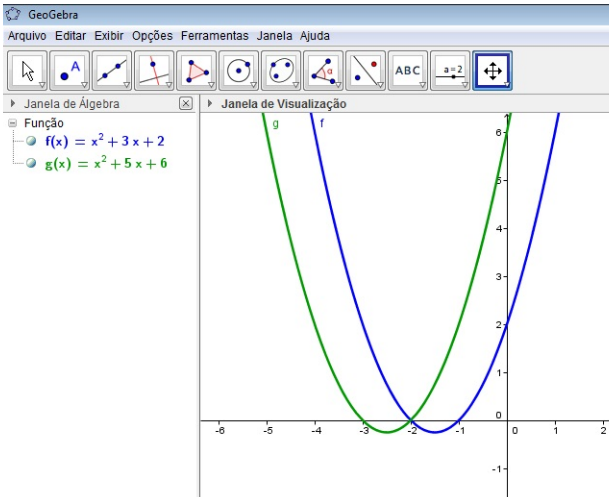


Figura 04: Gráfico da f e da g

Assim, $P_0 = (x_0, y_0)$ é um ponto do gráfico de f, se, e somente se, $P_1 = (x_0 - 1, y_0)$ é um ponto do gráfico de g. A transformação que leva P_0 em P_1 é dita uma translação horizontal à direita de magnitude 1.

De um modo geral, a transformação que leva um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ num ponto $P_1 = (x_0 + a, y_0)$, com $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, é chamada de translação horizontal de magnitude $|a|$. Se $a > 0$, a translação é dita à direita, caso contrário, ela é dita à esquerda. Se duas funções f e g são tais que $g(x - a) = f(x)$, então, o gráfico de g é obtido pela translação horizontal de magnitude $|a|$ do gráfico de f. Esta translação será à direita, se $a > 0$, e à esquerda, se $a < 0$.

As substituições apresentadas causam translações a esquerda ou à direita e cisalhamentos, e como já mostramos o número de raízes da função obtida na mudança de variável é o mesmo que o número de raízes da função original.

Com o intuito de obter as raízes das equações quadráticas, vamos propor no próximo Capítulo, uma mudança de variável.

Capítulo 4

Sugestão de mudança de variável

4.1 Equações do segundo grau cuja soma dos coeficientes seja igual a zero

Um fato curioso ocorre nas equações do segundo grau do tipo $ax^2 + bx + c$, em que a soma dos coeficientes é zero, ou seja, $a + b + c = 0$. Esta observação chamou a nossa atenção, que embora acreditemos que já exista tal mudança de variável, por ser bastante simples, o autor nunca a encontrou em um livro didático e isso o motivou a sugerir uma mudança de variável neste Capítulo. Portanto investigamos o que ocorre nas equações do segundo grau com essa característica.

No Capítulo anterior observamos a relação entre zeros da função $f(x) = ax^2+bx+c$ e as raízes da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$. Partindo da hipótese que $a + b + c = 0$, temos:

$$a + b + c = 0 \Leftrightarrow a1^2 + b.1 + c = 0 \Leftrightarrow f(1) = 0$$

ou seja, $x = 1$ é um zero de f que é equivalente a dizer que $x = 1$ é solução de $ax^2 + bx + c = 0$. Ora, mas se $x = 1$ é raiz do polinômio $ax^2 + bx + c$ é porque $x - 1$ divide ax^2+bx+c. Fazendo essa divisão temos o quociente $ax+(b+a)$ e resto $a+b+c$. Ora, $a + b + c = 0$ por hipótese e podemos escrever $b + a = -c$, portanto desta divisão temos quociente $ax - c$ e resto 0. Logo podemos escrever

$$ax^2 + bx + c = (x - 1)(ax - c) = a(x - 1)(x - \frac{c}{a})$$

e assim observamos da expressão anterior que a outra raiz de $ax^2+bx+c = 0$ é $x = \dfrac{c}{a}$.

Outra forma de chegar nesta mesma conclusão é observar que da hipótese $a+b+c=0$ temos

$$a=-(b+c)\,. \tag{4.1}$$

Usando a fórmula de Bhaskara para determinar as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ e (4.1) quando necessário, temos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4(-b-c)c}}{2a},$$

e assim:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2+4bc+c^2}}{2a}, \tag{4.2}$$

e como $b^2+4bc+c^2=(b+2c)^2$, então voltando à (4.2), teremos:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{(b+2c)^2}}{2a}=\frac{-b\pm(b+2c)}{2a}.$$

Assim, as raízes procuradas são:

$$x_1=\frac{-b+(b+2c)}{2a}=\frac{+2c}{2a}=\frac{c}{a}$$

e

$$x_2=\frac{-b-(b+2c)}{2a}=\frac{(-2b-2c)}{2a}=\frac{2(-b-c)}{2a}=\frac{2a}{2a}=1$$

Concluímos então que toda equação do segundo grau cuja soma de seus coeficientes seja zero, possui as seguintes raízes.

$$x_1=1 \text{ e } x_2=\frac{c}{a}$$

Exemplo 1. Determine as raizes da equação $3x^2-5x+2=0$.
Pelo que foi observado anteriormente temos que $3-5+2=0$, então:

$$x_1=1 \text{ e } x_2=\frac{c}{a}=\frac{2}{3}$$

De posse dessa informação fica fácil determinar as raízes de uma equação do segundo grau, cuja soma dos seus coeficientes seja igual a zero. Mas o que faremos para determinar as raízes das equações que não possuam essa característica?

Será que através de uma mudança de variável podemos obter uma nova equação do segundo grau, cuja soma dos seus coeficientes seja igual a zero? Observe o exemplo a seguir.

Exemplo 2. Determine as raízes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Note que a soma dos coeficientes não é zero, logo não podemos usar o que foi desenvolvido anteriormente. Fazendo a mudança de variável de $x = 3y$ temos uma nova equação, a saber:

$$2(3y)^2 - 7(3y) + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$2.9y^2 - 7.3y + 3 = 0 \Rightarrow$$
$$18y^2 - 21y + 3 = 0. \tag{4.3}$$

Observe $18 - 21 + 3 = 0$, isso significa, pelo que foi visto até agora que as raízes de (4.3) são:

$$y_1 = 1$$
$$y_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{18}$$

e como a mudança de variável feita foi $x = 3y$ então as raízes da equação $2x^2-7x+3 = 0$:

$$x_1 = 3.1 = 3$$
$$x_2 = \frac{3.3}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

Sempre poderemos conseguir uma mudança de variáveis que transforme uma equação de segundo grau em outra cuja soma dos coeficientes seja zero?

Vimos no capítulo anterior que mudança de variável do tipo $y = Ax + B$ não altera o número de raízes. Portanto, se partirmos de uma equação do segundo grau que não possua raízes, não será possível tal mudança de variável. Caso a equação original possua raiz, será possível obter a mudança de variável.

Como conseguir então a mudança de variável correta?

No Capítulo anterior foi mostrado que dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ a mudança de variável $x = Ay + B$ transforma a equação anterior em

$$aA^2y^2 + (2aAB + bA)y + aB^2 + bB + c = 0.$$

Em termos de soma dos coeficientes, passamos de $a + b + c$ para

$$aA^2 + 2aAB + bA + aB^2 + bB + c.$$

Entretanto, considerando $B = 0$, ou seja, mudanças do tipo $y = Ax$ a soma acima se reduz a

$$aA^2 + bA + c.$$

Note que estamos interessados em valores de $A \neq 0$ que façam o valor anterior ser igual a zero, ou seja, valores de $A \neq 0$ tais que

$$aA^2 + bA + c = 0. \tag{4.4}$$

Obs: A equação (4.4) é uma equação do segundo grau na variável A, logo A é raiz da equação $ax^2 + bx + c = 0$.
Dividindo a equação (4.4) por A, obtemos

$$aA + b + \frac{c}{A} = 0. \tag{4.5}$$

Se considerarmos A da forma $A = \dfrac{\alpha}{\beta}$, podemos dividir nosso estudo em três casos:

1. $\alpha \neq 1, \beta = 1$
2. $\alpha = 1, \beta \neq 1$
3. $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$

4.1.1 Caso 1. $\alpha \neq 1, \beta = 1$

Este caso é o que está representado em (4.5),isto é, devemos encontrar um $\alpha \neq 0$ tal que

$$a\alpha + b + \frac{c}{\alpha} = 0.$$

Em outras palavras, devemos procurar um $\alpha \neq 0$, que faça essa equação ser verdadeira. Note que esta proposta de mudança de variável, altera apenas os valores dos coeficientes a e c da equação que estamos interessados em obter as raízes, o primeiro sendo multiplicado por um valor e o último sendo dividido por este mesmo valor. Voltemos ao exemplo anterior e tentemos encontrar a mudança que foi sugerida
Exemplo 3. Determine as raízes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$.
A soma dos coeficientes é $2 - 7 + 3 = -2 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 1; precisamos encontrar $\alpha \neq 1$ tal que

$$2\alpha - 7 + \frac{3}{\alpha} = 0 \tag{4.6}$$

. Claro que este método é útil caso seja fácil determinar tal α por verificação simples, pois encontrar tal α é equivalente a encontrar a solução da equação inicial. Procuremos números que quando 3 for dividido por ele, tenhamos (4.6) seja verdadeira. Tentemos o mais simples, $\alpha = 3$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$2.3 - 7 + \frac{3}{3} = 6 - 7 + 1 = 0.$$

Logo $\alpha = 3$ é o número procurado e a mudança é $x = 3y$. Que foi a substituição usada no exemplo 2.

Exemplo 4. Determine as raízes da equação $5x^2 - 21x + 4 = 0$

A soma dos coeficientes é $5 - 21 + 4 = -12 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 1. precisamos encontrar $\alpha \neq 1$ tal que

$$5\alpha - 21 + \frac{4}{\alpha} = 0. \tag{4.7}$$

Procuremos números que quando 4 for dividido por ele tenhamos (4.7) verdadeira. Tentemos o mais simples, $\alpha = 4$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$5.4 - 21 + \frac{4}{4} = 20 - 21 + 1 = 0.$$

Logo $\alpha = 4$ é o número procurado e a mudança é $x = 4z$. Isso nos dará a equação

$$20z^2 - 21z + 1 = 0 \tag{4.8}$$

observe que nessa equação a soma dos coeficientes é $20 - 21 + 1 = 0$ e pelo que foi visto temos as seguintes raizes:

$$z_1 = 1 \text{ e } z_2 = \frac{c}{a}.$$

Portanto as raízes de (4.8) seram:

$$z_1 = 1 \text{ e } z_2 = \frac{1}{20}.$$

Para a determinação das raízes da equação original faremos o seguinte:

Como o fator que utilizamos foi o 4, então multiplicaremos as raízes de (4.8), por esse mesmo fator e assim será determinadas as raízes de $5x^2 - 21x + 4 = 0$, se não vejamos:

$$x_1 = 4.z_1 = 4.1 = 4$$
$$x_2 = 4.z_2 = 4.\frac{1}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$$

observe que se $x_1 = 4$ então, $5.4^2 - 21.4 + 4 = 80 - 84 + 4 = 0$, portanto 4 é raiz da referida equação, da mesma forma tomando $x_2 = \frac{1}{5}$, então:

$$5\left(\frac{1}{5}\right)^2 - 21\left(\frac{1}{5}\right) + 4 = 0.$$

Exemplo 5. Dertermine as raízes da equação $6x^2 + 14x + 4 = 0$.

A soma dos coeficientes é $6 + 14 + 4 = 24 \neq 0$.Para tentarmos uma mudança do tipo 1. Precisamos encontrar $\alpha \neq 1$ tal que:

$$6\alpha + 14 + \frac{4}{\alpha} = 0. \tag{4.9}$$

Procuremos números que quando 4 for dividido por ele, tenhamos (4.9) verdadeira. Tentemos o mais simples, $\alpha = 4$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$6.4 + 14 + \frac{4}{4} = 24 + 14 + 1 = 29.$$

Tentemos um número negativo $\alpha = -4$

$$6.(-4) + 14 + \frac{4}{-4} = -24 + 14 - 1 = -11.$$

Tentando $\alpha = -2$

$$6.(-2) + 14 + \frac{4}{-2} = -12 + 14 - 2 = 0.$$

Logo $\alpha = -2$ é o número procurado e a mudança é $x = -2z$. Isso nos dará a equação:

$$(-2).6z^2 + 14z + (-2) = 0$$

$$-12z^2 + 14z - 2 = 0 \tag{4.10}$$

nesta equação, temos que $a+b+c = -12+14-2 = 0$, facilitando assim a determinação de suas raízes, que são:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{c}{a} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$$

agora determinar as raízes de $6x^2+14x+4 = 0$, fica muito fácil, ou seja usando o mesmo procedimento que na questão anterior e sabendo que neste caso o fator utilizado foi (-2), teremos que:

$$x_1 = (-2).z_1 = (-2).1 = -2$$

$$x_2 = (-2).z_2 = (-2).\frac{1}{6} = \frac{(-2)}{6} = \frac{-1}{3}$$

4.1.2 Caso 2. $\alpha = 1, \beta \neq 1$

Este caso, quando substituído em (4.5), ou seja, encontrar um $\beta \neq 0$ tal que

$$\frac{a}{\beta} + b + \beta.c = 0. \tag{4.11}$$

Em outras palavras, devemos procurar um $\beta \neq 0$, que faça essa equação ser verdadeira. Note que esta proposta de mudança de variável, também só altera os valores dos coeficientes a e c da equação que estamos interessados em obter as raízes, só que agora o primeiro vai ser dividido por este número e o último será multiplicado por este mesmo valor.

Exemplo 6. Determine as raízes da equação $12x^2 + 14x - 10 = 0$

A soma dos coeficientes é $12 + 14 - 10 = 6 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 2 precisamos encontrar $\beta \neq 1$ tal que

$$\frac{12}{\beta} + 14 - 10\beta = 0.$$

Procuremos números que quando dividirmos 12 por este número tenhamos (4.11) verdadeira. Tentemos o mais simples, $\beta = 12$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$\frac{12}{12} + 14 - 10.12 = -105.$$

Tentemos um número menor $\beta = 2$. Observe que:

$$\frac{12}{2} + 14 - 10.2 = 0.$$

Logo $\beta = 2$ é o número procurado e a mudança é $x = \frac{z}{2}$. Isso nos dá a equação

$$6z^2 + 14z - 20 = 0$$

como $6 + 14 - 20 = 0$ então as raízes da equação são:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{-20}{6} = \frac{-10}{3}$$

e as raízes da equação inicial são:

$$x_1 = \frac{z_1}{2} = \frac{z_1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{z_2}{2} = \frac{z_2}{2} = \frac{\left(\frac{-10}{3}\right)}{2} = \frac{-5}{3}$$

4.1.3 Caso 3. $\alpha \neq 1, \beta \neq 1$

Este caso, quando substituído em (4.5), ou seja, encontrar um $\alpha, \beta \neq 0$ tais que

$$\frac{a\alpha}{\beta} + b + \frac{\beta.c}{\alpha} = 0. \tag{4.12}$$

Em outras palavras, devemos procurar um $\alpha, \beta \neq 0$, que faça essa equação ser verdadeira. Note que esta proposta de mudança de variável, também só altera os valores dos coeficientes a e c da equação que estamos interessados em obter as raizes.

Comecemos com um caso particular, considerado no exemplo abaixo:

Exemplo 7. Determine as raízes da equação $6x^2 - 19x + 15 = 0$.

A soma dos coeficientes é $6 - 19 + 15 = 2 \neq 0$. Para tentarmos uma mudança do tipo 3 precisamos encontrar $\alpha, \beta \neq 0$ tais que

$$\frac{6\alpha}{\beta} - 19 + \frac{\beta.15}{\alpha} = 0.$$

Procuremos números α que divida 15 e β que divida 6, de modo que (4.12) seja verdadeira, ou seja, tentemos os mais simples, $\alpha = 15$ e $\beta = 6$. Substituindo do lado esquerdo temos

$$\frac{6.15}{6} - 19 + \frac{6.15}{15} = 15 - 19 + 6 = 2 \neq 0.$$

Tentemos $\alpha = 5$ e $\beta = 3$

$$\frac{6.5}{3} - 19 + \frac{3.15}{5} = 10 - 19 + 9 = 0.$$

Logo temos $\alpha = 5$ e $\beta = 3$ são os números procurados e a mudança é $x = \frac{5z}{3}$. Isso nos dá a equação

$$10x^2 - 19x + 9 = 0 \tag{4.13}$$

como $10 - 19 + 9 = 0$ temos que as raízes de 4.13, são:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{9}{10}$$

Assim as raízes de $6x^2 - 19x + 15 = 0$, são:

$$x_1 = z_2.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = 1.\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

$$x_2 = z_2.\left(\frac{\alpha}{\beta}\right) = \frac{9}{10}.\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

De modo prático, basta fatorar os termos a ou c da equação estudada, para que possamos determinar a equação de mudança de variável vejamos como funciona.

Exemplo 8. Determine as raízes da equação $20x^2 - 201x + 10 = 0$.

Dada a equação $20x^2 - 201x + 10 = 0$, podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$20x^2 - 201x + 10.1 = 0.$$

Devemos ter em mente que a soma dos coeficientes da equação de mudança de variável deve ser igual a zero, assim a partir dos coeficientes a ec da equação original iremos determinar os coeficientes da equação de mudança de variável, observe que c é o produto 10.1. Multiplicando o fator 10 pelo termo a teremos o coeficiente a' da equação de mudança de variável. O c' da referida equação será o fator 1 em outras palavras teremos:

$$200z^2 - 201z + 1 = 0 \tag{4.14}$$

como $200 - 201 + 1 = 0$ temos que as raízes de (4.14), são:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{1}{200}$$

e as raízes da equação inicial são:

$$x_1 = 10.z_1 = 10.1 = 10$$

$$x_2 = 10.z_2 = 10.\frac{1}{200} = \frac{1}{20}$$

Vejamos um fato interessante, suponha que estamos interessados em saber o valor do discriminante da equação inicial ou seja:
$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-201)^2 - 4.20.10 \Rightarrow \Delta = 40401 - 800 \Rightarrow \Delta = 39601$

Agora pegue o módulo da diferença entre o coeficiente do termo ao quadrado e o termo independente da equação de mudança de variável ou seja:
$|200 - 1| = 199$ que é igual a $\sqrt{\Delta} = \sqrt{39601}$

Vamos refazer o **Exemplo 2**, da mesma maneira que resolvemos o exemplo anterior. Ou seja, determine as raízes da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$.

Da mesma maneira que no exemplo anterior vamos reescrever $2x^2 - 7x + 3 = 0$ como $2x^2 - 7x + 3.1 = 0$ com o fator 3 do termo c e o termo $a = 2$, determinamos o coeficiente do termo ao quadrado da equação de mudança de variável e com o fator 1 do termo c determinamos o termo independente da referida equação, que agora podemos escrevê-la da seguinte forma:

$$3.2z^2 - 7z + 1 = 0 \Rightarrow 6z^2 - 7z + 1 = 0$$

Como $6 - 7 + 1 = 0$ teremos:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{1}{7}$$

e as raízes da equação inicial são:

$$x_1 = 3.z_1 = 3.1 = 3$$
$$x_2 = 3.z_2 = 3.\frac{1}{7} = \frac{3}{7}$$

Voltamos a observar que $|6 - 1| = 5$ é igual a raiz quadrada do discriminante da equação $2x^2 - 7x + 3 = 0$, se não vejamos:
$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow \Delta = (-7)^2 - 4.2.6 \Rightarrow \Delta = 49 - 24 \Rightarrow \Delta = 25$, uma pergunta que surge é. Isso ocorre sempre nesse tipo de mudança de variável?

A resposta a essa pergunta é sim, se a equação original possuir raízes reais e não caso contrário.

A justificativa para essa afirmação é que em ambos os casos anteriores equação original era da forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde o termo independente pode ser escrito como sendo $c = \alpha.\beta$, e a equação de mudança da variável foi escrita assim:
$\alpha az^2 + bz + \beta = 0$, com $\alpha a + b + \beta = 0$. Dai segue que $\alpha a + b + \beta = 0 \Rightarrow b = -(\alpha a + \beta)$, então o discriminante da equação original será dado por:
$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow$
$\Delta = [-(\alpha a + \beta)]^2 - 4.a.(\alpha.\beta) \Rightarrow$
$\Delta = \alpha^2.a^2 + 2.a.\alpha.\beta - 4.a.\alpha.\beta + \beta^2 \Rightarrow$
$\Delta = \alpha^2.a^2 - 2.a.\alpha.\beta + \beta^2 = (\alpha.a - \beta)^2$
O que nos leva a concluir que:
$\sqrt{\Delta} = |\alpha.a - \beta|$.

Esse método pode em alguns casos tornar bastante simples tarefa de determinação das raízes de uma equação do segundo grau, se não vejamos.

Exemplo 8. Determine as raízes da equação $4x^2 - (2 + 2.\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$.

Suponha que não sabemos do método visto anteriormente, então usaremos o modo tradicional de resolução ou seja aplicaremos a fórmula de Bhaskara.
$\Delta = b^2 - 4.a.c \Rightarrow$
$\Delta = \left[-(2 + 2.\sqrt{2})\right]^2 - 4.4.\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Delta = 4 + 8\sqrt{2} + 8 - 16\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Delta = 12 - 8\sqrt{2}$
Continuando temos que:
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow$
$x = \dfrac{-[-(2 + 2\sqrt{2})] \pm \sqrt{12 - 8\sqrt{2}}}{2.4}$

Agora a estratégia é determinar o valor de $\sqrt{12 - 8\sqrt{2}}$, ou seja vamos trabalhar com um radical duplo, sendo assim recorreremos a um dos métodos mais fáceis de transformar uma radical duplo em radicais simples.

Sabemos que um radical duplo do tipo $\sqrt{A \pm \sqrt{B}}$, pode ser escrito na forma:

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + C}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - C}{2}}$$

Onde $C = \sqrt{A^2 - B}$.
Então, partindo do radical duplo $\sqrt{12 - \sqrt{128}}$, teremos que $A = 12$ e $B = 128$, sendo assim: $C = \sqrt{12^2 - 128} = \sqrt{144 - 128} = \sqrt{16} = 4$.

Prosseguindo, teremos que:
$\sqrt{12-\sqrt{128}} = \sqrt{\dfrac{12+4}{2}} - \sqrt{\dfrac{12-4}{2}} = \sqrt{\dfrac{16}{2}} - \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{8} - \sqrt{4} = 2.\sqrt{2} - 2$
Para concluir,
$x = \dfrac{-[-(2+2.\sqrt{2})] \pm \sqrt{12-8\sqrt{2}}}{2.4}$
$x = \dfrac{2+2.\sqrt{2} \pm (2.\sqrt{2}-2)}{8}$, então:
$x_1 = \dfrac{2+2\sqrt{2}+(2.\sqrt{2}-2)}{8} = \dfrac{4.\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
$x_2 = \dfrac{2+2\sqrt{2}-(2.\sqrt{2}-2)}{8} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$

Usando a equação e mudança de variável, chegaremos a essa resposta com bastante facilidade, se não vejamos:

Dada a equação $4x^2 - (2+2.\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$, podemos escrevê-la $2.2x^2 - (2 + 2.\sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$, devemos ter em mente que a soma dos coeficientes da equação de mudança de variável deve ser zero, assim a partir dos coeficientes a e c da equação original iremos determinar a equação de mudança de variável, observe que a é o produto 2.2, multiplicando o fator 2 pelo termo c teremos o coeficiente do termo independente da equação de mudança de variável. O coeficiente do termo ao quadrado da referida equação será o outro fator 2 em outras palavras teremos:
$2z^2 - (2+2.\sqrt{2})z + 2.\sqrt{2} = 0$, observe que $2 - (2+2.\sqrt{2}) + 2\sqrt{2} = 0$, e como vimos até agora teremos que:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = 2.\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Assim,

$$x_1 = \frac{1}{2}.z_1 = \frac{1}{2}.1 = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}.z_2 = \frac{1}{2}.\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Vale salientar que nem sempre é fácil determinar a equação de mudança de variável, para verificar essa afirmação faremos o exemplo a seguir:

Exemplo 3 Determine as raízes da equação $3x^2 - 11x + 2 = 0$.

Observe que o termo $a = 3$, pode ser escrito da seguinte forma $a = \left(\dfrac{(11-\sqrt{97}).(11+\sqrt{97})}{8}\right)$, ou seja, nossa equação fica assim:

$$\left(\frac{(11-\sqrt{97}).\left(11+\sqrt{97}\right)}{8}\right)x^2 - 11x + 2 = 0.$$

Sendo assim poderemos determinar a equação de mudança de variável, o que faremos abaixo:

$$\frac{(11-\sqrt{97})}{2}.z^2 - 11z + 2.\frac{(11+\sqrt{97})}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$\frac{(11-\sqrt{97})}{2}.z^2 - 11z + \frac{(11+\sqrt{97})}{2} = 0$$

Observe que:

$$\frac{(11-\sqrt{97})}{2} - 11 + \frac{(11+\sqrt{97})}{2} = 0.$$

Então suas raízes são:

$$z_1 = 1$$

$$z_2 = \frac{c_1}{a_1} = \frac{\frac{(11-\sqrt{97})}{2}}{\frac{(11+\sqrt{97})}{2}} = \frac{(11-\sqrt{97})}{(11+\sqrt{97})}.$$

No próximo Capítulo apresentaremos os resultados da aplicação desse método em sala de aula.

Capítulo 5

Aplicação em sala

5.1 Caracterização da Escola

5.1.1 Dados da escola

Nome: Escola Estadual Doutor Silvio Bezerra de Melo.
Endereço: Rua Luiz Janilson, s/n. Currais Novos RN.
Período de atendimento: matutino, vespertino e noturno.
Nível escolar atendido: Ensino Fundamental e Médio.
Total de alunos: 413

5.1.2 Recursos Materiais

Salas de aula: A escola possui 07 salas, não climatizadas com uma média de 30 carteiras.
Biblioteca: 01
Laboratórios: 01 laboratório de informática.
Salas de Multimídia : 01 sala, com um Datashow, uma tv e um equipamento de som.

5.1.3 Recursos Humanos

Equipe administrativa é composta por:
Diretor: Luzia Neuza de Medeiros Araújo.
Coordenador pedagógico: Maria de Lourdes Matias.
Possuindo mais 40 funcionários, dos quais vinte são professores.

5.1.4 Abordagem aos alunos

A aplicação do método central dessa dissertação, foi realizada numa turma do 9º ano do Ensino fundamental da Escola Estadual Doutor Silvio Bezerra de Melo, essa turma era composta por 36 alunos, todos na faixa etária entre 13 e 16 anos.

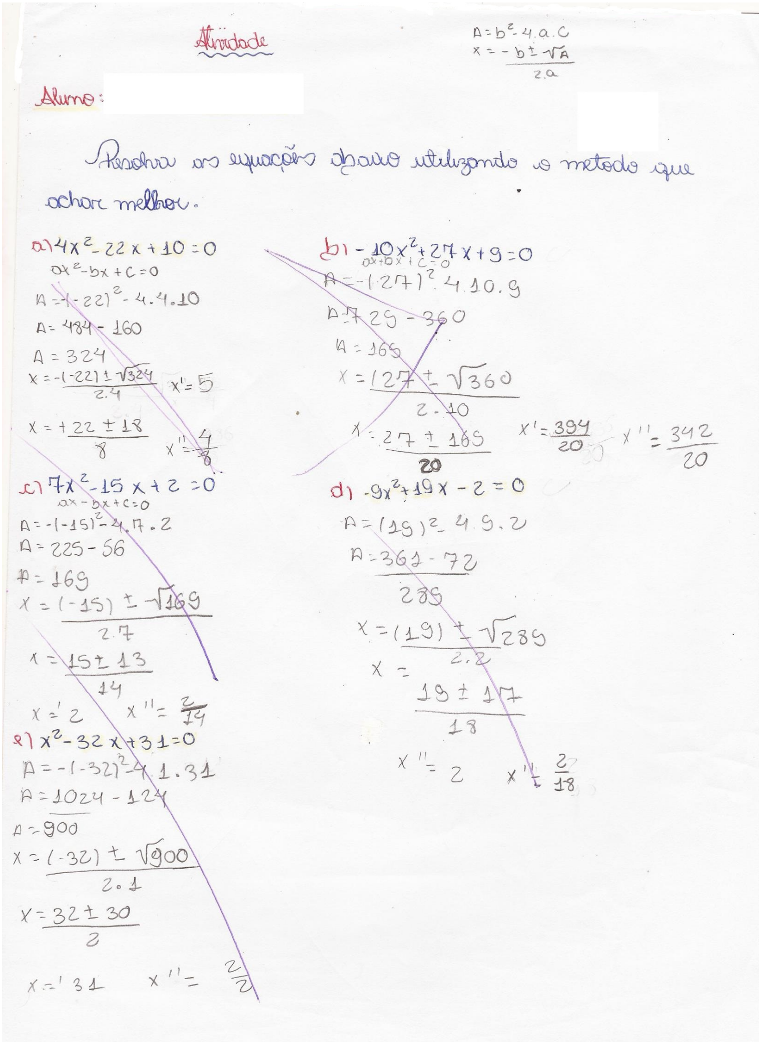
A estratégia utilizada foi a seguinte. Trabalhamos as equações do segundo grau no que diz respeito a determinação de suas raízes, aplicando os principais métodos utilizados pelos livros didáticos brasileiros com também o livro adotado pela Escola. De modo geral os principais métodos são o da fórmula de Bhaskara, Completamento de quadrados e relação de Girard ou seja os mesmos que citamos durante a nossa dissertação, em seguida, fizemos alguns trabalhos avaliativos com os alunos, com o objetivo entender quais eram os principais fatores que poderiam causar dúvidas na simples tarefa de determinação de raízes de uma equação do segundo, e a para nossa surpresa percebemos que grande maioria dos alunos entendiam os métodos abordados, porém tinha dificuldades em trabalhar com potências e com raízes, o que dificultava em muito essa tarefa. Em seguida mostramos o nosso método, que na realidade é uma mudança de variável, porém pela imaturidade da turma falamos que usávamos uma equação auxiliar, ao invés de mudança de variável.

A mudança de variável ou equação auxiliar como apresentamos para eles não exigia o prévio conhecimento de potenciação e nem de radiciação, o que de pronto foi bem aceito pelos alunos, depois que apresentamos o método e resolvemos alguns exemplos para a turma, foi proposto um novo trabalho avaliativo, onde observamos que a maioria da turma conseguia realizar a tarefa exigida, ou seja conseguiam determinar as raízes das equações apresentadas no trabalho.

5.1.5 Trabalhos realizados após a apresentação dos métodos tradicionais

Vamos apresentar agora alguns desses trabalhos.

Alguns dos trabalhos realizados pelos alunos, após a apresentação dos métodos abordados pelos livros didáticos.



Atividade

$\Delta = b^2 - 4.a.c$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}$

Aluno:

Resolva as equações abaixo utilizando o metodo que achar melhor.

a) $4x^2 - 22x + 10 = 0$
$ax^2 - bx + c = 0$
$\Delta = (-22)^2 - 4.4.10$
$\Delta = 484 - 160$
$\Delta = 324$
$x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{324}}{2.4}$ $x' = 5$
$x = \frac{+22 \pm 18}{8}$ $x'' = \frac{4}{8}$

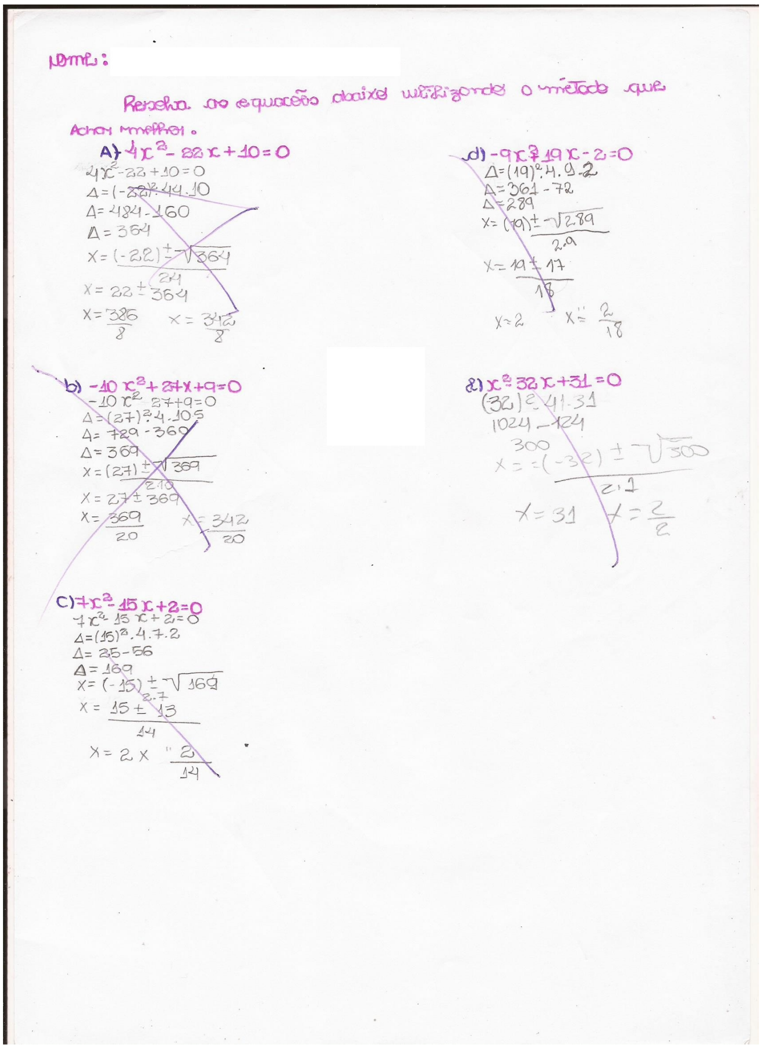
b) $-10x^2 + 27x + 9 = 0$
$ax^2 + bx + c = 0$
$\Delta = -(27)^2 \cdot 4.10.9$
$\Delta = 729 - 360$
$\Delta = 169$
$x = \frac{(27 \pm \sqrt{360})}{2.10}$
$x = \frac{27 \pm 169}{20}$ $x' = \frac{394}{20}$ $x'' = \frac{342}{20}$

c) $7x^2 - 15x + 2 = 0$
$ax - bx + c = 0$
$\Delta = -(-15)^2 - 4.7.2$
$\Delta = 225 - 56$
$\Delta = 169$
$x = \frac{(-15) \pm \sqrt{169}}{2.7}$
$x = \frac{15 \pm 13}{14}$
$x' = 2$ $x'' = \frac{2}{14}$

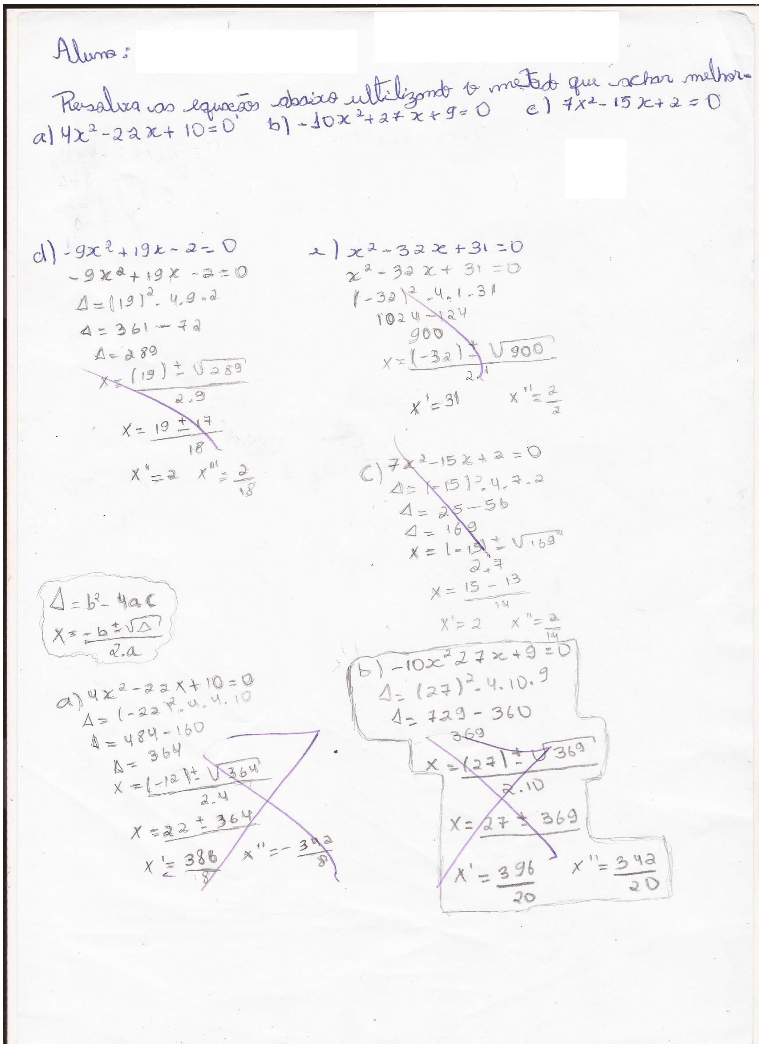
d) $-9x^2 + 19x - 2 = 0$
$\Delta = (19)^2 \cdot 4.9.2$
$\Delta = 361 - 72$
289
$x = \frac{(19) \pm \sqrt{289}}{2.2}$
$x = \frac{19 \pm 17}{18}$
$x'' = 2$ $x' = \frac{2}{18}$

e) $x^2 - 32x + 31 = 0$
$\Delta = -(-32)^2 - 4.1.31$
$\Delta = 1024 - 124$
$\Delta = 900$
$x = \frac{(-32) \pm \sqrt{900}}{2.1}$
$x = \frac{32 \pm 30}{2}$
$x' = 31$ $x'' = \frac{2}{2}$

Trabalho 1



Trabalho 2



Aluno:

Resolva as equações abaixo utilizando o método que achar melhor.

a) $4x^2-22x+10=0$ b) $-10x^2+27x+9=0$ c) $7x^2-15x+2=0$

d) $-9x^2+19x-2=0$

$-9x^2+19x-2=0$

$\Delta=(19)^2-4.9.2$

$\Delta=361-72$

$\Delta=289$

$x=\frac{(19)\pm\sqrt{289}}{2.9}$

$x=\frac{19\pm17}{18}$

$x'=2$ $x''=\frac{2}{18}$

e) $x^2-32x+31=0$

$x^2-32x+31=0$

$(-32)^2-4.1.31$

$1024-124$

900

$x=\frac{(-32)\pm\sqrt{900}}{2.1}$

$x'=31$ $x''=\frac{2}{2}$

c) $7x^2-15x+2=0$

$\Delta=(-15)^2-4.7.2$

$\Delta=25-56$

$\Delta=169$

$x=\frac{(-15)\pm\sqrt{169}}{2.7}$

$x=\frac{15-13}{14}$

$x'=2$ $x''=\frac{2}{14}$

$\boxed{\Delta=b^2-4ac \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2.a}}$

a) $4x^2-22x+10=0$

$\Delta=(-22)^2-4.4.10$

$\Delta=484-160$

$\Delta=364$

$x=\frac{(-12)\pm\sqrt{364}}{2.4}$

$x=22\pm364$

$x'=\frac{386}{8}$ $x''=-\frac{342}{8}$

b) $-10x^2\,27x+9=0$

$\Delta=(27)^2-4.10.9$

$\Delta=729-360$

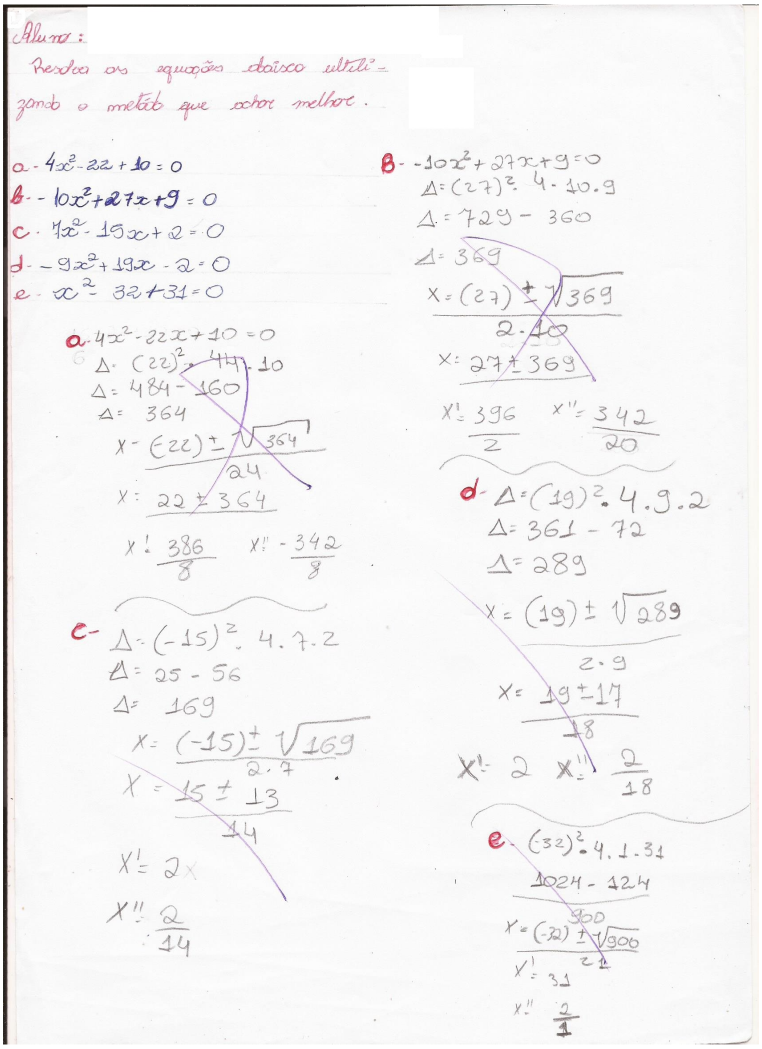
369

$x=\frac{(27)\pm\sqrt{369}}{2.10}$

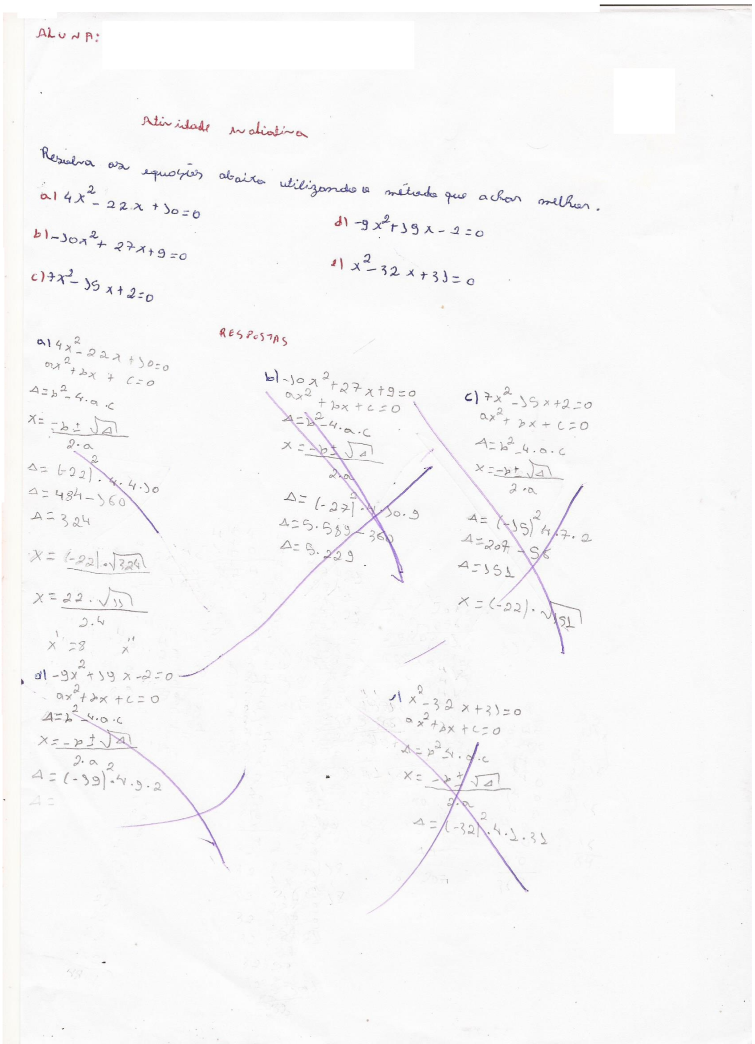
$x=27\pm369$

$x'=\frac{396}{20}$ $x''=\frac{342}{20}$

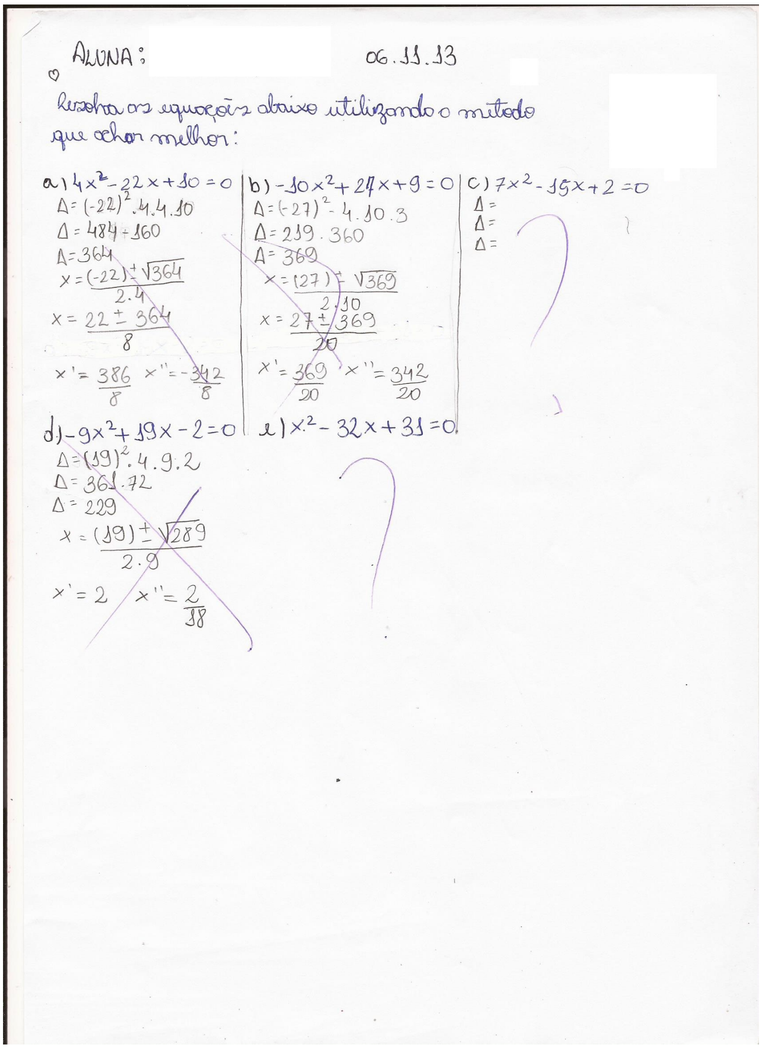
Trabalho 3



Trabalho 4



Trabalho 5



ALUNA: 06.11.13

Resolva as equações abaixo utilizando o método que achar melhor:

a) $4x^2-22x+10=0$

$\Delta=(-22)^2.4.4.10$

$\Delta=484+160$

$\Delta=364$

$x=\frac{(-22)\pm\sqrt{364}}{2.4}$

$x=\frac{22\pm 364}{8}$

$x'=\frac{386}{8}$ $x''=-\frac{342}{8}$

b) $-10x^2+27x+9=0$

$\Delta=(-27)^2-4.10.3$

$\Delta=219.360$

$\Delta=369$

$x=\frac{(27)\pm\sqrt{369}}{2.10}$

$x=\frac{27\pm 369}{20}$

$x'=\frac{369}{20}$ $x''=\frac{342}{20}$

c) $7x^2-15x+2=0$

$\Delta=$

$\Delta=$

$\Delta=$

d) $-9x^2+19x-2=0$

$\Delta=(19)^2.4.9.2$

$\Delta=361.72$

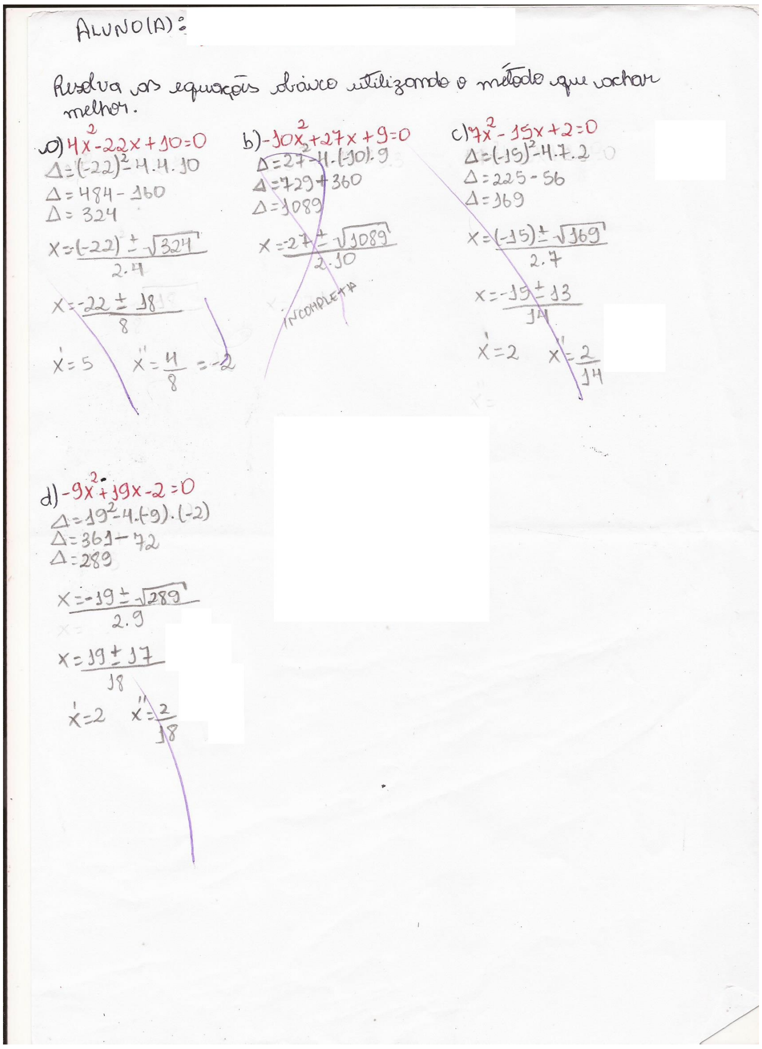
$\Delta=229$

$x=\frac{(19)\pm\sqrt{289}}{2.9}$

$x'=2$ $x''=\frac{2}{18}$

e) $x^2-32x+31=0$

Trabalho 6



ALUNO(A):

Resolva as equações abaixo utilizando o método que achar melhor.

a) $4x^2-22x+10=0$

$\Delta=(-22)^2-4.4.10$

$\Delta=484-160$

$\Delta=324$

$x=\frac{(-22)\pm\sqrt{324}}{2.4}$

$x=\frac{-22\pm 18}{8}$

$x'=5$ $x''=\frac{4}{8}=-2$

b) $-10x^2+27x+9=0$

$\Delta=27^2-4.(-10).9$

$\Delta=729+360$

$\Delta=1089$

$x=\frac{-27\pm\sqrt{1089}}{2.10}$

INCOMPLETA

c) $7x^2-15x+2=0$

$\Delta=(-15)^2-4.7.2$

$\Delta=225-56$

$\Delta=169$

$x=\frac{(-15)\pm\sqrt{169}}{2.7}$

$x=\frac{-15\pm 13}{14}$

$x'=2$ $x''=\frac{2}{14}$

d) $-9x^2+19x-2=0$

$\Delta=19^2-4.(-9).(-2)$

$\Delta=361-72$

$\Delta=289$

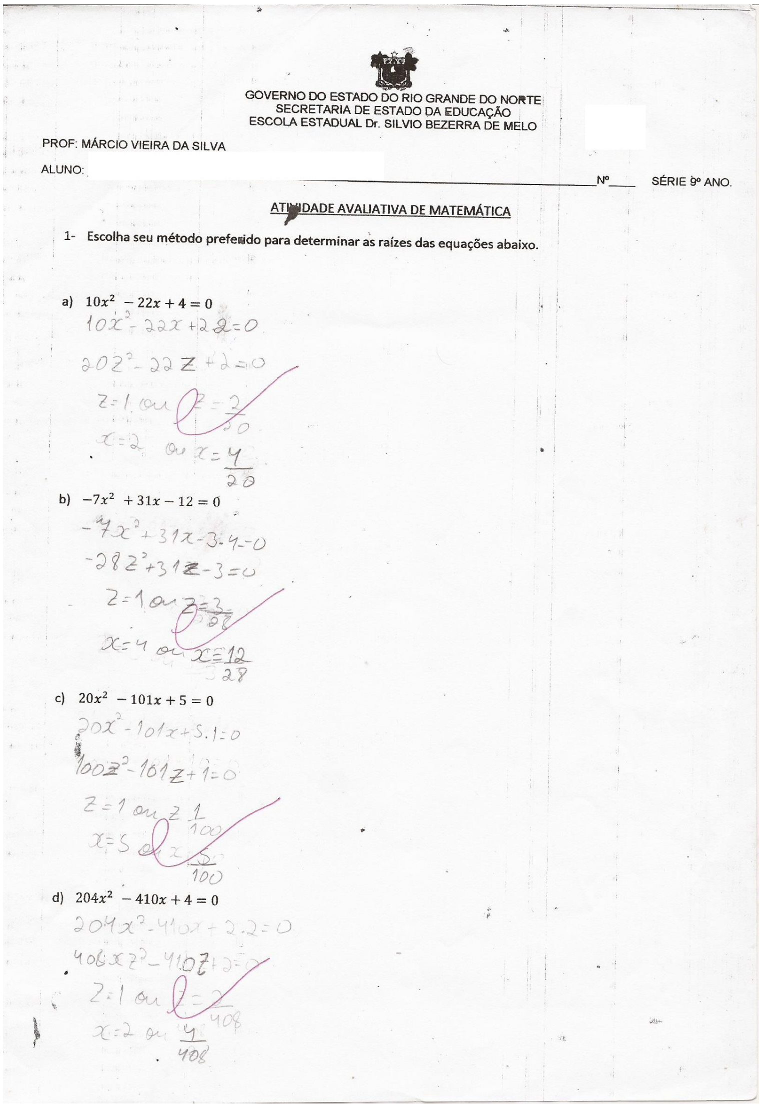
$x=\frac{-19\pm\sqrt{289}}{2.9}$

$x=\frac{19\pm 17}{18}$

$x'=2$ $x''=\frac{2}{18}$

Trabalho 7

5.1.6 Trabalhos realizados após a apresentação da nossa proposta.



GOVERNO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL Dr. SILVIO BEZERRA DE MELO

PROF: MÁRCIO VIEIRA DA SILVA

ALUNO: ______ Nº____ SÉRIE 9º ANO.

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA

1- Escolha seu método preferido para determinar as raízes das equações abaixo.

a) $10x^2 - 22x + 4 = 0$

$10x^2 - 22x + 2 \cdot 2 = 0$

$20z^2 - 22z + 2 = 0$

$z = 1$ ou $z = \frac{2}{20}$

$x = 2$ ou $x = \frac{4}{20}$

b) $-7x^2 + 31x - 12 = 0$

$-7x^2 + 31x - 3 \cdot 4 = 0$

$-28z^2 + 31z - 3 = 0$

$z = 1$ ou $z = \frac{3}{28}$

$x = 4$ ou $x = \frac{12}{28}$

c) $20x^2 - 101x + 5 = 0$

$20x^2 - 101x + 5 \cdot 1 = 0$

$100z^2 - 101z + 1 = 0$

$z = 1$ ou $z\ \frac{1}{100}$

$x = 5$ ou $x\ \frac{5}{100}$

d) $204x^2 - 410x + 4 = 0$

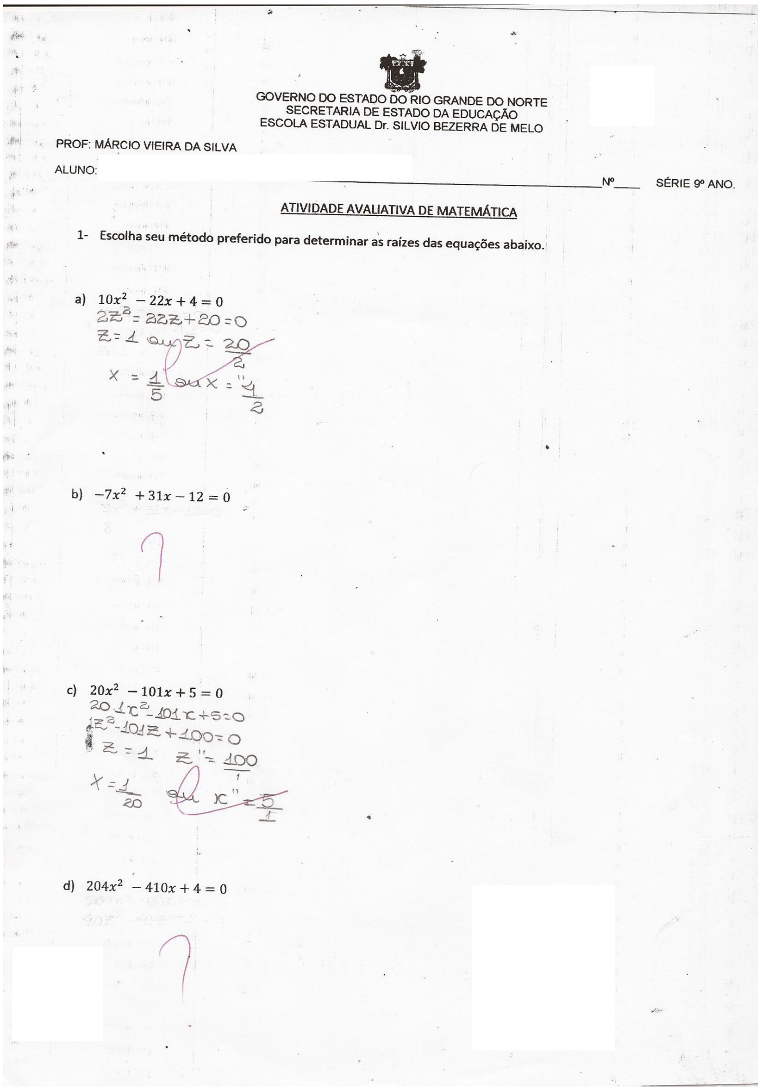
$204x^2 - 410x + 2 \cdot 2 = 0$

$408z^2 - 410z + 2 = 0$

$z = 1$ ou $z = \frac{2}{408}$

$x = 2$ ou $\frac{4}{408}$

Trabalho 8



GOVERNO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL Dr. SILVIO BEZERRA DE MELO

PROF: MÁRCIO VIEIRA DA SILVA

ALUNO: Nº____ SÉRIE 9º ANO.

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA

1- **Escolha seu método preferido para determinar as raízes das equações abaixo.**

a) $10x^2 - 22x + 4 = 0$

$2z^2 = 22z + 20 = 0$

$z = 1$ ou $z = \frac{20}{2}$

$x = \frac{1}{5}$ ou $x'' = \frac{1}{2}$

b) $-7x^2 + 31x - 12 = 0$

?

c) $20x^2 - 101x + 5 = 0$

$20 \cdot 1x^2 - 101x + 5 = 0$

$z^2 - 101z + 100 = 0$

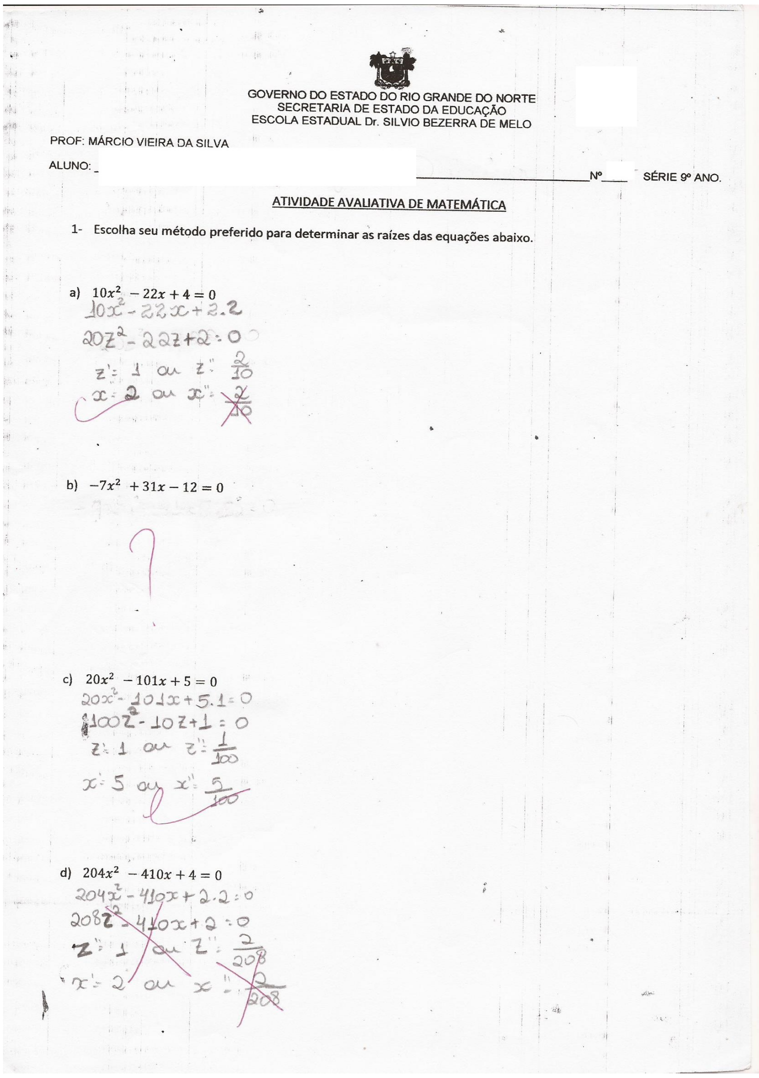
$z = 1$ $z'' = \frac{100}{1}$

$x = \frac{1}{20}$ ou $x'' = \frac{5}{1}$

d) $204x^2 - 410x + 4 = 0$

?

Trabalho 9



GOVERNO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL Dr. SILVIO BEZERRA DE MELO

PROF: MÁRCIO VIEIRA DA SILVA

ALUNO: ____________ Nº____ SÉRIE 9º ANO.

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA

1- Escolha seu método preferido para determinar as raízes das equações abaixo.

a) $10x^2 - 22x + 4 = 0$

$10x^2 - 22x + 2.2$

$20z^2 - 22z + 2 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{2}{10}$

$x' = 2$ ou $x'' = \cancel{\frac{2}{20}}$

b) $-7x^2 + 31x - 12 = 0$

?

c) $20x^2 - 101x + 5 = 0$

$20x^2 - 101x + 5.1 = 0$

$100z^2 - 10z + 1 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{1}{100}$

$x' = 5$ ou $x'' = \frac{5}{100}$

d) $204x^2 - 410x + 4 = 0$

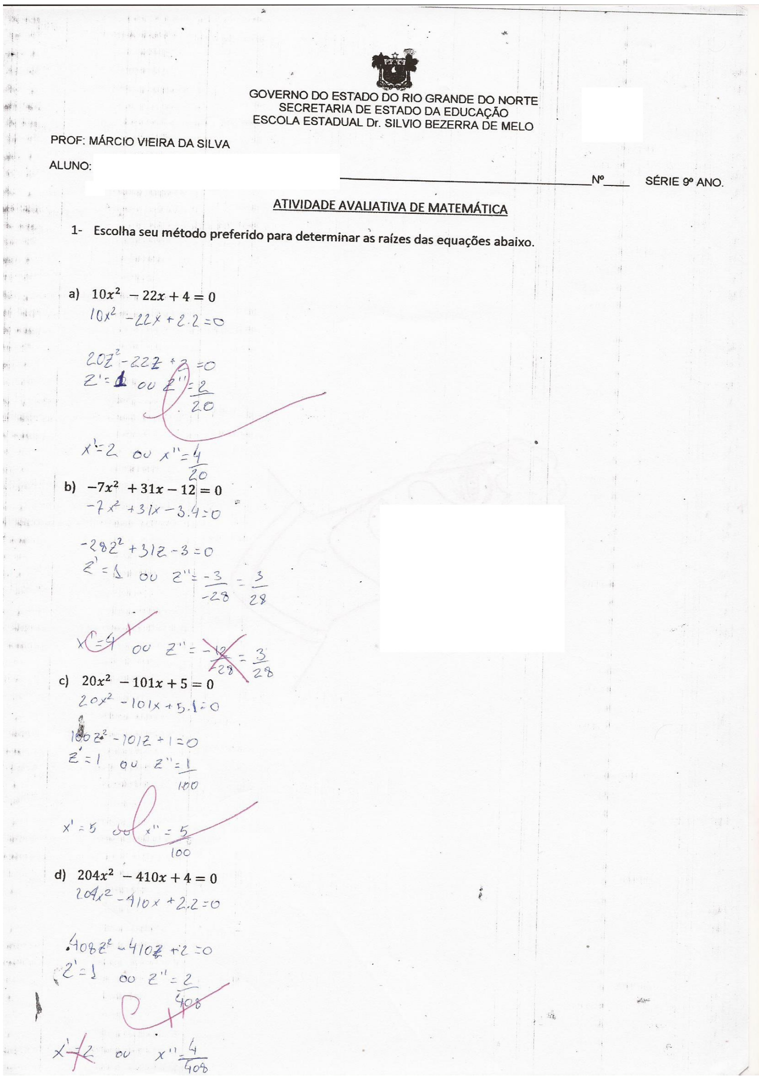
$204x^2 - 410x + 2.2 = 0$

$208z^2 - 410x + 2 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{2}{208}$

$x' = 2$ ou $x'' = \cancel{\frac{2}{208}}$

Trabalho 10



GOVERNO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL Dr. SILVIO BEZERRA DE MELO

PROF: MÁRCIO VIEIRA DA SILVA

ALUNO: ______ Nº____ SÉRIE 9º ANO.

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA

1- Escolha seu método preferido para determinar as raízes das equações abaixo.

a) $10x^2 - 22x + 4 = 0$

$10x^2 - 22x + 2.2 = 0$

$20z^2 - 22z + 2 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{2}{20}$

$x' = 2$ ou $x'' = \frac{4}{20}$

b) $-7x^2 + 31x - 12 = 0$

$-7x^2 + 31x - 3.4 = 0$

$-28z^2 + 31z - 3 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{-3}{-28} = \frac{3}{28}$

$x' = 4$ ou $z'' = \frac{-12}{-28} = \frac{3}{28}$

c) $20x^2 - 101x + 5 = 0$

$20x^2 - 101x + 5.1 = 0$

$100z^2 - 101z + 1 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{1}{100}$

$x' = 5$ ou $x'' = \frac{5}{100}$

d) $204x^2 - 410x + 4 = 0$

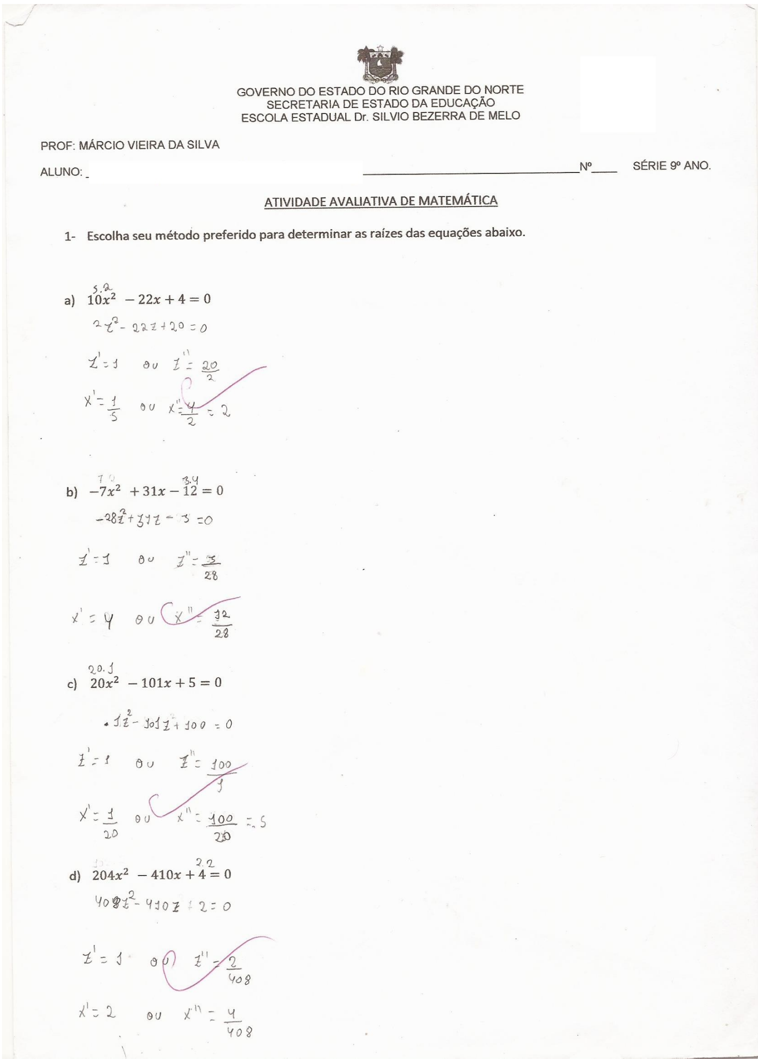
$204x^2 - 410x + 2.2 = 0$

$408z^2 - 410z + 2 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{2}{408}$

$x' = 2$ ou $x'' = \frac{4}{408}$

Trabalho 11



GOVERNO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL Dr. SILVIO BEZERRA DE MELO

PROF: MÁRCIO VIEIRA DA SILVA

ALUNO: _ ___________________________Nº____ SÉRIE 9º ANO.

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA

1- Escolha seu método preferido para determinar as raízes das equações abaixo.

a) $10x^2 - 22x + 4 = 0$ (5.2)

$2z^2 - 22z + 20 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{20}{2}$

$x' = \frac{1}{5}$ ou $x'' = \frac{4}{2} = 2$

b) $-7x^2 + 31x - 12 = 0$ (7.0; 3.4)

$-28z^2 + 31z - 3 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{3}{28}$

$x' = 4$ ou $x'' = \frac{12}{28}$

c) $20x^2 - 101x + 5 = 0$ (20.1)

$1z^2 - 101z + 100 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{100}{1}$

$x' = \frac{1}{20}$ ou $x'' = \frac{100}{20} = 5$

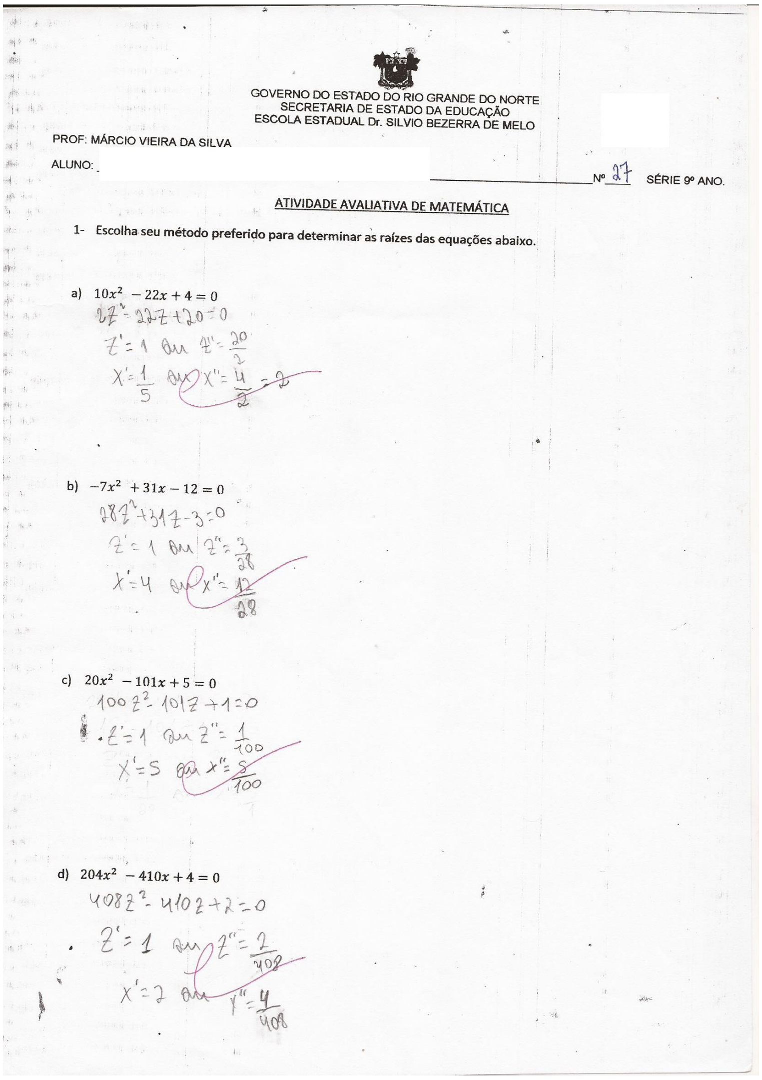
d) $204x^2 - 410x + 4 = 0$ (2.2)

$408z^2 - 410z + 2 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{2}{408}$

$x' = 2$ ou $x'' = \frac{4}{408}$

Trabalho 12



GOVERNO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL Dr. SILVIO BEZERRA DE MELO

PROF: MÁRCIO VIEIRA DA SILVA

ALUNO: ________ Nº 27 SÉRIE 9º ANO.

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA

1- Escolha seu método preferido para determinar as raízes das equações abaixo.

a) $10x^2 - 22x + 4 = 0$

$2z^2 - 22z + 20 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{20}{2}$

$x' = \frac{1}{5}$ ou $x'' = \frac{4}{2} = 2$

b) $-7x^2 + 31x - 12 = 0$

$28z^2 + 31z - 3 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{3}{28}$

$x' = 4$ ou $x'' = \frac{12}{28}$

c) $20x^2 - 101x + 5 = 0$

$100z^2 - 101z + 1 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{1}{100}$

$x' = 5$ ou $x'' = \frac{5}{100}$

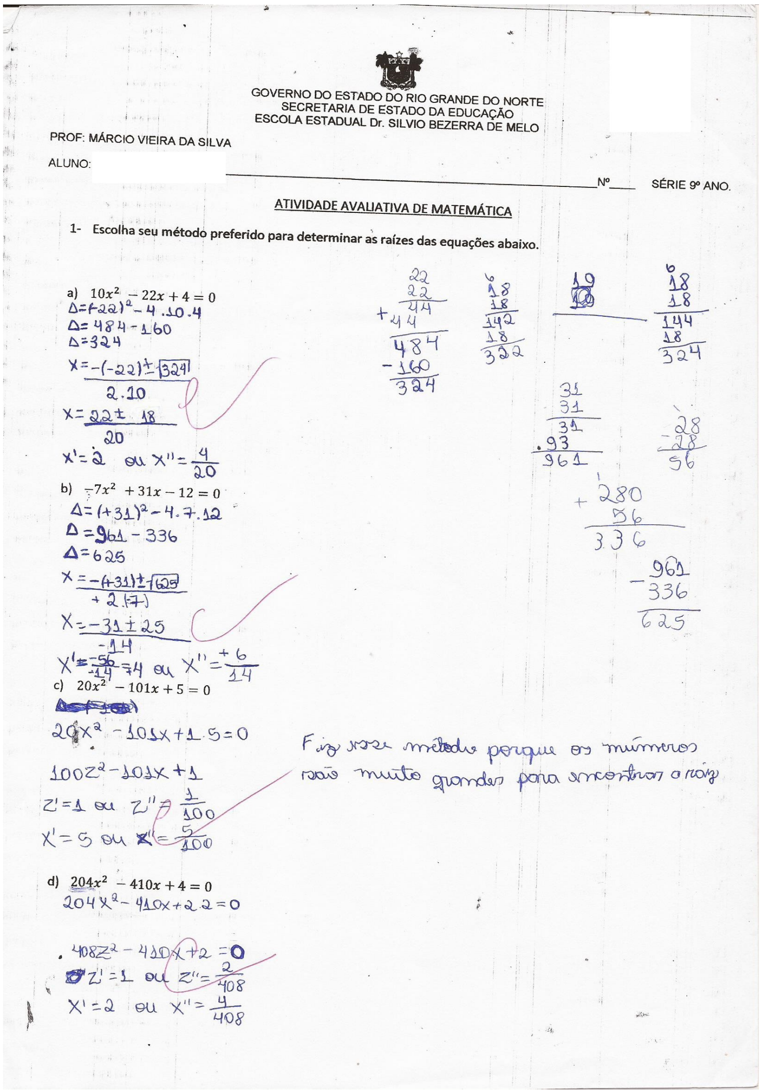
d) $204x^2 - 410x + 4 = 0$

$408z^2 - 410z + 2 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{2}{408}$

$x' = 2$ ou $x'' = \frac{4}{408}$

Trabalho 13


GOVERNO DO ESTADO DO RIO GRANDE DO NORTE
SECRETARIA DE ESTADO DA EDUCAÇÃO
ESCOLA ESTADUAL Dr. SILVIO BEZERRA DE MELO

PROF: MÁRCIO VIEIRA DA SILVA

ALUNO: ____ Nº____ SÉRIE 9º ANO.

ATIVIDADE AVALIATIVA DE MATEMÁTICA

1- Escolha seu método preferido para determinar as raízes das equações abaixo.

a) $10x^2 - 22x + 4 = 0$

$\Delta = (-22)^2 - 4.10.4$

$\Delta = 484 - 160$

$\Delta = 324$

$x = \frac{-(-22) \pm \sqrt{324}}{2.10}$

$x = \frac{22 \pm 18}{20}$

$x' = 2$ ou $x'' = \frac{4}{20}$

b) $-7x^2 + 31x - 12 = 0$

$\Delta = (+31)^2 - 4.7.12$

$\Delta = 961 - 336$

$\Delta = 625$

$x = \frac{-(+31) \pm \sqrt{625}}{+2.(7)}$

$x = \frac{-31 \pm 25}{-14}$

$x' = \frac{-56}{-14} = 4$ ou $x'' = \frac{+6}{14}$

c) $20x^2 - 101x + 5 = 0$

$20x^2 - 101x + 1.5 = 0$

$100z^2 - 101x + 1$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{1}{100}$

$x' = 5$ ou $x'' = \frac{5}{100}$

Fiz esse método porque os números são muito grandes para encontrar a raiz

d) $204x^2 - 410x + 4 = 0$

$204x^2 - 410x + 2.2 = 0$

$408z^2 - 410x + 2 = 0$

$z' = 1$ ou $z'' = \frac{2}{408}$

$x' = 2$ ou $x'' = \frac{4}{408}$

Trabalho 14

5.1.7 Conclusão

Observamos que, alguns alunos entenderam o processo, realizaram com sucesso todo o procedimento, demonstrando isso na segunda atividade avaliativa. Como também detectamos alunos que não obtiveram bons resultados, mas na maioria dos casos observamos um bom aproveitamento por partes dos alunos, a conclusão que tiramos desta experiência é que o ensino de matemática requer do professor uma constante evolução, sempre na certeza de que o aluno precisa ser motivado, e muitas vezes essa motivação requer que mudemos a nossa abordagem a cada conteúdo abordado.

Além disso, as equações do segundo grau normalmente é vista apenas como uma ferramenta de resolução de problemas, por esse motivo, nos capítulos um e dois deste trabalho mostramos todo os processos usados pelos grandes matemáticos, esperamos que este trabalho possa auxiliar os professores do Ensino Fundamental e Médio a melhorar o conhecimento algébrico dos alunos.

Referências Bibliográficas

[1] Andrade R.L. e Lima R. F., Módulos Matemáticos de Pré-Cálculo da SEDIS UFRN-EDUFRN Editora da UFRN, 2006

[2] Bianchini, E., *9º ano São Paulo.* 1ª Edição: Editora Moderna 2013.

[3] Bianchini, E., *Matemática* 8ª *série* - 9º *ano, São Paulo* 2ª Edição: Editora Moderna 2010.

[4] Boyer, C.B., *História da Matemática.* São Paulo, 1974.

[5] Carvalho, S.B.F,*TCC RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU: UMA ABORDAGEM METODOLÓGICA*. Santa Maria RS, 2008.

[6] Dante, L. R., *Vivência e Construção. Matemática* .Editora Ática. 4ª Edição 2013 (9º ano do ensino fundamental – Matemática).

[7] Dante, L. R., *Projeto Teláres* . Matemática - 9° Ano - 8ª Série - 2012 - Editora Atica.

[8] Dante, L. R., *Tudo é Matemática* . 9º Ano - 8ª Série - 3ª Edição - 2008 - Editora Atica.

[9] Eves, H., *Introdução à História da Matemática,*.Unicamp, Campinas, 1997 .

[10] Giovanni, J. R. e Giovanni Jr., J. R., *A conquista da Matemática,* 9ª*ano.* São Paulo: Atica 2012.

[11] Goldonne, L., *Projeto Apoema* . Matemática - 9º Ano/8ª Série - 2014- Editora Editora do Brasil .

[12] Iezzi, G. e Dolce, O., *Matemática e Realidade* . 8ª Série 9º Ano - 6ª Edição - Editora Atual (Grupo Saraiva) - 2010 .

[13] Imenes, L. M. e Lellis, M., *Matemática - Imenes Lellis - 9^o ano* .São Paulo: Editora Moderna 2013.

[14] Júnior, F.M.*TCC Métodos de Resolução de Equações do Segundo e do Terceiro Grau.*, Campo Grande-MS 2013

[15] Marques, C. e Silveira, Ê., *Compreensão e prática.* 2ª, 9º ano Edição, São Paulo: Editora Moderna 2010.

[16] Neto, E. R. e Balestri, R., *Nos dias de hoje* . Matemática - 9º Ano - 8ª Série - 2012 - Editora Leya.

[17] Pitombeira, J. B., *REVISITANDO UMA VELHA CONHECIDA* .www.bienasbm.ufba.br/C2.pdf.

[18] Guelli, O., *Revista do Professor de Matemática 15* . Sociedade Brasileira de Matemática.

[19] Hellmeiste, A. C. P., *Revista do Professor de Matemática 19* . Sociedade Brasileira de Matemática.

[20] Sampaio, F. A., *Jornadas Matemática* . Matemática - 9º Ano - 8ª Série - 2012 - Editora Saraiva - Didáticos.

[21] Silva, J. D., *Caderno do Futuro.* Matemática - 9º Ano - 8ª Série - 3ª Edição - 2013 - Editora IBEP Nacional.

[22] Vasconcellos, M. J. e Andrini, A. , *Novo Praticando Matemática* 8^a *Série* 9^a *Ano.* Editora Editora do Brasil - 2002.

[23] WAGNER, E. , Construções Geométricas. 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007