Universidade Federal de Goiás
Câmpus Jataí
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Uma Proposta de Oficina Abordando Métodos de Otimização com o Uso do Software Gráfico WinPlot®

Maria Isabel Pereira Bezerra Almeida

Jataí - GO
2014

Maria Isabel Pereira Bezerra Almeida

Uma Proposta de Oficina Abordando Métodos de Otimização com o Uso do Software Gráfico WinPlot®

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Câmpus de Jataí da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Me. Fernando Ricardo Moreira

Jataí - GO
2014

Maria Isabel Pereira Bezerra Almeida graduou-se em Matemática pela Universidade de Rio Verde - UniRV em 1996, durante a graduação foi bolsista da Prefeitura de Rio Verde - GO; Pós-graduada Latu Sensu em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras - UFLA em 2000. Atualmente, Gestora da Escola Estadual de Tempo Integral Maria Ribeiro Carneiro, professora de Ensino Superior no Instituto de Ensino Superior de Rio Verde - IESRIVER, professora substituta do IFGoiano - Campus Rio Verde e professora de Ensino Básico vinculada à Secretaria Estadual de Educação.

À Nilce, João Eduardo
e Luís Guilherme

Agradecimentos

A Deus, por cuidar de mim e dos meus filhos para que eu conseguisse chegar ao fim dessa jornada.

A minha mãe, Nilce, que além de me apoiar, é o exemplo de vida que foi seguido por mim devido a sua força e coragem, cuidando dos meus "tesouros" João e Luís por incontáveis vezes que estive afastada.

A meus filhos, João Eduardo e Luís Guilherme, que foram, mesmo sem saber, o motivo da minha determinação e persistência. Foram privados da minha companhia inúmeras vezes, mas mesmo na sua inocência, entenderam que a mamãe tinha que estudar.

Aos funcionários da Escola Estadual de Tempo Integral Maria Ribeiro Carneiro que durante dois anos foram companheiros e incentivadores deste sonho.

Aos meus amigos, companheiros dos bastidores dessa jornada com inúmeras demonstrações de lealdade e ao meu orientador Prof. Me. Fernando que soube aproveitar minhas qualidades e me estimulou a ir além.

Aos colegas e professores do PROFMAT que me ajudaram a não desistir, mesmo em momentos muito difíceis.

Agradeço à CAPES pelo suporte financeiro durante todo o desenvolvimento do curso, possibilitando a conclusão deste e à Sociedade Brasileira de Matemática pela emoção e implantação do PROFMAT no Brasil.

A todos vocês meus mais sinceros agradecimentos.

Resumo

Este trabalho tem o objetivo de oferecer aos professores do Ensino Médio e do Ensino Superior uma oficina de otimização com o auxílio do programa WinPlot® destinado a incentivar o estudo da Matemática e suas aplicações. Otimização em matemática consiste em estudar problemas para maximização ou minimização de funções com a escolha de métodos que conduzam à procura do ótimo. Diante deste contexto, este trabalho tem como tema uma oficina de otimização com o auxílio do software WinPlot® e tem como objetivo incentivar o aluno do terceiro ano do Ensino Médio ou dos anos iniciais do Ensino Superior a querer conhecer novos métodos de aprendizagem. Apresenta resoluções de problemas de Matemática Aplicada com maximização ou minimização. Com o uso de derivadas e pelo método da Bissecção, sendo que o segundo método é muito utilizado em cálculos de raízes e foi adaptado para esse trabalho. Contempla ainda todo o planejamento metodológico de uma oficina para ser trabalhada em oito aulas de forma dinâmica, criativa e com a proposta de estimular os alunos a terem um conhecimento mais sólido e rigoroso.

Palavras-chave

Máximos e mínimos, Método da Bissecção, Programas educacionais.

Abstract

This work aims to provide high school teachers and Higher Education workshop optimization with the aid of WinPlot® program to encourage the study of mathematics and its applications . Optimization in mathematics is to study problems for maximization or minimization of functions with the choice of methods that lead to the great demand . Given this context , this work has the theme of a workshop with the help of optimization software WinPlot® and aims to encourage the student 's third year of high school or the early years of Higher Education to want to know new methods of learning. Presents troubleshooters of Applied Mathematics with maximization or minimization . With the use of derivatives and the Bisection method , and the second method is often used in calculations of roots and was adapted for this work . It also offers all the methodological planning a workshop to be worked into eight classes dynamic , creative and with the proposal to encourage students to have a more robust and accurate knowledge fashion .

Keywords

Maxim and minim, Bisection method, Educational programs.

Sumário

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Capítulo 1

Introdução

A otimização é uma área da Matemática que estuda problemas objetivando obter valores máximos ou mínimos, conhecidos como ótimos, de uma função. As funções geralmente são não lineares. Problemas de otimização podem ser restritos ou irrestritos. As restrições são um conjunto de equações e/ou inequações, que delimitam o espaço de variáveis de projeto, e são oriundas de limitações físicas, orçamentárias, ambientais, etc. Neste trabalho serão estudados apenas problemas sem restrição. As técnicas de tratamento de restrições são mostradas em Izmailov e Solodov (2007).

Durante os anos finais do Ensino Fundamental e nos primeiros do Ensino Médio são apresentadas diversas situações problema onde surgem a necessidade de se obter a melhor solução dentro de um determinado intervalo. O problema que motivou o desenvolvimento deste trabalho foi a forma como são tratadas essas questões pelos professores, pois a otimização apresenta um vasto campo de utilização dentro da Matemática Aplicada, mas costuma ser mostrada aos alunos como uma rápida aplicação de fórmulas que aparecem no material didático, ignorando todo o processo de raciocínio envolvido, desde o porquê da escolha do modelo matemático, passando pelos motivos da transformação deste até os modelos prontos obtidos no material do aluno.

As aplicações da otimização podem ser vistas, por exemplo, ao tentar obter a maior área possível de uma figura retangular dado um perímetro fixo, o menor custo possível para a fabricação de um material observando os custos fixos e variáveis sujeitos durante a produção.

Na Matemática do Ensino Básico por várias vezes os professores ficam presos a fórmulas e conceitos e não deixam seu aluno pensar, não porque não são bons professores e sim por um ensino cheio de regras e datas, que não os permitem aprofundar em assuntos pelos quais os alunos se interessariam.

O conceito de otimização instiga o aluno a querer entender sobre maximizar e minimizar e, com o auxílio do recurso computacional WinPlot®, torna-o mais interessante, pois utiliza uma ferramenta muito querida dos alunos: o computador.

A origem de problemas de otimização é muito remota e anterior ao desenvolvimento de ferramentas computacionais e matemáticas para a sua resolução. Pode-se citar, como exemplo, o problema de se encontrar qual a maior área que pode ser cercada por uma conhecida quantidade de corda (Problema da Princesa Dido). Na obra "Eneida de Vigílio", encontra-se uma referência a este problema : "No século IX antes de Cristo, a princesa fenícia Dido, chegando a terras do norte da África junto com seu irmão Pigmalião, fizeram um acordo com os habitantes locais. Ao querer a princesa Dido comprar terra para se estabelecer com seu povo, o rei daquele lugar somente lhe permitiu comprar a parcela de terra que poderia ser cercada pela pele de um touro.

Neste caso, a princesa Dido cortou a pele em pequenas tiras formando uma corda de grande comprimento (entre 1000 a 2000 metros) e a dispôs de maneira que cobrisse a maior parte de terreno possível...". A área que a princesa cercou tinha o formato de um círculo. Em 1870, o matemático K. Weirstrass apresentou uma solução para o problema baseando-se no Cálculo Variacional (FIGUEIREDO,1989; MOREIRA e SALDANHA,1993). Outro problema bastante interessante que também envolve otimização é o Problema de Braquistócrona, do grego *brakhisto* (o mais curto) e *chronos* (tempo). O problema consiste em encontrar qual a trajetória que uma partícula deve percorrer com o menor tempo possível sendo conhecidos os pontos de saída e chegada, com velocidade inicial nula, sem atrito e sujeita apenas a ação da gravidade.

Por muitas vezes no ensino básico a otimização é restringida apenas a problemas que podem ser modelados por funções quadráticas, pois são mais fáceis de serem modelados e tratados e com fórmulas prontas, para o ponto ótimo, que somente são utilizadas para este tipo de função.

Na oficina presente nesse trabalho o professor dedicará um momento para estimular o aluno a querer mais, a resolver problemas de otimização com funções não somente quadráticas e também mais interessantes. A oficina tem como objetivo estimular a procura do conhecimento e não ficar restrito ao assunto que é cobrado no vestibular. A aprendizagem acontece no estímulo de procurar e conhecer, não com fórmulas prontas em livros.

Na oficina são resolvidos problemas de otimização com o uso de derivadas, que não é um assunto visto no Ensino Médio e também pelo método numérico da Bissecção com o auxílio do software gráfico WinPlot®, para delimitação de um intervalo contendo a solução ótima, que vai levar os alunos e professores ao Laboratório de Informática para uma aula dinâmica e cheia de conceitos, teorias e práticas em relação ao assunto otimização. Um capítulo deste trabalho foi preparado com dez exercícios com situações-problema facilmente encontradas no dia-a-dia e que certamente irão despertar o interesse dos alunos. Cabe ressaltar o uso de recursos computacionais e calculadora, o que é largamente utilizado na vida profissional das pessoas, porém seu uso nas escolas é bastante restrito. A justificativa para o uso da calculadora científica, que os computadores possuem, é devido a complexidade das funções encontradas ao modelar certos problemas.

1.1 Estrutura do trabalho

Esta dissertação possui a seguinte estrutura.

No capítulo 2 é descrito sobre o que é otimização e sua importância, como é ensinado no ensino básico e como pode ser melhorado com o uso de derivadas e depois com o auxílio do software WinPlot® para delinear o gráfico e obter um intervalo, que contém a solução otima, para o uso do método numérico da bissecção.

No capítulo 3 discorre-se sobre vários conceitos e resultados fundamentais de modo a oferecer ao professor o referencial teórico para introduzir o Método da Bissecção.

No capítulo 4 é apresentada uma lista com dez exercícios para serem resolvidos, com o uso de derivadas e com recurso computacional WinPlot® para serem resolvidos pelo método da Bissecção. São problemas com situações cotidianas que vão aguçar a curiosidade dos alunos sobre o assunto.

Por fim, no capítulo 5, há um planejamento da oficina com objetivos, metodologia, expectativas e avaliação. É apresentado um roteiro da oficina como sugestão para o professor, visando a facilitar a programação das suas aulas, mas que pode ser adaptado de acordo com a realidade de cada instituição de ensino.

1.2 Objetivos do trabalho

Esse trabalho tem por objetivo apresentar uma revisão bibliográficas de tópicos de otimização com ênfase no Método da Bissecção a nível elementar, culminando em uma proposta de oficina sobre o tema.

Espera-se que a proposta de oficina seja útil aos professores de Ensino Médio e Superior, de forma que eles a usem para despertar o interesse dos alunos em assuntos cotidianos e ainda sejam estimulados a pesquisar softwares que possam agregar mais qualidade e eficiência em suas aulas.

Capítulo 2

Conceitos e Resultados Fundamentais

Este capítulo é dedicado à apresentação das principais definições, conceitos e resultados que são importantes para o entendimento deste trabalho. Inicialmente é exposto o conceito de função dentro do corpo dos $\mathbb{R}$ e algumas propriedades necessárias para se definir a noção de derivada. Posteriormente são apresentados os principais conceitos envolvendo máximos e mínimos de uma função real. É apresentado também como o assunto vem sendo tratado atualmente no Ensino Médio e, por último, são apresentadas as principais ferramentas que auxiliarão ao "plotar" gráficos de funções usando o software WinPlot®.

2.1 Funções e algumas de suas propriedades

O conjunto $\mathbb{R}$ é munido das operações $+$ (adição) e $\cdot$ (multiplicação). Cada uma destas operações possuem as seguintes propriedades: associatividade, comutatividade, existência de elemento neutro e existência de inversos, além da propriedade distributiva da adição em relação à multiplicação. Estas propriedades caracterizam o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ como um corpo.

O conjunto $\mathbb{R}$ é totalmente ordenado e valem as seguintes propriedades:

- $x = y$ ou $x < y$ ou $x > y$ (tricotomia)
- se $x < y$, então $x + z < y + z$ e $x \cdot z < y \cdot z$ para $z > 0$ e $x \cdot z > y \cdot z$ para $z < 0$(monotonicidade)

para todos $x, y, z \in \mathbb{R}$.

O conjunto $\mathbb{R}$ além de ordenado é completo. Isto significa que qualquer conjunto limitado superiormente (inferiormente) possui supremo (ínfimo) em $\mathbb{R}$. Uma apresentação rigorosa dessas propriedades são expostas em LIMA (2009) e RIBEMBOIM (2012).

Dessa forma, conceitua-se função como uma relação $f : A \to B$, onde A e B são conjuntos não-vazios, e cada elemento de A se relaciona apenas com um elemento de B. O conjunto A é denomindado domínio da função e o conjunto B é nomeado como contradomínio da função. Nesse trabalho, toda menção à função será feita a funções do tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, caracterizada comumente como uma função real.

O valor $f(x)$ é o valor associado a $x \in \mathbb{R}$ pela função. O conjunto de todos valores $f(x)$ é conhecido como imagem da função.

Definição 2.1. *Uma função é dita crescente em um intervalo I se, dados $a, b \in I$ com $a < b$, então*

$$f(a) < f(b). \tag{2.1}$$

Analogamente, pode-se definir função decrescente quando $a < b$, implicar que $f(a) >$

$f(b)$.

Por exemplo, considere a seguinte função real $f(x) = (x+1)^2$. Observe que tanto os valores de x quanto os valores de $f(x)$ são tomados dentro do conjunto dos reais, logo o domínio e o contra-domínio dessa função é o conjunto dos reais. O menor valor possível para essa função é 0, obtido quando $x = -1$, e é possível se obter valores infinitamente grandes aumentando ou reduzindo muito o valor de x, assim, a imagem da função é o intervalo $[0, +\infty)$. Além disso, é possível ver que, sempre que se escolhe dois valores no intervalo $(-\infty, -1)$, o menor deles apresenta maior imagem, caracterizando a função como decrescente nesse intervalo. Já quando se toma o intervalo $(-1, +\infty)$, ocorre o contrário, o maior valor do intervalo apresenta a maior imagem, então a função é crescente nesse intervalo. A figura 2.1 apresenta o gráfico da função do exemplo citado.

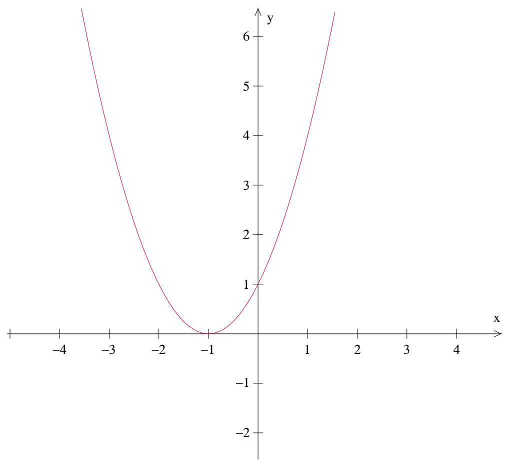

Figura 2.1: Gráfico da função real $f(x) = (x+1)^2$.

Devido ao conceito de otimização, muitos problemas podem ser modelados por modelos físicos de interação entre as variáveis envolvidas e, quando não há alguma "fórmula fechada" descrevendo o problema, algum outro modelo aproximado, para descrever a interação entre as variáveis, pode ser usado para descrever o problema. Sendo assim, as funções se apresentam como ferramentas de alta qualidade, permitindo um estudo claro do objeto e todas as relações envolvidas no processo de otimização.

Definição 2.2. *O limite de uma função, denotado por* $\lim_{x \to a} f(x) = L$*, existe se, dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \tag{2.2}$$

Diversas propriedades podem ser enunciadas sobre essa definição. (THOMAS, 2012).

Por fim, a definição de continuidade de uma função surge de forma simples.

Definição 2.3. *Uma função é dita contínua em um ponto* x_0*, se para todo* $\delta > 0$ *existir um* $\varepsilon > 0$*, que depende de* δ*, tal que se* $|x - x_0| < \delta$ *então* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$*.*

A definição anterior é equivalente a dizer que se a função é contínua em x_0 então $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

A título de exemplo, tem-se que a função real $f(x) = 2x + 1$ é contínua em $x = a$ com $\lim_{x \to a} f(x) = 2a + 1$, pois, dado ε é suficiente tomar $\varepsilon = 2\delta$, admitindo $0 < |x - a| < \delta$, então $|(2x + 1) - (2a + 1)| = 2|x - a| < 2 \cdot \delta = \varepsilon$, assim o limite existe para todo a escolhido, mostrando a continuidade da função.

Um resultado importante sobre funções contínuas é o Teorema do Valor Intermediário apresentado a seguir:

Teorema 2.4. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua em* $[a, b]$*. Se* d *é qualquer valor entre* $f(a)$ *e* $f(b)$*, então existe* $c \in (a, b)$ *tal que* $d = f(c)$*.*

Uma demonstração para esse teorema pode ser obtida em LIMA (2009).

Esse teorema pode ser utilizado, por exemplo, para determinar existências de raízes em um intervalo. Considere a função $f(x) = x^3$, como $f(-1) = -1$ e $f(1) = 1$, como

$f(-1) < 0 < f(1)$, existe, pelo Teorema do Valor Intermediário, um valor $c \in [-1, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

Outro resultado muito importante, que depende da continuidade de funções, é o Teorema de Weierstrass. Este teorema apresenta um resultado envolvendo a existência de máximos e mínimos de funções contínuas definidas em intervalos fechados e limitados e é enunciado, sem demonstração, na seção 2.3.

O conceito de continuidade é de grande importância para a definição de derivada de uma função, assunto tratado na próxima seção.

2.2 O conceito de derivada

A derivada de uma função é um conceito que surgiu no final do século XVII através de estudos individuais realizados por Newton e Leibniz. A motivação para a descoberta, realizada por Leibniz, se referia a encontrar uma forma simples de determinar retas tangentes a uma curva em determinado ponto, enquanto a motivação de Newton era de encontrar a velocidade instantânea de uma partícula em movimento. Dessa forma, surgiu a seguinte definição:

Definição 2.5. *Uma função real* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é dita derivável em* $x_0 \in (a, b)$ *se existir o limite*

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{2.3}$$

Denota-se por $f'(x_0)$ *a derivada de* f *em* x_0*. Sendo que*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2.4}$$

Quando uma função é derivável em todo ponto de seu domínio, diz-se então que a função f é derivável. Neste caso, é possível calcular a função derivada de f, em um ponto genérico x de seu domínio e esta é denotada por $f'(x)$.

A figura 2.2 mostra a representação geométrica da derivada a partir da idéia de Leibniz.

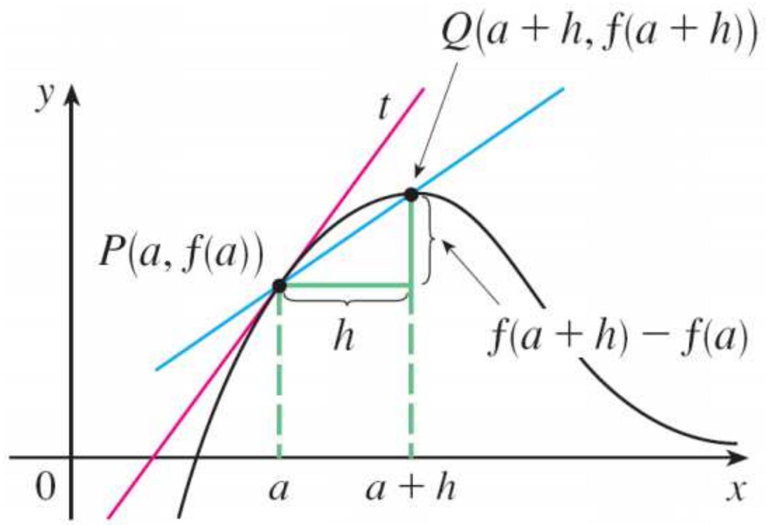

Figura 2.2: Representação geométrica da derivada de uma função real. Extraído de STEWART (2013)

Nota-se que, quanto mais próximo de a a abscissa $a+h$ se encontra a reta secante se aproximará mais da reta tangente a curva no ponto $(a, f(a))$.

Por exemplo, tem-se que a derivada de $f(x) = x^2 + 3x$ é dada por

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 + 3(x+h) - (x^2+3x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2 + 3h}{h} = 2x + 3 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Toda função real que admite uma derivada em todo ponto de seu domínio é denominada diferenciável.

Podem ser enunciadas várias propriedades operatórias dentro do estudo de derivadas, abaixo se encontram as principais, onde f e g são funções diferenciáveis e c uma constante real:

i. $(f+g)' = f' + g'$

ii. $(cf)' = cf'$

iii. $(fg)' = f'g + fg'$

iv. $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

v. $(f \circ g)' = f' \circ g \cdot g'$

Demonstrações podem ser encontradas em STEWART (2013) e THOMAS (2012).

O teorema abaixo mostra que o conceito de diferenciabilidade implica o conceito de continuidade.

Teorema 2.6. *Se f tem uma derivada em $x = c$, então f é contínua em $x = c$*

Demonstração. Assumindo a existência de $f'(c)$, deve-se mostrar que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$, isto é, mostrar que $\lim\limits_{h \to 0} f(c+h) = f(c)$. Tomando $h \neq 0$, é claro que

$$f(c+h) = f(c) + [f(c+h) - f(c)] = f(c) + \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot h \tag{2.6}$$

fazendo $h \to 0$, tem-se como resultado

$$\lim_{h \to 0} f(c+h) = \lim_{h \to 0} f(c) + \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h \tag{2.7}$$

Portanto

$$\lim_{h\to 0} f(c+h) = f(c) + f'(c)\cdot 0 = f(c) \tag{2.8}$$

□

Esse resultado apresenta sua importância por dizer que uma função é contínua em todos os pontos em que ela apresenta derivada.

Apresentadas as ferramentas básicas, a próxima seção inicia uma abordagem sobre alguns tópicos de otimização.

2.3 Máximos e mínimos de uma função

Nesta seção são apresentados os fundamentos que guiam todo o restante do trabalho. Inicialmente, é mostrado como usar as derivadas para identificar os valores de máximos e mínimos. No próximo capítulo é apresentado o Método da Bissecção, que é um método numérico que também possibilita chegar ao resultado desejado, isto é, a solução ótima dos problemas estudados.

Observando a figura 2.3, é notável que os pontos $(-1,3;-4,51)$, $(0,17;-0,92)$ e $(1,13;-2,07)$ são ótimos locais dessa função, pois, observando mais atentamente, vê-se que o ponto da função de abscissa $x = 0,17$ apresenta o maior valor da função no intervalo $[-1,5;1,5]$. Mas esse não é o maior valor possível de se obter através da função, já que $f(2) > f(0,17)$, por exemplo. Assim, é denominado o ponto $(0,17;-0,92)$ como um máximo local. Por motivos semelhantes pode se chamar o ponto $(1,13;-2,07)$ de mínimo local. Diferente dos dois pontos anteriores, o ponto de abscissa $x = 1,13$ apresenta o menor valor da função para qualquer intervalo escolhido, por isso ele é denominado ponto de mínimo global da função. Veja que não é possível conseguir um ponto de máximo global nessa função, pois ela tende a ∞ quando o valor de x cresce ou decresce infinitamente.

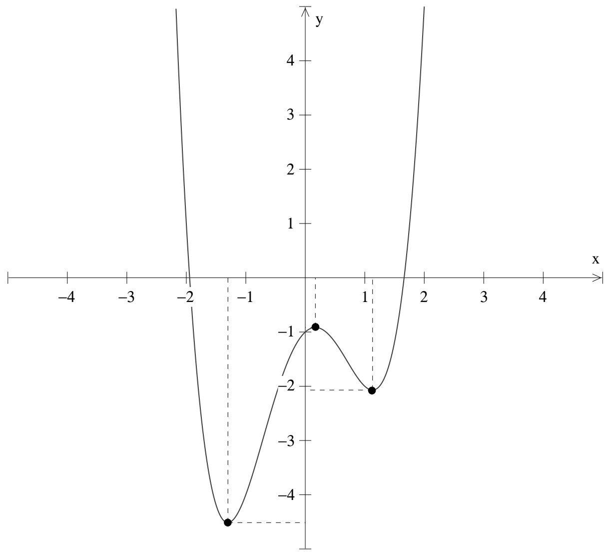

Figura 2.3: Gráfico da função $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$

Abaixo é apresentada uma definição precisa sobre ótimos.

Definição 2.7. *Seja f uma função com domínio D. Então, f tem um valor mínimo absoluto em D em um ponto c se $f(x) \geqslant f(c)$ para qualquer x em D. Analogamente, se define o valor máximo absoluto em D no ponto c se $f(x) \leqslant f(c)$ para qualquer x em D.*

O teorema abaixo diz que, dada uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ tem um valor de máximo e um valor de mínimo.

Teorema 2.8. *(de Weierstrass) Se f é contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, então f atinge um valor máximo M e um valor mínimo m, com $m, n \in [a, b]$*

A demonstração desse fato pode ser obtida em GUIDORIZZI (2001, p.513).

Por exemplo, como a função polinomial $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ é contínua em todo intervalo $[x_1, x_2]$ real, logo, pelo Teorema de Weierstrass sempre possuirá valores máximos e mínimos para qualquer intervalo fechado escolhido.

Se restringir o conceito de máximos e mínimos a uma vizinhança de x, isto é, um intervalo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$, denomina-se esses valores de máximos e mínimos locais. Com efeito, tome a função $f(x) = x^3 - 12x - 5$, no ponto $x = -2$ ela apresenta imagem $f(-2) = 11$, que é a maior imagem possível no intervalo $(-\infty, 4)$, mas $f(5) = 60 > f(-2)$, assim $x = -2$ é ponto de máximo local, mas não é ponto de máximo global.

É claro que buscar os pontos que fornecem os valores máximos e mínimos de forma aleatória não é prático. Assim, o próximo teorema auxilia a obtenção dos mesmos.

Teorema 2.9. *(de Fermat) Se f tiver um máximo ou mínimo local em c e se $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$*

A prova do teorema acima pode ser obtida em livros como STEWART (2013, p.250) e ÁVILA (2005, p.182).

É necessário ter um cuidado especial devido a recíproca do teorema não ser verdadeira. Por exemplo, a função $f(x) = x^5$ apesar de ter $f'(0) = 5 \cdot 0^4 = 0$, e o ponto $x = 0$ não é extremante da função f. Todos os valores que satisfazem $f'(x) = 0$ são ditos pontos críticos. Consequentemente, um ponto de máximo ou de mínimo é um ponto crítico, mas a volta não apresenta validade sempre.

O Teorema do Valor Médio, apresentado a seguir, permite através do estudo de derivadas definir os intervalos onde uma função é crescente ou decrescente.

Teorema 2.10. *(do Valor Médio) Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável em (a, b), então existe um número $c \in (a, b)$ tal que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$*

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em LIMA (2009,p.272).

Note que, dado $x_1, c_2 \in (a, b), x_1 < x_2$, caso $f'(c) > 0$, então $f(x_1) < f(x_2)$, então a função será crescente nesse intervalo, analogamente, se $f'(c) < 0$ implicará que $f(x_1) > f(x_2)$ indicando que a função é decrescente para esse intervalo.

A título de exemplo, considere a função $f(x) = x^3$, veja que, como $f'(x) = 3x^2$, $x = 0$ é um ponto crítico, mas $f'(x) > 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$, logo a função é crescente em todo o seu domínio, impossibilitando 0 ser um ponto de máximo ou de mínimo.

Diz-se que uma função é côncava para cima se todas as suas tangentes em um intervalo estiverem abaixo do gráfico de f, analogamente se define o conceito de função côncava para baixo. Para finalizar o estudo de máximos e mínimos através da derivada, abaixo está enunciado um teste sobre a concavidade.

Teorema 2.11. *(Teste da concavidade) Se $f''(x) > 0$ para todo x em um intervalo, então o gráfico de f é côncavo para cima nesse intervalo. Se $f''(x) < 0$ para todo x em um intervalo, então o gráfico de f é côncavo para baixo nesse intervalo*

Onde $f''(x)$ representa a derivada de segunda ordem da função, isto é, a derivada da derivada de uma função. Dessa forma, se um ponto crítico se encontra em um intervalo onde $f''(x) > 0$, esse ponto é carcterizado como ponto mínimo. Da mesma forma, se um ponto crítico se encontra em um intervalo onde $f''(x) < 0$, esse ponto é um ponto de máximo. Quando $f''(x) = 0$ dizemos que esse ponto x é um ponto de inflexão.

Mediante o apresentado se torna possível realizar esboços de gráficos de funções contínuas. Por exemplo, um esboço do gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2$. Como a derivada da função é $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$, a função apresenta pontos críticos em 0 e 2. A derivada de segunda ordem é dada por $f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$, assim, 1 é ponto de inflexão, $f''(0) = -6 < 0$, então a concavidade da função é voltada para baixo entre $(-\infty, 1)$, mostrando que 0 é ponto de máximo local e, como $f''(2) = 6 > 0$ a concavidade no intervalo $(1, \infty)$ é voltada para cima, assim 2 é ponto de mínimo local. Além disso, percebe-se que a função tende à $-\infty$ a medida que os valores de x decrescem e tende à ∞ a medida que os valores de x crescem. Dessa forma, a função não apresenta um valor máximo absoluto ou um valor de mínimo absoluto.

Na figura 2.4 esta representado o gráfico dessa função, onde os pontos de máximo e mínimo locais dessa função estão destacados.

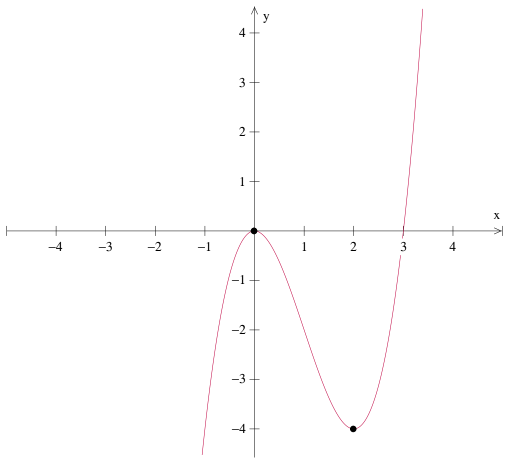

Figura 2.4: Gráfico da função real $f(x) = x^3 - 3x^2$

É possível utilizar esse estudo para funções que modelam problemas reais. Este fato justifica a importância deste conteúdo, pois o mesmo é necessário em várias ciências e engenharias existentes. O problema abaixo extraído da revista Cálculo, de autoria de Bicudo (2013), ilustra o uso de derivadas em um problema de maximização de lucro causando a menor poluição possível:

Os executivos de uma siderúrgica conseguiram colocar numa fórmula o lucro de uma siderúrgica em função de quanto produz (q), quanto gasta para produzir (c), quanto cobra à guisa de preço (p) e, principalmente, de quanto polui o ecossistema (x):

$$y = 2x - \frac{x^2(p-c)q}{2} \tag{2.9}$$

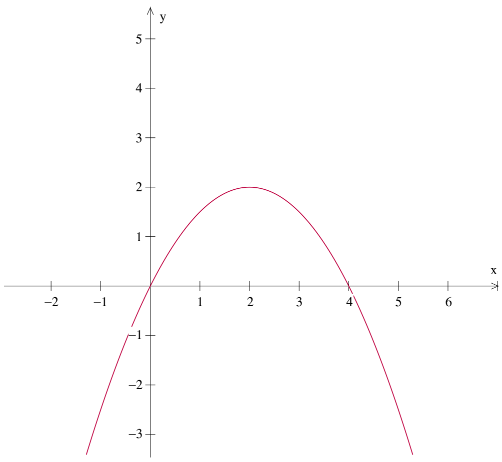

Figura 2.5: Representação gráfica da função do problema.

A figura 2.5 foi feita tomando $(p-c)q = 1$ para mostrar o papel de x nessa função. É notável que até certo ponto, quanto maior a poluição, maior o lucro. Usando a derivada pode-se obter o ponto ótimo desta função, derivando em função de x e igualando a zero a função obtida é:

$$\left[2x - \frac{x^2(p-c)q}{2}\right]' = 0 \Longrightarrow 2 - x(p-c)q = 0 \Longrightarrow x = \frac{2}{p-c}q \tag{2.10}$$

Assim, quando o nível de poluição x é igual à $\frac{2}{p-c}q$, a função atinge seu ponto de máximo (no gráfico isso ocorre em $x = 2$), isto é, o quanto compensa a empresa poluir o meio ambiente desde que assegure o máximo possível de lucro.

Quanto aos pescadores da região onde está situada a siderúrgica, seu lucro é modelado pela função $f(x) = 10 - x$. Note que quanto maior a poluição, menor o lucro obtido pelos pescadores; eles só podem obter o lucro máximo se o valor de x tender a zero.

A sociedade ganha quando ambos os empreendimentos conseguirem obter o valor de x que maximiza o lucro de ambos. Em linguagem matemática, deve-se maximizar a função 2.11, sujeita a $x \geq 0$.

$$g(x) = 2x - \frac{x^2(p-c)q}{2} + 10 - x = \frac{2x - x^2(p-c)q + 20}{2} \tag{2.11}$$

Derivando a função 2.11 e igualando a zero, temos a equação

$$g'(x) = 1 - x(p-c)q = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{(p-c)q} \tag{2.12}$$

Assim, se a decisão for deixada a cargo dos pescadores, eles fecham a siderúrgica ou a tornam inviável; se for deixada a cargo dos executivos, eles poluem duas vezes mais do que seria ótimo para todos. Dessa forma, o valor de x deve ser estipulado conforme calculado acima para que todos possam se beneficiar.

Fica clara a necessidade de se encontrar ótimos, como visto no problema acima, pois modelam situações do cotidiano e de interesse de toda a sociedade. Assim, motiva a inserção do mesmo dentro dos tópicos ensinados no Ensino Médio, como mostrado na seção seguinte.

2.4 Rudimentos de otimização no Ensino Médio

Durante o primeiro ano do Ensino Médio são apresentados problemas simples de otimização de forma a realizar a contextualização do ensino de funções quadráticas. Problemas assim são de fácil solução através do uso de derivadas, mas os alunos nesse nível de instrução ainda não dominam este tópico. Assim, através de manipulações algébricas é possível apresentar a esses alunos um meio convincente de resolver essas questões. Essa manipulação é mostrada abaixo:

$$\begin{aligned} f(x) = ax^2 + bx + c &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\ &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{(-b^2 + 4ac)}{4a^2}\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Note que $-\dfrac{\Delta}{4a}$ é uma constante e, como $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ admite apenas valores não-negativos, assim seu mínimo, ou máximo, é obtido quando $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{b}{2a}$. Essas coordenadas são denominadas vértice da parábola e costumam aparecer nos materiais didáticos sem justificativa.

Como esses tipos de questões utilizam funções de segundo grau, a derivada dessas funções são de grau 1, então só existe um único ponto de máximo ou de mínimo, que são classificados assim devido o valor do coeficiente a. Se $a > 0$ a função admite um ponto de mínimo, se $a < 0$ a função admite ponto de máximo.

Veja que para utilizar a derivada nesse tipo de problema, inicialmente seria procurado o ponto crítico da função e, como $(ax^2 + bx + c)' = 2ax + b$, igualando a derivada a zero se obtém $x = -\dfrac{b}{2a}$, obtendo os mesmos resultados.

Para ilustrar esse caso é apresentado um problema proposto em STEWART (2013, p.294) através das duas abordagens propostas nesta seção.

"Um fazendeiro tem $1200m$ *de cerca e quer cercar um campo retangular que esta na*

margem de um rio reto. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem a maior área?"

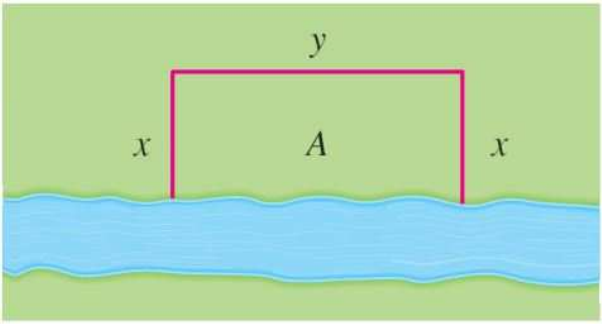

Figura 2.6: Representação geométrica do problema de maximização de uma área retangular

Solução acessível ao aluno do Ensino Médio: O problema está procurando as dimensões de uma área retângular. Para auxiliar a compreensão, na figura 2.6 se encontra um diagrama que representa o problema e atribui as variáveis x e y para as dimensões da área. Assim, pode-se descrever as condições que restringem o problema:

$$maxA = xy \text{ onde } 2x + y = 1200 \tag{2.14}$$

Reduzindo o problema à variável x,

$$y = 1200 - 2x \text{ o que implica que } A = x(1200 - 2x) \tag{2.15}$$

Como A é uma função quadrática, com coeficiente $a < 0$, a função obtém valor máximo em $x = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{1200}{2(-2)} = 300$

Assim, é possível obter os valores $x = 300$ e $y = 600$, com área máxima $A = 180.000m^2$.

Solução usando derivadas: Inicia-se seguindo os passos anteriores até obter o valor de

A em uma função de x. Como $A' = (1200 - 2x) - 2x = 1200 - 4x$ e $A'' = -4$, tem-se que a função tem um valor máximo, já que $A'' < 0$. Então, o ponto de máximo pode ser obtido por $1200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 300$. Realizando as devidas substituições se obtém $y = 600$, o mesmo resultado obtido no método anterior.

É claro que ambos os métodos são funcionais, mas o uso de derivadas se justifica em problemas que envolvem funções mais complexas que as quadráticas, como funções polinomias de grau maior que 2 e funções não-polinomiais.

Para trabalhar com funções mais complexas em um ambiente de Ensino Médio é necessário métodos numéricos, sendo que neste trabalho ainda é explorado o método da bissecção, e um instrumento de computação gráfica ou algébrico, justificando a apresentação do *software* Winplot® na seção seguinte.

2.5 O *software* Winplot®

O *software* Winplot® foi desenvolvido pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy, dentro de um conjunto de programas denominado Peanut Labs. Sua primeira versão é de 1985 e utilizava a linguagem C até 2001, quando reestruturou sua programação usando $C++$. Possui uma versão em português e é distribuído de forma gratuita através do site http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html. O software se propõe a realizar a plotagem de gráficos de funções, possui um ambiente intuitivo. Seu arquivo é pequeno e portável, pondendo ser executado em computadores de *hardware* defasados.

O programa consegue realizar o gráfico de funções em 2 e 3 dimensões. Sua importância se dá por conseguir realizar o gráfico de funções que poucos programas de licença gratuita conseguem, como o de funções implícitas e curvas em coordenadas polares.

A seguir são apresentadas as funções básicas que foram utilizadas no decorrer da oficina.

Ao clicar no ícone do programa, após a descompressão do arquivo obtido no *site*, é apresentada a tela inicial do programa

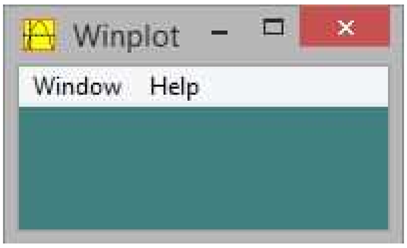

Figura 2.7: Tela inicial do programa

Existem dois menus na barra de ferramentas do programa, o primeiro é o Window e o segundo é o Help. O menu Help apresenta o arquivo de ajuda geral sobre o programa, dicas de uso e informações sobre a versão. Esse menu não é usado durante a oficina, mas é interessante para aprender mais sobre o programa. Já no menu Window é possível escolher entre as janelas de 2 e 3 dimensões, além de outras funções que não são utilizadas neste trabalho.

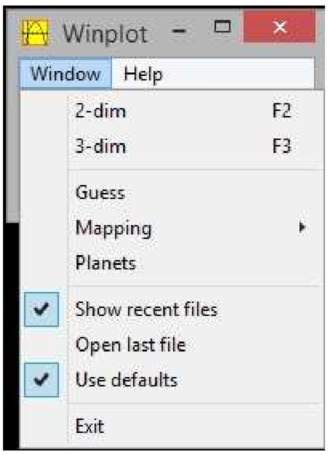

Figura 2.8: menu 1

Ao clicar em 2-dim(ou apertando a tecla F2 do teclado) se abre a janela para realizar gráficos de funções em duas dimensões. Nela é apresentado um plano cartesiano onde será representada a função desejada. Há uma barra de ferramentas que permite diversas opções, tais como salvar o trabalho realizado e criar pequenas animações, neste trabalho é utilizado o menu Equa que permite inserir funções no ambiente.

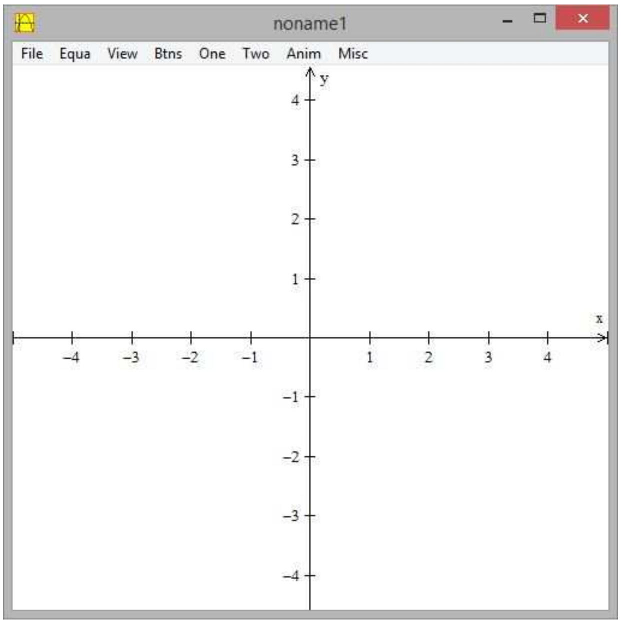

Figura 2.9: tela 2D

Ao clicar em Equa se abre uma lista de ferramentas que permite inserir vários tipos de funções, explícitas, paramétricas, implícitas, polares, entre outras. Aqui é usada a ferramenta Explicit, que permite inserir funções explícitas, forma em que a maioria das funções são apresentadas aos alunos do Ensino Médio.

“Parametric”, “Polar”e “Implicit”são ferramentas que permitem a descrição de funções paramétricas, funções polares e funções implícitas, respectivamente.

O comando “Help”presente no fim do menu equa trás auxílio para o uso dessas e demais ferramentas presentes nesse.

A figura 2.10 apresenta o menu equa.

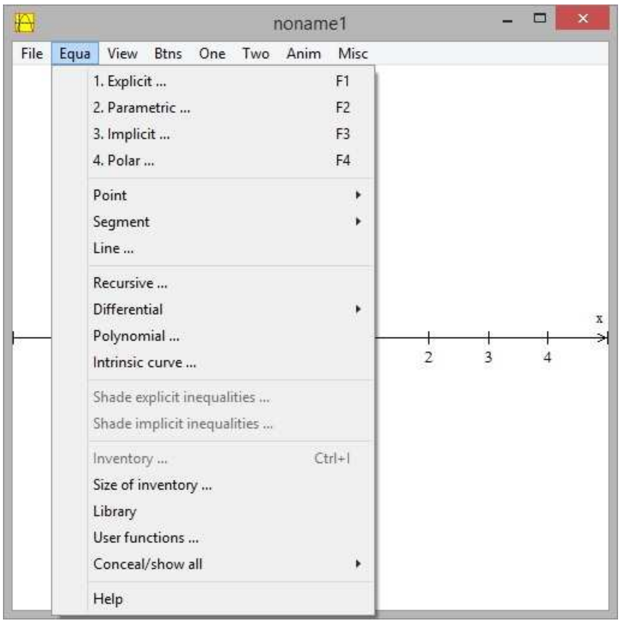

Figura 2.10: Menu Equa

Clicando em Explicit(ou teclando F1) se abre uma caixa de diálogo. No primeiro campo deve se inserir a função que almeja o gráfico, as demais opções permitem alterar a escala do plano cartesiano e a forma como o gráfico será traçado. O comando "lock interval"faz com que o intervalo definido para a função seja fixo. O comando "make periodic"permite criar funções periódicas em um intervalo definido pelo usuário. Os valores nas caixas "low x"e "high x"permitem definir o menor e o maior valor de x que será apresentada na tela 2D do programa. O espaço depois de "pen withd"permite escolher a espessura do traço do gráfico. "plotting density"é usado para refinar os pontos do gráfico traçado pelo programa, tornando mais preciso o resultado.

A figura 2.11 apresenta a janela padrão da ferramenta Explicit

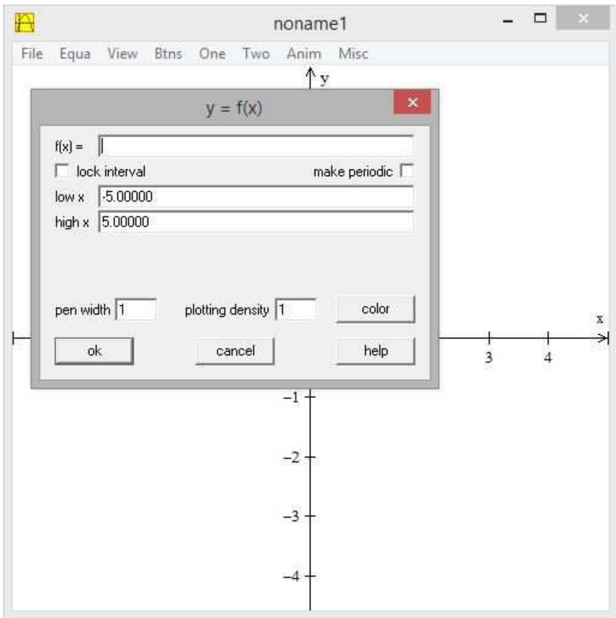

Figura 2.11: Caixa de diálogo para funções explícitas

Como exemplo, o gráfico da figura 2.12 representa a função $f(x) = 2x - 1$, inserido no programa ao digitar 2*x-1 no campo f(x)= na caixa de diálogo.

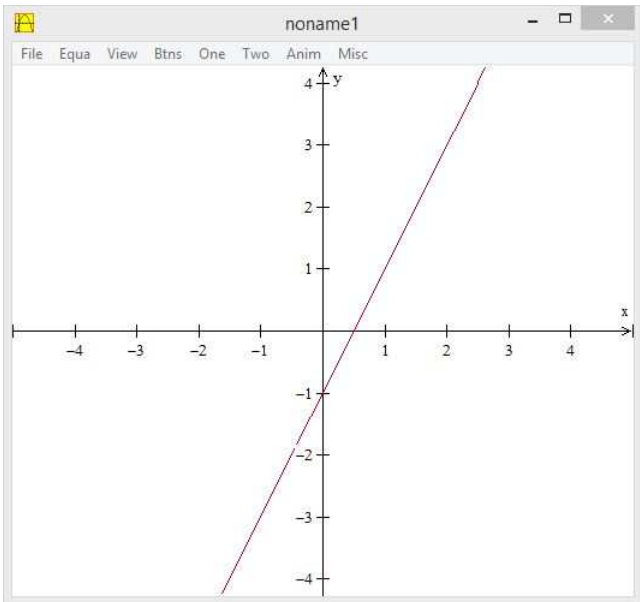

Figura 2.12: Gráfico de $f(x) = 2x - 1$

Como apresentado, a operação de multiplicação foi representada no programa usando asterisco(*). A tabela 2.1 mostra a sintaxe que deve ser utilizada para representar as principais funções, para outras funções deve-se clicar em Library dentro do menu Equa do programa.

Tabela 2.1: Sintaxe de algumas funções para uso no *software*.

soma	+		logaritmo natural	ln
subtração	-		logaritmo decimal	log
produto	*		raiz quadrada	sqrt
divisão	/		módulo	abs
elevar	^		fatorial	!
seno	sin		π	pi
cosseno	cos		tangente	tan

Munidos dessas ferramentes é possível iniciar um estudo mais profundo em otimização, aplicando métodos numéricos para obter valores ótimos.

Capítulo 3

Método da Bissecção para Otimização Unidimensional

Este capítulo apresenta demonstrações e algoritmos para a obtenção de minimizadores, isto é, pontos que fornecem o valor mínimo da função. Veja que para maximizadores o raciocínio é análogo, pois, como pode ser observado na figura 3.1, se for usada uma função $f(x)$ que apresente um valor máximo, a função $-f(x)$ apresenta um valor mínimo para o elemento maximizador de $f(x)$

Neste capítulo é definido um método de otimização que não depende do uso de derivadas e que gera uma sequência $\{x_k\}$ convergente (assintoticamente) para um ponto de mínimo da função objetivo. Primeiramente considere a seguinte definição.

Definição 3.1. *Diz-se que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é unimodal em $[a, b]$, quando ela possui um único minimizador global $x^* \in [a, b]$, e é estritamente decrescente em $[a, x^*]$ e estritamente crescente em $[x^*, b]$.*

De posse da definição anterior, pode-se enunciar um Lema, que é a base do método

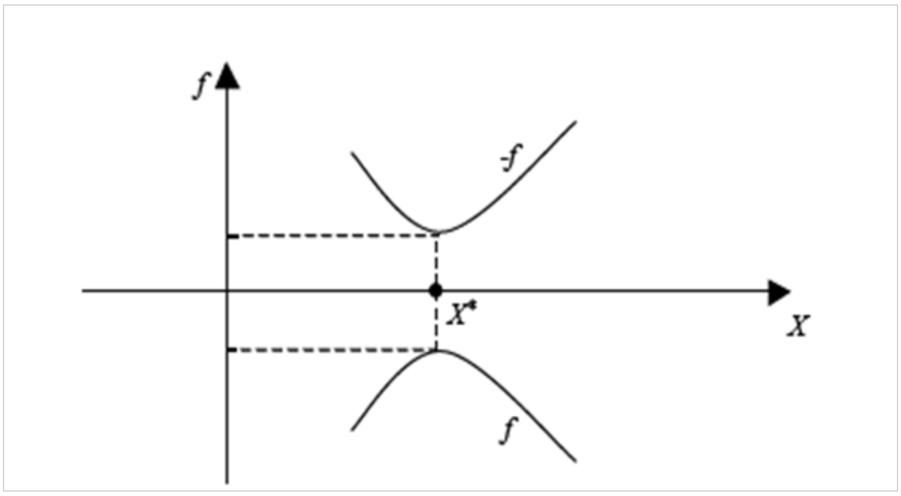

Figura 3.1: Relação Gráfica da equivalência entre maximizadores e minimizadores das funções $f(x)$ e $-f(x)$.

da Bissecção para problemas unidimensionais de otimização.

Lema 3.2. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função unimodal e x^* o minimizador global de f em $[a, b]$. Então, para quaisquer pontos $y, z \in [a, b]$, com $y < z$, vale o seguinte:*

i) se $f(y) \leqslant f(z)$, então $x^* \in [a, z]$,

ii) se $f(y) \geqslant f(z)$, então $x^* \in [y, b]$.

Demonstração. A prova é apenas do ítem i), pois o outro ítem é inteiramente análogo. Suponha que $f(y) \leqslant f(z)$, porém com $x^* > z$. Neste caso $y < z < x^*$ e, pelo fato de f ser decrescente em $[a, x^*]$, tem-se que $f(y) > f(z)$. O que é um absurdo, pois contraria a hipótese. Logo deve-se realmente ter $x^* < z$ e consequentemente $x^* \in [a, z]$. □

Como consequência do Lema anterior, comparando os valores da função unimodal f em dois pontos de $[a, b]$, pode-se obter a localização do mínimo global x^* em um intervalo de menor amplitude. Realizando este procedimento sucessivas vezes, gera-se uma sequência de intervalos, com amplitude menor do que a amplitude anterior. Quando se obtiver um intervalo $[a_k, b_k]$ tal que $b_k - a_k < \epsilon$, onde ϵ é a precisão requerida, qualquer ponto no intervalo $[a_k, b_k]$ poderá ser tomado como aproximação da solução x^*.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função unimodal. Defina $a_1 = a, b_1 = b$, $c_1 = (a + b)/2$ e calcule $f(c_1)$. Tome $k := 1$. Então, pode-se estabelecer a seguinte rotina para o método da bissecção:

i) Defina $y_k = (a_k + c_k)/2$ e calcule $f(y_k)$. Se $f(y_k) \leqslant f(c_k)$, definir $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k, c_{k+1} = y_k$ e passar ao terceiro ítem. Se $f(y_k) > f(c_k)$, definir $z_k = (c_k + b_k)/2$ e calcular $f(z_k)$;

ii) Se $f(c_k) \leqslant f(z_k)$, definir $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = z_k, c_{k+1} = c_k$. Se $f(c_k) > f(z_k)$, definir $a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k, c_{k+1} = z_k$,

iii) Tomar $k := k + 1$ e retornar ao primeiro ítem.

O Lema 3.2 garante que, após a iteração de índice k, tem-se que $x^* \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. Além disso, tem-se que $c_{k+1} = (a_{k+1} + b_{k+1})/2$ e

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{b_k - a_k}{2} = \cdots = \frac{1}{2^k}(b - a) \tag{3.1}$$

Suponha que o número máximo de avaliações da função objetivo seja N e que N seja um número ímpar (apenas por conveniência). Neste caso, pode-se realizar, no máximo, $k = (N - 1)/2$ iterações do método, o que resulta na seguinte estimativa para o erro de aproximação:

$$||x_{k+1} - x_k|| \leqslant b_{k+1} - a_{k+1} \leqslant \frac{1}{2^{(N-1)/2}}(b - a) \approx 0.707^{N-1}(b - a) \tag{3.2}$$

Resulta que, aumentando N, o erro diminui com taxa geométrica com razão $q = 0.707$. A figura 3.2 ilustra a aplicação do método da bissecção para minimização de uma função real.

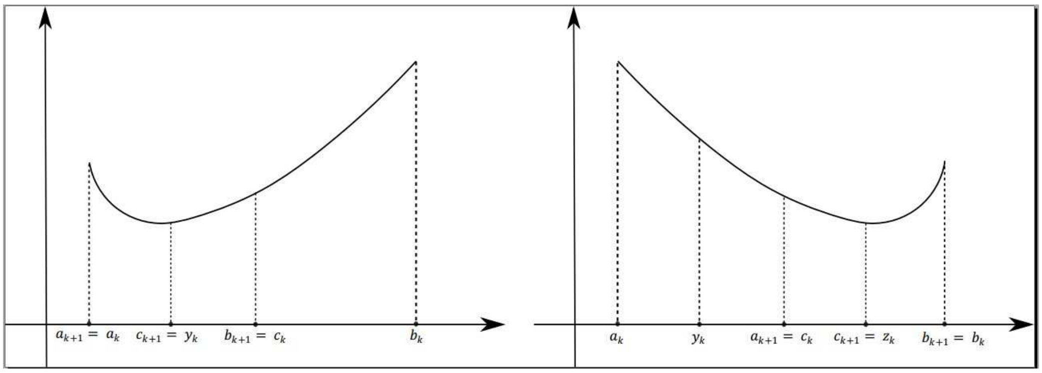

Figura 3.2: Aplicação de uma iteração do Método da Bissecção. Reproduzida de Izmailov e Solodov (2007).

Esse método permite obter aproximações numérias que convergem para o ótimo de uma função. Nota-se que são realizadas operações elementares durante as iterações, permitindo que o método seja acessível a diversos níveis de compreensão e fácil de ser aplicado.

Para explicitar o método, resolve-se o exemplo da seção 2.4 através do que foi exposto aqui. Inicialmente, toma-se o intervalo $[250, 330]$ obtido após a plotagem do gráfico, visto na figura 3.3.

Como a função apresenta um ponto de máximo, o algoritmo pode ser aplicado da seguinte forma:

i) Defina $y_k = (a_k + c_k)/2$ e calcule $f(y_k)$. Se $f(y_k) > f(c_k)$, definir $a_{k+1} = a_k, b_{k+1} = c_k, c_{k+1} = y_k$ e passar ao terceiro ítem. Se $f(y_k) \leqslant f(c_k)$, definir $z_k = (c_k + b_k)/2$ e calcular $f(z_k)$;

ii) Se $f(c_k) > f(z_k)$, definir $a_{k+1} = y_k, b_{k+1} = z_k, c_{k+1} = c_k$. Se $f(c_k) \leqslant f(z_k)$, definir

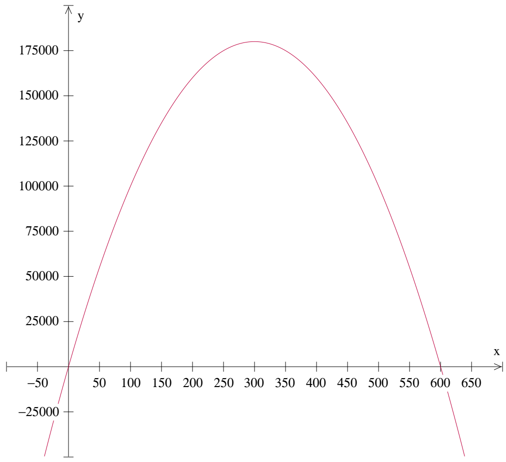

Figura 3.3: Gráfico da função $f(x) = x(1200 - 2x)$ feito pelo WinPlot®

$a_{k+1} = c_k, b_{k+1} = b_k, c_{k+1} = z_k,$

$iii)$ Tomar $k := k + 1$ e retornar ao primeiro ítem.

definindo como meta obter um intervalo de tamanho máximo 2,5, pode-se calcular o número de iterações necessárias para se obter o resultado proposto, assim

$$\frac{1}{2^k}(b-a) \leq 2,5 \Longrightarrow \frac{1}{2^k}(330-250) \leq 2,5 \Longrightarrow k \geq 5 \tag{3.3}$$

Assim, após 5 iterações obtem-se o intervalo desejado. Aplicando o algoritmo para k variando de 1 à 5, obtemos os valores da tabela 3.1

Tabela 3.1: Cálculos usados no algoritmo da bissecção do problema da seção 2.4

k	a_k	b_k	c_k	$f(c_k)$	y_k	$f(y_k)$	z_k	$f(z_k)$
1	250	330	290	179.800	270	178.200	310	179.800
2	290	330	310	179.800	300	180.000	-	-
3	290	310	300	180.000	295	179.950	305	179.950
4	295	305	300	180.000	297,5	179.987,5	302,5	179.987,5
5	297,5	302,5	300	180.000	298,75	179.996,9	301,25	179.996,9

da última iteração, obtém-se os valores $a = 298,75; b = 301,25; c = 300$. Assim, o maximizador pertence à $[298,75; 301,25]$ e apresenta um valor aproximado de 300. Observe que esse valor é exatamente o mesmo obtido por derivadas, mas esse método não permite garantir esse fato sem atribuir uma margem de erro. Apesar disso, foram realizados apenas cálculos elementares para se obter o valor desejado, mostrando claramente sua vantagem em relação ao método da análise de derivadas.

Capítulo 4

Lista de Problemas de Otimização

Para se resolver problemas de otimização se recorre a uma rotina próxima ao exposto em STEWART (2013,p.294).

i. Compreender o problema: A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja entendido claramente. Pergunta-se: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?.

ii. Faça um diagrama: Na maioria dos problemas, é útil fazer um diagrama e marcar as quantidades dadas e as pedidas no diagrama.

iii. Introduzindo uma notação: Atribua um símbolo para a quantidade que deve ser maximizada ou minimizada (vamos chamá-la de Q). Selecione também símbolos $(a, b, c, \cdots, x, y)$ para outras quantidades desconhecidas e coloque esses símbolos no diagrama.

iv. Expresse Q em termos de alguns dos outros símbolos da etapa anterior.

v. Se Q for expresso como uma função de mais de uma variável na etapa anterior, use a informação dada para encontrar relações (na forma de equações) entre essas variáveis. Use então essas equações para eliminar todas menos uma das variáveis na expressão de Q. Assim Q será expresso como uma função de uma variável. Escreva o domínio dessa função.

vi. Use métodos adequados para encontrar os valores máximos e mínimos da função obtida no item anterior.

A seguir é apresentada uma lista contendo 10 problemas propostos para serem discutidos durante a realização da oficina, os dois primeiros se encontram resolvidos utilizando o auxílio da derivada e posteriormente usando o método da bissecção.

4.1 Lista de problemas propostos

1. Uma caixa sem tampa deve ser feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 10cm $\times$ 10cm e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima?

- Solução por derivadas: Essa caixa possuirá altura x e lados $10 - 2x$. Dessa forma, seu volume pode ser descrito como

$$V(x) = x(10 - 2x)^2 \tag{4.1}$$

Pode-se notar que x esta restrito à condição $0 < x < 5$ para que o volume seja maior que

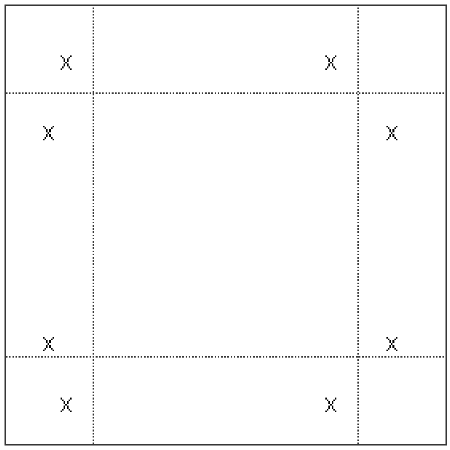

Figura 4.1: Representação do problema 1. Adaptada de THOMAS (2012).

zero. Verificando a derivada da função volume, tem-se

$$V'(x) = 100 - 80x + 12x^2 = 4(25 - 20x + 3x^2) = 4(3x - 5)(x - 5) \tag{4.2}$$

Assim, $V'(x) = 0$ para os valores $x = \frac{5}{3}$ e $x = 5$, mas apenas $x = \frac{5}{3}$ está dentro do domínio da função, sendo o ótimo do problema proposto e, como $V''(x) = -80 + 24x \Longrightarrow V''(\frac{5}{3}) = -40 < 0$, então a concavidade da função é voltada para baixo e o ótimo da nossa função é um ponto de máximo.

- Solução pelo método das bissecções: Inicialmente, toma-se o intervalo $[1, 2]$ escolhido após a plotagem do gráfico como exposto na figura 4.2.

Como a função apresenta um ponto de máximo, o algoritmo a ser aplicado será o descrito no exemplo do capítulo 3. Definindo como meta obter um intervalo de tamanho inferior à 0,04, pode-se calcular o número de iterações necessárias para se obter o resultado proposto, assim

$$\frac{1}{2^k}(b - a) < 0,04 \Longrightarrow \frac{1}{2^k} < 0,04 \Longrightarrow k > 4,6438 \tag{4.3}$$

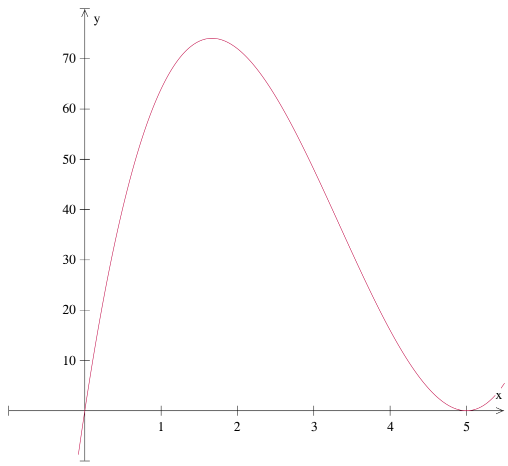

Figura 4.2: Gráfico da função $f(x) = x(10 - 2x)^2$ feito pelo WinPlot®

Pode-se tomar $k = 5$ para garantir que o intervalo esteja dentro das limitações exigidas. Aplicando o algoritmo para k variando de 1 à 5, obtem-se os valores da tabela 4.1 da

Tabela 4.1: Cálculos usados no algoritmo da bissecção do problema 1 da lista proposta

k	a	b	c	$f(c)$	y	$f(y)$	z	$f(z)$
1	1	2	1,5	73,5	1,25	70,3125	1,75	73,9375
2	1,5	2	1,75	73,9375	1,625	74,0391	-	-
3	1,5	1,75	1,625	74,0391	1,5625	73,8525	1,6875	74,0654
4	1,625	1,75	1,6875	74,0654	1,65625	74,0718	-	-
5	1,625	1,6875	1,65625	74,0718	1,640625	74,0604	1,671875	74,0735

última iteração, obtém-se os valores $a = 1,640625; b = 1,671875; c = 1,65625$. Assim, o maximizador pertence ao intervalo $[1,640625; 1,65625]$ e apresenta um valor aproximado de $1,65625$, bem próximo de $\dfrac{5}{3}$, valor obtido usando derivadas.

2. Pediram a você que projetasse uma lata de um litro com a forma de um cilindo reto. Que dimensões exigirão menos material?

- Solução por derivadas: A área de um cilindo de raio r e altura h é dada por

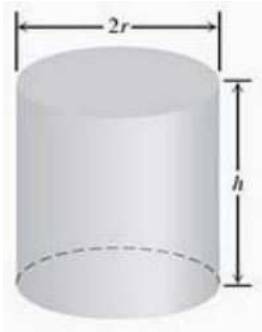

Figura 4.3: Representação do problema 2. Reproduzida de THOMAS (2012).

$$A(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r h \tag{4.4}$$

Da restrição do volume, é possível obter a relação $h = \dfrac{1}{\pi r^2}$, tranformando a equação na mostrada abaixo

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \tag{4.5}$$

Derivando essa função e igualando a zero, aplicando a condição $r > 0$, tem-se

$$A'(r) = 4\pi r + \frac{-2}{r^2} \Longrightarrow 4\pi r^3 = 2 \Longrightarrow r = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi}} \tag{4.6}$$

Encontrando o ótimo dessa função. Como $A''\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2\pi}}\right) > 0$, o ótimo é um ponto de mínimo da função.

- Solução pelo método das bissecções: Inicialmente, toma-se o intervalo $[0,1;1]$ escolhido após a plotagem do gráfico como visto na figura 4.4.

Como a função apresenta um ponto de mínimo, o algoritmo a ser aplicado será o descrito durante a explanação do capítulo 3. Definindo como meta obter um intervalo de

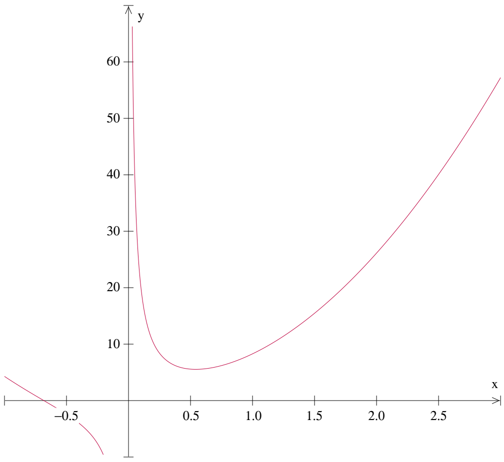

Figura 4.4: Gráfico da função $f(x) = 2\pi x^2 + \dfrac{2}{x}$ feito pelo WinPlot®

tamanho inferior à 0,015, pode-se calcular o número de iterações necessárias para se obter o resultado proposto, assim

$$\frac{1}{2^k}(b-a) < 0,015 \Longrightarrow \frac{1}{2^k} \cdot 0,9 < 0,015 \Longrightarrow k > 5,9069 \tag{4.7}$$

Pode-se tomar $k = 6$ para garantir que o intervalo esteja dentro das limitações exigidas. Aplicando o algoritmo para k variando de 1 à 6, obtem-se os valores da tabela 4.2 da última

Tabela 4.2: Cálculos usados no algoritmo da bissecção do problema 2 da lista proposta

k	a	b	c	$f(c)$	y	$f(y)$	z	$f(z)$
1	0,1	1	0,55	5,5370	0,325	6,8175	0,775	6,3545
2	0,325	0,775	0,55	5,5370	0,4775	5,6210	0,6225	5,7766
3	0,4775	0,6625	0,55	5,5370	0,51375	5,5513	0,60625	5,6083
4	0,51375	0,60625	0,55	5,5370	0,53187	5,5377	0,57812	5,5595
5	0,53187	0,57812	0,55	5,5370	0,54093	5,5358	-	-
6	0,53187	0,55	0,54093	5,5358	0,5364	5,5364	0,54546	5,5360

iteração, obtém-se os valores $a = 0,5364; b = 0,55; c = 0,54546$. Assim, o minimizador pertence ao intervalo $[0,5364; 0,55]$ e apresenta um valor aproximado de $0,54546$, bem próximo do valor obtido usando derivadas.

3. Uma folha de papelão mede 10cm × 16cm. Dois quadrados iguais são recortados dos vértices de um lado que tem 10cm. Dois retângulos iguais são recortados dos outros vértices de modo que as abas possam ser dobradas para formar uma caixa retangular com tampa. Determinar o volume máximo da caixa resultante.

-Modelagem: Percebe-se que a base e a tampa necessitam ter as mesmas medidas, dessa forma, o lado de maior comprimento deve comportar duas vezes a medida de uma das laterais da base (denotado por y) e dois lados dos quadrados recortados (denotado por x). Assim, $2x + 2y = 16 \Rightarrow y = 8 - x$. Como a caixa terá altura x e o outro lado mede 10 menos o lado de dois dos quadrados recortados $(10 - 2x)$. O volume é dado por

$$V(x) = x(10 - 2x)(8 - x) \tag{4.8}$$

4. Uma folha de papelão medindo 24cm × 36cm é dobrada ao meio para formar um retângulo de 24cm × 18cm. Depois quatro quadrados congruentes com lados medindo x são recortados dos vértices do retângulo dobrado. A folha é desdobrada e seis abas são dobradas para cima, formando uma caixa com laterais e uma tampa. Determine o volume máximo e o respectivo valor de x que o fornece.

-Modelagem: Usando raciocínios análogos aos exercícios 1 e 3, percebe-se que essa caixa terá duas vezes o valor do quadrado recortado (que é chamado de x), a base é formada por um lado de 18 cm menos o lado de dois quadrados e o outro lado tem medida 24 menos o lado dos dois quadrados retirados. Assim, o volume é dado por

$$V(x) = 2x(24 - 2x)(18 - 2x) \tag{4.9}$$

5. Um fabricante de armários usa mogno reflorestado para produzir cinco peças por dia. Cada entrega de um contêiner de madeira custa \$5.000, enquanto sua estocagem custa \$10 por dia, por unidade armazenada (uma unidade é a quantidade de matéria-prima necessária para produzir uma peça). Quanta matéria-prima deve ser encomendada de cada vez e com que frequência, de modo a minimizar o custo médio diário nos ciclos de produção entre as entregas?

- Modelagem: Percebe-se que o custo total é dado pelo custo de entrega mais o custo de estocagem. Caso se precise pedir unidades de matéria-prima a cada x dias, deve-se pedir $5x$ unidades em cada contêiner. A quantidade média de matéria é dada por $\dfrac{5x}{2}$. Portanto, o custo pode ser calculado pela função

$$C(x) = 5000 + \frac{5x}{2} \cdot 10 \cdot x \tag{4.10}$$

com custo diário calculado pelo valor do custo $(C(x))$ dividido pela quantidade de dias, isto é,

$$c(x) = \frac{5000}{x} + 25x \tag{4.11}$$

6. Um homem lança seu bote em um ponto A na margem de um rio reto, com uma largura de $3km$, e deseja atingir tão rápido quanto possível o ponto B na outra margem, 8km rio abaixo. Ele pode dirigir seu barco diretamente para o ponto C e então seguir

andando para B, ou rumar diretamente para B, ou remar para algum ponto D entre C e B e então andar até B. Se ele pode remar a 6km/h e andar a 8km/h, onde ele deveria aportar para atingir B o mais rápido possível?

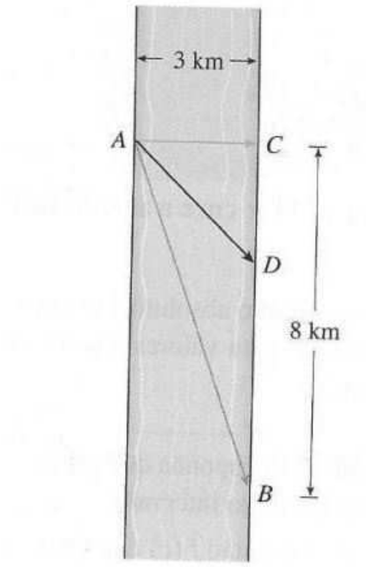

Figura 4.5: Representação do problema 6. Reproduzida de Stewart (2013).

-Modelagem: Seja x a distância de C a D, então a distância a ser percorrida a pé seria de $8-x$ e a distância de A até D mede $\sqrt{x^2+9}$, valor obtido pelo Teorema de Pitágoras. Pela fórmula da velocidade média, tem-se que o tempo gasto remando é de $\dfrac{\sqrt{x^2+9}}{6}$ e o tempo gasto andando é de $\dfrac{8-x}{8}$. Dessa forma, o tempo gasto pode ser cálculado pela fórmula

$$T(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8} \tag{4.12}$$

7. Pediram a você que projetasse uma lata de 50 litros com a forma de um cilindo reto. Que dimensões exigirão menos material?

-Modelagem: Análogo ao exercício 2, raciocine da mesma forma até obter a função

$$A(r) = 2\pi r^2 + \frac{100}{r} \tag{4.13}$$

8. Um fazendeiro quer cercar uma área de 15000m^2 em um campo retangular e então dividi-lo ao meio com uma cerca paralela a um dos lados do retângulo. Como fazer isso de forma que minimize o custo da cerca?

-Modelagem: É preciso minimizar o comprimento da cerca, que é definido como $P(x)$. A área é dada por $A = xy$, onde x e y são as dimensões do campo. Assim, $P(x) = 3x+2y$, supondo que a cerca que divide o campo tenha medida x. Partindo da relação $y = \dfrac{15000}{x}$, a função pode ser definida como

$$P(x) = 3x + \frac{30000}{x} \tag{4.14}$$

9. Em uma colmeia, cada alvéolo é um prisma hexagonal regular, aberto em uma extremidade com um ângulo triédrico na outra extremidade. Acredita-se que as abelhas formam esses alvéolos de modo a minimizar a área da superfície, usando assim uma quantidade mínima de cera na construção. O exame desses alvéolos mostrou que a medida do ângulo do ápice θ é surpreendentemente consistente. Baseado na geometria do alvéolo, pode ser mostrado que a área da superfície S é dada por

$$S = 6sh - \frac{3}{2}s^2 \cot\theta + (3s^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}) \csc\theta,$$

onde s, o comprimento dos lados do hexágono, e h, a altura, são constantes. Que ângulo as abelhas deveriam preferir de forma a minimizar a área da superfície de cada alvéolo?

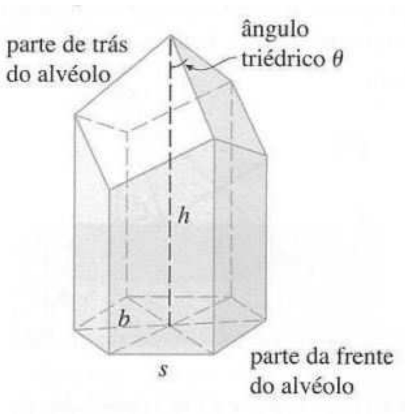

Figura 4.6: Representação do problema 9. Reproduzida de Stewart (2013).

-Modelagem: O problema está modelado, basta escolher o método de otimização.

10. Uma caixa sem tampa será feita recortando-se pequenos quadrados congruentes dos cantos de uma folha de estanho medindo 1m × 1m e dobrando-se os lados para cima. Que tamanho os quadrados das bordas devem ter para que a caixa chegue à sua capacidade máxima?

-Modelagem: Análogo ao exercício 1, a caixa terá altura x e lados medindo $1 - 2x$. Assim, seu volume, dado aqui em m^3, será dado por

$$V(x) = x(1 - 2x)^2 \tag{4.15}$$

Capítulo 5

Proposta de Oficina - Métodos de Otimização com o uso do Software WinPlot®

Neste capítulo é apresentado o cronograma metodológico da oficina pois os professores de Matemática precisam consumir, incorporar e matematizar as tecnologias.

5.1 Novas tecnologias e educação

A tecnologia avançou muito na última década e vem proporcionando aos alunos e professores de Matemática uma maneira diferente de explorar conceitos matemáticos. Contudo, é necessária uma reflexão da prática pedagógica dos docentes na utilização de novas tecnologias, de forma a avaliar se essas novidades são inseridas no processo, a fim de melhorar o ensino e a aprendizagem ou são somente impostas aos discentes sem agregar nenhum conhecimento. Dall'Anese (2006) afirma que estudos relacionados ao ensino da Matemática com o uso de tecnologias mostram que o uso do computador auxilia na visualização de conteúdos abstratos trabalhados em sala de aula. Dessa forma, a tecnologia é apontada como um recurso pedagógico altamente eficiente na reflexão e aprofundamento de novos conceitos matemáticos.

Bononi, Boscaino e Nieto (2004) apresentam a utilização de ferramentas tecnológicas como recursos pedagógicos que exploram a criatividade e também estimulam o senso crítico. Assim, o conhecimento adquirido pelos estudantes é valorizado, avaliado, tornando-se mais significativo.

Diante deste contexto, o uso de um software gráfico como o Winplot propicia ao aluno a elaboração de conjecturas a partir do manuseio, aplicação, observação e reflexão. A escolha do software Winplot se deu principalmente pela necessidade de um programa livre, uma ferramenta simples de fácil manuseio, pois o foco principal tem que ser o conteúdo estudado, no caso o método numérico de cálculo do ótimo e o aluno não pode ter dificuldade em utilizar a tecnologia.

No mercado existem vários softwares gráficos, tais como: Maple, Matlab, Cabri-Geometre, Logo e Geogebra. Alguns deles, além de serem softwares proprietários, necessitam que o usuário tenha certa habilidade no manuseio. Devido a isso, foi escolhido o software Winplot, pois as escolas não terão dificuldade em adquiri-lo e o aluno pode, se possuir meios, tê-lo em sua própria residência.

Esse software foi escolhido também por possuir opções de representar gráficos bidimensionais de forma clara e atrativa. Algumas vantagens agregadas também podem ser destacadas, por exemplo, a fácil utilização dos menus e o tamanho do software que permite instalá-lo em ambiente Windows ou Linux (usado na maioria das salas de Informática públicas). O software Winplot está disponível em sete idiomas. A versão em português foi resultado da iniciativa de Adelmo Ribeiro de Jesus.

5.2 Importância da oficina

Nesse contexto, esta experiência visa a auxiliar os professores a aumentar a utilização dos recursos tecnológicos existentes na escola. A oficina tem como objetivo apresentar aos discentes o software Winplot® que deve ser instalado no Laboratório de Informática . A oficina busca apresentar resultados para apoiar o desenvolvimento de uma educação crítica e inovadora.

É certo que a educação necessita de novos olhares e perspectivas para o que se chama ”geração do futuro”. Atualmente, tem-se um corpo discente que observa o mundo com o uso constante das tecnologias que a cada instante oferecem interessantes recursos para desbravar o futuro.

Muitos defendem o uso do computador devido à motivação que ele traria à sala de aula. Devido às cores, ao dinamismo e à importância dada aos computadores do ponto de vista social, o seu uso na educação poderia ser a solução para a falta de motivação dos alunos (BORBA;PENTEADO, 2005, p. 15).

Nesse contexto, a escola onde essa geração é formada precisa estar sempre atenta, aberta e direcionada às mudanças para então envolver seus alunos nas conquistas do conhecimento.

Uma das maneiras de conscientizar os professores sobre as práticas pedagógicas com o uso das novas mídias é levando a observação e utilização dessas práticas através de um modo dinâmico para os docentes.

Tendo em vista a complexidade de introduzir novas práticas, é visível a resistência de muitos professores em se apropriar desses recursos pedagógicos em suas ações didático-pedagógicas.

Muitos professores desistem quando percebem a dimensão da zona de risco. Evitam qualquer tentativa nesse sentido. Muitas vezes assumem e justificam essa postura baseados ou no fato de que acham que computadores não são para a escola ou que não estão preparados e não encontram condições de trabalho na escola (BORBA;PENTEADO, 2005, p. 15).

Assim, propõe-se uma oficina interativa, apresentando uma estratégia que enfatiza a capacidade de aprender a aprender de forma ativa e colaborativa.

Pode-se constatar que o laboratório é um espaço frequentemente utilizado pelo corpo discente. Porém observa-se que poucos professores utilizam esses recursos em suas práticas pedagógicas com suas turmas. A prática pedagógica influencia o aprendizado do aluno por ser o método usado para a transmissão do conhecimento.

Este trabalho propõe como intervenção-ação oficinas a serem ofertadas no Laboratório de Informática, dentro do contexto escolar, tendo o apoio técnico-pedagógico do orientador tecnológico com parceria de um professor da disciplina para qual a oficina será direcionada. Dessa forma, poderão ser planejadas atividades a serem apresentadas e desenvolvidas no laboratório, promovendo a integração com as atividades realizadas em sala de aula.

De acordo com Almeida (2005), compreender as diferentes formas de representação e comunicação propiciadas pelas tecnologias disponíveis na escola, bem como criar dinâmicas que permitam estabelecer o diálogo entre as formas de linguagem das mídias, são desafios para a educação atual. Daí a importância de o professor conhecer a especificidade das mídias, a fim de usá-las pedagogicamente, buscando teorias educacionais que lhe permitam identificar em que atividades essas mídias têm maior potencial e são mais adequadas.

Pensando na vivência do professor, a oficina tem como objetivo apresentar a utilização e o manuseio do software Winplot para os professores de Matemática, com sugestões de atividades de otimização pelo método da Bissecção para apresentação dos conteúdos para os alunos de terceiro ano do Ensino médio e alunos do Ensino Superior.

5.3 Por que se escolheu fazer uma oficina

Como indica a própria etimologia da palavra, oficina em latim também significa, figurativamente, "escola"(FARIA, 1962 apud MOITA; ANDRADE, s/d, p. 14). A oficina é um dispositivo pedagógico bastante acessível e estimula o engajamento criativo de seus integrantes.

A oficina é um meio pelo qual ocorre um trabalho colaborativo, compartilhado e coletivamente significativo, em que cria-se momentos de sistematização dos conceitos, estratégias e procedimentos que podem fortalecer o professor a reconstruir a sua prática, que é fundamental para que o uso das novas mídias possa ser integrado às suas ações didático-pedagógicas.

Neste texto, desenvolveu-se uma reflexão sobre a oficina de Matemática, considerando em particular a perspectiva dos docentes. Interessa demonstrar que esse dispositivo favorece a articulação do docente com as novas mídias na escola.

A oficina ofertada dentro do próprio espaço escolar, ou seja, no espaço de atuação do professor, promove a motivação em participar de uma atividade que o ajudará na sua prática pedagógica, sem o intimidar no contexto espaço-temporal, levando uma proposta que esteja dentro da sua realidade e um ensinar mais compartilhado.

A oficina de Matemática tem como objetivo principal levar o professor a conhecer a especificidade e a identificar os recursos dos softwares de Matemática existentes no laboratório da escola, motivando-o a criar um planejamento que integre essas mídias em suas práticas com a turma.

As oficinas também trazem, como característica, a abertura de espaços de aprendizado que buscam o diálogo entre os participantes.

Diante disso, almeja-se promover um trabalho que inclui a participação de todos os envolvidos, não distribuindo as pessoas em funções fixas como coloca Corrêa (2000, p.122). O autor sinaliza que a oficina pode permitir a quebra das "hierarquias do conhecimento o (...) que se dá muitas vezes, pela detenção de um discurso especializado que justifica a maior importância de quem profere em relação aos outros".

Sendo assim, considera-se que a oficina pode estabelecer uma independência das ações educacionais em relação aos modelos que priorizam mais uma área do saber do que outra, ou seja, oportuniza estratégias de resistência à qualificação ou desqualificação de saberes pelas agências oficiais de ensino.

Ainda, cabe ressaltar que as ações envolvendo oficinas contemplam os três momentos de Delizoicov e Angotti (2002) que consistem em: "Primeiro momento ou problematização inicial": são apresentadas aos alunos situações reais, para que eles sejam desafiados a expor suas posições ou concepções prévias sobre o tema.

O ponto culminante dessa problematização é fazer com que o aluno sinta a necessidade da aquisição de outros conhecimentos que ainda não detém, ou seja, procura-se configurar a situação em discussão como um problema que precisa ser enfrentado(DELIZOICOV;ANGOTTI, 2002, p. 200).

O professor precisa ter conhecimento de todas as potencialidades de uma oficina antes de aplicá-la aos seus alunos, justificando a dedicação durante a elaboração de oficinas no papel do professor na mesma, já que os resultados esperados podem ser adaptados dentro da necessidade de cada ambiente escolar.

O objetivo desta primeira etapa é problematizar estes conhecimentos prévios acerca do tema proposto, bem como compreender o que os educandos percebem diante das questões que estão sendo colocadas em pauta. O segundo momento ou organização do conhecimento: caracteriza-se pelo desenvolvimento de atividades que auxiliam o aluno a compreender e partilhar os conhecimentos sistematizados pela Ciência permitindo a ele construir uma resposta mais aprofundada para a questão proposta inicialmente.

As mais variadas atividades são então empregadas, de modo que o professor possa desenvolver a conceituação identificada como fundamental para uma compreensão científica das situações problematizadas(DELIZOICOV;ANGOTTI, 2002, p. 201).

Nesse momento podem ser desenvolvidas atividades que utilizem recursos como vídeos, sites de internet, livros, reportagens entre outros.

Finalmente, o Terceiro momento ou aplicação do conhecimento: destina-se, sobretudo, a abordar sistematicamente o conhecimento que vem sendo incorporado pelo aluno, para analisar e interpretar tanto situações iniciais que determinaram seu estudo como outras situações que, embora não estejam diretamente ligadas ao motivo inicial, podem ser compreendidas pelo mesmo conhecimento(DELIZOICOV;ANGOTTI, 2002, p.202).

É nesse momento que ocorre a retomada das questões iniciais e da proposição de novos questionamentos ou novas situações-problema que possibilitam ao aluno a utilização dos novos conhecimentos desenvolvidos. Dentro deste contexto, os instrumentos para a coleta de dados partiram da análise das funções e sua modelagem de modo a conduzir o aluno ao estudo um pouco mais rigoroso de máximos e mínimos, à procura do ótimo.

5.4 A oficina

1ª aula

• Tema: sondagem dos alunos sobre conhecimento prévio em recursos computacionais, especificamente no software Winplot®.

• Tempo estimado: 100 minutos

• Conteúdo: Software Winplot®

• Objetivos:

- Apresentar o software Winplot® como recurso computacional para plotagem de gráficos de funções já modeladas

- Explicar como inserir as funções para serem plotadas

• Estratégias de ensino:

- Explicar de forma geral a oficina e depois encaminhar os alunos ao Laboratório de Informática para apresentação do software Winplot®, com o auxílio do datashow

- Abrir a tela inicial do software e explicar os comandos básicos, tal como mostrado na seção 2.5.

- Orientar que os alunos escrevam a função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$

- Chegar à plotagem da figura 5.2.

- Orientar os alunos para que escrevam a função $f(x) = |\text{sen}(x)|$ (figura 5.3)

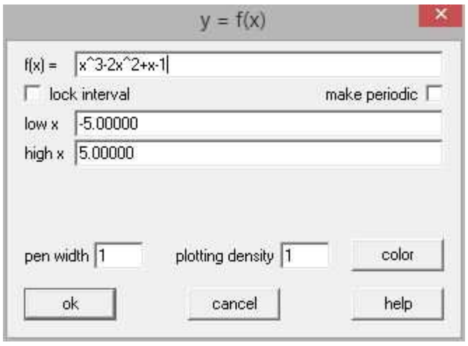

Figura 5.1: Inserção da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$ no programa Winplot

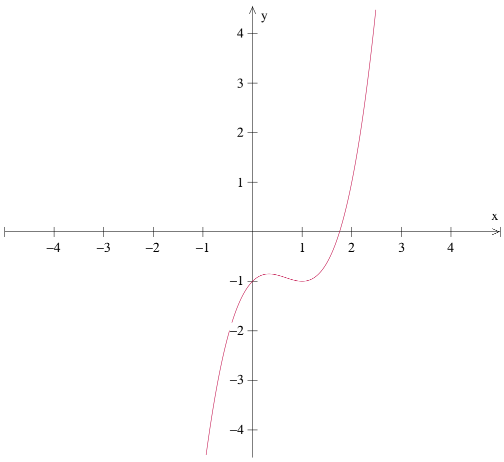

Figura 5.2: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 1$.

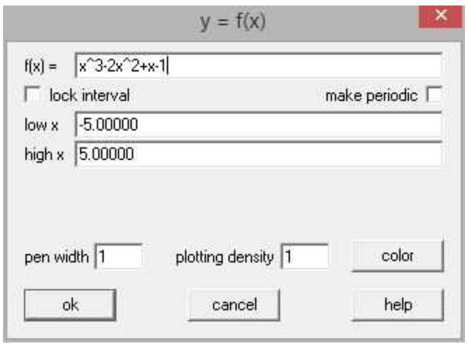

Figura 5.3: Inserção da função $f(x) = |\text{sen}(x)|$ no programa Winplot

- Chegar à plotagem da figura 5.4.

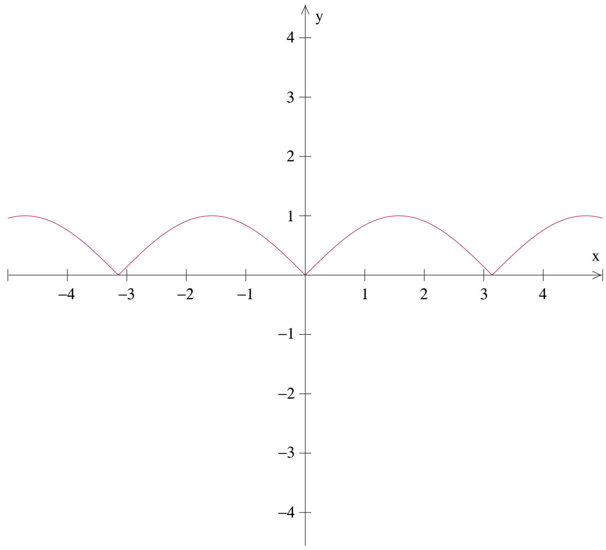

Figura 5.4: Gráfico da função $f(x) = |\text{sen}(x)|$.

- Recursos didáticos

- Sala de Informática com no máximo 3 alunos por computador;

- Software Winplot em todos os computadores;

- Datashow;

- Quadro e pincel;

- Apostila da oficina de otimização usando o *software* Winplot®.

- Avaliação

- Por meio da observação dos alunos durante a utilização do *software* Winplot®.

- Arguição dos alunos sobre o desenvolvimento da oficina.

2ª aula

- Tema: Otimização abordada de forma elementar como foi visto nos anos anteriores.

- Tempo estimado: 50 minutos.

- Conteúdo: Otimização usando o vértice da parábola.

- Objetivos:

- Modelar funções matemáticas a partir de problemas propostos, induzindo a problemas de maximização e minimização.

- Demonstrar as fórmulas do vértice da parábola e mostrar a construção do gráfico em quadro-giz.

- Estratégias de ensino:

- Estimular a turma com situações-problema envolvendo máximos e mínimos com o objetivo de encontrar o ótimo.

- Recursos didáticos:

- Quadro e giz;

- Apostila da oficina de otimização usando o *software* Winplot®.

- Avaliação:

- Por meio da observação dos alunos durante a explanação do conteúdo.

- Resolução de um exercício individual.

3ª aula

- Tema: O conceito de derivadas.

- Tempo estimado: 50 minutos.

- Conteúdo: Derivadas em funções polinomiais.

- Objetivos:

- Compreender o conceito de derivada.

- Aplicar o conceito de derivada em problemas de otimização com o objetivo de achar o número ótimo.

- Estratégias de ensino:

- Conceituar derivada e suas aplicações em situações cotidianas.

- Estimular a turma com situações-problema envolvendo máximos e mínimos com o objetivo de encontrar o ótimo utilizando as aplicações de derivadas.

- Recursos didáticos:

- Quadro e giz.

- Apostila da oficina de otimização usando o *software* Winplot®.

• Avaliação:

- Por meio da observação dos alunos durante a explanação do conteúdo.

- Resolução de um exercício individual.

4ª aula

• Tema: Apresentação do método da Bissecção com o auxílio do *software* Winplot® para plotagem do gráfico da função modelada.

• Tempo estimado: 100 minutos.

• Conteúdo: Método da Bissecção.

• Objetivos:

- Comparar o método da bissecção com o uso de derivadas.

- Estimular o interesse e a curiosidade para desenvolver diferentes estratégias de cálculo.

- Desenvolver a capacidade de investigação na busca de resultados.

- Motivar a aprendizagem de novos conteúdos.

• Estratégias de ensino:

- Modelar uma função cuja derivada não apresenta fácil solução da equação $f'(x) = 0$.

- Plotar no *software* Winplot® a função para análise do gráfico.

- Delimitar um intervalo e aplicar o método da Bissecção para o cálculo do número ótimo.

- Plotar o gráfico de uma função dos exemplos.

• Recursos didáticos:

- datashow.

- Quadro e giz.

- Apostila da oficina de otimização usando o *software* Winplot®.

• Avaliação:

- Através da observação dos alunos durante a explanação do conteúdo.

- Através de perguntas feitas oralmente aos alunos.

- Lista de exercícios em grupo.

5ª aula

• Tema: Apresentação do método da Bissecção e do uso de derivadas com o auxílio do *software* Winplot® para plotagem do gráfico da função modelada de forma individual na sala de Informática.

• Tempo estimado: 100 minutos.

• Conteúdo:

- Método da Bissecção.

- Derivadas.

- *Software* Winplot®.

• Objetivos:

- Identificar e aplicar novas tecnologias de ensino, mostrando que o programa Winplot® pode ser utilizado como ferramenta de pesquisa em Matemática.

- Usar a informática como instrumento para melhoria da qualidade do Ensino Médio, pontuando aos alunos a contrução do conhecimento e o desenvolvimento do pensamento analítico.

- Estimular o raciocínio matemático, pela habilidade de resolver problemas contextualizados.

- Buscar soluções para problemas reais, recorrendo a conceitos matemáticos e auxílio em softwares gratuitos.

• Estratégias de ensino:

- Modelar funções para serem resolvidas pelos dois métodos: o uso de derivadas e o método da Bissecção, é possível usar a lista proposta no capítulo 4.

- Plotar no *software* Winplot® a função para análise do gráfico e para delimitação do intervalo para usar o método da Bissecção.

- Comparar a resolução pelos dois métodos.

- Recursos didáticos:

- Sala de Informática.

- Datashow.

- Quadro e giz.

- Apostila da oficina de otimização usando o *software* Winplot®.

- Avaliação:

- Por meio da observação dos alunos durante a explanação do conteúdo.

- Auto-avaliação do aluno no final da oficina.

- Lista de exercícios em duplas.

- Pesquisa dos alunos sobra a relevância da oficina.

Capítulo 6

Considerações Finais

O presente trabalho foi elaborado para professores que sentem falta do “algo mais”em suas aulas, que se sentem frustrados com fórmulas prontas e querem estimular seus alunos a pensarem mais, a terem interesse por outros métodos, outros saberes.

Os problemas de otimização são vistos desde os primórdios da civilização, principalmente na Matemática Aplicada, nas áreas de Engenharia, Administração, Logística, Transporte, Economia e outras possíveis áreas para se aplicar as técnicas matemáticas de otimização.

A otimização objetiva maximizar ou minimizar uma função previamente definida como índice de desempenho ou índice de performance, visando a encontrar uma “solução ótima”do problema, isto é, que resulte no melhor desempenho possível do sistema, segundo este critério de desempenho previamente definido. Inúmeros *softwares* são criados para ajudar a achar essa solução e, com a maior competitividade do mercado, esse trabalho é cada dia mais valioso.

Na Educação Matemática, é notável a dificuldade dos professores do Ensino Médio em “fugirem”de fórmulas prontas, pois o currículo referência é muito amplo, o tempo é ocupado com inúmeros projetos do governo e uma carga de conteúdos obrigatórios. Com o conceito de derivadas, os alunos poderão usá-lo em Matemática e Física, facilitando algumas situações usadas diariamente.

Neste trabalho, é apresentado o software Winplot que serve para visualização dos gráficos das funções e ajuda na delimitação do intervalo para ser usado o método da Bissecção, método numérico que pode ser usado no cálculo do ótimo. Nesta oficina, destaca-se que o software Winplot é uma ferramenta favorável à construção do conhecimento, que além de fornecer uma visualização gráfica, possibilita a interpretação geométrica das possíveis soluções do Método da Bissecção.

A capacidade do docente em decidir a abordagem e o momento adequados na utilização da tecnologia como um recurso auxiliar no processo de ensino e de aprendizagem está ligada ao seu conhecimento pedagógico do conteúdo da disciplina, que deve ser refletido, analisado e aperfeiçoado continuamente. Não basta que o professor queira utilizar as tecnologias no ensino da Matemática, é necessário que ele esteja capacitado e que os seus objetivos pedagógicos estejam relacionados com o software a ser usado para que sua aplicação em sala de aula se torne potencialmente significativa para a aprendizagem dos alunos.

Após a plotagem do gráfico da função já modelada, o aluno vai visualizar seus cálculos feitos com o auxílio das derivadas e, dessa forma, deixar um pouco a forma abstrata da Matemática.

A autora pretende aplicar essa oficina no curso de Engenharia Civil, primeiro período, do Instituto Federal Goiano, Câmpus Rio Verde e no terceiro ano noturno do Colégio Estadual Martins Borges vista a comprovação de resultados propostos. A turma de Engenharia já estará fazendo Cálculo Integral e Diferencial I e já estão habituados com o uso de derivadas. A turma do terceiro ano noturno são alunos que estão se preparando para o ENEM e possíveis vestibulares já são acostumados com o uso de softwares.

O ideal é que, a partir do primeiro ano do Ensino Médio, os alunos já começassem a trabalhar com problemas de otimização, devido à grande aplicação prática em situações cotidianas e assim atrairia a atenção e o interesse destes para o assunto. Com alguns softwares de visualização de gráficos, facilitaria para os alunos que passam grande parte do seu tempo montando tabelas e medindo para construírem gráfico. Devido a essa dificuldade, somente constroem gráficos do primeiro e segundo graus.

Com essa oficina, objetiva-se mostrar a necessidade de se sair um pouco do habitual, de estimular o aluno a mostrar seu potencial em uma área que talvez os professores de Matemática não sejam tão versáteis, a Informática. É necessário estudarmos, nos qualificarmos e que ofereçamos aos nossos discentes recursos pedagógicos que sejam atraentes a eles. Ficamos muito ocupados com nossos conteúdos, com o tempo, com avaliações e não saímos da nossa "zona de conforto": o quadro e o giz.

Com a oficina, espera-se que o aluno entenda que a Matemática é necessária para resolver problemas e não apenas exercícios abstratos para achar o "x". Com o método da Bissecção, ele é quem determinará o intervalo, onde está o ótimo e tentará achá-lo com o conceito envolvido, após tê-lo visualizado no software Winplot. Assim, será uma aula dinâmica, atrativa e cheia de conceitos matemáticos que serão apropriados de forma lúdica e permanente.

Em trabalhos futuros, seria muito importante para os professores terem mais material de oficinas interessantes com aplicações de Matemática e softwares que podem ser usados como recursos pedagógicos ao ensino desta.

Referências Bibliográficas

[1] ALMEIDA, M. E. B. de. *Gestão de tecnologias na escola: possibilidades de uma prática democrática.* In: Salto para o Futuro. Série Integração de tecnologias, linguagens e representações. Rio de Janeiro: TV Escola, SEED-MEC, 2005.

[2] ANDRADE, F. C. B.;MOITA, F. M. C. G. S. . *O saber de mão em mão: a oficina pedagógica como dispositivo para a formação docente e a construção do conhecimento na escola pública.* 29ª Reunião Anual da ANPED, Caxambu, 2006.

[3] ÁVILA, G. S. de S., *Análise Matemática para Licenciatura.* 2º ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2005.

[4] BICUDO, F., *Esbanjo ou economizo? Indivíduo ou Sociedade?.* In: Revista Cálculo - Matemática para Todos, Nº 27, São Paulo: Segmento, 2013, p.36-37

[5] BONOMI (Barufi), M.C.; BOSCAINO, E. G.; NIETO, S. S. *A tecnologia no ensino da Matemática no Curso de Engenharia: não apenas como ferramenta de execução, mas de investigação.* In: XXXII COBENGE, Brasília. Anais do XXXII COBENGE 2004. Brasília: Universidade de Brasília, 2004.

[6] BORBA, M. de C.; PENTEADO, M. G.*Informática e Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica, 2005 (Coleção Tendências em Educação Matemática).

[7] CORRÊA, G.; et al. *Pedagogia Libertária: Experiências Hoje.* Editora Imaginário,2000.

[8] DALL'ANESE, C. *Visual e Analítico: Argumentos e Metáforas para a Taxa de Variação.* In: III HTEM - Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática, São Paulo. Anais do III HTEM. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

[9] DELIZOICOV, D.; ANGOTTI, J. A;. *Ensino de Ciências: fundamentos e métodos.* São Paulo: Cortez, 2002.

[10] FIGUEIREDO, D. G. de, *Problemas de Máximo e Mínimo na Geometria Euclidiana.* Revista Matemática Universitária-SBM, N° 9-10, Rio de Janeiro, 1989.

[11] GUIDORIZZI, H. L., *Um Curso de Cálculo - vol. 1.* 5º ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. 635p.

[12] IZMAILOV, A., SOLODOV, M., *Otimização: Métodos Computacionais.* Volume 2. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada - IMPA. Rio de Janeiro, 2007.

[13] LIMA, E. L., *Curso de análise.* Volume 1, 12 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 431p.

[14] MOREIRA, C.G.T. de A., SALDANHA, N.C., *A Desigualdade Isoperimétrica.* Revista Matemática Universitária/SBM, N° 15, Rio de Janeiro, 1993.

[15] RIBENBOIM, P., *Funções, Limites e Continuidade.* 1º ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. 215p.

[16] STEWART, J., *Cálculo - volume 1.* tradução da 7º ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013. 634p.

[17] THOMAS, G. B., *Cálculo - volume 1*. 12º ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012. 656p.