Instituto de Matemática e Estatística
Universidade Federal Fluminense

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Coordenação do PROFMAT

MARCONE SOARES SANTOS

VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Orientador: Mário Olivero

UNIVERSIDADE FEDERAL FLUMINENSE

NITERÓI
MARÇO/2015

MARCONE SOARES SANTOS

VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada por **Marcone Soares Santos** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Orientador: Mário Olivero

Niterói
2015

Ficha catalográfica elaborada pela Biblioteca de Pós-graduação em Matemática da UFF

S237 **Santos, Marcone Soares**
Visualização e tecnologia no ensino de matemática / Marcone Soares Santos. – Niterói, RJ : [s.n.], 2015.
65 p.

Orientador: Profº.Drº Mário Oliveira
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT) – Universidade Federal Fluminense, 2015.

1. Ensino de matemática. 2. Geogebra I. Título.

CDD 510.7

MARCONE SOARES SANTOS

VISUALIZAÇÃO E TECNOLOGIA NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Dissertação apresentada por **MARCONE SOARES SANTOS** ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Mestre.

Aprovada em: 30/03/2015

Banca Examinadora

Prof. Mário Olivero Marques da Silva - Orientador

Doutor – Universidade Federal Fluminense

Profª. Nancy de Souza Cardim - Membro

Doutora – Universidade Federal Fluminense

Profª. Léa de Freitas Silva - Membro

Doutora – Universidade Cândido Mendes

NITERÓI

2015

DEDICATÓRIAS

Á minha família, ao meu orientador e aos meus alunos de ontem, hoje e amanhã.

.

AGRADECIMENTOS

À minha esposa Marcia Lopes que sempre esteve ao meu lado com muita luz e harmonia.

À minha filha Isadora pela tranquilidade e pela ajuda quando precisava traduzir algum texto.

A meu orientador Mario Olivero pela dedicação e tranquilidade com que conduziu a orientação.

A meus irmãos Marcos, Marcio e Maurélio pela amizade e pela grande troca de experiências.

A todos os professores PROFMAT-UFF pelo carinho e respeito dedicados ao curso.

Aos amigos e companheiros de viagem Antonio José Francisco, Kurth, Filipe, Ana Paula e Willian.

A meus alunos que me ajudam a crescer a cada dia de trabalho.

Enfim, a Luz que nos mantém vivos.

Se você não é capaz de acreditar
que pode fazer algo, você nunca
chegará lá. (Karen Berg)

LISTA DE QUADROS OU GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ABNT	- Associação Brasileira de Gerenciamento de Projetos
PCNs	- Parâmetros Curriculares Nacionais
ENEM	- Exame Nacional do Ensino Médio
CNE.	- Conselho Nacional de Educação

RESUMO

Este trabalho apresenta a importância da visualização das imagens gráficas produzidas com o uso de recursos tecnológicos em busca de um ensino mais dinâmico e mais atraente para alunos e professores. Estes recursos favorecem a construção gráfica e possibilitam uma melhor análise das imagens geradas devido a todos os recursos de um software de geometria dinâmica. Assim, a fim de que os alunos degustassem um pouco de seus próprios equipamentos tecnológicos em sala de aula, foram elaboradas uma série de atividades para que eles pudessem resolver problemas pertinentes ao cotidiano, aplicados a outras ciências ou mesmo questionamentos puramente matemáticos sempre gerando gráficos com o auxilio do geogebra e, através da visualização, chegando a uma solução.

Palavras-chave: Ensino, Visualização, Gráfico, Tecnologia, Geogebra.

ABSTRACT

This paper presents the importance of the graphic display images produced with the use of technological resource in search of more dynamic and attractive education for the students and teachers. These resources favor the graphical construction and enable better analysis of the generated images due to all the features of a dynamic geometry software.

So, in order that students use more the technological equipment in the classroom, were prepared one series of activities so that they could solve relevant problems day-a-day, applied to other sciences or even purely mathematical questions always generating graphics with the help of GeoGebra and, through visualization, reaching a solution.

Keywords: Teaching, Visualization, Graphic, Technology, Geogebra.

SUMÁRIO

Quem não compreende um olhar,
tampouco compreenderá uma longa
explicação. (Mário Quintana)

APRESENTAÇÃO

Este trabalho tem como objetivo principal mostrar como a visualização das representações gráficas pode contribuir para o ensino e a aprendizagem de diversos tópicos de matemática. Para isso foi desenvolvida uma oficina com alunos do 1º ano do ensino médio de uma escola publica situada no município de Nova Friburgo no estado do Rio de Janeiro usando o software Geogebra como ferramenta tecnológica. As atividades elaboradas para esta oficina seguem um roteiro que sugere ao aluno interagir com as representações gráficas, sistemas de escrita algébricos, além de modelagem de problemas apresentados na língua materna, objetivando a solução das atividades baseando-se puramente na visualização das imagens gráficas geradas.

O primeiro capítulo apresenta a importância das ferramentas tecnológicas na interação da álgebra e da geometria, destacando toda a visualização proporcionada por tais ferramentas. O capítulo 2 trata da importância das variadas representações semióticas no ensino e na aprendizagem da matemática e a relevância visualização nas pesquisas em educação matemática. Este capítulo faz uma breve analise do ENEM sobre o ponto de vista das visualizações e tem como objetivo mostrar a importância das representações gráficas nos conceitos e teoremas do cálculo. O terceiro capítulo dedica-se à apresentação e análise das atividades aplicadas na oficina. E por fim uma conclusão levando em conta todo o retorno dos alunos ao trabalharem com o uso da tecnologia nas representações, visualizações e resolução dos problemas apresentados nas oficinas.

“Na nossa era, dominada pela informação, pela comunicação e pelas novas tecnologias, a matemática está a descobrir novas portas que tem de abrir. (Devlin)

1. O USO DE FERRAMENTAS TECNOLÓGICAS

Vivemos atualmente em uma sociedade com grande avanço tecnológico onde a informática está cada vez mais próxima do cotidiano das pessoas. Seja no trabalho ou fora dele, o uso de computadores, smartphones e tablets está se tornando cada vez mais presente.

Na escola não poderia ser diferente, cada vez mais cedo jovens mostram afinidade com o uso de ferramentas tecnológicas, faltando porém, agregar o uso destas tecnologias nas atividades curriculares desenvolvidas em sala de aula.

Infelizmente, por vários motivos, poucos jovens apreciam a matemática, pelo menos da forma como ela é apresentada na educação básica. Contudo, ao se formar no ensino médio espera-se que os alunos desenvolvam habilidades de ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc.), além de utilizar adequadamente os recursos tecnológicos para a produção de conhecimento e de comunicação.

A fim de reformular e nortear a educação no Brasil, os PCNs foram criados e apontam para a necessidade de um redirecionamento do ensino de matemática para que este favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos que serão necessários para que os alunos possam se orientar num mundo em constante movimento. Desta forma PCNs consideram que os professores devem perceber que *"... habilidades como selecionar informações,* *analisar as informações obtidas e, a partir disso, tomar decisões exigirão linguagem, procedimentos e formas de pensar matemáticos que devem ser desenvolvidos ao longo do Ensino Médio, bem como a capacidade de avaliar limites, possibilidades e adequação das tecnologias em diferentes situações."*

Portanto um redirecionamento no ensino de matemática deve acontecer no sentido de levar em conta todo desenvolvimento tecnológico de softwares matemáticos para os mais diversos equipamentos tecnológicos.

Ponte na década de 80 já tinha a visão de que *"O computador, pelas suas potencialidades a nível de cálculo, visualização, modelação e geração de micromundos, é o instrumento mais poderoso de que atualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar este tipo de experiências aos seus alunos" (Ponte, 1986) apud Borrões,1998.*

Atualmente diversos softwares matemáticos encontram-se disponíveis para qualquer usuário da internet, então não há motivos para que professores e estudantes fiquem alheios a estes recursos que tornam mais interessante o ensino e assim, viabilizam uma aprendizagem mais significativa . Então, há uma grande facilidade para que professores e estudantes escolham um programa que melhor se adapte ao propósito de seu uso.

Dentre os variados softwares, o Geogebra se mostra bem completo para o uso em sala de aula. Ele é um programa de geometria dinâmica desenvolvido especialmente para o ensino e aprendizagem de matemática. Com esse programa é possível interagir com as representações algébricas e geométricas de um mesmo objeto matemático, tornando-se um grande aliado no estudo de equações, inequações, sistemas de equações e inequações, funções e muitos outros conteúdos matemáticos. Segundo Duval (1993) "... *é essencial, na* *atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural, etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro."*

Desta forma, ao usar o Geogebra, ganha-se uma grande oportunidade de utilizar a visualização para trabalhar e desenvolver conceitos algébricos sob os pontos de vista da geometria e conceitos geométricos sob os pontos de vista da álgebra. Machado (2008) destaca que: *" A visualização é um instrumento que está emergindo como um aspecto importante do ensino e aprendizagem em matemática, especialmente utilizando-se a ferramenta computacional para gráficos..."*

Assim, na interação visual da álgebra com a geometria, e da geometria com a álgebra o ensino da matemática se torna mais dinâmico e contribui para o *"...desenvolvimento de competências essenciais, envolvendo habilidades de caráter gráfico, geométrico, algébrico,..., claramente expressa nos objetivos educacionais da Resolução CNE/98."* (PCNs)

Segundo Devlin, foi Descartes que apresentou à comunidade matemática uma nova forma revolucionária de fazer geometria através da álgebra. Essa ideia permitia que os matemáticos pudessem utilizar técnicas algébricas para resolver problemas da geometria ou entender a geometria como ramo da álgebra. A ideia principal foi introduzir o plano cartesiano e representar figuras geométricas neste sistema de coordenadas através de expressões envolvendo x e y.

É importante ressaltar que *"... os gregos antigos dedicaram-se consideravelmente à álgebra geométrica e que a idéia de coordenadas foi usada no mundo antigo pelos egípcios e os romanos na agrimensura e pelos* *gregos na confecção de mapas."* (Eves, 1997). Porém, segundo Eves a geometria analítica só pode desenvolver-se plenamente após o desenvolvimento da escrita simbólica e dos processos algébricos. Assim, as colaborações de Descartes e outros matemáticos do século XVII fundamentaram a geometria analítica que desenvolve-se até os dias atuais.

Portanto, com as contribuições de Descartes, deu-se um passo inicial na Geometria Analítica em relação a que estamos familiarizados hoje. Devlin, em Matemática : a ciência dos padrões afirma que: *"Para além de permitir que gerações de matemáticos atacassem as questões geométricas recorrendo às técnicas da álgebra, a geometria cartesiana sustenta a atual tecnologia de gráficos em computador.*

*C*om a introdução do plano cartesiano, através da geometria analítica, ganhou-se possibilidade de explorar as diversas representações de um mesmo objeto matemático, sejam elas geométricas ou algébricas. Os Parâmetros curriculares apontam para o uso de recursos tecnológicos especialmente nas aulas de Matemática e "*... evidencia para os alunos a importância do papel da linguagem gráfica e de novas formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem de variados problemas..."* (PCN). Assim, através da exploração gráfica ganha-se a possibilidade de trabalhar a matemática centrada nas visualizações. De acordo com Fainguelernt (1999, p. 53*), "visualização geralmente se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais".* Portanto, se o professor aproveitar todo potencial tecnológico dos computadores, celulares ou tablets para a visualização ele estará aproveitando todo o potencial do sentido da visão dos alunos para um melhor entendimento desta disciplina tão importante para a sociedade em que vivemos.

A *Geometria faz com que possamos adquirir o hábito de raciocinar, e esse hábito pode ser empregado, então, na pesquisa da verdade e ajudar-nos na vida. (Jacques Bernoulli)*

2. VISUALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Há um pensamento popular atribuído a Confúcio que diz que "*Uma imagem vale mais que mil palavras"*. De fato muitas informações, muitas dúvidas e muitas perguntas podem surgir ao analisar uma imagem. A leitura que se faz de uma imagem está totalmente ligada a toda bagagem de conhecimento acerca da observação. Segundo Gusmão apud Novellino *"A visualização não é uma visão imediata das relações, mas sim uma interpretação do que é apresentado para a nossa contemplação que só pode realizar eficazmente se tivermos aprendido a ler corretamente o tipo de comunicação que a sustenta."*

Existe uma forte tendência em pesquisas em educação matemática envolvendo visualização. Em um artigo intitulado "*Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas*" as pesquisadoras levantaram variadas definições para o termo visualização a partir dos autores estudados e como eles empregavam o termo visualização em suas pesquisas. O resultado desta análise resultou nas definições a seguir:

1. *Processo de construção e transformação de imagens visuais mentais, bem como de todo tipo de inscrições de natureza espacial.*

2. *Interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica. (a visualização como um processo útil para apoiar a intuição e a formação de conceitos na aprendizagem da matemática).*

3. *Onde se atua sobre possíveis representações concretas, enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático.*

4. *É o processo de formação de imagens (mentais, ou com lápis e papel, ou com o auxilio de tecnologias) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática.*

5. *É um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, seja mental ou físico, realizada para resolver problemas, ou provar propriedades (imagens mentais, representação externa, processos de visualização e habilidade de visualização).*

6. *Refere-se a uma atividade cognitiva que é intrinsecamente semiótica e o uso da visualização na matemática requer um treino específico, ou seja, visualização está ligada aos registros semióticos.*

7. *Como uma forma de pensamento que tem como função contribuir na construção de significados e de sentidos, bem como servir de auxilio na compreensão da resolução de problemas (visualizar não é apenas ver o visível, mas tornar visível aquilo que se vê extraindo padrões das representações e construindo o objeto a partir da experiência visual).*

Certamente se uma pessoa está diante de uma tela de Van Gogh ela irá analisar esta imagem segundo todo o seu conhecimento, seja de historia da arte, filosofia, biografia do pintor, momento histórico da realização da obra, ou seja, toda a experiência de vida e todo conhecimento acumulado até o presente momento da apreciação da obra pelo observador. Portanto o que se extrai de uma imagem está totalmente ligado ao conhecimento prévio do observador e assim, dois observadores com conhecimentos distintos podem aprofundar mais ou menos a respeito de uma característica do objeto observado. O mesmo ocorre na música, no cinema, na fotografia, na culinária, na matemática, ou seja, em tudo que é observado.

"Nossa percepção é prioritariamente visual e assim não é de se estranhar em absoluto que este apoio visual está presente nas tarefas matemáticas,..."

(Guzmám, 1996)

Especificamente em matemática, as imagens gráficas são representações semióticas que possuem um papel fundamental na construção do conhecimento matemático. Duval afirma que : "*Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é enganoso. As representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento."*

De acordo com Duval (apud Machado, 2003), existem quatro tipos de representações: A língua materna, os sistemas de escritas, as figuras geométricas planas ou em perspectivas e os gráficos cartesianos, como mostra a tabela a seguir:

Tabela 1: classificação dos registros

	Representação Discursiva	*Representação não-discursiva*
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: os tratamentos não são algoritmizáveis	Língua Natural Associações verbais (conceituais). Forma racional: argumentação a partir de observações, de crenças...; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectiva. Apreensão operatória e não somente perspectiva. Construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: os tratamentos são principalmente algoritmos.	Sistemas de escritas: numéricas (binárias, decimal, fracionária...); algébricas; simbolicas (línguas formais). Cálculo.	Gráficos cartesianos Mudanças de sistema de coordenadas. Interpolação, extrapolação.

Figura 4. Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático. Duval (2003, p.14)

Para Duval (apud Machado, 2003) *"a maneira matemática de raciocinar e de visualizar está intrinsecamente ligada à utilização das representações semióticas e toda comunicação em matemática se estabelece com base nessas representações"*.

Desta forma é imprescindível que o professor trabalhe com os alunos as diversas representações de um mesmo objeto matemático para que ele possa raciocinar e visualizar em cada um dos registros semióticos. Para Guzmàm (1996) *"a visualização aparece como algo profundamente natural tanto no nascimento do pensamento matemático como nas descobertas de novas relações entre os objetos matemáticos, e também, naturalmente, na transmissão e comunicação próprias do fazer matemático."*

Assim o aluno terá a oportunidade de distinguir o objeto matemático de suas representações e compreender que somente através das representações é possível ter acesso ao objeto matemático.

Para Duval *"A distinção entre o objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática".* Aliás, segundo Duval, *"a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação" (DUVAL, 2003).* Essa troca de registro é denominada *conversão*. Pode-se, por exemplo, converter uma representação gráfica em uma representação algébrica, converter uma representação algébrica em uma representação gráfica, além de outras conversões. Não se pode confundir *conversão* com *tratamento*, já que tratamento é uma operação interna do registro de tratamento. De forma clara, quando se constrói um gráfico a partir de uma equação há uma conversão de registro, quando se resolve algebricamente, passo a passo, uma equação identifica-se um tratamento.

Considerando que ao inserir equações ou inequações em um programa de geometria dinâmica, por exemplo o geogebra, obtém-se a respectiva representação geométrica, então o aluno ganha a possibilidade de explorar as informações contidas no gráfico sem se preocupar com a construção, pois essa preocupação é suprida pelo software. Com as imagens gráficas prontas, saltam aos olhos informações muito relevantes em relação ao objeto em estudo, tais como pontos de máximos e mínimos, zeros das funções, crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, pontos de intersecções, regiões resultantes de sistemas de inequações, etc.

Segundo Duval (2013), os softwares trouxeram três grandes inovações em relação ao conhecimento. “*A mais fascinante é o poder de visualização que eles oferecem em todas as áreas. A segunda é que eles constituem um meio de transformações de todas as representações produzidas na tela. Em outras palavras, eles não são somente um instrumento de cálculo cuja potência cresce de modo ilimitado, mas eles cumprem uma função de simulação e de modelagem que ultrapassa tudo o que podemos imaginar “mentalmente” ou realizar de modo gráfico-manual. Enfim, a produção pelos computadores é quase imediata: um clique, e isto é obtido sobre a tela! É esta tripla inovação do ponto de vista cognitivo que gera o interesse e os benefícios pedagógicos dos ambientes informatizados no ensino de matemática.*”

A imagem é testemunho dum olhar:
mostra objetos carregados de signos.
(G. Groussy)

2.1. A VISUALIZAÇÃO NO ENEM

No exame nacional do ensino médio, em relação à Matemática e suas Tecnologias, a matriz de referencia destaca:

• *Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.*

• *Conhecimentos geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.*

• *Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.*

• *Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.*

• *Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.*

Em relação aos dois últimos itens, Conhecimentos algébricos e Conhecimentos algébricos/geométricos, muito pode ser trabalhado em relação a visualizações. É imprescindível que os professores utilizem todo potencial tecnológico para visualizar os gráficos e explorar atividades de interação, aproveitando todo dinamismo dos softwares. O aluno pode, por exemplo, observar as transformações sofridas pelos gráficos mediante a alteração dos parâmetros, e conjecturar a partir destas observações.

Esse trabalho de visualização gráfica pode acrescentar muito nos argumentos dos alunos já que eles podem falar e mostrar o que estão vendo. Essa habilidade não só é importante para o desenvolvimento da matemática, bem como para as outras áreas do conhecimento. Ou seja, os gráficos para além da matemática, servem à química, à biologia, à geografia, à física, entre outras áreas, sem contar com o papel importantíssimo na formação da cidadania, já que os meios de comunicação se apropriam muito do registro gráfico para comunicar-se com seus telespectadores. Desta forma, para exercer plenamente a cidadania, é fundamental que o estudante que conclui a educação básica seja incentivado a ler e interpretar informações representadas graficamente.

Apenas para reforçar a importância da visualização na interação da geometria com a álgebra cabe destacar algumas das competências matemáticas exigidas em relação ao ENEM. São elas:

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

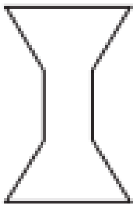
Ao fazer uma análise nas questões do exame nacional do ensino médio (ENEM) verifica-se que, em muitas situações, o estudante tem que resolver questões a partir da visualização de imagens gráficas. Como descrito anteriormente essas questões aparecem não só em matemática bem como em todas as áreas do conhecimento. A seguir destacam-se questões de matemática dos quatro últimos exames, relacionadas às competências descritas anteriormente com forte apelo das visualizações gráficas.

1- ENEM 2014, destacam-se as questões a seguir:

Quadro 1

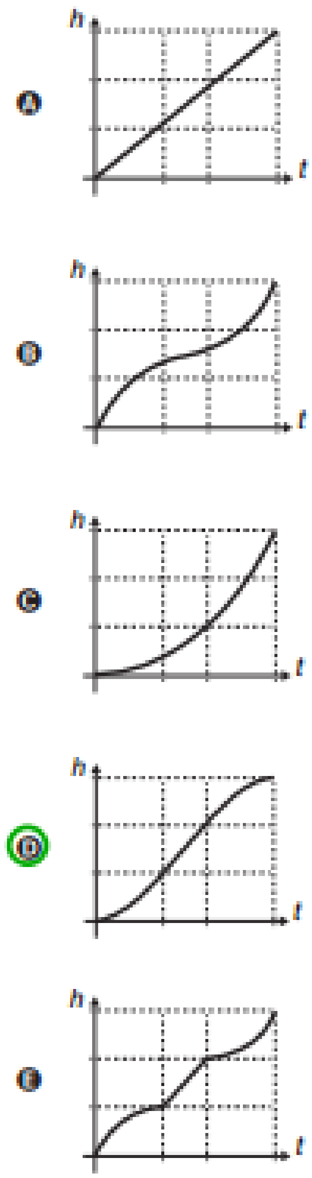
QUESTÃO 147

Para comemorar o aniversário de uma cidade, um artista projetou uma escultura transparente e oca, cujo formato foi inspirado em uma ampulheta. Ela é formada por três partes de mesma altura: duas são troncos de cone iguais e a outra é um cilindro. A figura é a vista frontal dessa escultura.



No topo da escultura foi ligada uma torneira que verte água, para dentro dela, com vazão constante.

O gráfico que expressa a altura (h) da água na escultura em função do tempo (t) decorrido é

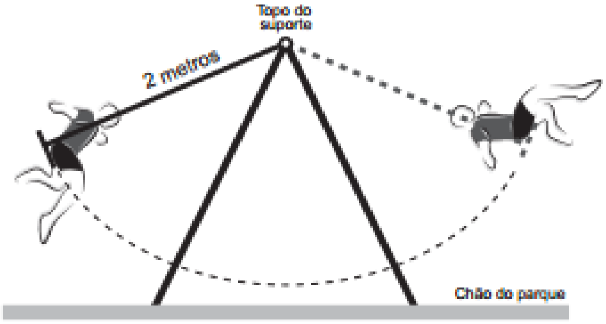


Comentários: Para resolver esta questão o aluno terá que associar graficamente a variação da altura em relação ao tempo. Entender o que cada gráfico tem a dizer é fundamental para escolher o item correto.

Quadro 2

QUESTÃO 152

A figura mostra uma criança brincando em um balanço no parque. A corda que prende o assento do balanço ao topo do suporte mede 2 metros. A criança toma cuidado para não sofrer um acidente, então se balança de modo que a corda não chegue a alcançar a posição horizontal.



Na figura, considere o plano cartesiano que contém a trajetória do assento do balanço, no qual a origem está localizada no topo do suporte do balanço, o eixo X é paralelo ao chão do parque, e o eixo Y tem orientação positiva para cima.

A curva determinada pela trajetória do assento do balanço é parte do gráfico da função

A) $f(x) = -\sqrt{2 - x^2}$

B) $f(x) = \sqrt{2 - x^2}$

C) $f(x) = x^2 - 2$

D) $f(x) = -\sqrt{4 - x^2}$

E) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

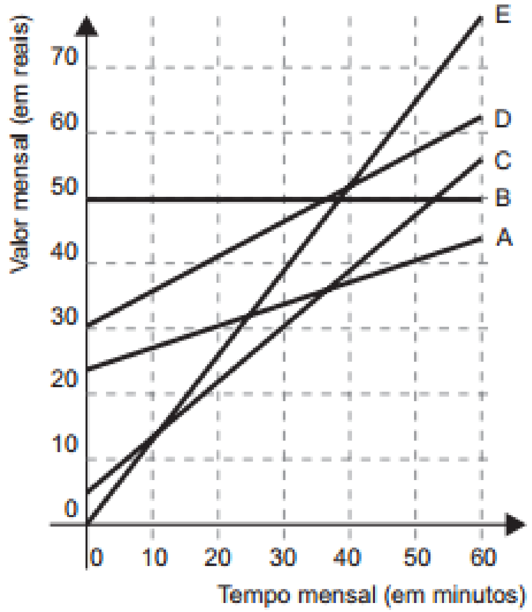
Comentários: Nesta questão, além de associar o desenho a uma circunferência, o aluno devera ser capaz de determinar o registro algébrico correspondente. A simples diferença de sinais dos itens “d” e “e” mostram como a observação da representação gráfica é importante para reconhecer o registro algébrico adequado.

Quadro 3

QUESTÃO 160

No Brasil há várias operadoras e planos de telefonia celular.

Uma pessoa recebeu 5 propostas (A, B, C, D e E) de planos telefônicos. O valor mensal de cada plano está em função do tempo mensal das chamadas, conforme o gráfico.



Essa pessoa pretende gastar exatamente R$ 30,00 por mês com telefone.

Dos planos telefônicos apresentados, qual é o mais vantajoso, em tempo de chamada, para o gasto previsto para essa pessoa?

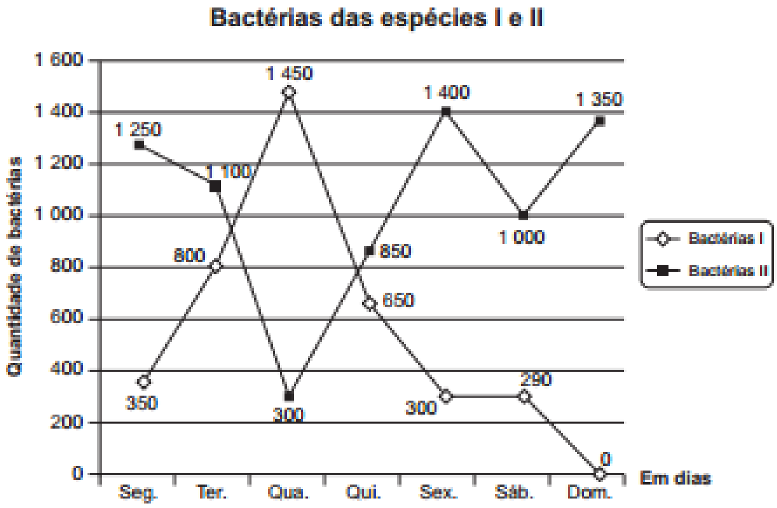
- Ⓐ A
- Ⓑ B
- Ⓒ C
- Ⓓ D
- Ⓔ E

Comentários: Essa questão mostra como é importante representar vários gráficos em um só plano cartesiano. Se o aluno tem em sua prática esse tipo de representação gráfica com as devidas análises, suas chances de acerto são altas, pois trata de pura visualização sem nenhum cálculo para solucionar.

Quadro 4

QUESTÃO 173

Um cientista trabalha com as espécies I e II de bactérias em um ambiente de cultura. Inicialmente, existem 350 bactérias da espécie I e 1 250 bactérias da espécie II. O gráfico representa as quantidades de bactérias de cada espécie, em função do dia, durante uma semana.



Em que dia dessa semana a quantidade total de bactérias nesse ambiente de cultura foi máxima?

- **A** Terça-feira.
- **B** Quarta-feira.
- **C** Quinta-feira.
- **D** Sexta-feira.
- **E** Domingo.

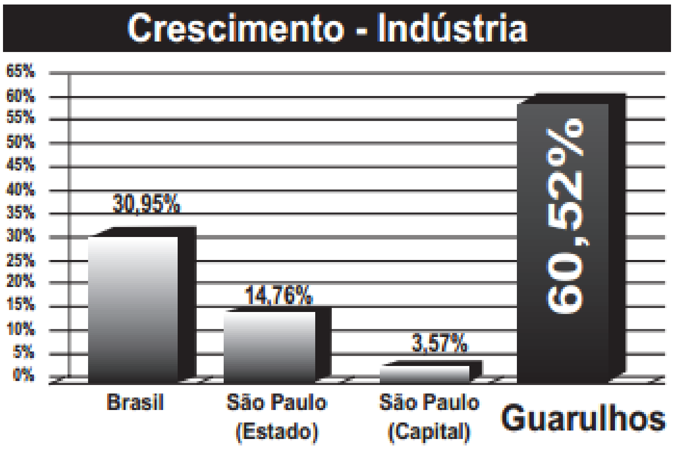
Comentários: Neste item o aluno é levado a observar a representação de dois gráficos em um mesmo plano e perceber visualmente que o máximo absoluto para cada bactéria não é solução do problema. Com um pouco de observação e simples contas o aluno pode chegar à resposta correta do item.

2- ENEM 2013, destacam-se as questões a seguir:

Quadro 5

QUESTÃO 139

A cidade de Guarulhos (SP) tem o 8º PIB municipal do Brasil, além do maior aeroporto da América do Sul. Em proporção, possui a economia que mais cresce em indústrias, conforme mostra o gráfico.



Fonte: IBGE, 2002-2008 (adaptado).

Analisando os dados percentuais do gráfico, qual a diferença entre o maior e o menor centro em crescimento no polo das indústrias?

A) 75,28

B) 64,09

C) 56,95

D) 45,76

E) 30,07

Comentários: Uma simples visualização, seguida de uma simples subtração leva o aluno ao acerto desta questão. Mais uma vez perceber visualmente o mais alto e o mais baixo através do gráfico contribui para a solução do problema.

Quadro 6

QUESTÃO 142

Durante uma aula de Matemática, o professor sugere aos alunos que seja fixado um sistema de coordenadas cartesianas (x, y) e representa na lousa a descrição de cinco conjuntos algébricos, I, II, III, IV e V, como se segue:

I — é a circunferência de equação $x^2 + y^2 = 9$;

II — é a parábola de equação $y = -x^2 - 1$, com x variando de -1 a 1;

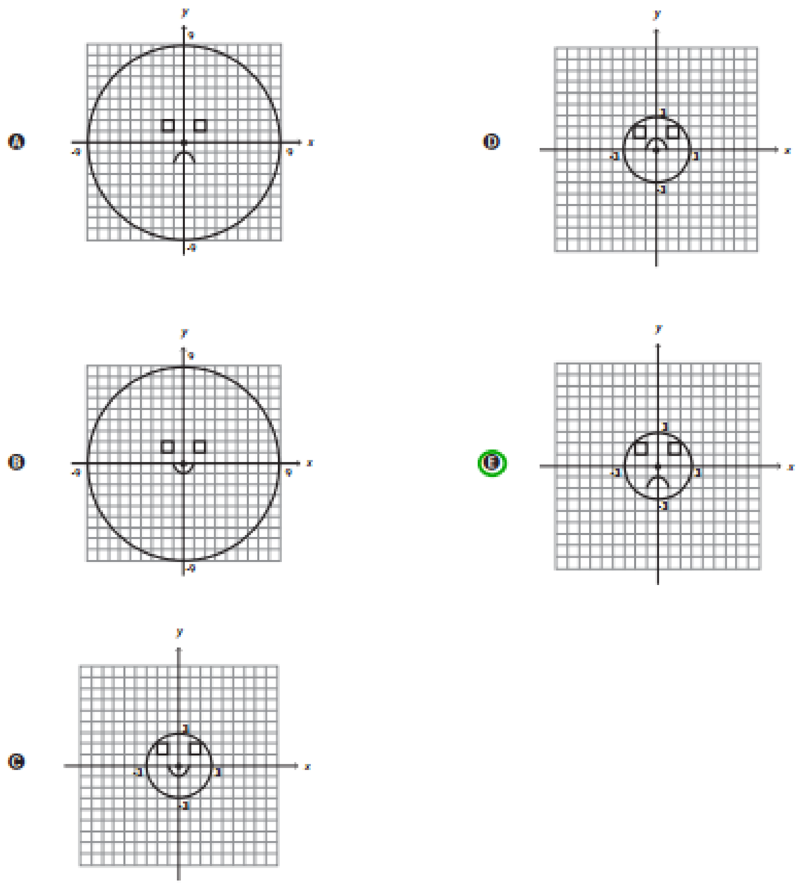
III — é o quadrado formado pelos vértices $(-2, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, 2)$ e $(-2, 2)$;

IV — é o quadrado formado pelos vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 2)$ e $(1, 2)$;

V — é o ponto $(0, 0)$.

A seguir, o professor representa corretamente os cinco conjuntos sobre uma mesma malha quadriculada, composta de quadrados com lados medindo uma unidade de comprimento, cada, obtendo uma figura.

Qual destas figuras foi desenhada pelo professor?

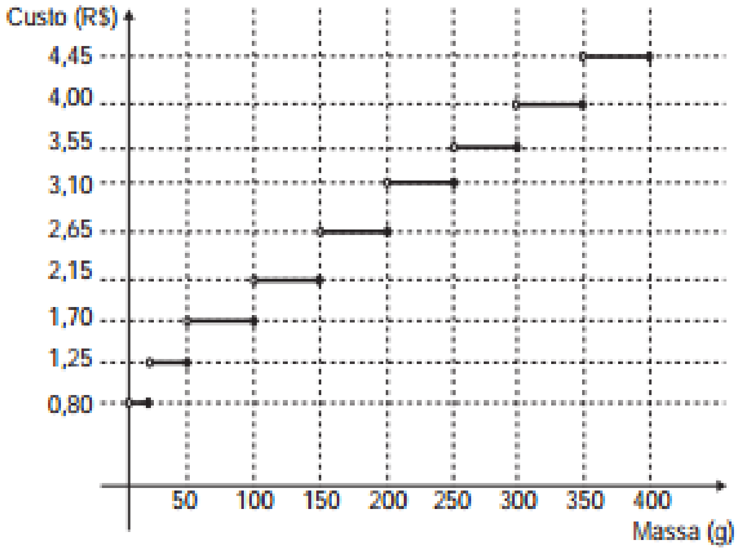


Comentários: Além de saber localizar coordenadas no plano cartesiano, o aluno deverá associar o registro algébrico ao registro gráfico para concluir este item. Se o professor tem em sua prática docente o uso de um programa de geometria dinâmica para que os alunos desenvolvam a interação da geometria com a álgebra, grandes serão as possibilidades de acertos deste item.

Quadro 7

QUESTÃO 149

Deseja-se postar cartas não comerciais, sendo duas de 100 g, três de 200 g e uma de 350 g. O gráfico mostra o custo para enviar uma carta não comercial pelos Correios:



Disponível em: www.correios.com.br. Acesso em: 2 ago. 2012 (adaptado).

O valor total gasto, em reais, para postar essas cartas é de

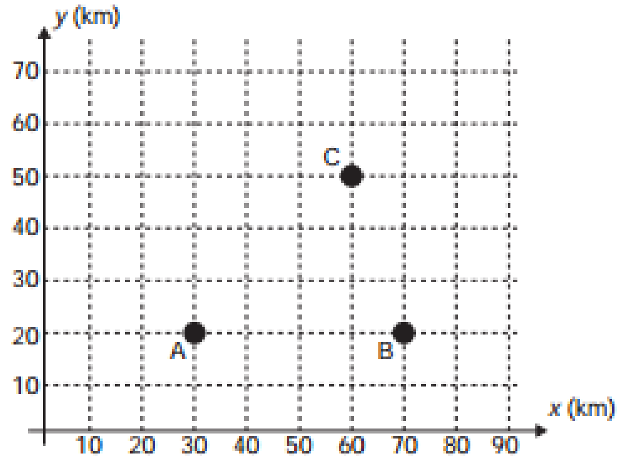
A 8,35.
B 12,50.
C 14,40.
D 15,35.
E 18,05.

Comentários: Uma simples observação gráfica seguida de uma adição é suficiente para resolver este problema.

Quadro 8

QUESTÃO 168

Nos últimos anos, a televisão tem passado por uma verdadeira revolução, em termos de qualidade de imagem, som e interatividade com o telespectador. Essa transformação se deve à conversão do sinal analógico para o sinal digital. Entretanto, muitas cidades ainda não contam com essa nova tecnologia. Buscando levar esses benefícios a três cidades, uma emissora de televisão pretende construir uma nova torre de transmissão, que envie sinal às antenas A, B e C, já existentes nessas cidades. As localizações das antenas estão representadas no plano cartesiano:



A torre deve estar situada em um local equidistante das três antenas.

O local adequado para a construção dessa torre corresponde ao ponto de coordenadas

- A (65 ; 35).
- B (53 ; 30).
- C (45 ; 35).
- D (50 ; 20).
- E (50 ; 30).

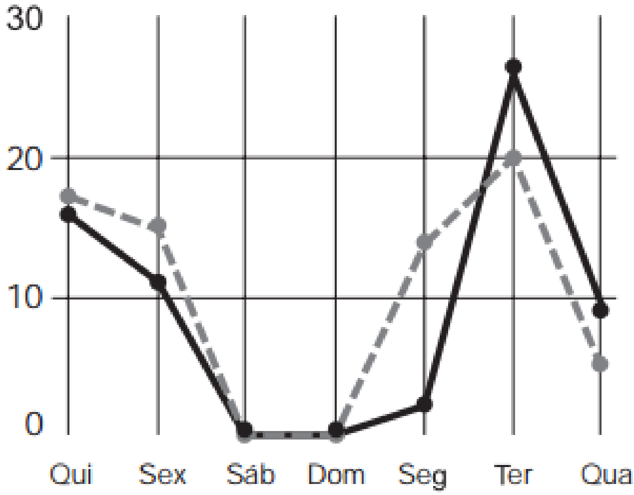
Comentários: Esta questão pode se tornar complexa para o aluno se este desprezar a intuição gráfica. Com uma simples intervenção na representação gráfica o aluno percebe que a solução é puramente visual, já que a escala entre os eixos é a mesma.

3- ENEM 2012, destacam-se as questões a seguir:

Quadro 9

QUESTÃO 142

A figura a seguir apresenta dois gráficos com informações sobre as reclamações diárias recebidas e resolvidas pelo Setor de Atendimento ao Cliente (SAC) de uma empresa, em uma dada semana. O gráfico de linha tracejada informa o número de reclamações recebidas no dia, o de linha contínua é o número de reclamações resolvidas no dia. As reclamações podem ser resolvidas no mesmo dia ou demorarem mais de um dia para serem resolvidas.



O gerente de atendimento deseja identificar os dias da semana em que o nível de eficiência pode ser considerado muito bom, ou seja, os dias em que o número de reclamações resolvidas excede o número de reclamações recebidas.

Disponível em: http://blog.bibliotecaunix.org. Acesso em: 21 jan. 2012 (adaptado).

O gerente de atendimento pôde concluir, baseado no conceito de eficiência utilizado na empresa e nas informações do gráfico, que o nível de eficiência foi muito bom na

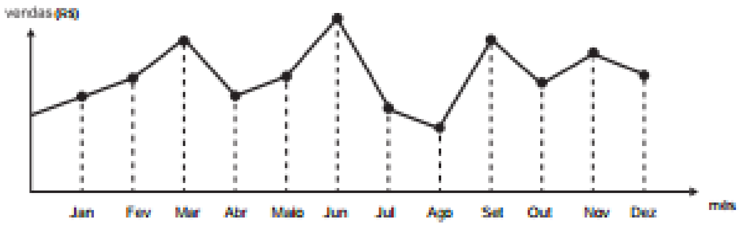
- A segunda e na terça-feira.
- B terça e na quarta-feira.
- C terça e na quinta-feira.
- D quinta-feira, no sábado e no domingo.
- E segunda, na quinta e na sexta-feira.

Comentários: Ao visualizar os dois gráficos no mesmo plano, o estudante deve perceber que se o nível de reclamações recebidas estiver acima do número de reclamações resolvidas significa uma baixa eficiência, se o nível de reclamações recebidas estiver abaixo do número de reclamações resolvidas significa uma alta eficiência e se o nível de reclamações recebidas estiver na mesma linha do número de reclamações resolvidas significa não está nem baixa nem alta a eficiência. Portanto, o gráfico conta uma "história" que deve ser interpretada pelo estudante.

Quadro 10

QUESTÃO 144

O dono de uma farmácia resolveu colocar à vista do público o gráfico mostrado a seguir, que apresenta a evolução do total de vendas (em Reais) de certo medicamento ao longo do ano de 2011.



De acordo com o gráfico, os meses em que ocorreram, respectivamente, a maior e a menor venda absolutas em 2011 foram

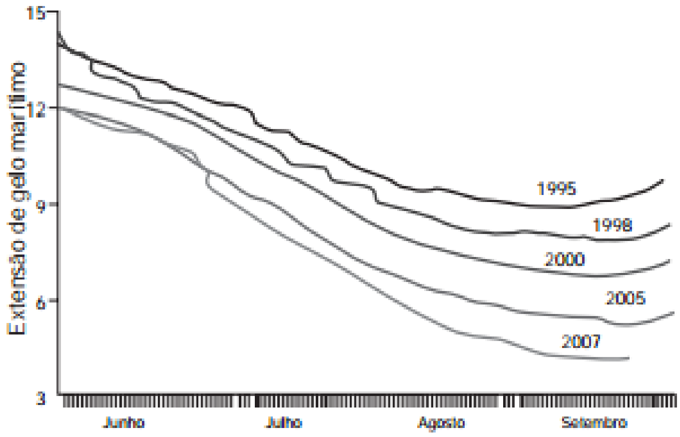
A. março e abril.
B. março e agosto.
C. agosto e setembro.
D. junho e setembro.
E. junho e agosto.

Comentários: Essa questão é de nível bem elementar. Se o aluno visualiza que o ponto de ordenada mais alto significa o de maior venda e o ponto de mais baixa ordenada o de menor venda, certamente terá êxito ao resolver este item.

Quadro 11

QUESTÃO 147

O gráfico mostra a variação da extensão média de gelo marítimo, em milhões de quilômetros quadrados, comparando dados dos anos 1995, 1998, 2000, 2005 e 2007. Os dados correspondem aos meses de junho a setembro. O Ártico começa a recobrar o gelo quando termina o verão, em meados de setembro. O gelo do mar atua como o sistema de resfriamento da Terra, refletindo quase toda a luz solar de volta ao espaço. Águas de oceanos escuros, por sua vez, absorvem a luz solar e reforçam o aquecimento do Ártico, ocasionando derretimento crescente do gelo.



Disponível em: http://sustentabilidade.allianz.com.br. Acesso em: fev. 2012 (adaptado).

Com base no gráfico e nas informações do texto, é possível inferir que houve maior aquecimento global em

- **A** 1995.
- **B** 1998.
- **C** 2000.
- **D** 2005.
- **E** 2007.

Comentário: Neste item o aluno deve interpretar que quanto maior o nível de aquecimento, menor a extensão de gelo. Logo perceberá que o ponto mais baixo significa o de maior aquecimento.

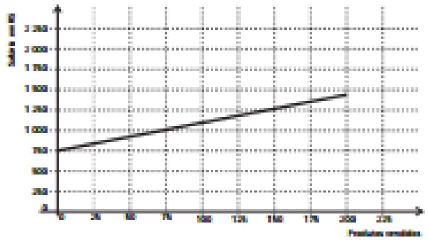
Quadro 12

QUESTÃO 152

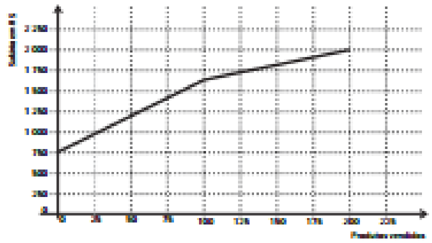
Certo vendedor tem seu salário mensal calculado da seguinte maneira: ele ganha um valor fixo de R$ 750,00, mais uma comissão de R$ 3,00 para cada produto vendido. Caso ele venda mais de 100 produtos, sua comissão passa a ser de R$ 9,00 para cada produto vendido, a partir do 101º produto vendido.

Com essas informações, o gráfico que melhor representa a relação entre salário e o número de produtos vendidos é

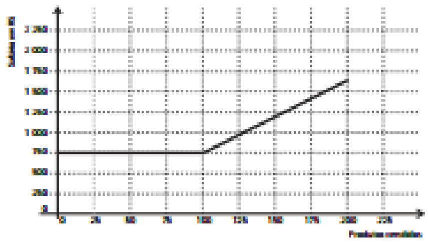
A



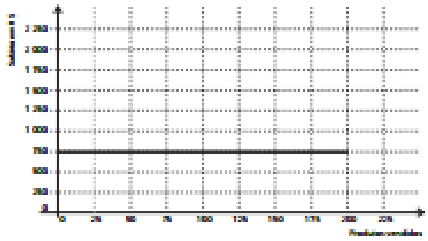
B



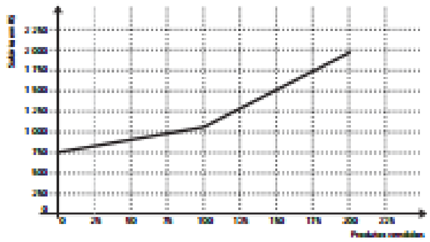
C



D



E



Comentários: Para cada representação gráfica dos itens desta questão há uma interpretação. Ao visualizá-los percebe-se que todos têm início em 750 reais, porém o crescimento de cada um segue de forma diferente. É importante que o aluno relacione taxa de crescimento com a inclinação de cada reta para que perceba uma menor inclinação para uma taxa de R$3,00 e a partir de um determinado momento uma maior inclinação com uma taxa de R$9,00.

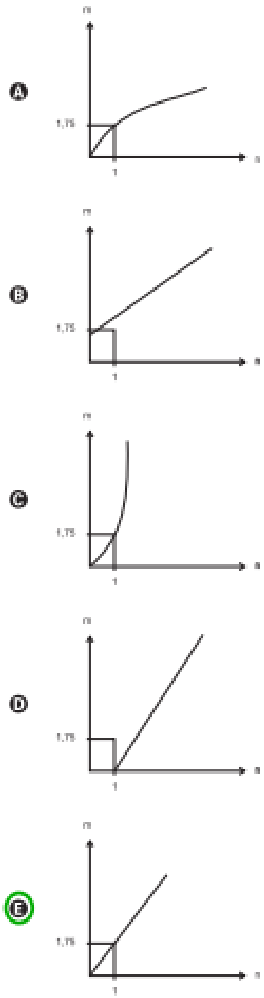
4- ENEM 2011, destacam-se as questões a seguir:

Quadro 13

QUESTÃO 149

As frutas que antes se compravam por dúzias, hoje em dia, podem ser compradas por quilogramas, existindo também a variação dos preços de acordo com a época de produção. Considere que, independente da época ou variação de preço, certa fruta custa R$ 1,75 o quilograma.

Dos gráficos a seguir, o que representa o preço m pago em reais pela compra de n quilogramas desse produto é



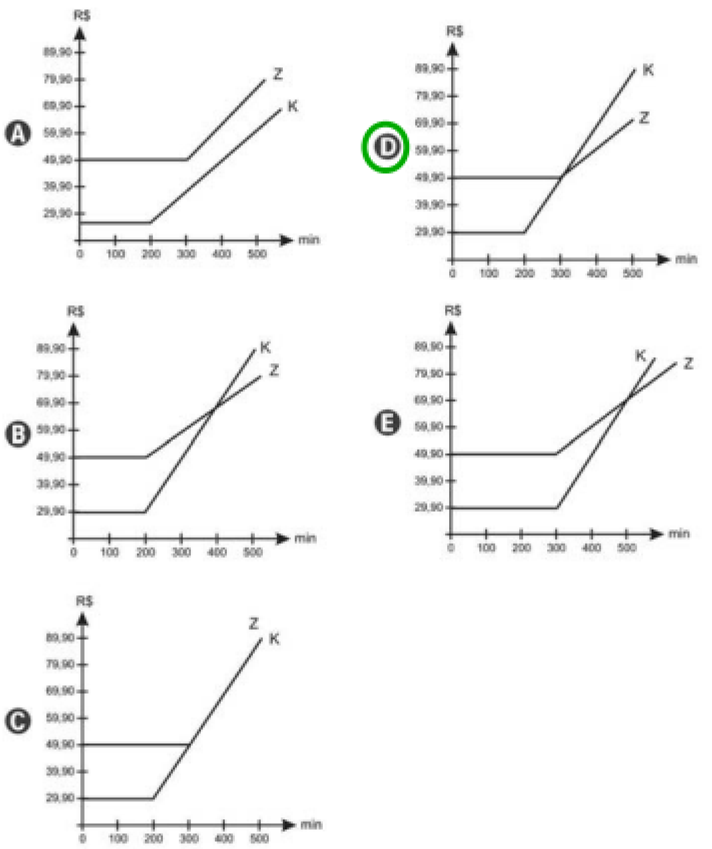
Comentários: Ao perceber que este problema é linear o aluno deve visualizar uma reta na representação gráfica. Com essa informação basta entender que não levando nenhum produto, nada deve pagar. Logo essa reta deve partir da coordenada (0,0).

Quadro 14

QUESTÃO 174

Uma empresa de telefonia fixa oferece dois planos aos seus clientes: no plano K, o cliente paga R$ 29,90 por 200 minutos mensais e R$ 0,20 por cada minuto excedente; no plano Z, paga R$ 49,90 por 300 minutos mensais e R$ 0,10 por cada minuto excedente.

O gráfico que representa o valor pago, em reais, nos dois planos em função dos minutos utilizados é



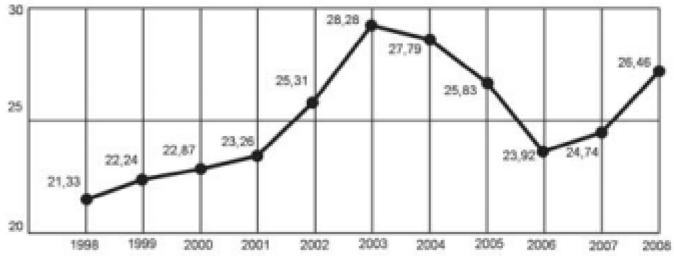
Comentários: Nesta questão o aluno deve visualizar que os planos K e Z são fixos até um limite de tempo, logo na representação gráfica as retas são constantes até 200 min. para K e até 300 min. para Z. Em seguida, basta associar que o ângulo da reta está relacionando à taxa e perceber que a maior taxa do plano K reflete em uma reta com maior ângulo em relação ao plano Z.

Quadro 15

QUESTÃO 177

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010.** São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de

A 1998 e 2001.
B 2001 e 2003.
C 2003 e 2006.
D 2003 e 2007.
E 2003 e 2008.

Comentários: Nessa questão salta aos olhos a variação da participação do agronegócio no PIB brasileiro. Visualiza-se facilmente o decréscimo no período de 2003 a 2006.

Visão é a capacidade de enxergar além
do que os olhos são capazes.
(Myles Munroe)

2.2. A IMPORTANCIA DA VISUALIZAÇÃO NO CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Ao ingressar numa faculdade em um curso de exatas, o aluno que concluiu o ensino básico deveria ter total condição de iniciar um estudo de Cálculo 1. Certamente se, ao longo da educação básica, ele trabalhou em matemática as diversas representações semióticas discursivas ou não discursivas e foi incentivado a utilizar a visualização gráfica como um meio de apropriação do conhecimento matemático, ele terá desenvolvido habilidades e competências para se apropriar dos conceitos envolvidos nesta disciplina.

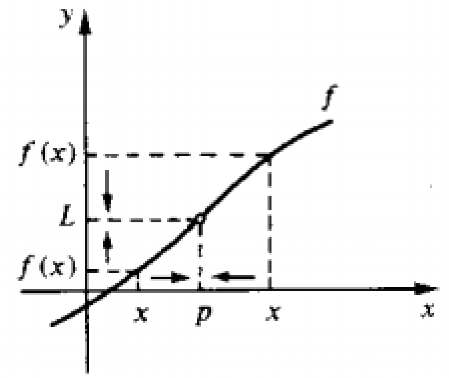
Segundo HUGHES-HALLETT et. (1994 apud BERRY e NYMAN, 2003) "*Um dos princípios que devem guiar o ensino de cálculo é a "Regra de três": quaisquer que sejam os possíveis tópicos, devem ser ensinados gráfica e numérica, como também analiticamente. A pontaria é produzir um curso onde os três pontos de vista são equilibrados, e onde os estudantes vêem uma idéia principal sob vários ângulos.*"

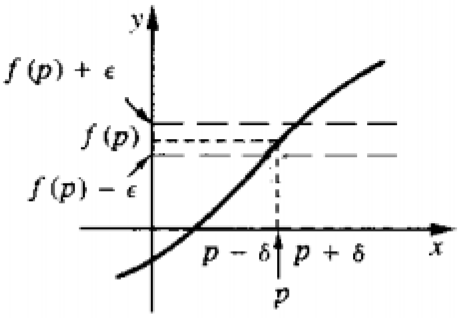
Seguem alguns exemplos onde a visualização é fundamental para a compreensão de conceitos.

I. Limites

Graficamente

Quadro 16 e 17 – GUIDORIZZI, 1999





Analiticamente

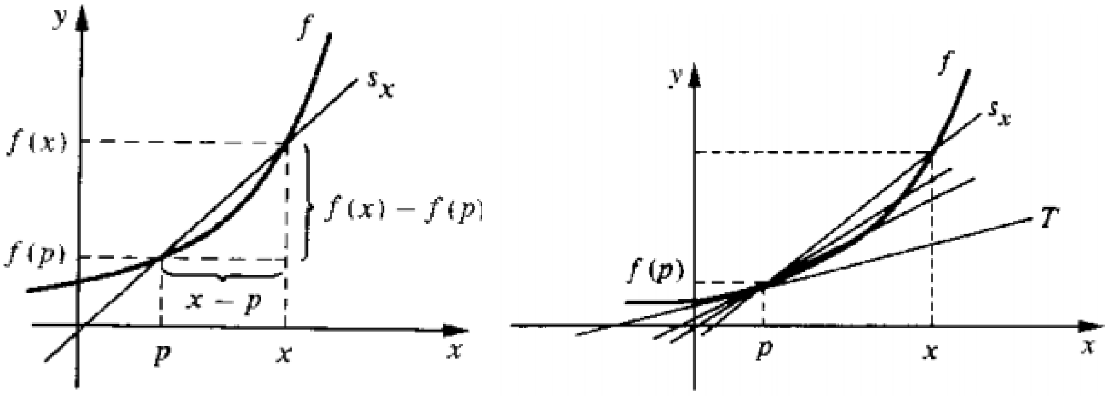
para todo $\epsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ (δ dependendo de ϵ), tal que $f(x)$ permanece entre $f(p) - \epsilon$ e $f(p) + \epsilon$ quando x percorre o intervalo $]p - \delta, p + \delta[$, com x no domínio de f.

Comentário: Temos acima a representação gráfica e a representação analítica usando a língua materna permeada de linguagem simbólica. A imagem da esquerda mostra que quando x se aproxima de p, f(x) se aproxima de L. Ou seja $\lim_{x \to p} f(x) = L$. Já a imagem da direita, esclarece a definição analítica de limite. Sem dúvida a presença das representações gráficas gera um maior esclarecimento do que seja limite.

II. Derivada

Graficamente

Quadro 18 e 19 - GUIDORIZZI, 1999



Analiticamente

Definição. Sejam *f* uma função e *p* um ponto de seu domínio. O limite

$$\lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

quando existe e é finito, denomina-se *derivada* de *f* em *p* e indica-se por $f'(p)$ (leia: *f* linha de *p*). Assim

$$f'(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}.$$

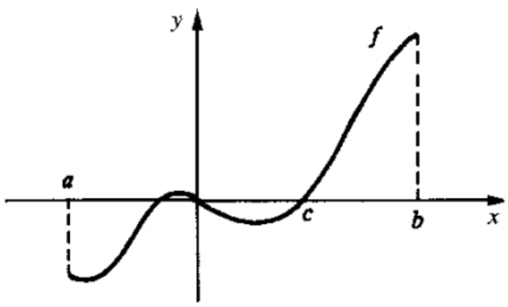
Se *f* admite derivada em *p*, então diremos que *f* é *derivável* ou *diferenciável* em *p*.

Comentário: A figura da esquerda apresenta a reta *Sx* secante à curva. A da direita sugere o movimento da reta *Sx* em direção a reta T mostrando o limite de x tendendo a p. Através da representação gráfica da figura da esquerda o estudante consegue visualizar que a reta *Sx* se torna tangente à curva no ponto (p,f(p)) quando x tende a p.

III. Teorema do Anulamento

Quadro 20 - GUIDORIZZI, 1999

Teorema *(do anulamento ou de Bolzano)*. Se f for contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e se $f(a)$ e $f(b)$ tiverem sinais contrários, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = 0$.

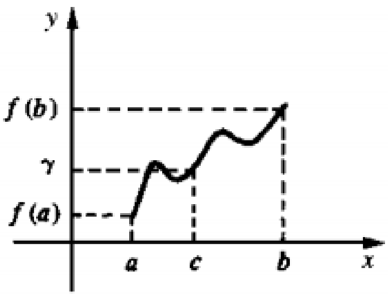


Comentário: A imagem da representação gráfica que acompanha esse teorema permite que o estudante visualize instantaneamente a possibilidade de uma ou mais raízes no intervalo [a,b]. É nítido que se f não for continua não há garantia de existência de f(c) = 0

IV. Teorema do valor intermediário

Quadro 21- GUIDORIZZI, 1999

Teorema *(do valor intermediário)*. Se f for contínua em $[a, b]$ e se γ for um real compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$, então existirá pelo menos um c em $[a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.

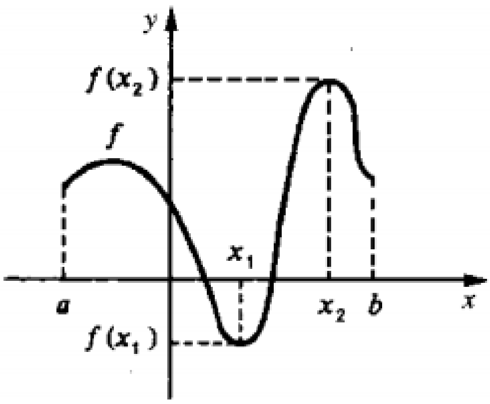


Comentário: A imagem da representação gráfica que acompanha esse teorema permite que o estudante visualize que qualquer número real compreendido entre f(a) e f(b) é imagem de pelo menos um número compreendido no intervalo [a,b].

V. Teorema de Weiertrass

Quadro 22 - GUIDORIZZI, 1999

Teorema *(de Weierstrass).* Se f for contínua em $[a, b]$, então existirão x_1 e x_2 em $[a, b]$ tais que $f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2)$ para todo x em $[a, b]$.



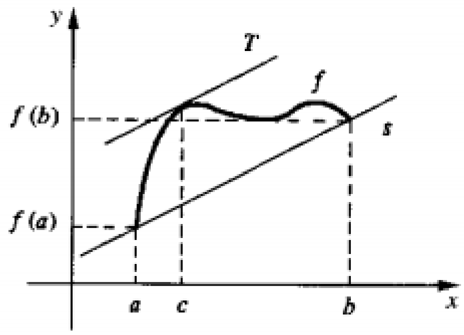
Comentário: A imagem da representação gráfica que acompanha esse teorema permite que o estudante visualize que o teorema de Weierstrass trata da existência de máximo e mínimo para funções continuas em um intervalo [a,b].

VI. Teorema do valor médio

Quadro 23 - GUIDORIZZI, 1999

Teorema do valor médio (TVM). Se f for contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, então existirá pelo menos um c em $]a, b[$ tal que

① $$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{ou} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$



Comentário: A imagem da representação gráfica que acompanha esse teorema permite que o estudante visualize que existe pelo menos uma reta paralela à reta S que passa pelos pontos (a,f(a)) e (b,f(b)) tangente ao gráfico de f.

Para alcançar algo que nunca alcançou, você tem que fazer aquilo que nunca fez.
(Michel Berg)

3. OFICINA

3.1 DESCRIÇÃO

Esta oficina foi aplicada em uma turma do primeiro ano do ensino médio de uma escola da rede estadual de ensino localizada no município de Nova Friburgo no estado do Rio de Janeiro. Ela foi composta de seis atividades elaboradas com o objetivo de perceber, na prática, como os alunos desenvolvem matemática agregando o uso de computadores como recurso tecnológico. Todas as atividades foram desenvolvidas para serem resolvidas apenas com a visualização dos gráficos gerados na tela do computador através do uso do geogebra.

Cada uma das atividades tinha um objetivo específico que servia de suporte para as atividades seguintes. Após a execução das seis atividades, foi proposta a resolução visual de um problema de maximização envolvendo programação linear.

As atividades 1 e 2 foram articuladas com conhecimentos da física para que os alunos percebessem como a matemática se integra com outras ciências. Com elas foi possível discutir sobre coeficientes angulares e lineares, além da interpretação gráfica dos sistemas lineares, mostrando assim, as influências visuais dos gráficos gerados pelo geogebra sobre as devidas equações.

Na atividade 3 a proposta era resolver um problema de escolha e decisão apoiadas nas visualizações gráficas e nos conhecimentos despertados nas atividades anteriores. Essa atividade era articulada com o cotidiano dos alunos para que percebessem que a matemática está presente no dia a dia.

A quarta atividade foi puramente matemática e sintetizou os conhecimentos discutidos nas atividades anteriores, além de servir de apoio à quinta atividade.

As atividades 5 e 6 trataram da representação gráfica de inequações e sistemas de inequações. Estas atividades finais abriram caminho para a culminância desta oficina com o problema de Maximização envolvendo as restrições (sistema de inequações) e uma função objetiva.

3.2 ENUNCIADOS DAS ATIVIDADES E ANÁLISE DOS RESULTADOS APÓS APLICAÇÃO

Atividade 1
Comportamento das retas em relação às funções horárias

Um trem A parte do km 50 e move-se com velocidade constante de 10km/h ao mesmo instante que um trem B parte do km 10 com velocidade de 15 km/h.

<u>Em relação ao trem A</u>

a) qual será a distância "d" percorrida após 1 hora?

b) qual será a distância "d" percorrida após 2 horas?

c) qual será a distância "d" percorrida após 3 horas?

d) qual será a distância "d" percorrida após 4 horas?

e) qual será a distância "d" percorrida após " x" horas?

<u>Em relação ao trem B</u>

a) qual será a distância "d" percorrida após 1 hora?

b) qual será a distância "d" percorrida após 2 horas?

c) qual será a distância "d" percorrida após 3 horas?

d) qual será a distância "d" percorrida após 4 horas?

e) qual será a distância "d" percorrida após " x" horas?

<u>Em relação aos trens A e B</u>

Os trens irão se encontrar em algum momento? Justifique.

Análise da Atividade 1

Esta atividade tinha como objetivo gerar uma equação que permitisse calcular a posição de um trem a partir da posição inicial e de sua velocidade constante e, em seguida, determinar se os trens iriam se encontrar em determinado momento.

Os alunos montaram as equações e não encontraram dificuldade em afirmar que os trens iriam se encontrar em algum momento. A maioria mostrou o momento do encontro como justificativa, porém um grupo justificou sem cálculos. Para este grupo, o fato de um trem ter velocidade maior que o outro já é suficiente para que eles se encontrem em algum momento. Esta última justificativa foi importante para conclusões das atividades posteriores.

Atividade 2

Função horária das posições do MU : $S = S_0 + vt$

Sendo S = y e t = x a função horária de dois trens A e B são respectivamente:

y = 50 + 10x e y = 10 + 15x

a) Represente graficamente no geogebra as Funções horárias dos trens A e B.

b) Qual a posição inicial de cada trem?

c) Qual a velocidade de cada trem?

d) O trem B alcançará o trem A? Justifique.

e) Existe alguma relação entre a velocidade dos trens e a inclinação das retas? Justifique.

f) Qual a posição relativa entre as retas que representam as Funções horárias dos trens A e B?

g) O que aconteceria com a posição relativa entres as retas que representam as Funções horárias dos trens A e B se as velocidades dos trens fossem iguais?

h) Resolva o sistema

$$\begin{cases} y = 50 + 10x \\ y = 10 + 15x \end{cases}$$

x = __________ e y = __________

i) Qual seria a interpretação gráfica desta solução?

j) Como você interpretaria um sistema de solução impossível? Como seria a interpretação gráfica neste caso?

k) Como você interpretaria um sistema de infinitas soluções? Como seria a interpretação gráfica neste caso?

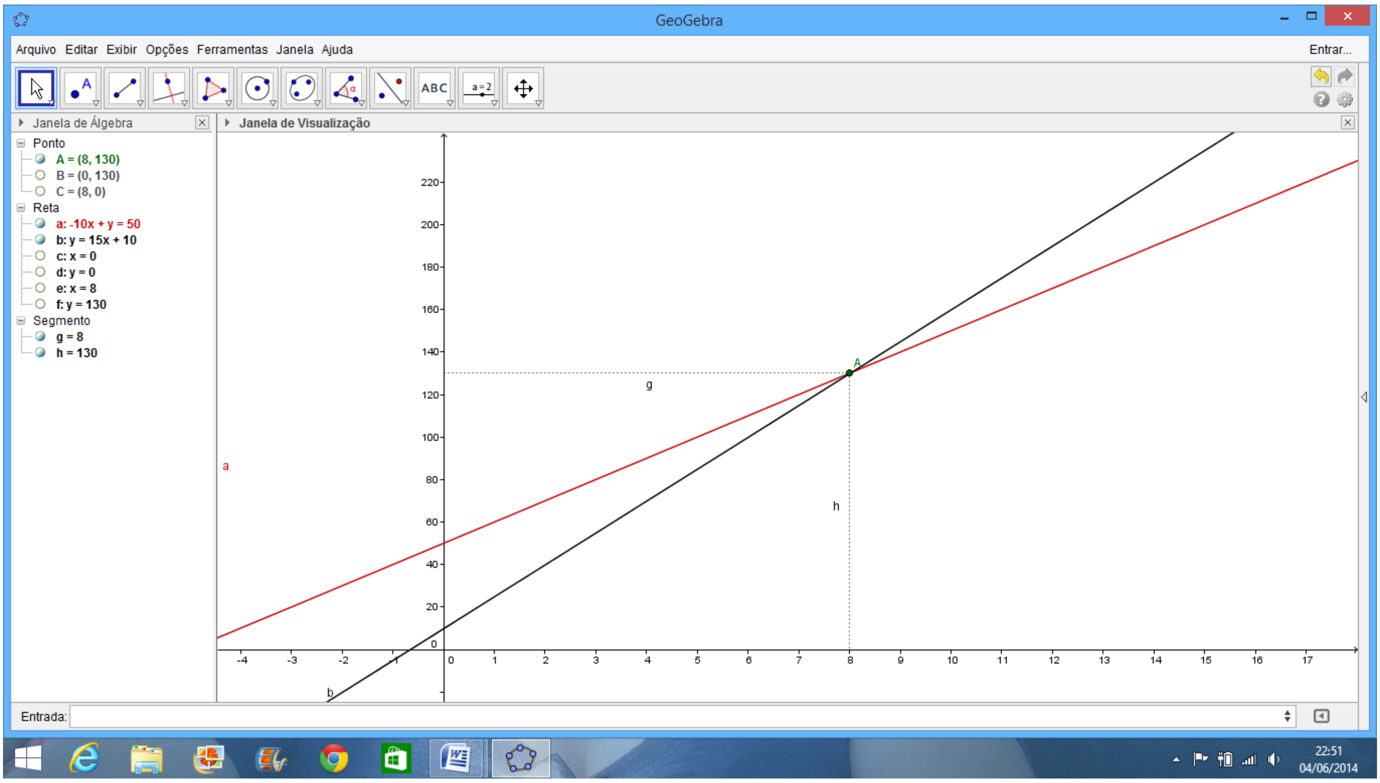
Análise da Atividade 2

O objetivo desta atividade era perceber que a velocidade determina a inclinação da reta e, a partir dessa conclusão, determinar a posição relativa das retas a partir da função horária.

Após a representação das retas no geogebra os alunos não tiveram dificuldade em perceber que o ponto de encontro das retas determina o momento de ultrapassagem do trem B em relação ao trem A. Eles perceberam que o trem de maior velocidade tem reta com maior inclinação e o grupo que justificou na atividade 1 que a maior velocidade do trem B era suficiente para que acontecesse o encontro pode concluir que de fato a velocidade determina se os trens vão ou não se encontrar.

Ao analisar trens com velocidades iguais eles entenderam que as retas nunca se encontrariam, porém demoraram um pouco para determinar que essas mesmas retas eram paralelas. Sabiam que as retas não podiam se encontrar, mas não fizeram uma rápida ligação com as retas paralelas da geometria plana.

Quadro 24



Em relação a um sistema de infinitas soluções eles não conheciam o termo retas coincidentes e relataram "*as retas se cruzariam o tempo todo*", "*uma reta em cima da outra*". O que demonstra entendimento em relação à pergunta feita faltando apenas ampliação no vocabulário.

Atividade 3

Três planos de telefonia celular são apresentados a seguir:

-Plano A Custo fixo mensal de 40 reais e um Custo adicional por minuto 50 centavos

-Plano B Custo fixo mensal de 20 reais e um Custo adicional por minuto 90 centavos

-Plano C Sem Custo fixo mensal e um custo de R$ 1,30 por minuto

a) Determine uma equação que represente o custo "C" para um uso de "x" minutos mensais para cada plano.

Plano A - ________________________

Plano B - ________________________

Plano C - ________________________

b) Represente graficamente no geogebra as equações encontradas no item a.

c) Existe solução para o sistema que envolve as três equações?

d) Em que momento o plano A é mais vantajoso?

e) Em que momento o plano B é mais vantajoso?

f) Em que momento o plano C é mais vantajoso?

Três planos de telefonia celular são apresentados a seguir:

-Plano A Custo fixo mensal de 40 reais e um Custo adicional por minuto 60 centavos

-Plano B Custo fixo mensal de 20 reais e um Custo adicional por minuto 90 centavos

-Plano C Sem Custo fixo mensal e um custo de R$ 1,40 por minuto

a) Determine uma equação que represente o custo "C" para um uso de "x" minutos mensais para cada plano.

Plano A - ________________________

Plano B - ________________________

Plano C - ________________________

b) Represente graficamente no geogebra as equações encontradas no item a.

c) Existe solução para o sistema que envolve as três equações?

d) Em que momento o plano A é mais vantajoso?

e) Em que momento o plano B é mais vantajoso?

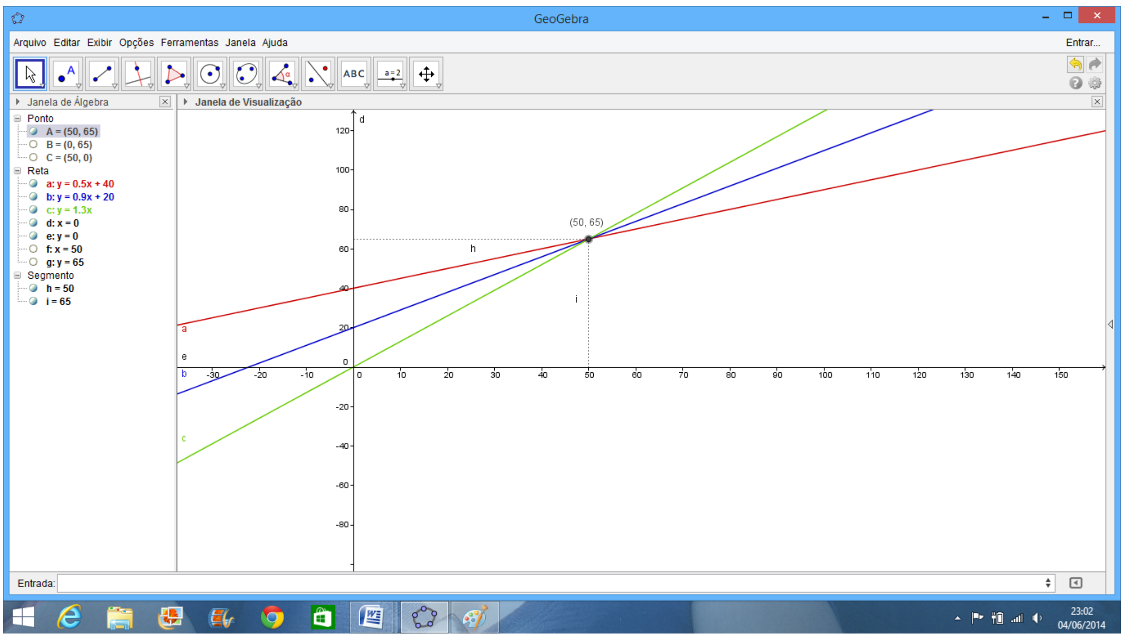
f) Em que momento o plano C é mais vantajoso?

Análise da Atividade 3

O objetivo desta atividade era mostrar como a representação gráfica pode contribuir para a resolução de um problema de tomada de decisões. A atividade foi dividida em duas partes e, tão logo os grupos construíram os gráficos correspondentes à primeira parte desta atividade, já perceberam que a intersecção das retas representava a solução do sistema e que neste ponto estava a chave para concluir qual intervalo seria mais vantajoso em cada plano.

Com a representação gráfica os alunos foram incisivos ao declarar que o fato da reta C " *estar por baixo* ", antes do ponto de encontro, demonstra que o plano C vale mais a pena no intervalo anterior à intersecção. Após o encontro é o plano A o mais vantajoso, pois é o motivo de "estar por baixo".

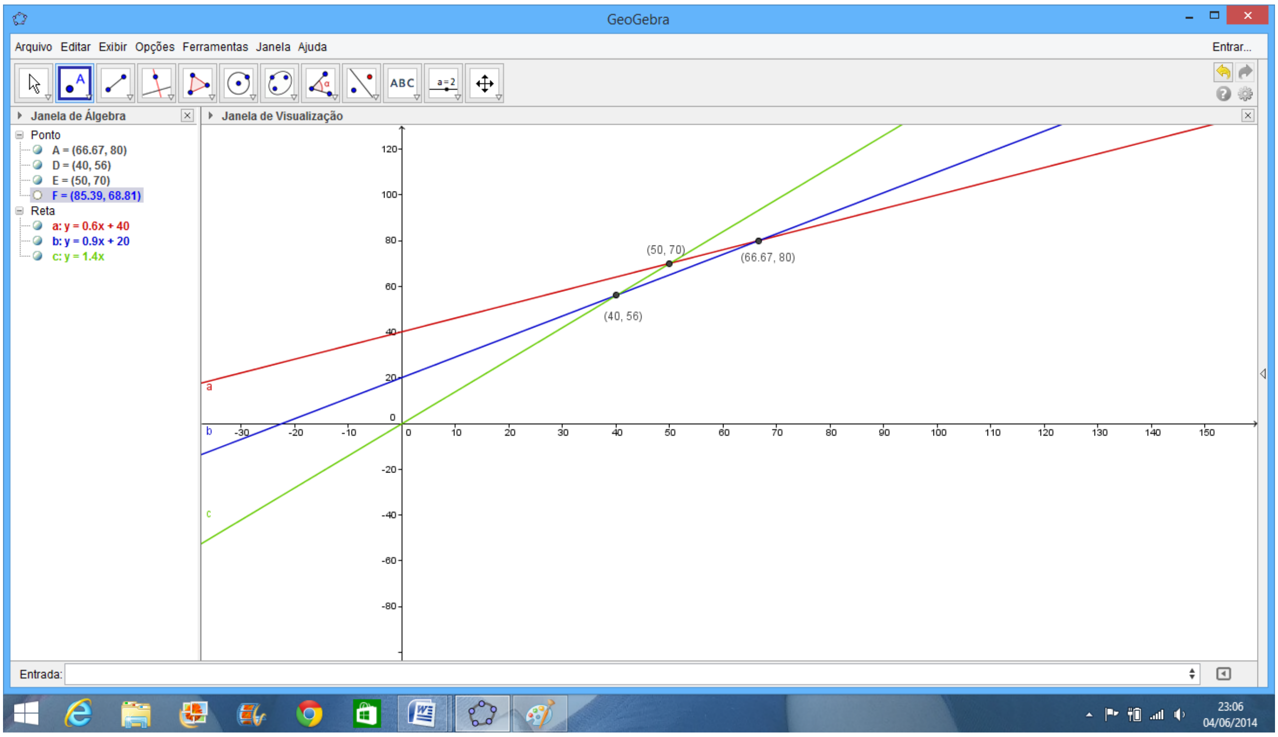
Quadro 25



Um fato interessante é que os alunos queriam encontrar um intervalo em que o plano B era mais vantajoso, portanto, ao analisarem o gráfico ficou claro que não existia este intervalo. Neste momento os alunos puderam discutir sobre diversos planos reais de telefonia e perceber que cada plano tem sua peculiaridade e através da representação gráfica fica "*fácil tomar uma decisão*". Este momento foi bem empolgante para a classe.

Na segunda etapa desta atividade foi proposto um novo problema em que não existia um ponto comum entre as três retas. Os alunos perceberam que o sistema com essas três equações não teria solução. Com os comentários "*Se as três estivessem em um encontro único teria solução*" e "*as retas não se cruzam*" ficou evidenciado que eles associam a intersecção das retas com a solução de um sistema de equações, o que era um objetivo das atividades 1 e 2.

Quadro 26



Atividade 4

Insira equação y = ax +b no campo de entrada do geogebra e crie um controle deslizante para os coeficientes "a" e "b".

a) O que acontece com a reta quando a=0 e b≠0?

b) o que acontece com a reta quando a>0?

c) O que acontece com a reta quando a<0 ?

d) O que acontece com a reta quando a=1 e b=0 ?

e) o que acontece com a reta quando a=1 e b=3 ?

f) O que acontece com a reta quando a=1 e b=4 ?

g) O que o coeficiente "a" determina? E o coeficiente b?

Insira as equações y = ax +b e y = -2x +6 no campo de entrada do geogebra e crie um controle deslizante para os coeficientes "a", "b".

Em relação ao sistema $\begin{cases} y = ax + b \\ y = -2x + 6 \end{cases}$, determine:

a) para que valores de "a", "b" o sistema tem solução única?

b) para que valores de "a", "b" o sistema não tem solução?

c) para que valores de "a", "b"o sistema tem infinitas soluções?

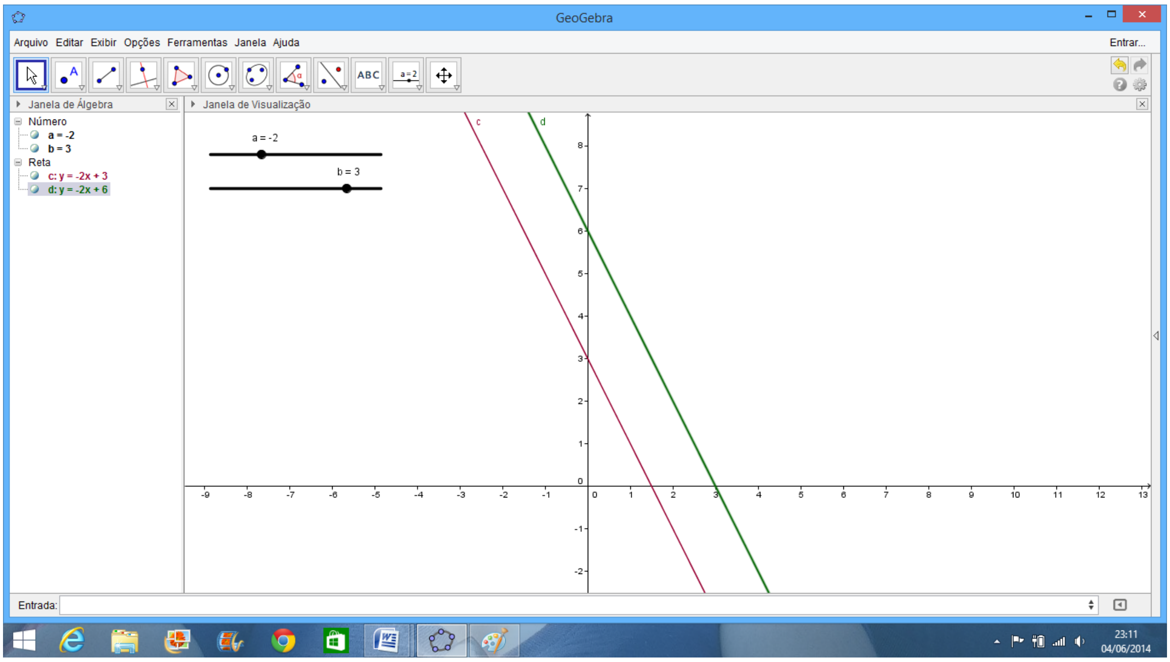
Análise da Atividade 4

Após terem trabalhado com os problemas dos trens e dos planos de telefonia, eles tinham que concluir nesta atividade problemas mais teóricos em relação aos coeficientes da equação da reta. Neste momento eles notaram como os controles deslizantes tornam a análise mais dinâmica. A conclusão em relação ao coeficiente "a" foi rápida e segura e sempre associada à velocidade dos trens da atividade 2.

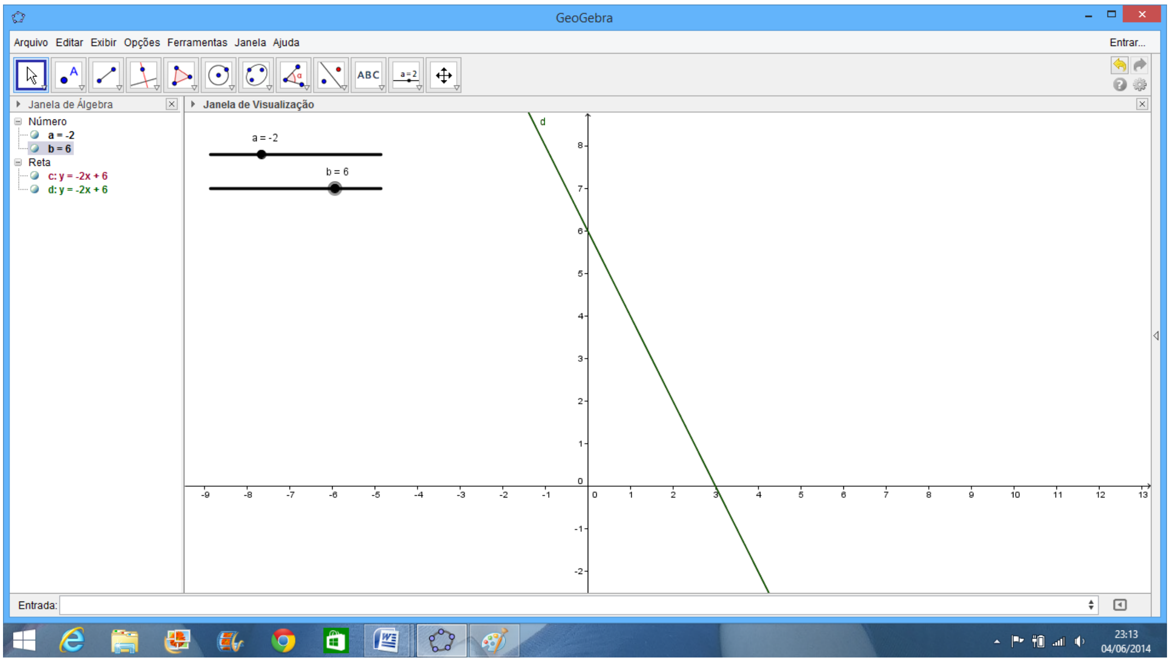
Um fato curioso foi um grupo ter respondido que se a>0 a reta "*fica inclinada*" e se a<0 a reta "*fica desinclinada*". Mais uma vez percebe-se que houve um entendimento mas faltou vocabulário para escrever reta crescente ou reta decrescente. Em relação ao coeficiente "b"eles percebiam a mudança de posição ao mudarem os valores contudo, não associaram o valor de "b" diretamente com a intersecção da reta com o eixo y.

Ao analisarem o sistema novamente eles se remeteram ao problema das velocidades e concluíram que se "a" fosse diferente de "-2" as retas se cruzariam em algum ponto. Já em relação ao sistema sem soluções, fixaram "a" em "-2" e ao trocarem os valores de "b" ficaram curiosos quando "*a reta sumiu". L*ogo perceberam que com a=-2 e b= 6 as retas eram coincidentes.

Quadro 27



Quadro 28



Atividade 5

Visualizando inequações e sistemas de inequações graficamente

a) Represente graficamente a inequação $2x - 6 > 0$ no geogebra.

b) Represente graficamente a inequação $x + 5 < 0$ no geogebra.

c) A partir das representações dos itens a) e b) em um mesmo plano , qual a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x - 6 > 0 \\ x + 5 < 0 \end{cases}$$

d) Represente graficamente a inequação $2x + 4 > 0$ no geogebra.

e) Represente graficamente a inequação $x - 5 < 0$ no geogebra.

f) A partir das representações dos itens d) e e) em um mesmo plano, qual a solução do sistema

$$\begin{cases} 2x + 4 > 0 \\ x - 5 < 0 \end{cases}$$

g) Represente graficamente a inequação $x + 2y \leq 8$ no geogebra.

h) Represente graficamente a inequação $3x + y \leq 9$ no geogebra.

i) Represente graficamente a inequação $x \geq 0$ no geogebra.

j) Represente graficamente a inequação $y \geq 0$ no geogebra.

k) A partir das representações dos itens g), h), i) e j) em um mesmo plano , qual a solução do sistema

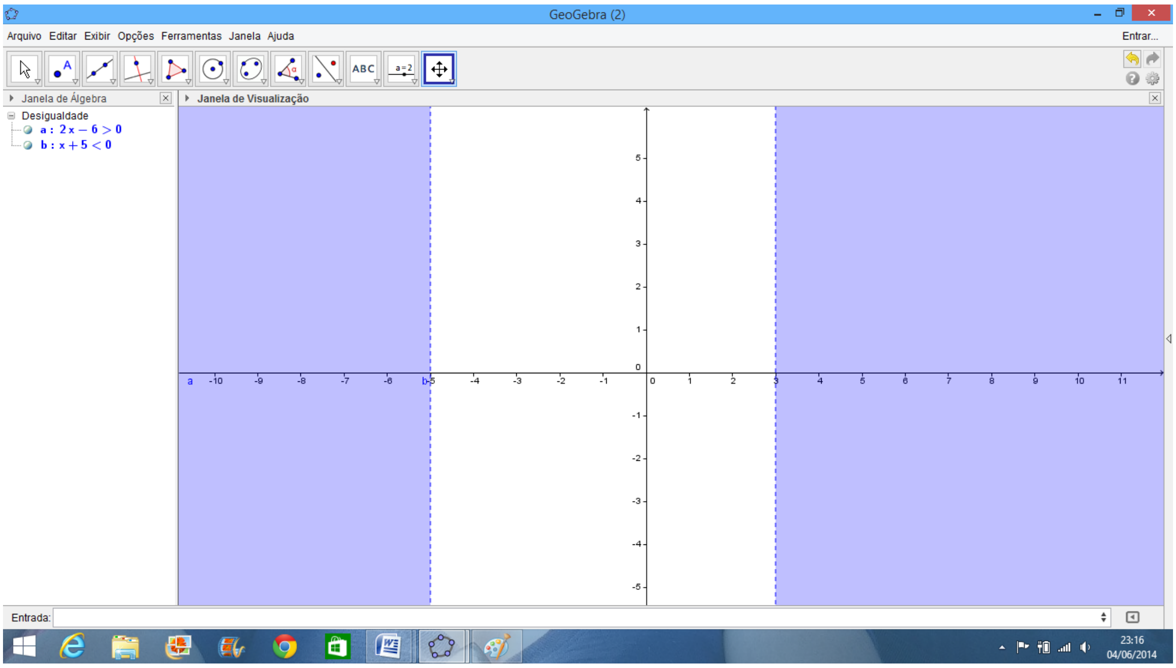
$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Análise da Atividade 6

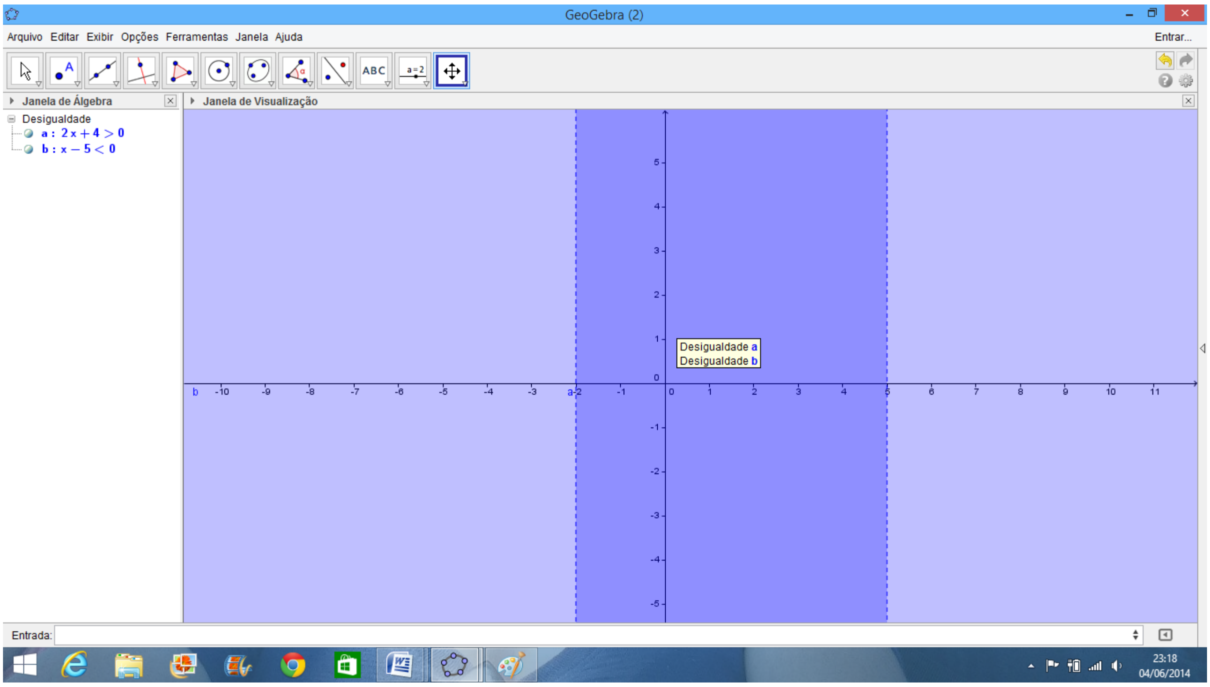
Após as atividades envolvendo equações e sistemas de equações serem desenvolvidas, os alunos já estavam bem familiarizados com o geogebra. Assim foram feitas as representações gráficas das inequações e sistemas de inequações com o objetivo de visualizar as soluções e, em seguida, determinar o conjunto solução de cada item.

Os alunos acharam interessante a visualização das inequações no geogebra, pois normalmente eles representam apenas como intervalos na reta real. Na resolução dos sistemas de inequações eles perceberam que assim como um sistema de equações, a solução é sempre a parte comum entre as inequações.

Quadro 29



Quadro 30



O item k da atividade foi o que levantou mais discussões já que os alunos ainda não haviam tido contato com sistemas de inequações cuja solução é um polígono. A conclusão do grupo foi que a "*área da figura do encontro de todos os pontos*" representa a solução do sistema.

Atividade 6

Explorando a representação de sistemas de inequações para maximizar funções com restrições (programação linear)

Use o geogebra para determinar o valor máximo de "a" na equação expressa por $x+y= a$, sujeita às restrições.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Use o geogebra para determinar o valor máximo de "a" na equação expressa por $2x+y=a$, sujeita às restrições.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Use o geogebra para determinar o valor máximo de "a" na equação expressa por $3x+y=a$, sujeita às restrições.

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Use o geogebra para determinar o valor máximo de "a" na equação expressa por $4x+y=a$, sujeita às restrições

$$\begin{cases} x + 2y \leq 8 \\ 3x + y \leq 9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Problema Final

Maximização do lucro de uma empresa que fabrica skate

Para fabricar o skate para manobras a empresa gasta uma hora de serviço, já para o skate de descer ladeiras a empresa gasta 2 horas. Para montar e dar acabamento no skate para manobras a empresa leva 3 horas e no skate de descer ladeiras leva uma hora. Para a fabricação do skate a empresa dispõe de 8 horas por dia e para o acabamento dispõe de 9 horas por dia. O lucro obtido com a venda do skate de manobras é de 20 reais e para o skate de descer ladeiras é de 35 reais. Determine quantos skates de manobra e quantos de descer ladeiras devem ser fabricados por dia para que a empresa obtenha lucro máximo. Qual o lucro máximo?

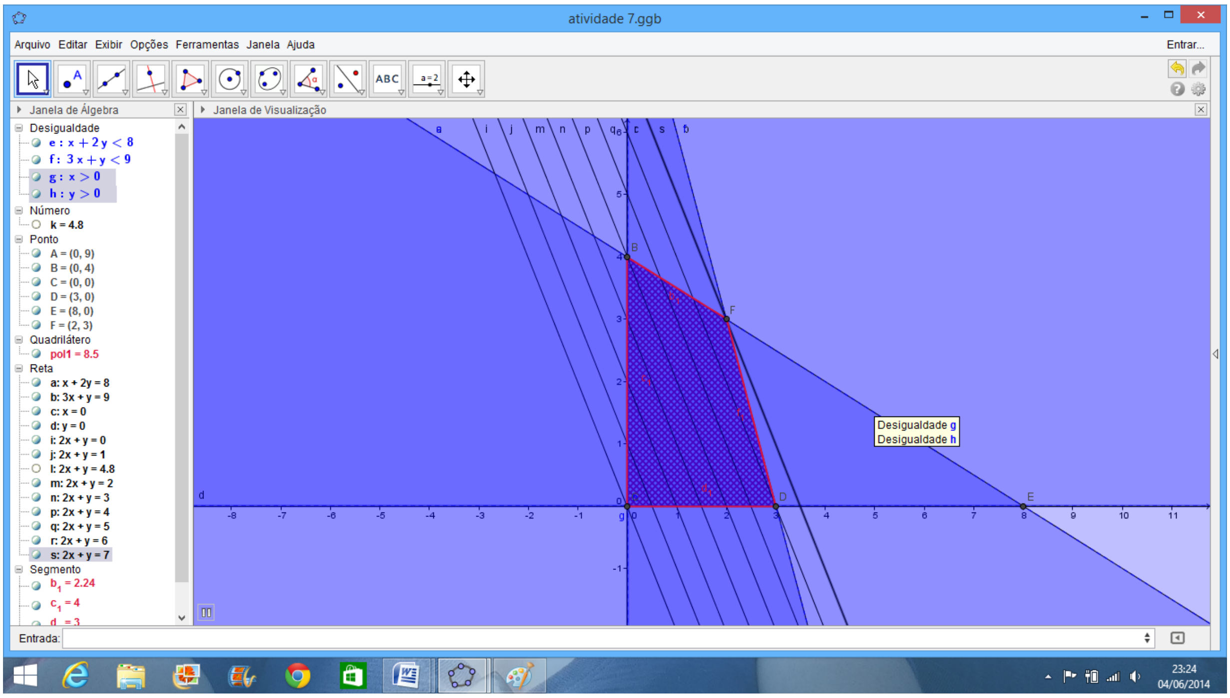
Análise da Atividade 6

Nesta atividade final o objetivo era modelar um problema para maximizar o lucro de uma empresa a partir de algumas restrições. Todos os sistemas de inequações presentes nesta atividade eram exatamente iguais ao item k da atividade 5. Eles já haviam discutido sobre a área do polígono que representava a solução do sistema. A tarefa agora era maximizar as equações tendo o sistema de inequações como restrições a serem consideradas.

Para solucionar as equações eles usaram a representação construída no geogebra no item k acrescentando, uma a uma, as equações a serem maximizadas, além de determinar todos os pontos de intersecção entre as retas envolvidas. Deste modo foi criado um controle deslizante para a variável "a" para que fossem percebidos os vários níveis de solução para a equação e assim determinar o ponto ou conjunto de pontos que maximiza a equação.

Os alunos intuitivamente determinaram os valores de "a" que tornava máxima as equações $x + y = a$, $2x + y = a$ e $4x + y = a$. Somente na equação $3x + y = a$ eles demoraram mais para perceber que a solução não era um ponto e sim uma reta. Neste momento eles comentaram que a equação $3x + y = a$ era uma reta coincidente quando $a = 9$. Portanto haveria infinitos pontos que maximizavam a equação.

Quadro 31



Após finalizar o valor de "a" em cada equação iniciou-se um processo para modelar o problema final. Inicialmente os alunos não viram relação entre o problema de maximização do lucro da empresa que fabrica skates, com as maximizações feitas anteriormente. Somente após a modelagem do problema é que perceberam que se tratava das mesmas restrições impostas nos itens anteriores. Assim o processo final era determinar a equação do lucro L = 20x +35y , criar um controle deslizante para "L" e determinar o nível que torna máximo o lucro da empresa.

Encerrada esta última atividade os alunos vibrantemente perceberam que a matemática pode, e muito, contribuir para tomada de decisões de uma pessoa física ou empresa. Concluíram, assim, que a representação gráfica de equações, inequações, sistemas de equações e sistemas de inequações contribuem plenamente para visualizar as respectivas soluções, bem como o uso de um software torna a aula mais dinâmica e atrativa melhorando relevantemente a aprendizagem da matemática.

O grande segredo para a plenitude é muito simples: compartilhar.

(Sócrates)

4 CONCLUSÃO

Após a realização deste trabalho fica evidente que as mudanças necessárias no ensino de matemática devem estar apoiadas no uso de recursos tecnológicos. Com o uso de tais recursos surge para o professor e para os alunos uma grande oportunidade de gerar com facilidade imagens gráficas das mais simples como uma reta a mais complexas como fractais.

Assim, não tendo que gerar os gráficos apenas usando um quadro e uma caneta, sobra um maior tempo para dedicar a observação e análise destas imagens. De fato é muito importante discutir sobre o que uma imagem tem a nos dizer, pois em muitos casos é mais importante do que a própria construção da imagem. Esta análise poderá dar suporte para futuras construções gráficas já que todas as manipulações possíveis em um software de geometria dinâmica ajudam o estudante a criar um maior vinculo entre a álgebra e a geometria.

Desta maneira, apoiado nas visualizações, a aproximação de ferramentas tecnológicas do processo de ensino e aprendizagem contribui-se para que seja desenvolvida no educando uma maior capacidade de observação de imagens gráficas e o uso destas para a resolução de diversos problemas.

Além de todas as facilidades encontradas com o uso dos recursos tecnológicos, surge um fator importante que é o dinamismo e a grande participação dos alunos nas atividades que dependem do uso da tecnologia. É claro que para manter esse dinamismo e participação cabe ao professor elaborar atividades que estimulem tais características.

Dispondo de programas gratuitos de geometria dinâmica e alunos que dispõe de computadores, tablets ou celulares,surge uma única preocupação com o tempo que o professor dispõe fora da sala de aula para elaborar seus projetos e planejamentos.

Porém se o uso de tecnologias com atividades previamente elaboradas agradam e estimulam os alunos ao aprendizado de Matemática, o professor deve na medida do possível incorporar tal atividade em sua prática docente e suprir o pouco tempo fora de sala de aula com o também uso das tecnologias existentes. Se uma atividade foi elaborada, porque não compartilhar esta com outros professores formando uma rede de colaborações? Talvez esse seja o grande salto que precisamos para entrar em uma nova era de conhecimentos, compartilhar ideias e ideais.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto / Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf>. Acesso em: 23 de junho 2014.

PONTE, J. (1986). **O computador: Um Instrumento da Educação**. Lisboa: Texto Editora. Apud Borrões, M 1998. Disponível em: <http://www.pucrs.br/famat/viali/mestrado/ante/literatura/Livros/matematica.pdf>. Acesso em: 18 de outubro de 2014

DUVAL, Raymond. **Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento**. Disponível em: <http://www.academia.edu/6417128/ARTIGO_DUVAL>. Acesso em: 23 de outubro de 2014

MACHADO, Rosa Maria. **A visualização na resolução de problemas de calculo diferencial e integral no ambiente computacional MPP**. Tese de Doutorado, 2008, Universidade Estadual de Campinas. Disponível em: <http://www.bibliotecadigital.unicamp.br/document/?code=vtls000440070>. Acesso em: 11 de agosto de 2014.

DEVLIN, Keith. **Matemática: a ciência dos padrões**. Porto: Porto Editora, 2002.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática.** Campinas-SP. 1997. Tradução de Higino H. Domingues da publicação original AN INTRODUCTION TO THE HISTORY OF MATHEMATICS.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: representação e construção em Geometria**. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

NOVELLINO, Rosa Novaes, **Uma Abordagem Visual para o Ensino de matemática Financeira no Ensino Médio.** Dissertação de Mestrado 2009, Universidade Federal do Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/18%20Rosa%20Novellino.pdf>. Acesso em: 11 de setembro de 2014.

FLORES, Cláudia R; WAGNER,Débora R; BURATTO e Ivone, C. F., **Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas,** 2012. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/8008>. Acesso em: 14 de agosto de 2014.

GUZMÁM, Miguel de, **El Rincón de La Pizarra**, 1996. Pirâmide, Madrid. Tradução por Isadora Lopes Soares. Disponível em: <http://pt.scribd.com/doc/106869455/Guzman#scribd>. Acesso em 19 de dezembro de 2014.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.). **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003.

DUVAL, Raymond; MORETTI, Trad. Méricles Thadeu. **REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E FUNCIONAMENTO COGNITIVO DO PENSAMENTO** . Revemat: revista eletrônica de educação matemática, [S.l.], v. 7, n. 2, p. 266-297, dez. 2012. ISSN 1981-1322. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266>. Acesso em: 3 de dezembro de . 2014.

DUVAL, Raymond. : **Raymond Duval e a teoria do registros de representação semiótica.** Revista Paranaense de Educação Matemática, Campo Mourão, PR, v.2, n.3, jul-dez. 2013. Disponível em: <http://www.fecilcam.br/rpem/documentos/v2n3/Entrevista.pdf> Acesso em: 5 de outubro de 2014.

ENEM, **Exame Nacional do Ensino Médio**. INEP - Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. Ministério da Educação. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/enem>. Acessado em setembro de 2014.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um Curso de Cálculo. Vol. 1**. Rio de Janeiro. LTC, 1999.