UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

Particularidades do Teorema de Poncelet

por

Marcos Antonio Felix de Almeida

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

UFPB

PROFMAT

Particularidades do Teorema de Poncelet †

por

Marcos Antonio Felix de Almeida

sob orientação da

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2014

João Pessoa - PB

† Este trabalho contou com apoio financeiro da Capes.

Particularidades do Teorema de Poncelet

por

Marcos Antonio Felix de Almeida

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Corpo Docente do Curso de Pós-Graduação em Matemática em rede Nacional - PROFMAT - DM - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Matemática

Aprovada por:

Elisandra F. Gloss de Moraes

Profª. Drª. Elisandra de Fátima Gloss de Moraes-UFPB

(Orientadora)

Adriano Alves de Medeiros

Prof. Dr. Adriano Alves de Medeiros - UFPB

Mauricio Cardoso Santos

Prof. Dr. Mauricio Cardoso Santos - UFPE

Agosto/2014

Agradecimentos

A Deus, por ter me dado a oportunidade de estar realizando este trabalho, iluminando minha mente e meu caminho durante toda a caminhada;

Aos meus pais Mário Felix de Almeida e Maria José de Almeida, que embora não estando mais comigo, iluminaram de forma brilhante e especial os meus passos e pensamentos me levando a vencer esta caminhada e para os quais eu rogo todas as noites a minha existência;

A minha família, pelo incentivo e colaboração nas horas difíceis e em especial a minha esposa Osmarina Evaristo de Almeida, que de tal forma me deu forças, confiança e coragem para continuar;

A todos os meus colegas de curso, que de maneira carinhosa, me encorajaram com palavras de conforto e amigas e que nas horas difíceis souberam me auxiliar nos trabalhos e dificuldades e por estarem comigo nesta caminhada tornando-a mais fácil, alegre e agradável, e principalmente a Renart e Mayana;

A minha orientadora profª Elisandra Gloss pela dedicação com que me orientou durante a elaboração desse trabalho e principalmente pela constante motivação e paciência;

A Jean Victor Poncelet;

À CAPES pelo apoio financeiro.

Dedicatória

Dedico este Trabalho de Conclusão de Curso a;

Deus pela minha existência;

A minha família pela fé e confiança demonstrada;

Aos meus amigos pelo apoio incondicional;

Aos meus pais por iluminarem meu caminho e minha mente;

Aos professores pelo simples fato de estarem dispostos a ensinar;

Enfim a todos que de alguma forma contribuíram e tornaram a minha caminhada mais fácil de ser percorrida.

Resumo

Neste trabalho estudaremos algumas aplicações do Teorema de Poncelet à geometria do Ensino Médio. Uma das nossas principais motivações é que nos cursos de Matemática a nível de Ensino Médio a Geometria é pouco utilizada e em algumas circunstâncias os teoremas não são demonstrados para o conhecimento das teorias abordadas. Finalmente, uma lista de exercícios é proposta.

Palavras-chave: Triângulos, Circunferências, Elipses, Tangentes.

Abstract

In this work we study some applications of the Poncelet's Theorem for teaching geometry. One of our main motivations for this work is that in some the high school leved math courses the study of geometry is slightly used and in certain circunstances the theorems are not demonstrated to the knowledge of the theories discussed. Finally, a list of exercises is proposed.

Keywords: Triangles, Circles, Ellipses, Tangents.

Sumário

Notações

Nesta dissertação usaremos as seguintes notações:

OP - Segmento de extremidades nos pontos O e P;

$\overline{OP}$ - Comprimento do segmento OP;

$\overrightarrow{OP}$ - Semirreta de origem em O e contendo P;

$\overleftrightarrow{OP}$ - Reta contendo os pontos O e P;

$\widehat{BC}$ - Arco de extremidades B e C;

$B\widehat{A}C$ - Ângulo com vértice em A e lados nas semirretas $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AC}$;

$r \perp s$ - As retas r e s são ortogonais;

$d(P, \overrightarrow{OA})$ - Distância do ponto P à semirreta de origem em O e contendo A;

$\Gamma(O, r)$ - Circunferência Γ de centro no ponto O e raio r.

Introdução

A construção de uma educação de qualidade se dá quando refletimos sobre as necessidades dos professores e alunos e de uma metodologia educacional abrangente.

Aprender é vivenciar e adquirir experiências, é enfrentar desafios, descobrir coisas novas, buscar conhecimentos.

Esse trabalho foi pensado, escrito e organizado com o objetivo de facilitar a aprendizagem, para ajudar os alunos e professores com relação à Geometria, no intuito de buscar maior entendimento sobre o teorema de Poncelet, cujo enunciado é:

Teorema de Poncelet: Dadas duas elipses disjuntas e uma dentro da outra, se existe um polígono circunscrito à elipse interna e inscrito à externa, de n-lados, então qualquer ponto pertencente a elipse externa é vértice de algum polígono com as mesmas características.

Existem várias provas desse notável teorema de Poncelet, a maioria das quais não são elementares. Por isso, nosso objetivo é encontrar uma prova elementar para uma solução não trivial no caso em que $n = 3$, isto é, quando temos duas elipses e um triângulo.

O teorema de Poncelet é um importante resultado da geometria envolvendo cônicas inscritas e circunscritas a um polígono. Por isso vamos mostrar uma abordagem que necessita apenas de ferramentas dos programas de Ensino Médio.

Neste Trabalho de Conclusão de Curso apresentaremos as contribuições científicas fundamentais de Jean Victor Poncelet (1788-1867) relacionadas a seus trabalhos com a Geometria.

Aqui vamos apresentar particularidades do teorema de Poncelet em situacões que permitem perceber a facilidade com que tudo acontece. Mostraremos situações envolvendo triângulos e círculos, quadriláteros e círculos e elipses.

Sabemos do Ensino Médio, que dado um triângulo é sempre possível construir uma circunferência inscrita e outra circunscrita ao triângulo. Suponhamos que temos duas circunferências, uma interna a outra. Será que é possível construir um triângulo ao mesmo tempo inscrito na exterior e circunscrito na interior? Apresentamos aqui um resultado bem conhecido que nos dá uma condição necessária e suficiente para que tal triângulo exista.

Capítulo 1

Teoremas de Poncelet

Neste capítulo estudaremos as contribuições de Poncelet para triângulos, quadriláteros e circunferências. Os resultados que iremos apresentar aqui podem ser encontrados em [3], [4], [7], [10] e [12]. Antes de fazermos as demonstrações desejáveis vamos mostrar algumas proposições necessárias e suficientes para chegarmos a prova do teorema de Poncelet.

1.1 Teorema de Poncelet no Triângulo Retângulo

Para provarmos o principal resultado desta seção precisamos de alguns resultados básicos, que provaremos aqui para deixar este trabalho mais completo.

Definição 1 *Dizemos que uma reta t e uma circunferência Γ são tangentes ou, ainda, que a reta t é tangente à circunferência Γ, se t e Γ tiverem exatamente um ponto P em comum. Neste caso, P é dito* ***ponto de tangência*** *de t e Γ.*

Proposição 1.1 *([1, Proposição 3.16]) Sejam Γ um círculo de centro O e P um ponto de Γ. Se t é a reta que passa por P é perpendicular a $\overleftrightarrow{OP}$, então t é tangente a Γ em P.*

Prova: Tomemos uma circunferência Γ de centro em O e raio r e seja P um ponto qualquer da circunferência Γ. O segmento OP é um raio. Seja t a reta perpendicular ao segmento OP no ponto P. Tomemos um outro ponto Q na reta t e tracemos o segmento OQ, como mostra a Figura 1.1. Como o lado OQ é oposto ao maior ângulo do triângulo ΔOPQ, temos que $\overline{OQ} > \overline{OP} = r$. Daí o ponto Q não pertence a circunferência Γ e portanto t é a reta tangente que procuramos. Concluímos assim

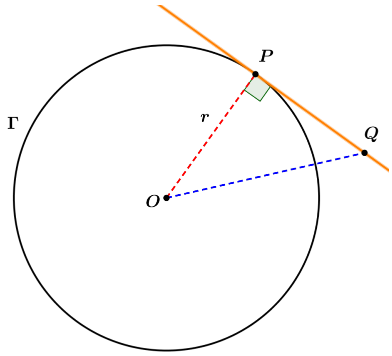

Figura 1.1: Reta tangente

que toda reta tangente a uma circunferência é perpendicular a um raio no ponto de tangência. ■

Definição 2 *([1, Definição 3.1]) Dada uma propriedade P relativa a pontos do plano, o* ***lugar geométrico****(abreviando* ***LG****) dos pontos que possuem a propriedade P é o subconjunto £ do plano que satisfaz as duas condições a seguir:*
(a)Todo ponto de £ possui a propriedade P.
(b)Todo ponto do plano que possui a propriedade P pertence a £.
Em outras palavras, £ é o LG da propriedade P se £ for constituído exatamente pelos pontos do plano que têm a propriedade P, nem mais nem menos. No que segue, veremos alguns lugares geométricos elementares.

Definição 3 *([1, Exemplo 3.2]) Dado um número real positivo r e um ponto O do plano, o* ***LG*** *dos pontos do plano que distam r do ponto O é o círculo Γ de centro*

O e raio r:

$$\overline{AO} = r \iff A \in \Gamma(O, r)$$

.

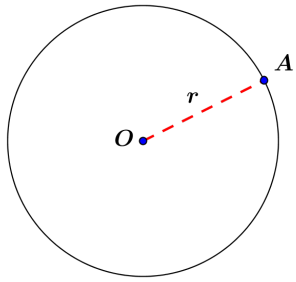

Figura 1.2: Círculo como LG.

Definição 4 *Dados os pontos A e B no plano, a* ***mediatriz*** *do segmento AB é a reta perpendicular a AB e que passa por seu ponto médio.*

Proposição 1.2 *([1, Proposição 3.4]) Dados pontos A e B no plano, a mediatriz de AB e o LG dos pontos do plano que equidistam de A e de B.*

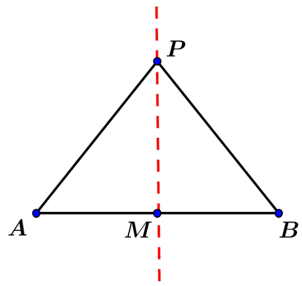

Figura 1.3: $P \in$ (mediatriz de AB)$\Longrightarrow \overline{PA} = \overline{PB}$.

Prova: Sejam M o ponto médio e m a mediatriz de AB como mostra a Figura 1.3. Se $P \in m$, então, no triângulo ΔPAB, PM é mediana pois temos que M é ponto médio de AB e altura devido ao segmento PM ser perpendicular a AB e daí, o

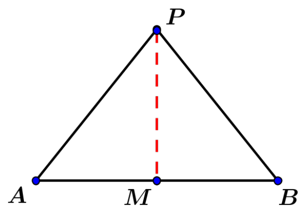

Figura 1.4: $\overline{PA} = \overline{PB} \Longrightarrow P \in$ (mediatriz de $\overline{AB}$).

triângulo ΔPAB é isósceles de base AB. Logo $\overline{PA} = \overline{PB}$. Reciprocamente, seja P um ponto no plano tal que $\overline{PA} = \overline{PB}$ como mostra a Figura 1.4. Então, o triângulo ΔPAB é isósceles de base AB, donde segue que a mediana e a altura relativas a AB coincidem e equivalem ao seguimento PM, logo $PM \perp AB$, logo $P \in m$, (mediatriz de AB), o que é o mesmo que dizer que $\overline{PM}$ é mediatriz de AB, como queríamos provar. ∎

Proposição 1.3 *([1, Proposição 3.25]) Sejam Γ uma circunferência de centro O e P um ponto exterior à mesma. Se os pontos A e B, pertencentes a Γ, são tais que $\overleftrightarrow{PA}$ e $\overleftrightarrow{PB}$ são tangentes a Γ, então $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overleftrightarrow{PO}$ é a mediatriz de AB. Em particular temos $\overleftrightarrow{PO} \perp \overleftrightarrow{AB}$.*

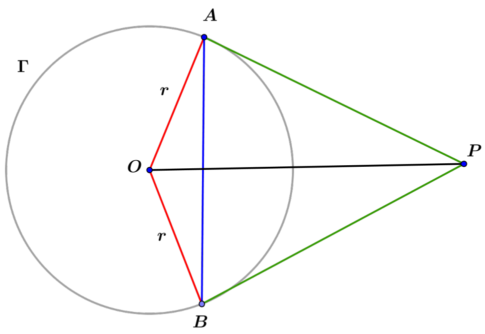

Figura 1.5: Retas tangentes

Prova: Como $\overline{OA} = \overline{OB}$, já que são raios da circunferência, e os ângulos $P\widehat{A}O = P\widehat{B}O = 90°$, os triângulos ΔPAO e ΔPBO são congruentes pelo caso especial cateto e hipotenusa de congruência de triângulos retângulos. Veja Figura 1.5. Em particular tem-se $\overline{PA} = \overline{PB}$. Agora, como P e O equidistam de A e de B, segue que $\overleftrightarrow{PO}$ é a mediatriz do segmento AB, como queríamos. ■

O resultado a seguir é muitas vezes chamado de Teorema de Poncelet no triângulo retângulo, veja por exemplo [5].

Teorema 1.1 *Dada uma circunferência Γ de raio r, inscrita em um triângulo ΔABC retângulo em A, tem-se*

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BC} + 2r. \tag{1.1}$$

Prova: Considere o triângulo ΔABC, retângulo em A, circunscrito à circunferência Γ de raio r como mostra a Figura 1.6. Tomando os pontos de tangência P, Q e R

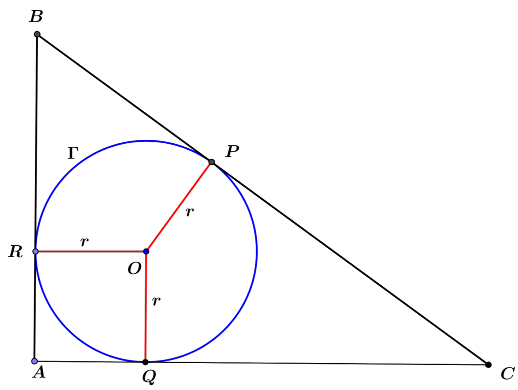

Figura 1.6: Triângulo Retângulo

dos lados BC, AC e AB respectivamente, temos $\overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = r$, raio da circunferência. Como os lados do triângulo são tangentes à circunferência, segue da Proposição 1.1 que os raios OP, OQ e OR são perpendiculares ao lados BC, AC e AB, nos pontos de tangência P, Q e R respectivamente. Portanto, o quadrilátero

$ORAQ$ é um quadrado de lado r. Já que:

$$\overline{AC} = \overline{AQ} + \overline{QC} \tag{1.2}$$

e

$$\overline{AB} = \overline{AR} + \overline{RB}, \tag{1.3}$$

somando membro a membro as equações (1.2) e (1.3) obtemos

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AQ} + \overline{QC} + \overline{AR} + \overline{RB}. \tag{1.4}$$

Segue da Proposição 1.3 que $\overline{AQ} = \overline{AR} = r$, $\overline{QC} = \overline{PC}$ e $\overline{RB} = \overline{BP}$. Então a equação dada em (1.4) equivale a

$$\overline{AB} + \overline{AC} = \overline{BP} + \overline{PC} + r + r = \overline{BC} + 2r$$

como queríamos demonstrar. ■

1.2 Teorema de Poncelet na Circunferência

Antes de provarmos um resultado que é conhecido como o Teorema de Poncelet na circunferência, precisamos de alguns resultados preliminares.

Proposição 1.4 *Sejam Γ um círculo de centro O e AB, CD duas cordas de Γ. Se as cordas AB e CD, se intersectam no ponto P interior a Γ, então*

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}.$$

Prova: Traçando os segmentos BC e AD, como mostra a Figura 1.7, pelo teorema do ângulo inscrito (veja [1, Proposição 3.18]), temos as igualdades para os ângulos

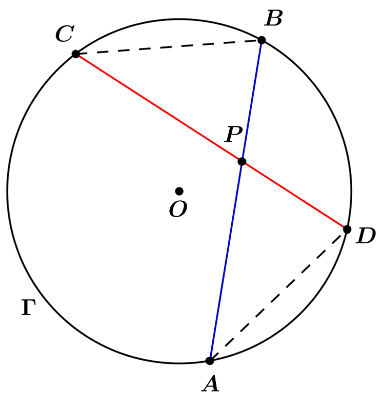

Figura 1.7: Potência de Ponto

$D\widehat{A}B = B\widehat{C}D$ e $A\widehat{B}C = C\widehat{D}A$. Como $B\widehat{P}C = D\widehat{P}A$ (pois são ângulos opostos pelo vértice), temos que os triângulos ΔCPB e ΔAPD são semelhantes (caso A A). Daí temos por semelhança que

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}}.$$

Logo $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$, como desejado. ∎

Corolário 1 *São dados no plano um círculo de centro O e raio R, e um ponto P interno ao círculo. Se uma reta que passa por P intersecta a circunferência nos pontos A e B então:*

$$\overline{PA}.\overline{PB} = R^2 - \overline{OP}^2. \tag{1.5}$$

Prova: Consideremos somente o caso em que P é interior ao disco determinado pela circunferência. Trace por P o diâmetro CD da circunferência, com P pertencente a OC, como mostra a Figura 1.8. Pela Proposição 1.4 (teorema das cordas) temos que $\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD}$. Como $\overline{PC} = R - \overline{OP}$ e $\overline{PD} = R + \overline{OP}$, temos

$$\overline{PA}.\overline{PB} = \overline{PC}.\overline{PD} = (R - \overline{OP}).(R + \overline{OP}) = R^2 - \overline{OP}^2.$$

Se AB é um diâmetro, basta considerar $C = A$ ou B de acordo com a posição de P e o resultado segue, como queríamos demonstrar. ∎

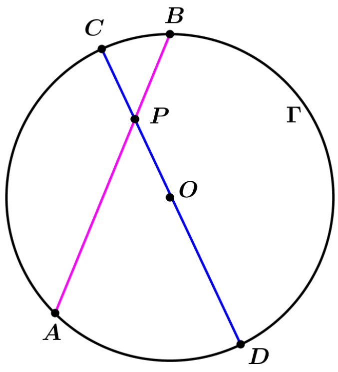

Figura 1.8: Potência de Ponto Interior

Proposição 1.5 *([1, Proposição 3.5]) Seja $A\widehat{O}B$ um ângulo dado. Se P é um ponto do mesmo, então*

$$d(P, \overrightarrow{AO}) = d(P, \overrightarrow{BO}) \Longleftrightarrow P \in (bissetriz\, de\, A\widehat{O}B).$$

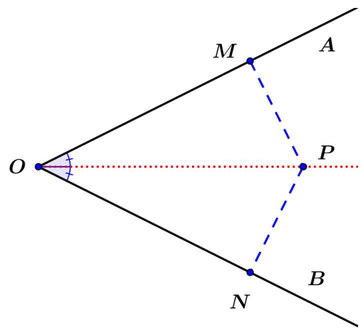

Figura 1.9: $P \in$ (bissetriz de $\angle AOB$)

Prova: Suponha que P pertence à bissetriz de $A\widehat{O}B$ e sejam M e N, respectivamente, os pés das perpendiculares baixadas de P às retas $\overleftrightarrow{AO}$ e $\overleftrightarrow{BO}$ como mostra a Figura 1.9. Como $M\widehat{O}P = N\widehat{O}P$, $O\widehat{M}P = O\widehat{N}P = 90°$ e OP é comum, segue que os triângulos ΔOMP e ΔONP são congruentes por LAA_o. Daí, $\overline{PM} = \overline{PN}$, ou seja, $d(P, \overleftrightarrow{OA}) = d(P, \overleftrightarrow{OB})$. Reciprocamente, seja P um ponto no interior do ângulo $A\widehat{O}B$, tal que $\overline{PM} = \overline{PN}$, onde M e N são os pés das perpendiculares baixadas de P respectivamente às retas $\overleftrightarrow{OA}$ e $\overleftrightarrow{OB}$. Então, os triângulos ΔMOP e ΔNOP são novamente congruentes, agora pelo caso CH de triângulos retângulos ($\overline{PM} = \overline{PN}$ e OP comum). Mas aí $M\widehat{O}P = N\widehat{O}P$, donde P está sobre a bissetriz do ângulo $A\widehat{O}B$, como queríamos provar. ∎

Teorema 1.2 *([1, Teorema 4.31]). Um círculo γ de raio r e centro I é interior a um circulo Γ de raio R e centro O. Se $A \in \Gamma$ e AB e AC são cordas de Γ tangentes a γ, então γ é o círculo inscrito no triângulo ΔABC se e só se*

$$R^2 - d^2 = 2rR.$$

com $d = \overline{OI}$.

Prova: Se P é o ponto de interseção do prolongamento da bissetriz AI do ângulo $B\widehat{A}C$ com Γ, como mostra a Figura 1.10, segue do Corolário 1 que

$$\overline{AI}.\overline{IP} = R^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - d^2. \tag{1.6}$$

Agora, sendo X e Y respectivamente os pés das perpendiculares traçadas de O e I

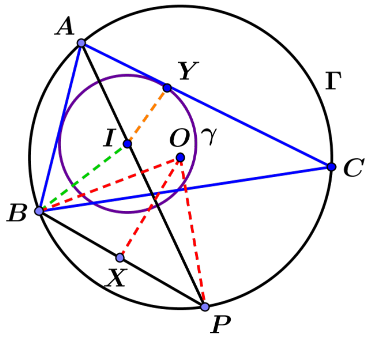

Figura 1.10: A distância $\overline{OI}$

a BP e AC, temos

$$B\widehat{O}X = \frac{1}{2}B\widehat{O}P = B\widehat{A}P = P\widehat{A}C = I\widehat{A}Y.$$

Como ambos os triângulos ΔBOX e ΔIAY têm um ângulo de $90°$, segue então do caso A.A. que ΔBOX e ΔIAY são semelhantes Portanto,

$$\frac{\overline{BX}}{\overline{IY}} = \frac{\overline{BO}}{\overline{AI}}$$

ou ainda,

$$\overline{BX}.\overline{AI} = \overline{BO}.\overline{IY}. \tag{1.7}$$

Como $\overline{BO} = R$, $\overline{IY} = r$ e $\overline{BX} = \frac{1}{2}\overline{BP}$, segue das equações (1.6) e (1.7) que

$$R^2 - \overline{OI}^2 = R^2 - d^2 = \overline{AI}.\overline{IP} = 2Rr.\frac{\overline{IP}}{\overline{BP}},$$

de maneira que

$$\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr \Longleftrightarrow \overline{BP} = \overline{IP}.$$

Observe que $\overline{BP} = \overline{IP}$ se, e somente se, o triângulo ΔPBI é isósceles de base BI, de modo que $P\widehat{B}I = P\hat{I}B$. Como $P\hat{I}B$ é ângulo externo ao triângulo ΔABI, segue que

$$P\hat{I}B = I\widehat{A}B + I\widehat{B}A.$$

Por outro lado, usando o ângulo inscrito temos

$$P\widehat{B}C = P\widehat{A}C = P\widehat{A}B = I\widehat{A}B.$$

Portanto

$$I\widehat{A}B + I\widehat{B}A = P\hat{I}B = P\widehat{B}I = P\widehat{B}C + C\widehat{B}I = I\widehat{A}B + C\widehat{B}I$$

o que nos dá $I\widehat{B}A = C\widehat{B}I$ de modo que I pertence à bissetriz de $A\widehat{B}C$ e assim é interseção de duas bissetrizes do triângulo ΔABC, o que nos garante que I é o incentro de ΔABC e γ está inscrita em ΔABC. Em particular, o lado BC também é tangente à circunferência γ. ■

O resultado a seguir é conhecido como o Teorema de Poncelet na circunferência. Este garante que, dadas duas circunferências, uma interna a outra, se existe um triângulo inscrito na circunferência externa e circunscrito na interna, então cada ponto P da circunferência externa é vértice de um triângulo com as mesmas características.

Teorema 1.3 (Poncelet, [1]) *Sejam γ e Γ respectivamente os círculos inscritos e circunscritos a um triângulo ΔABC. Se $A' \neq A$, B, C é outro ponto de Γ, e $A'B'$ e $A'C'$ são cordas de Γ tangentes a γ, então γ é o círculo inscrito no triângulo $\Delta A'B'C'$.*

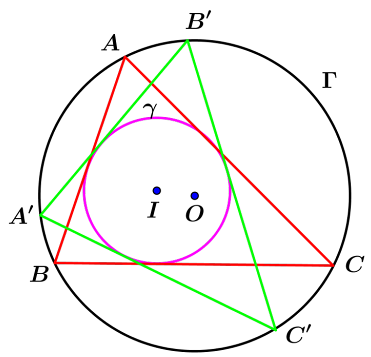

Figura 1.11: Teorema de Poncelet

Prova: Sejam $\gamma(I;r)$ e $\Gamma(O;R)$, como mostra a Figura 1.11, então o fato de γ ser o círculo inscrito em ΔABC garante, pelo teorema de Euler, que $\overline{OI}^2 = R^2 - 2Rr$. De posse dessa igualdade, aplicando novamente o referido teorema ao triângulo $\Delta A'B'C'$, concluímos que $B'C'$ tangencia γ, conforme desejado. ■

1.3 Teorema de Poncelet nos Quadriláteros

Nesta seção estudaremos a contribuição de Poncelet, no estudo de circunferências e quadriláteros. O resultado que apresentamos aqui pode ser encontrado em [4]. Foi Leonhard Euler que se interessou por esse problema e realizou alguns esforços para encontrar a condição necessária e suficiente para que, dadas duas circunferências λ interna a Γ, existisse um quadirlátero inscrito em Γ e circunscrito em λ, porém foi seu aluno Nikolai Ivanovich Fuss quem deu com ela em 1797 (veja [9]). Tal condição é:

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2.$$

Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 1.4 *Sejam M, Z os centros dos círculos inscritos e circunscritos ao quadrilátero $PQRS$ com raios r, R. Denotando por d a distância entre os centros M, Z desses círculos $d = \overline{MZ}$. tem-se sempre que:*

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2. \tag{1.8}$$

A seguir provaremos este resultado, que pode ser encontrado em [4, Pág. 188]. Da mesma maneira que o problema dos triângulos, se a equação (1.8) é satisfeita então qualquer corda de Γ tangente a λ pode descrever um quadrilátero com vértices em Γ e lados tangentes a λ. Para provarmos este resultado precisamos de alguns lemas preliminares.

Definição 5 *Dizemos que um quadrilátero é bicêntrico se ele é simultaneamente, inscrito em uma circunferência e circunscrito em uma outra.*

Proposição 1.6 *Um quadrilátero $PQRS$ possui uma circunferência inscrita com seus lados tangentes a ela nos pontos X, X', Y, Y' e segmentos XX' e YY' perpendiculares se, e somente se, este quadrilátero é bicêntrico.*

Prova: Vamos supor que $PQRS$ seja um quadrilátero bicêntrico. Sejam Γ o círculo circunscrito, com centro em O, e γ o círculo inscrito, com centro em I. Denotemos os pontos de tangência dos lados opostos PQ e RS com o círculo γ por X e X', os pontos de tangência dos lados opostos QR e SP por Y' e Y, e ainda o ponto de interseção das cordas XX' e YY' por O', como mostra a Figura 1.12.

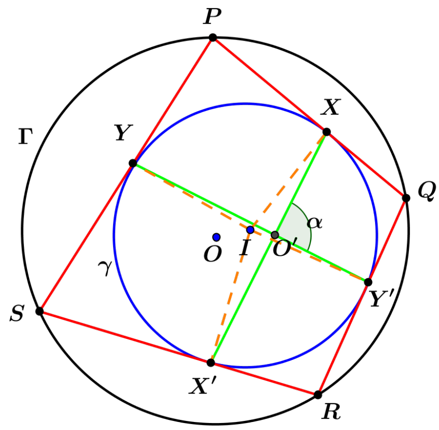

Figura 1.12: Quadrilátero Bicêntrico

Como o quadrilátero $PQRS$ é inscritível seus ângulos opostos são suplementares. Então, $P\widehat{Q}R + P\widehat{S}R = 180°$. Dos quadriláteros $IXQY'$ e $IX'SY$ obtemos

$$X\widehat{I}Y' + I\widehat{Y'}Q + Y'\widehat{Q}X + Q\widehat{X}I = 360° \tag{1.9}$$

e

$$X'\widehat{I}Y + I\widehat{Y}S + Y\widehat{S}X' + S\widehat{X'}I = 360°. \tag{1.10}$$

Somando as equações (1.9) e (1.10) e lembrando que

$$I\widehat{Y'}Q = Q\widehat{X}I = I\widehat{Y}S = S\widehat{X'}I = 90°$$

(pois são ângulos de tangências) e $Y'\widehat{Q}X + Y\widehat{S}X' = 180°$ (ângulos opostos do quadrilátero inscrito) obtemos,

$$X\widehat{I}Y' + X'\widehat{I}Y + 360^\circ + 180^\circ = 720^o, \tag{1.11}$$

de onde se conclui que

$$X\widehat{I}Y' + X'\widehat{I}Y = 180, \tag{1.12}$$

que é o mesmo que

$$\widehat{XY'} + \widehat{YX'} = 180^\circ.$$

Agora, como α é um ângulo excêntrico interior a γ, temos

$$\alpha = \frac{X\widehat{I}Y' + X'\widehat{I}Y}{2} = \frac{180^o}{2} = 90^\circ, \tag{1.13}$$

logo $\overline{XX'} \perp \overline{YY'}$. Isso mostra que as cordas de tangência dos dois pares de lados opostos de um quadrilátero bicêntrico são perpendiculares.

Vejamos que essa condição também é suficiente. Um quadrilátero bicêntrico $PQRS$ é obtido se as tangentes PQ, RS, SP e PQ, são traçadas pelos pontos de tangência X, X', Y e Y' de duas cordas perpendiculares XX' e YY' de um círculo arbitrário γ. Uma vez $\alpha = X\widehat{O'}Y = 90^\circ$ segue de (1.13) que a equação (1.12) é satisfeita. Além disso, sendo

$$I\widehat{X}Q = I\widehat{Y'}Q = I\widehat{Y}S = I\widehat{X'}S = 90^o$$

de onde segue que a soma dos ângulos opostos $X\widehat{P}Y$ e $X'\widehat{R}Y'$ é de 180°, ou seja, que $PQRS$ é também um quadrilátero inscritível, portanto bicêntrico, como desejávamos. ∎

Uma das maneiras de se obter a desejada relação entre os raios e o eixo dos centros das circunferências circunscrita e inscrita é por meio do seguinte problema de lugar geométrico.

Problema 1 *Um ângulo reto é girado sobre seu vértice fixo, que está localizado no interior de um círculo, sobre seu diâmetro. Encontrar o lugar geométrico do ponto de interseção das duas tangentes do círculo que passam através dos pontos de interseção dos lados do ângulo com o círculo.*

Prova: Consideremos o triângulo ΔOXY interno à circunferência Γ de raio r, como na Figura 1.13 e P o ponto de interseção das tangentes à Γ em X e Y. Uma vez que o triângulo XOY é retângulo em O, tome OF como sendo a altura do triângulo dado em relação à hipotenusa XY de onde segue que

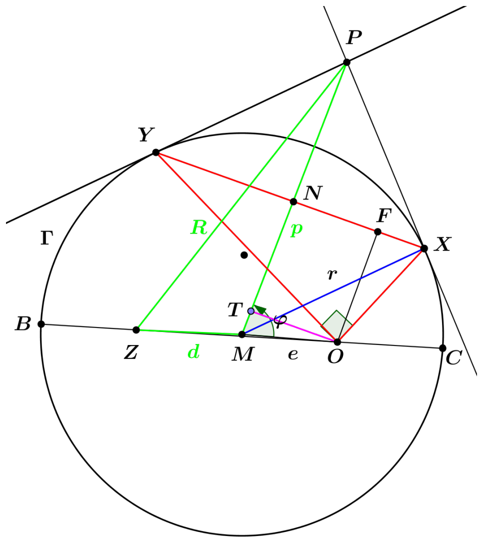

Figura 1.13: Quadrilátero de Poncelet

$$\overline{OF}^2 = \overline{XF}.\overline{FY}. \tag{1.14}$$

Denotemos por M o centro de Γ. Sabemos que $\overrightarrow{PM}$ é bissetriz do ângulo $X\widehat{P}Y$ e é ortogonal a XY em N, ponto médio deste segmento de modo que MP é paralelo a OF (veja Proposição 1.5). Introduzindo, $r' = \overline{MN}$ e $r" = \overline{NX}$, extraídos do triângulo ΔMNX retângulo em N, $e = \overline{MO}$, $e' = \overline{MT} = e.\cos(\varphi)$ e $e'' = \overline{OT} = e.\text{sen}(\varphi)$ extraídos do triângulo ΔMTO, retângulo em T, onde OT

é uma paralela a NF passando por O e intersectando MP em T, com o ângulo $O\widehat{M}T = \varphi$. Como

$$\overline{OF} = \overline{NT} = \overline{MN} - \overline{TM} = r' - e',$$

$$\overline{XF} = \overline{NX} - \overline{NF} = \overline{NX} - \overline{OT} = r'' - e''$$

e

$$\overline{FY} = \overline{FN} + \overline{NY} = r'' + e''$$

de (1.14) vem que

$$(r' - e')^2 = (r'' - e'').(r'' + e'')$$

ou ainda

$$r'^2 - 2.r'.e' + e'^2 = r''^2 - e''^2. \tag{1.15}$$

Somando r'^2 a ambos os membros de (1.15) obtemos a equação

$$2.r'^2 - 2.r'.e' + e'^2 = r''^2 - e''^2 + r'^2,$$

daí

$$2.r'^2 - 2.r'.e' = (r'^2 + r''^2) - (e'^2 + e''^2). \tag{1.16}$$

Segue do Teorema de Pitágoras no triângulo ΔMTO que $e^2 = e'^2 + e''^2$. Além disso, já que $\overline{MX} = r$, do triângulo retângulo ΔMNX temos $r^2 = r'^2 + r''^2$. Assim, segue de (1.16) que

$$2.r'^2 - 2.r'.e' = (r'^2 + r''^2) - (e'^2 + e''^2) = r^2 - e^2. \tag{1.17}$$

No entanto, $e' = e.\cos(\varphi)$ o que implica que

$$2.r'^2 - 2.r'.e.\cos(\varphi) = r^2 - e^2. \tag{1.18}$$

Como o triângulo ΔMXP é retângulo em X e NX é uma altura com N sendo um ponto da base MP, hipotenusa do triângulo, obtemos

$$\overline{MX}^2 = \overline{MN}.\overline{MP}.$$

Como $\overline{MX} = r$, $\overline{MN} = r'$ e denotando $\overline{MP} = p$, teremos $r^2 = r'.p$ ou ainda

$$r' = \frac{r^2}{p}.$$

Introduzindo esse valor a partir de (1.18) chegamos a

$$2.\frac{r^4}{p^2} - 2.\frac{r^2}{p}.e.\cos(\varphi) = r^2 - e^2.$$

Dividindo ambos os membros por $r^2 - e^2$ e multiplicando a equação por p^2 vamos obter a equação;

$$\frac{2.r^4}{r^2 - e^2} - \frac{2.r^2 p}{r^2 - e^2}.e.\cos(\varphi) = p^2$$

de onde se obtém que

$$\frac{2.r^4}{r^2 - e^2} = p^2 + \frac{2.r^2}{r^2 - e^2}.p.e.\cos(\varphi). \tag{1.19}$$

Escolhendo $d = r^2.e/(r^2 - e^2)$, e substituindo na equação (1.19) obtemos

$$\frac{2.r^4}{r^2 - e^2} = p^2 + 2.d.p.\cos(\varphi). \tag{1.20}$$

Agora, denotamos $R = \overline{ZP}$ a distância de um ponto Z sobre a extensão de OM até P onde $d = \overline{MZ}$, distância do ponto Z ao centro M de Γ. No triângulo ΔZMP, pela lei dos cossenos obtemos

$$R^2 = d^2 + p^2 + 2.d.p.\cos(180^\circ - \varphi) = d^2 + p^2 + 2.d.p.\cos(\varphi). \tag{1.21}$$

Daí, combinando as equações (1.20), e (1.21) teremos que;

$$R^2 = d^2 + \frac{2.r^4}{r^2 - e^2}. \tag{1.22}$$

Ou ainda

$$r^2 - e^2 = \frac{2r^4}{R^2 - d^2} \tag{1.23}$$

e consequentemente, R tem um valor constante, independente da posição dos pontos X e Y. O lugar geométrico desejado é assim, um círculo $\mathcal{C}$ cujo centro é Z, que está situado sobre a extensão de OM, determinado por $d = r^2.e/(r^2 - e^2)$ e cujo raio R é determinado por $R^2 = d^2 + 2.r^4/(r^2 - e^2)$. Naturalmente, também pertencem a este lugar geométrico os pontos de interseção Q, R e S das tangentes, que são obtidas quando se tirar as tangentes através dos pontos de interseção do círculo com as extensões dos eixos XO e YO. O quadrilátero $PQRS$ é um quadrilátero bicêntrico na medida em que está inscrito em um círculo e circunscrito em outro. Se o ângulo reto $X\widehat{O}Y$ é girado em torno do centro O, de modo que os pontos X e Y descrevam o círculo Γ, o quadrilátero $PQRS$ assume continuamente posições diferentes, mas sempre será bicêntrico. Logo as fórmulas obtidas para d e R contém a solução desejada para o problema do lugar geométrico. Já que $r^2 - e^2 = 2.r^4/(R^2 - d^2)$, substituindo esse valor em $d = r^2.e/(r^2 - e^2)$ obtemos que

$$r^2.e = d.2.r^4/(R^2 - d^2)$$

de onde se obtém

$$e = 2.d.r^2/(R^2 - d^2).$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} r^2 - e^2 &= r^2 - (2.d.r^2/(R^2 - d^2))^2 = \frac{r^2(R^2 - d^2)^2 - 4d^2r^4}{(R^2 - d^2)^2} \\ &= \frac{r^2[(R^2 - d^2)^2 - 4r^2d^2]}{(R^2 - d^2)^2}. \end{aligned} \tag{1.24}$$

Agora por comparação das equações (1.23), (1.24), chegamos a equação

$$\frac{2.r^4}{R^2 - d^2} = \frac{r^2[(R^2 - d^2)^2 - 4r^2d^2]}{(R^2 - d^2)^2}.$$

Multiplicando essa equação por $(R^2 - d^2)^2$ encontramos uma outra equação

$$2.r^2(R^2 - d^2) = (R^2 - d^2)^2 - 4r^2d^2.$$

Adicionando a ambos os membros $4r^2d^2$ e colocando $2.r^2$ em evidência no primeiro membro é que, finalmente, se obtém a relação entre R, r e d eixo que une os centros dos círculos circunscrito e inscrito do quadrilátero bicêntrico

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Capítulo 2

Teorema de Poncelet na Elipse

Neste capítulo abordaremos a contribuição de Poncelet para triângulos e elipses. Alguns dos resultados que traremos aqui podem ser encontrados em [13]. O enunciado do Teorema de Poncelet só requer a definição da elipse.

Teorema 2.1 *(Porisma de Poncelet) Dadas duas elipses, uma interna à outra, se existe um polígono de n-lados simultaneamente inscrito na elipse externa e circunscrito à elipse interna, então qualquer ponto da elipse externa é vértice de algum polígono com as mesmas características.*

Para a prova deste teorema faremos uma abordagem que usa apenas de ferramentas dos programas do ensino médio padrão. Isto não é um problema simples, porém nosso objetivo é encontrar uma prova elementar de uma solução não trivial para a situação do caso $n = 3$ quando temos duas elipses:

$$e : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{2.1}$$

e

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \tag{2.2}$$

de tal modo que e_1 seja interior a e. Para este caso teremos o seguinte resultado.

Teorema 2.2 *Suponha que a elipse e_1 com equação dada por (2.2) esteja no interior da elipse e dada pela equação (2.1), ver Figura 2.1, e sejam tais que:*

$$a > b > 0, \; a_1 > b_1 > 0, \; a > a_1, \; b > b_1.$$

Então as seguintes condições são equivalentes:

i) existe um triângulo $\Delta A_0B_0C_0$ inscrito em e, e circunscrito em e_1;

ii) vale a seguinte relação

$$\frac{a_1}{a} + \frac{b_1}{b} = 1;$$

iii) para qualquer ponto A na elipse e pode-se encontrar um único triângulo ΔABC inscrito em e e circunscrito em e_1.

Apresentaremos alguns resultados preliminares antes da demonstração deste teorema. Veremos que não há perda de generalidade em considerar a elipse externa como sendo uma circunferência, como na Figura 2.1.

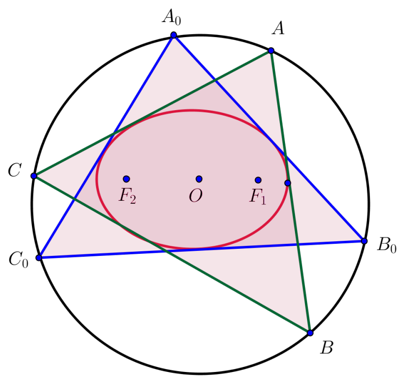

Figura 2.1: Teorema de Poncelet para elipse e círculo.

2.1 Redução ao caso círculo e elipse

Consideremos as duas elipses

$$e : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

e

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1 \tag{2.4}$$

com

$$a > b > 0,\ a_1 > b_1 > 0,\ a > a_1,\ b > b_1$$

de modo que e_1 é interior a e. Podemos usar uma simples mudança de coordenadas no plano, fazendo

$$X = \frac{x}{a}, \quad \text{e} \quad Y = \frac{y}{b} \tag{2.5}$$

de tal forma que a elipse e de equação (2.3) nas novas coordenadas X, Y, seja dada pela equação

$$X^2 + Y^2 = 1, \tag{2.6}$$

ou seja, vamos considerar o círculo com centro na origem O e raio $r = 1$ no novo sistema de coordenadas.

A mudança de coordenadas em que $x = aX$ e $y = bY$ nos leva a $x^2 = a^2X^2$ e $y^2 = b^2Y^2$ de modo que

$$\frac{x^2}{a_1^2} = \frac{a^2X^2}{a_1^2} = \frac{X^2}{\frac{a_1^2}{a^2}} = \frac{X^2}{A_1^2} \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b_1^2} = \frac{b^2Y^2}{b_1^2} = \frac{Y^2}{\frac{b_1^2}{b^2}} = \frac{Y^2}{B_1^2},$$

onde $A_1 = a_1/a$ e $B_1 = b_1/b$.

Logo a segunda elipse e_1 torna-se

$$\frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1. \tag{2.7}$$

É claro que esta mudança de coordenadas preserva as noções de interseção, a reta se transforma em reta, o círculo em círculo, a elipse em elipse (ou círculo) e se a reta e a elipse são tangentes permanecem tangentes após a mudança de coordenadas como mostra a Figura 2.2.

Proposição 2.1 *Se uma reta r e a elipse e_1 são tangentes, permanecerão tangentes após a mudança de coordenadas dada em* (2.5).

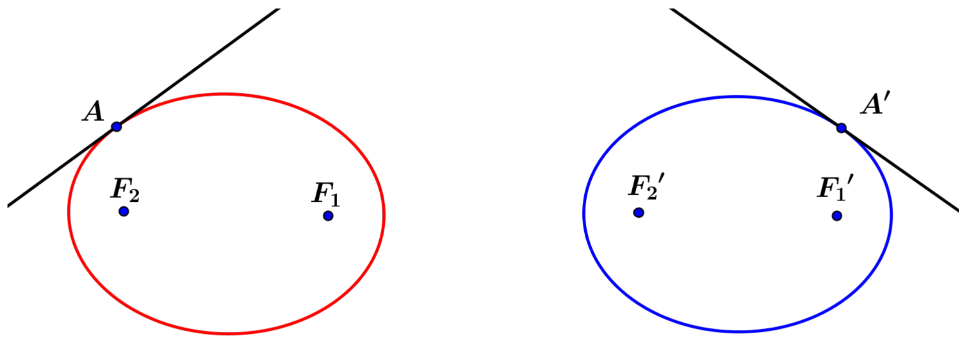

Figura 2.2: Transformação da Elipse por Mudança de Variável.

Prova: Sejam as elipses $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ e $e_1' : \frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1$ obtida a partir de e_1 através da mudança de variável $X = \frac{x}{a}$ e $Y = \frac{y}{b}$ onde $A_1 = \frac{a_1}{a}$ e $B_1 = \frac{b_1}{b}$.

Tomando $r : y = mx + n$ a reta tangente a e_1 no ponto $P_0(x_0; y_0)$, considere $r' : y = \frac{amx}{b} + \frac{n}{b}$ a reta obtida a partir de P_0, pela mesma mudança de variável, então podemos afirmar que

i) $P(x; y) \in r \iff P'(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \in r'$;

Como $P(x; y) \in r : y = mx + n$ temos que

$$y = mx + n \iff y = \frac{amx}{a} + n \iff \frac{y}{b} = \frac{\frac{amx}{a}}{b} + \frac{n}{b} \iff Y = \frac{amX}{b} + \frac{n}{b}$$

portanto $P'(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \in r'$.

ii) $P(x; y) \in e_1 \iff P'(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \in e_1'$;

De modo análogo a i), vemos que $P(x;y) \in e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ se e só se

$$\frac{x^2}{\frac{a_1^2.a^2}{a^2}} + \frac{y^2}{\frac{b_1^2.b^2}{b^2}} = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{A_1^2.a^2} + \frac{y^2}{B_1^2.b^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{X^2}{A_1^2} + \frac{Y^2}{B_1^2} = 1$$

Logo $P'(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}) \in e_1'$.

Daí $i)$ e $ii)$ são satisfeitas e portanto $iii)$ $P = r \bigcap e_1 \Longleftrightarrow P' = r' \bigcap e_1'$; também é satisfeita, completando assim a prova. ∎

Observando a transformação $x = aX$ e $y = bY$, graças a este resultado, a partir de agora vamos trabalhar com o círculo de centro na origem O e raio 1,

$$x^2 + y^2 = 1 \tag{2.8}$$

e a elipse

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1,\ 1 > a_1 > b_1 > 0 \tag{2.9}$$

interna à circunferência de centro O e raio 1, como é mostrado na Figura 2.1. Preparamos uma lista de perguntas que prepara a solução do problema (ou a prova do teorema de Poncelet) para o caso $n = 3$: Dado uma elipse $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2} = 1$ e o ponto $A_0(x_0, y_0)$ na circunferência de centro na origem O e raio 1, vamos encontrar as retas $\overleftrightarrow{A_0A_1}$ e $\overleftrightarrow{A_0A_2}$ tangentes a e_1 contendo o ponto A_0, e encontrar também os pontos A_1, A_2 da interseção dessas retas A_0A_1, A_0A_2 com a circunferência $x^2 + y^2 = 1$, (precisamos expressar a fórmula e as coordenadas de A_1, A_2 em termos de x_0, y_0 e dos coeficientes angulares k_1, k_2 das retas $\overleftrightarrow{A_0A_1}$ e $\overleftrightarrow{A_0A_2}$, respectivamente. Usamos a parametrização

$$x_j = \cos(\varphi_j),\ y_j = \mathrm{sen}(\varphi_j),\ j = 0, 1, 2, \tag{2.10}$$

e a relação entre φ_j e $\theta_j = arctang(k_j)$ para $j = 1, 2$. Para isto faremos alguns lemas.

Lema 2.1 *Dada a elipse,* $e_1 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, *a reta* $t : y - y_0 = k(x - x_0)$ *que contém*

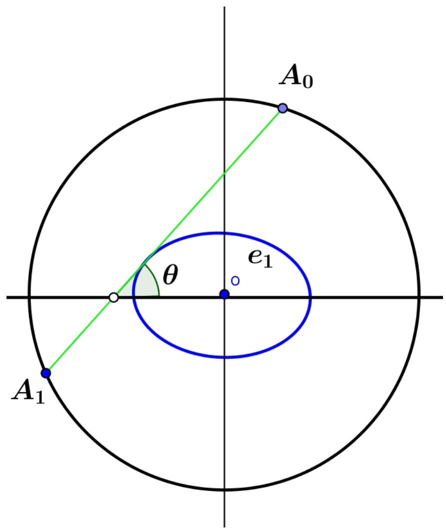

Figura 2.3: Quando A_0A_1 é tangente a e_1?

o ponto $A_0(x_0, y_0)$ *é tangente a elipse* e_1 *se, e somente se*

$$(y_0 - kx_0)^2 = b^2 + k^2a^2.$$

Prova: Para que a reta $t : y - y_0 = k(x - x_0)$ seja tangente a elipse $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ devemos mostrar que e_1 e t têm apenas um ponto em comum. Isto é, devemos resolver o sistema formado por t e e_1. Logo:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \, (1) \\ y - y_0 = k(x - x_0) \Longrightarrow y = kx - kx_0 + y_0 \, (2) \end{cases}$$

Substituindo (2) em (1), vamos obter a equação

$$b^2x^2 + a^2(kx - kx_0 + y_0)^2 = a^2b^2.$$

Desenvolvendo o produto notável $(kx - kx_0 + y_0)^2$, a equação acima passa a ser representada por

$$b^2x^2 + a^2(k^2x^2 + k^2x_0^2 + y_0^2 - 2k^2xx_0 + 2kxy_0 - 2kx_0y_0) = a^2b^2.$$

Vamos agora eliminar o parêntese da equação, daí ela ficará no formato

$$\begin{aligned} 0 &= b^2x^2 + a^2k^2x^2 + a^2k^2x_0^2 + a^2y_0^2 - 2a^2k^2xx_0 + 2a^2kxy_0 - 2a^2kx_0y_0 - a^2b^2 \\ &= (b^2 + a^2k^2)x^2 + (2a^2ky_0 - 2a^2k^2x_0)x + a^2(y_0^2 - 2kx_0y_0 + k^2x_0^2) - a^2b^2 \\ &= (b^2 + a^2k^2)x^2 + (2a^2ky_0 - 2a^2k^2x_0)x + a^2(y_0 - kx_0)^2 - a^2b^2 \\ &= (b^2 + a^2k^2)x^2 + (2a^2ky_0 - 2a^2k^2x_0)x + a^2[(y_0 - kx_0)^2 - b^2]. \end{aligned}$$

Para que esta equação do 2º grau em x tenha apenas uma solução, fazendo com que a reta t e a elipse e_1 sejam tangentes, devemos ter $\Delta = 0$. Assim

$$\begin{aligned} 0 &= 4a^4k^2(y_0 - kx_0)^2 - 4a^2(b^2 + a^2k^2)[(y_0 - kx_0)^2 - b^2] \\ &= 4a^4k^2(y_0 - kx_0)^2 - 4a^2(b^2 + a^2k^2)(y_0 - kx_0)^2 + 4a^2(b^2 + a^2k^2)b^2 \\ &= [4a^4k^2 - 4a^2(b^2 + a^2k^2)](y_0 - kx_0)^2 + 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2) \\ &= (4a^4k^2 - 4a^2b^2 - 4a^4k^2)(y_0 - kx_0)^2 + 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2) \\ &= -4a^2b^2(y_0 - kx_0)^2 + 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2) \end{aligned}$$

de onde se obtém

$$4a^2b^2(y_0 - kx_0)^2 = 4a^2b^2(b^2 + a^2k^2)$$

ou ainda

$$(y_0 - kx_0)^2 = b^2 + a^2k^2$$

como queríamos provar. ∎

Lema 2.2 *Dados uma elipse* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ *e o ponto* $A_0(x_0, y_0)$ *na circunferência* *unitária de centro na origem O, e denotando por*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

qualquer reta que passa por A_0*, e por* $A_1(x_1, y_1)$ *o segundo ponto de interseção desta reta com a circunferência unitária temos*

$$x_1 = \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}x_0 - \frac{2k}{k^2 + 1}y_0$$

e

$$y_1 = -\frac{2k}{k^2 + 1}x_0 - \frac{k^2 - 1}{k^2 + 1}y_0.$$

Prova: Como $A_1(x_1, y_1)$ é o ponto de interseção da reta t e da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$, devemos resolver o sistema

$$\begin{cases} y - y_0 &= k(x - x_0) \\ x^2 + y^2 &= 1. \end{cases}$$

Isolando y na equação $y - y_0 = k(x - x_0)$, vamos ter $y = k(x - x_0) + y_0$ e substituindo na equação $x^2 + y^2 = 1$ do círculo unitário, temos que

$$x^2 + [k(x - x_0) + y_0]^2 = 1.$$

Desenvolvendo o produto notável $[k(x - x_0) + y_0]^2 = 1$, vamos obter a equação

$$x^2 + y_0^2 + 2y_0k(x - x_0) + k^2(x - x_0)^2 = 1$$

ou ainda

$$\begin{aligned}
0 &= x^2 + y_0^2 + 2kxy_0 - 2kx_0y_0 + k^2x^2 - 2k^2xx_0 + k^2x_0^2 - 1 \\
&= x^2 + k^2x^2 + 2kxy_0 - 2kx_0y_0 - 2k^2xx_0 + y_0^2 + k^2x_0^2 - 1 \\
&= (1+k^2)x^2 + 2k(y_0 - kx_0)x + (y_0^2 + k^2x_0^2 - 2kx_0y_0 - 1).
\end{aligned}$$

Esta equação tem duas raízes x_0 e x_1 , de tal modo que:

$$x_0 + x_1 = -\frac{2k(y_0 - kx_0)}{1+k^2}$$

e consequentemente

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\frac{2k(y_0 - kx_0)}{1+k^2} - x_0 \\
&= -\frac{2k(y_0 - kx_0) - x_0(1+k^2)}{1+k^2} \\
&= \frac{-2ky_0 + 2k^2x_0 - x_0 - k^2x_0}{1+k^2} \\
&= \frac{-2ky_0 + k^2x_0 - x_0}{1+k^2} \\
&= \frac{(k^2-1)x_0 - 2ky_0}{1+k^2} \\
&= \frac{(k^2-1)}{1+k^2}x_0 - \frac{2k}{1+k^2}y_0.
\end{aligned}$$

A partir desta relação obtemos a expressão para y_1. Temos então:

$$\begin{aligned}
y_1 &= k(x_1 - x_0) + y_0 \\
&= k[\frac{(k^2-1)x_0 - 2ky_0}{1+k^2} - x_0] + y_0 \\
&= k[\frac{k^2x_0 - x_0 - 2ky_0 - k^2x_0 - x_0}{1+k^2}] + \frac{y_0(k^2+1)}{k^2+1} \\
&= \frac{k(-2x_0 - 2ky_0) + k^2y_0 + y_0}{1+k^2} \\
&= \frac{-2kx_0 - 2k^2y_0 + k^2y_0 + y_0}{1+k^2} \\
&= \frac{-2kx_0 - k^2y_0 + y_0}{1+k^2} \\
&= -\frac{2k}{1+k^2}x_0 - \frac{k^2-1}{1+k^2}y_0.
\end{aligned}$$

Isso prova o que queríamos. ∎

Lema 2.3 *Dados uma elipse* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ *e um ponto* $A_0(\cos(\varphi_0), sen(\varphi_0))$ *na circunferência unitária de centro na origem O, denotamos por*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

qualquer reta que contenha A_0*, estendendo-se até* $A_1(\cos(\varphi), sen(\varphi))$*, o segundo ponto de interseção dessa reta com a circunferência. Então as relações do Lema 2.2 tomam a forma*

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi,\ m \in \mathbb{Z}$$

onde

$$\theta = arctang(k).$$

Prova: Pela definição de θ temos que $\tan(\theta) = k$ e daí

$$\frac{k^2-1}{k^2+1} = \frac{\tan^2(\theta)-1}{\tan^2(\theta)+1} = \frac{\text{sen}^2(\theta) - \cos^2(\theta)}{\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta)} = -\cos(2\theta).$$

De modo análogo obtemos que

$$\frac{2k}{k^2+1} = \frac{2\tan(\theta)}{\tan^2(\theta)+1} = \frac{2\mathrm{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.\cos^2(\theta) = 2\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta) = \mathrm{sen}(2\theta).$$

Além disso

$$x_1 = \cos(\varphi),\ y_1 = \mathrm{sen}(\varphi),\ x_0 = \cos(\varphi_0),\ y_0 = \mathrm{sen}(\varphi_0).$$

Fazendo a substituição dessas igualdades em

$$x_1 = \frac{k^2-1}{k^2+1}x_0 - \frac{2k}{k^2+1}y_0$$

e

$$y_1 = -\frac{2k}{k^2+1}x_0 - \frac{k^2-1}{k^2+1}y_0$$

finalmente encontramos

$$\begin{aligned}
\cos(\varphi) &= -\cos(2\theta)\cos(\varphi_0) - \mathrm{sen}(2\theta)\mathrm{sen}(\varphi_0)\\
&= \cos(2\theta+\pi)\cos\varphi_0 + \mathrm{sen}(2\theta+\pi)\mathrm{sen}(\varphi_0)\\
&= \cos(2\theta+\pi-\varphi_0).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathrm{sen}(\varphi) &= -\mathrm{sen}(2\theta)\cos(\varphi_0) + \cos(2\theta)\mathrm{sen}(\varphi_0)\\
&= \mathrm{sen}(2\theta+\pi)\cos(\varphi_0) - \cos(2\theta+\pi)\mathrm{sen}(\varphi_0)\\
&= \mathrm{sen}(2\theta+\pi-\varphi_0).
\end{aligned}$$

Essas relações levam simplesmente à expressão desejada

$$2\theta + \pi - \varphi_0 = \varphi + 2m\pi, m \in \mathbb{Z}$$

ou seja

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, m \in \mathbb{Z}.$$

Isso completa a prova que queríamos. ∎

Lema 2.4 *Dada uma elipse* $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ *e o ponto* A_0 $(\cos(\varphi_0), sen(\varphi_0))$ *denote por*

$$t : y - y_0 = k(x - x_0)$$

a reta que contém A_0 *e* $A_1(\cos(\varphi), sen(\varphi)$*, ponto de interseção desta reta com a circunferência* $e : x^2 + y^2 = 1$*. Então* t *é tangente a* e_1 *se, e somente se, tem-se*

$$\cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) = b_1^2 sen^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + a_1^2\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2.$$

Prova: Vimos no Lema 2.1 que esta reta é tangente à elipse se, e só se,

$$(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2 a_1^2.$$

Precisamos transformar $(y_0 - kx_0)^2$ em função de φ e de φ_0. Como

$$k = \tan(\theta),\ x_0 = \cos(\varphi_0) \text{ e } y_0 = \text{sen}(\varphi_0),$$

temos que

$$y_0 - kx_0 = \frac{\cos(\theta)\text{sen}(\varphi_0) - \text{sen}(\theta)\cos(\varphi_0)}{\cos(\theta)} = \frac{\text{sen}(\varphi_0 - \theta)}{\cos(\theta)}, \tag{2.11}$$

ou ainda

$$\operatorname{sen}(\varphi_0 - \theta) = \cos(\theta).(y_0 - kx_0). \tag{2.12}$$

Usando a relação

$$\theta = \frac{\varphi + \varphi_0 - \pi}{2} + m\pi, \ m \in \mathbb{Z},$$

vemos que o numerador da equação (2.11) é

$$\operatorname{sen}(\varphi_0 - \theta) = \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi_0 - \varphi + \pi}{2} - m\pi\right) = (-1)^m \cos\left(\frac{\varphi_0 - \varphi}{2}\right)$$

enquanto que o denominador da equação (2.11) torna-se igual a

$$\cos(\theta) = \cos\left(\frac{\varphi + \varphi_0 - \phi}{2} + m\pi\right) = (-1)^m \operatorname{sen}\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)$$

assim, elevando a equação (2.12) encontramos, a equação

$$\cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)(y_0 - kx_0)^2.$$

Aplicando o Lema 2.1, combinando com as relações acima, com

$$(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2 a_1^2, \ k = \tan(\theta)$$

e

$$\operatorname{sen}^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right)$$

temos que

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right) &= \operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right).(b_1^2+k^2a_1^2)\\
&= b_1^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)+\frac{\operatorname{sen}(\theta)}{\cos(\theta)}.a_1^2.\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)\\
&= b_1^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)+a_1^2\operatorname{sen}^2(\theta)\\
&= b_1^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)+a_1^2(1-\cos^2(\theta))\\
&= b_1^2\left(1-\cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)\right)+a_1^2\left(1-\operatorname{sen}^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)\right)\\
&= b_1^2-b_1^2.\cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)+a_1^2.\cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)\\
&= (a_1^2-b_1^2).\cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)+b_1^2,
\end{aligned}$$

completando assim a prova. ■

Observação 1 *Podemos reescrever as relações do Lema 2.4 de maneira diferente, utilizando a seguinte relação*

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}.$$

A fórmula acima vem do fato que $\cos(\beta+\alpha)=\cos(\beta)\cos(\alpha)-sen(\beta)sen(\alpha)$. *Fazendo* $\beta=\alpha$ *e usando a relação fundamental* $sen^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ *obtemos*

$$\cos(2\alpha)=\cos^2(\alpha)-sen^2(\alpha)=\cos^2(\alpha)-(1-\cos^2(\alpha))=2.\cos^2(\alpha)-1.$$

Então

$$\cos^2(\alpha)=\frac{1+\cos(2\alpha)}{2},$$

logo teremos

$$\cos^2\left(\frac{\varphi-\varphi_0}{2}\right)=\frac{1+\cos(\varphi-\varphi_0)}{2}\quad e\quad \cos^2\left(\frac{\varphi+\varphi_0}{2}\right)=\frac{1+\cos(\varphi+\varphi_0)}{2}.$$

Do Lema 2.4 temos

$$\cos^2\left(\frac{\varphi - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2,$$

usando as equações anteriores obtemos

$$\frac{1 + \cos(\varphi - \varphi_0)}{2} = (a_1^2 - b_1^2)\left[\frac{1 + \cos(\varphi + \varphi_0)}{2}\right] + b_1^2,$$

ou seja

$$1 + \cos(\varphi - \varphi_0) = (a_1^2 - b_1^2)(1 + \cos(\varphi + \varphi_0)) + 2b_1^2 = a_1^2 - b_1^2 + (a_1^2 - b_1^2)\cos(\varphi + \varphi_0) + 2b_1^2,$$

daí concluímos que

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = c^2\cos(\varphi + \varphi_0) + D, \tag{2.13}$$

onde

$$c^2 = a_1^2 - b_1^2 \quad e \quad D = a_1^2 + b_1^2 - 1. \tag{2.14}$$

Desenvolvendo a equação (2.13), obtemos

$$\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) + sen(\varphi)sen(\varphi_0) = c^2[\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) - sen(\varphi)sen(\varphi_0)] + D$$

Fazendo a eliminação do colchete e isolando D, obtemos

$$\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) + sen(\varphi)sen(\varphi_0) - c^2[\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) - sen(\varphi)sen(\varphi_0)] = D,$$

onde chegamos a equação

$$(1 - c^2)\cos(\varphi)\cos(\varphi_0) + (1 + c^2)sen(\varphi)sen(\varphi_0) = D. \tag{2.15}$$

2.2 Prova do Porisma de Poncelet

Nesta seção finalmente provaremos o seguinte resultado:

Porisma de Poncelet: Dadas duas elipses disjuntas e uma dentro da outra, se existe um polígono circunscrito à elipse interna e inscrito à externa, de n-lados, então qualquer ponto pertencente a elipse externa é vértice de algum polígono com as mesmas características.

A existência do triângulo ΔABC inscrito em e e circunscrito em e_1 é feita por construção. Na prova que daremos a seguir, nosso objetivo é mostrar que esta construção é possível se, e somente se, a condição $a_1 + b_1 = 1$ for satisfeita.

É fácil observar que o Teorema 2.2 garante que o Porisma de Poncelet é verdadeiro. Sendo assim, faremos a demonstração deste resultado a seguir.

Prova do Teorema 2.2: Levando em consideração a mudança de variáveis descrita em (2.5), vamos considerar a elipse externa e como sendo a circunferência unitária centrada na origem.

Tomemos um ponto $A_0(\cos\varphi_0, \mathrm{sen}\varphi_0)$ sobre uma circunferência unitária e encontremos as duas retas t_1 e t_2 tangentes à elipse e_1 que contém o ponto A_0, onde

$$e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1.$$

Em seguida, vamos encontrar os pontos de interseção das retas t_1 e t_2 com a circunferência unitária como mostra a Figura 2.4 e denotemos esses dois pontos de interseção com a circunferência unitária, (diferentes de A_0) por

$$B_0(\cos(\varphi_1), \mathrm{sen}(\varphi_1)) \text{ e } C_0(\cos(\varphi_2), \mathrm{sen}(\varphi_2)).$$

Primeiro, vamos expressar a hipótese do teorema de Poncelet, de que existe pelo

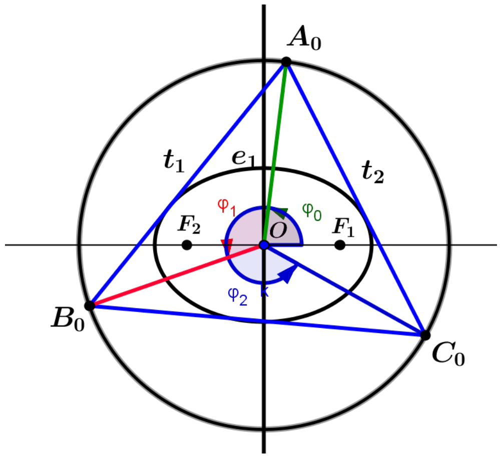

Figura 2.4: O triângulo $A_0B_0C_0$ está circunscrito em e_1?

menos um triângulo $\Delta A_0B_0C_0$ inscrito no círculo unitário, isto é

$$A_0(\cos(\varphi_0), \operatorname{sen}(\varphi_0)),\ \ B_0(\cos(\varphi_1), \operatorname{sen}(\varphi_1)) \text{ e } C_0(\cos(\varphi_2), \operatorname{sen}(\varphi_2))$$

com

$$0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 \leq 2\pi,$$

e circunscrito na elipse e_1 interior ao círculo. Já que A_0B_0 é tangente a e_1, devido ao Lema 2.4 sabemos que

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_1 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2. \tag{2.16}$$

Analogamente, o fato de que A_0C_0 e B_0C_0 são tangentes a e_1, pelo Lema 2.4 implicam que

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_0}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_0}{2}\right) + b_1^2 \tag{2.17}$$

e

$$cos^2\left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}\right) = (a_1^2 - b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2}\right) + b_1^2. \tag{2.18}$$

Podemos unificar todas essas relações em uma

$$\cos^2\left(\frac{\varphi_j-\varphi_l}{2}\right)=(a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\varphi_j+\varphi_l}{2}\right)+b_1^2,\ 0\le l\ne j\le 2. \tag{2.19}$$

O que sabemos a partir das hipóteses do teorema de Poncelet e o que temos de provar é:

-Tomar qualquer ponto $A(\cos(\psi_0),\operatorname{sen}(\psi_0))$ sobre o círculo unitário e encontrar as duas retas t_1 e t_2 tangentes à elipse através de A.

-Em seguida, encontrar os pontos de interseção de t_1 e t_2 com o círculo unitário. Denote os dois pontos de interseção (diferentes de A) por

$$B(\cos(\psi_1),\operatorname{sen}(\psi_1)) \text{ e } C(\cos(\psi_2),\operatorname{sen}(\psi_2)).$$

Desde que AB é tangente a e_1, de acordo com o Lema 2.4 temos que

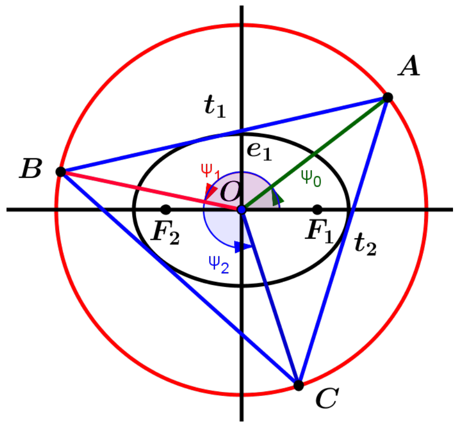

Figura 2.5: Se dois lados são tangentes então o terceiro também é.

.

$$\cos^2\left(\frac{\psi_1-\psi_0}{2}\right)=(a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_1+\psi_0}{2}\right)+b_1^2.$$

Analogamente, o fato de que AC é tangente a e_1, pelo Lema 2.4, implica que

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_0}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_0}{2}\right)+b_1^2.$$

Em vista da Observação 1 temos

$$(1-c^2)\cos(\psi_1)\cos(\psi_0)+(1+c^2)\mathrm{sen}(\psi_1)\mathrm{sen}(\psi_0) = D. \tag{2.20}$$

$$(1-c^2)\cos(\psi_2)\cos(\psi_0)+(1+c^2)\mathrm{sen}(\psi_2)\mathrm{sen}(\psi_0) = D. \tag{2.21}$$

onde

$$c^2 = a_1^2-b_1^2 \text{ e } D = a_1^2-b_1^2-1. \tag{2.22}$$

Precisamos mostrar que BC é tangente à elipse e_1, e tendo em mente o Lema 2.4 é necessário e suficiente mostrar que

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = (a_1^2-b_1^2)\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)+b_1^2. \tag{2.23}$$

Devido a (2.20) e (2.21) segue do Lema A.1 do apêndice que

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)+\frac{D^2}{(1+c^2)^2}. \tag{2.24}$$

Comparando essa relação com a relação (2.23), isso nos leva a condição que:

$$\frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2} = a_1^2-b_1^2 \;\; e \;\; \frac{D^2}{(1+c^2)^2} = b_1^2,$$

daí temos que

$$4D^2 = (1-c^2)^2(1+c^2)^2 \quad \text{e} \quad D^2 = b_1^2(1+c^2)^2 \tag{2.25}$$

são requisitos.

Estas relações e a relação (2.22) levam à condição necessária e suficiente

$$a_1 + b_1 = 1 \tag{2.26}$$

pois

$$\begin{aligned}(1-c^2)^2(1+c^2)^2 = 4D^2 = 4b_1^2(1+c^2)^2 &\iff 4b_1^2 = (1-c^2)^2 \iff 2b_1 = 1 - c^2 \\ &\iff a_1^2 = b_1^2 - 2b_1 + 1 = (b_1 - 1)^2 \\ &\iff a_1 = 1 - b_1 \iff a_1 + b_1 = 1.\end{aligned}$$

Logo (2.26) é condição necessária e suficiente para que a reta $\overleftrightarrow{BC}$ seja tangente à elipse e_1, ou seja (ii) ocorre se, e somente se, (iii) ocorre.

Pelo que foi feito anteriormente, mostramos que é possível construir um triângulo inscrito na elipse e e circunscrito na elipse e_1 se, e somente se, (ii) ocorre. Isto é (i) ocorre se, e somente se, (ii) ocorre. Isso mostra que A condição (2.26) também é necessária e suficiente para o cumprimento da propriedade de que existe um triângulo $A_0B_0C_0$ circunscrito a elipse e_1. Portanto, se existe pelo menos um triângulo $\Delta A_0B_0C_0$ circunscrito em e_1, pela relação (2.26) o triângulo ΔABC está circunscrito em e_1, o que finaliza a prova do teorema. ■

Capítulo 3

Sugestão de Exercícios

Propomos a seguir alguns exercícios que podem ser discutidos com alunos para fixar os temas apresentados neste trabalho.

1. Verifique se é possível construir um triângulo ao mesmo tempo inscrito na circunferência $\gamma : x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ e circunscrito na circunferência $\Gamma : x^2 + y^2 + 6x + 10y + 18 = 0$.

   Solução: Dadas as circunferências $\gamma(I, r)$ e $\Gamma(O, R)$ se existe tal triângulo devem ser satisfeitas as condições do teorema de Poncelet 1.2, ou seja, a relação

   $$d^2 = R^2 - 2Rr$$

   onde $d = \overline{IO}$. De γ vem que $I(1; -2)$ e $r = 2$ e de Γ também temos que $O(3; 5)$ e $R = 4$. Calculando a distância entre os pontos I e O obtemos

   $$\overline{IO}^2 = (3-1)^2 + (5-(-2))^2 = \overline{IO}^2 = 2^2 + 7^2 = 4 + 49 = 53.$$

   Substituindo esses valores na relação anterior vemos que

   $$53 = 4^2 - 2.4.2 = 16 - 16 = 0$$

contradizendo a relação, portanto não existe tal triângulo.

2. Dadas as circunferências $c_1 : (x-2)^2+(y-3)^2 = 25$ e $c_2 : (x-4)^2+(y-2)^2 = 4$, mostre que é possível construir um triângulo inscrito em c_1 e circunscrito em c_2.

   Solução: Assim como no Exercício 1, veremos se a relação

$$d^2 = R^2 - 2rR.$$

   Temos que o centro de c_1 é $O(2,3)$ e o raio é $R = 5$ enquanto o centro de c_2 é $I(4,2)$ e o raio é $r = 2$. Então

$$R^2 - 2Rr = 2^2 + 1^2 = 5.$$

   Por outro lado, temos

$$d^2 = \overline{IO}^2 = (4-2)^2 + (2-3)^2 = 4 + 1 = 5.$$

   Vemos assim que a relação desejada é satisfeita e segue do Teorema 2.1 que existe tal triângulo.

3. Um círculo de raio 5 cm está inscrito em um triângulo ΔABC retângulo em A e cuja soma dos catetos vale 16 cm. O valor da hipotenusa do triângulo é:

   a) 4cm b) 5cm c) 6cm d) 7cm e) 3cm

   Solução: No triângulo ΔABC da Figura 3.1, denotemos a hipotenusa BC por a , e os catetos AB e AC por c e b respectivamente. Aplicando o Teorema de Poncelet para o triângulo retângulo, Teorema 1.1, temos

$$a + 2R = b + c.$$

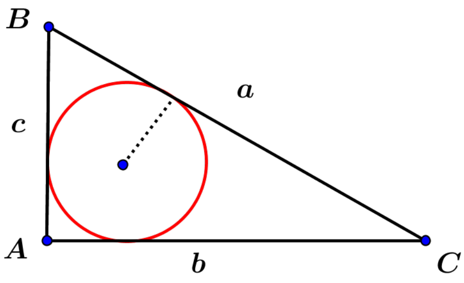

Figura 3.1:

Como $R = 5$ e $b + c = 16$ obtemos

$$a + 2.5 = 16$$

ou seja,

$$a = 6.$$

4. Na Figura 3.2, temos $\overline{QT} = 3cm$ e o perímetro do triângulo ΔUNC é igual ao perímetro do quadrilátero $QUCP$. Nestas condições podemos afirmar que o valor de $\overline{UN} - \overline{CP}$ é:

   a) 3cm b) 5cm c) 4cm d) 6cm e) 2cm

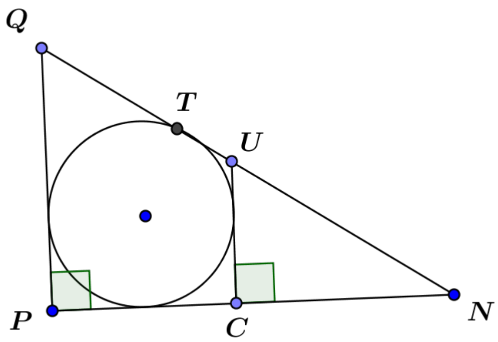

Figura 3.2:

Solução: Denotemos por M, R e S respectivamente os pontos de tangencia do círculo com UC, CP e PQ. Da Figura 3.2, temos que $\overline{QT} = \overline{ST} = 3$, $\overline{TU} = \overline{UM}$, $\overline{MC} = \overline{CR} = \overline{RP} = \overline{PS} = r$ raio da circunferência. Chamemos $\overline{TU} = x$, $\overline{UN} = n$ e $\overline{CN} = m$. Neste caso vamos encontrar o valor de $n - 2r$. Do triângulo ΔUNC vem que

$$m + n + r + x = 2P \tag{3.1}$$

e do quadrilátero $PQUC$ vem que

$$6 + 2x + 4r = 2P \tag{3.2}$$

logo comparando as equações (3.1) e (3.2) teremos

$$m + n + r + x = 6 + 2x + 4r$$

$$m + n = 6 + x + 3r. \tag{3.3}$$

Aplicando o teorema de Poncelet, Teorema 1.2, no triângulo obtemos

$$3 + 3r + m = 3 + n + x + 2r$$

ou ainda

$$n + x + r + m. \tag{3.4}$$

Somando as equações (3.3) e (3.4) vamos ter

$$m + 2n + x = 6 + x + 4r + m$$

ou ainda

$$2n = 6 + 4r$$

ou seja

$$n - 2r = 3$$

como desejávamos.

5. Em um paralelogramo $ABCD$ como mostra a Figura 3.3, temos o círculo Γ de raio R inscrito no quadrilátero $BCDH$ e o círculo γ de raio r inscrito no triângulo ABH, retângulo em H. O valor do segmento DH é:

   a) $2R$ b) $2R + r$ c) $2R - r$ d) $R - 2r$ e) $R + 2r$

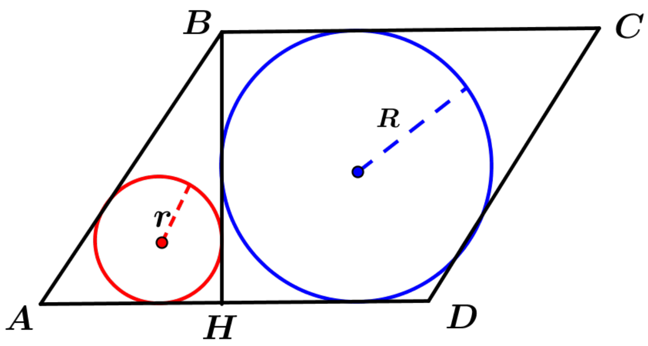

Figura 3.3:

Solução: Denotemos $\overline{DH} = x$, $\overline{AH} = b$ e $\overline{AB} = a$. Aplicando o teorema de Poncelet, Teorema 1.2, no triângulo ΔAHB retângulo em H, temos

$$a + 2r = 2R + b \tag{3.5}$$

e do quadrilátero inscritível $BCDH$ temos

$$\overline{BC} + \overline{HD} = \overline{BH} + \overline{CD}.$$

Lembrando que $ABCD$ é um Paralelogramo obtemos

$$b + 2x = 2R + a \tag{3.6}$$

Somando membro a membro as equações (3.5) e (3.6) vamos obter

$$x + r = 2R$$

ou ainda

$$x = \overline{DH} = 2R - r.$$

6. (CEPEMA-PB) Considere a elipse e_1 de equação $9x^2 + 36y^2 = 4$ e $A_0(0; 1)$ um ponto pertencente à circunferência unitária $e : x^2 + y^2 = 1$. Usando o Teorema de Poncelet determine os pontos B_0 e C_0 em e tais que o triângulo $\Delta A_0B_0C_0$ seja simultaneamente inscrito em e e circunscrito em e_1.

   Solução: Podemos escrever a elipse e_1 na forma $e_1 : \frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} = 1$ com $a_1 = \frac{2}{3}$ e $b_1 = \frac{1}{3}$. De acordo com o Teorema 2.2, já que a relação $a_1 + b_1 = 1$ é satisfeita, sabemos que à partir do ponto A_0 podemos construir tal triângulo. Para isso considere a reta $t : y - y_0 = k(x - x_0)$ tangente à elipse e_1 e contendo o ponto $A_0(0; 1)$. Pelo Lema 2.1 a condição necessária e suficiente para que isso ocorra é dada por $(y_0 - kx_0)^2 = b_1^2 + k^2a_1^2$.

   Daí, substituindo A_0, a_1 e b_1 obteremos $k = \pm\sqrt{2}$ e para obtermos os pontos B_0 e C_0 devemos usar a equação

$$y = y_0 + k(x - x_0)$$

Para $k = \sqrt{2}$ obtemos

$$y = 1 + \sqrt{2}(x - 0) = 1 + \sqrt{2}x$$

o que nos dá pontos da forma $(x, \sqrt{2}x + 1)$ na reta t. Como B_0 é a interseção de t com a circunferência e deve ter

$$1 = x^2 + (\sqrt{2}x + 1)^2 = x^2 + 2x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = 3x^2 + 2\sqrt{2}x + 1.$$

ou ainda

$$3x^2 + 2\sqrt{2}x = 0$$

que tem por solução $x = 0$ ou $x = \frac{-2\sqrt{2}}{3}$. Como $x = 0$ pertence ao ponto A_0 temos que $B_0(\frac{-2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3})$. Analogamente, para $k = -\sqrt{2}$ obtemos $C_0(\frac{2\sqrt{2}}{3}; -\frac{1}{3})$, finalizando assim a solução.

Apêndice A

Algumas Relações Trigonométricas

Neste apêndice veremos algumas relações trigonométricas necessárias para as demonstrações que aparecem no Capítulo 2.

Lema A.1 *Suponha que*

$$sen\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0, \ \cos\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) \neq 0, \ \cos(\psi_0) \neq 0$$

e

$$\begin{aligned} (1-c^2)\cos(\psi_1)\cos(\psi_0) + (1+c^2)sen(\psi_1)sen(\psi_0) &= D, \quad (A.1) \\ (1-c^2)\cos(\psi_2)\cos(\psi_0) + (1+c^2)sen(\psi_2)sen(\psi_0) &= D.. \quad (A.2) \end{aligned}$$

Então

$$(1-c^2)\tan\left(\frac{\psi_1 + \psi_2}{2}\right) = (1+c^2)\tan(\psi_0) \quad (A.3)$$

e além disso,

$$\cos^2\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right) = \frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2(1+c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) + \frac{D^2}{(1+c^2)^2}. \quad (A.4)$$

Prova: Fazendo a diferença entre as equações relacionadas em (A.1) e (A.2) obtemos a equação

$$(1-c^2)[\cos(\psi_1)-\cos(\psi_2)]\cos(\psi_0)+(1+c^2)[\mathrm{sen}(\psi_1)-\mathrm{sen}(\psi_2)]\mathrm{sen}(\psi_0)=0.$$

Da trigonometria vem que:

$$\begin{cases} \cos(\psi_1)-\cos(\psi_2) = -2\mathrm{sen}\left(\dfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\dfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right) \\ \mathrm{sen}(\psi_1)-\mathrm{sen}(\psi_2) = 2\mathrm{sen}\left(\dfrac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\psi_1+\psi_2}{2}\right). \end{cases} \tag{A.5}$$

logo teremos

$$\begin{aligned} &(1-c^2)\mathrm{sen}\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\cos(\psi_0) \\ &= (1+c^2)\mathrm{sen}\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\mathrm{sen}(\psi_0). \end{aligned} \tag{A.6}$$

Como supomos que

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\neq 0,\ \cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)\neq 0,$$

dividindo a equação (A.6) por

$$\mathrm{sen}\left(\frac{\psi_1-\psi_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_1+\psi_2}{2}\right)$$

obtemos a relação (A.3). A outra relação pode ser obtida seguindo o esquema a seguir

• faça a diferença entre a equação (A.1) multiplicada por $\mathrm{sen}(\psi_2)$ e a equação (A.2) multiplicada por $\text{sen}(\psi_1)$. Isso nos fornece

$$\begin{aligned} D(\text{sen}(\psi_2) - \text{sen}(\psi_1)) &= (1 - c^2)\left[\cos(\psi_1)\text{sen}(\psi_2) - \cos(\psi_2)\text{sen}(\psi_1)\right]\cos(\psi_0) \\ &= (1 - c^2)\text{sen}(\psi_2 - \psi_1)\cos(\psi_0). \end{aligned}$$

• faça a diferença entre equação (A.1) multiplicada por $\cos(\psi_2)$ e a equação (A.2) multiplicada por $\cos(\psi_1)$. Isso nos fornece

$$\begin{aligned} D(\cos(\psi_2) - \cos(\psi_1)) &= (1 + c^2)\left[\cos(\psi_2)\text{sen}(\psi_1) - \cos(\psi_1)\text{sen}(\psi_2)\right]\text{sen}(\psi_0) \\ &= (1 + c^2)\text{sen}(\psi_2 - \psi_1)\text{sen}(\psi_0). \end{aligned}$$

Dessa forma, usando novamente as relações trigonométricas dadas em (A.5), e a relação

$$\text{sen}(\psi_2 - \psi_1) = 2\text{sen}\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right),$$

obtemos

$$2D\text{sen}\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) = 2(1 - c^2)\text{sen}\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\cos(\psi_0),$$

$$2D\text{sen}\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\text{sen}\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) = 2(1 + c^2)\text{sen}\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\text{sen}(\psi_0).$$

Assim, dividindo a equação acima por

$$\text{sen}\left(\frac{\psi_1 - \psi_2}{2}\right) \neq 0$$

finalmente encontramos

$$\frac{D}{1 - c^2}\cos\left(\frac{\psi_2 + \psi_1}{2}\right) = \cos\left(\frac{\psi_2 - \psi_1}{2}\right)\cos(\psi_0)$$

e

$$\frac{D}{1+c^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\operatorname{sen}(\psi_0).$$

Tomando a soma dos quadrados destas duas equações, e usando a relação fundamental $\cos^2(\psi_0)+\operatorname{sen}^2(\psi_0)=1$, obtemos

$$\frac{D^2}{(1-c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)+\frac{D^2}{(1+c^2)^2}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=\cos^2\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right).$$

Substituindo

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)$$

teremos

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\psi_2-\psi_1}{2}\right)\operatorname{sen}(\psi_0) &= \frac{D^2}{(1-c^2)^2}\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) \\
&\quad +\frac{D^2}{(1+c^2)^2}\left(1-\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right)\right) \\
&= \frac{D^2}{(1+c^2)^2}+\left[\frac{D^2}{(1-c^2)^2}-\frac{D^2}{(1+c^2)^2}\right].\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) \\
&= \frac{D^2}{(1+c^2)^2}+\frac{D^2(1+c^2)^2-D^2(1-c^2)^2}{(1-c^2)^2.(1+c^2)^2}.\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right) \\
&= \frac{D^2}{(1+c^2)^2}+\frac{4c^2D^2}{(1-c^2)^2.(1+c^2)^2}.\cos^2\left(\frac{\psi_2+\psi_1}{2}\right),
\end{aligned}$$

o que nos dá a equação (A.4) e completa a prova. ∎

Referências Bibliográficas

[1] A. C. Muniz Neto,*Tópicos de Matemática Elementar: geometria euclidiana plana - Volume 2*, (Coleção Professor de Matemática; 25) - Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2] A. Cayley. Note on the porism of the in-and-circumscribed polygon. *Philosophical Magazine*, 6:99-102, 1853.

[3] H. S. M. Coxeter and S.L. Greitzer. *Geometry Revisited*. Random House, 1967.

[4] H. Dorrie. *100 Great Problems of Elementary Mathematics. Their History and Solution*. Dover, 1965.

[5] http://mathworld.wolfram.com/PonceletPorism.html

[6] I. Newton; *Principia: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural*, Edusp, 2002.

[7] J. V. Poncelet.Traité des propiétés projectives des figures. Mett-Paris,1822.

[8] L. Flatto, *Poncelet's of Theorem*, AMS. (2008)

[9] N. I. Fuss. De quadrilaterlis quibus circulum tam inscribere quam circumscribere licet. *NAASP 1792 (Nova Acta)*, X:103-125, 1797.

[10] P. Griffiths and J. Harris. A Poncelet theorem in space. *Comment. Math. Helv.*, 52:145-160, 1977.

[11] P. Griffths and J. Harris. *On Cayley's explicit solution to Poncelet's porism.* Lénseignement Math., 24:31-40, 1978.

[12] W. Chapple. *An essay on the properties of triangles inscribed in and circunscribed about two given circles.* Miscellanea Curiosa Mathematica, 4:117-124, 1746.

[13] V. Georgiev, V. Nedyalkova. *Poncelet's porism and periodic triangles in ellipse.* Lifelong Learning Programme.