UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

MARINA MARRA

LOGARITMOS: CONCEITOS, APLICAÇÕES E ABORDAGEM DO TEMA NOS VESTIBULARES DA UEPG

PONTA GROSSA
2014

MARINA MARRA

LOGARITMOS: CONCEITOS, APLICAÇÕES E ABORDAGEM DO TEMA NOS VESTIBULARES DA UEPG

Dissertação apresentada para obtenção do título de Mestre em Matemática, no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, Setor de Ciências Exatas e Naturais, da Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientadora: Prof.ª Dr.ª Luciane Grossi

PONTA GROSSA

2014

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Marra, Marina

M358 Logaritmos : conceitos, aplicações e abordagem do tema nos vestibulares da UEPG/ Marina Marra. Ponta Grossa, 2014.
55 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientadora: Profª Drª Luciane Grossi.

1.Logaritmos. 2.Aplicação. 3.Abordagem nos vestibulares da UEPG. I.Grossi, Luciane. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 512.922

TERMO DE APROVAÇÃO

Marina Marra

"LOGARITMOS: CONCEITOS, APLICAÇÕES E ABORDAGEM
DO TEMA NOS VESTIBULARES DA UEPG"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

LGrossi

Orientador: Profa. Dra. Luciane Grossi
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Patricia Hess

Profa. Dra. Patricia Hess
Departamento de Matemática, UTFPR/PR

Fabiane de Oliveira

Profa. Dra. Fabiane de Oliveira
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Ponta Grossa, 16 de Junho de 2014.

DEDICATÓRIA

Dedico essa dissertação a todos aqueles que acreditaram em mim, me apoiaram, me incentivaram e me ensinaram a jamais desistir dos meus sonhos.

AGRADECIMENTOS

Tenho muito a agradecer. Não foi fácil para chegar até aqui. Do processo seletivo, passando pelas provas, aprovação no Exame Nacional de Qualificação até a conclusão do mestrado, foi uma longa jornada. Quero agradecer a todos os que me apoiaram e confiaram em mim.

A Deus, pois sem ele nada seria possível. Ele me deu saúde, forças, fé, disposição, inteligência, vontade, capacidade, família, amigos e tudo mais necessário para que eu cursasse e concluísse meu mestrado.

A Nossa Senhora do Perpétuo Socorro a quem recorri, recorro e recorrerei sempre nos momentos de necessidade. Minha mãezinha jamais me abandonou. Obrigada por vir em meu socorro SEMPRE.

Aos meus filhos Vynycius e Rhayssa que me auxiliaram ainda mais nas tarefas domésticas, me ajudaram a estudar, pois muitas vezes necessitei deles, me incentivaram a não desistir, a ir em frente. Vocês são os melhores filhos do mundo e eu amo vocês imensamente!

Ao meu companheiro Marcos, que sempre esteve ao meu lado; que teve paciência comigo e mesmo nos momentos em que eu estava errada, os quais eram muitos, me tratou com carinho e amor. Que sempre dizia: Você é inteligente, você vai conseguir, mesmo quando eu me sentia a mais estúpida dos mortais. Obrigada por confiar em mim. Amo você!

À minha sogra Hylda, pelas orações e boas vibrações em todos os dias de provas. Sei que a senhora rezou com convicção, pois Deus lhe ouviu.

Ao meu novo filho Thiago e minha nora Cristiane, pelo apoio e incentivo. Sei que vocês estavam sempre torcendo por mim.

À minha mãe Geny (in memorian) que mesmo não estando mais entre nós, jamais deixou de estar no meu coração e nos meus pensamentos.

Aos meus colegas de curso que compartilharam comigo seus conhecimentos, trazendo uma luz de sabedoria, principalmente quando tudo estava escuro e eu não sabia mais que caminho seguir. Nesse quesito, destaco meu companheiro de todas

as horas Luiz Fabiano dos Anjos. Obrigada, amigo! Só nós e nossas famílias sabemos o quanto ajudamos um ao outro.

A todos os meus alunos e ex-alunos, que rezaram, torceram e acreditaram em mim. Que sempre tinham uma palavra de incentivo para me dizer. Vocês são a principal razão para que eu entrasse nesse mestrado.

À minha orientadora Luciane Grossi, carinhosamente chamada de Profe Lu, pelo apoio, incentivo, puxões de orelha, conselhos e tudo mais que você fez por mim. Obrigada, de coração!

A todos os meus professores do curso de Mestrado, pelos ensinamentos passados que enriqueceram significativamente a minha formação.

A todas as pessoas que direta ou indiretamente participaram desse meu Mestrado, me ajudaram ou torceram por mim. Meu muito obrigado!

Com todos vocês, queridos, divido a alegria desta conquista!

“NA MAIOR PARTE DAS CIÊNCIAS, UMA GERAÇÃO PÕE ABAIXO O QUE A OUTRA CONSTRUIU, E O QUE A OUTRA ESTABELECEU A OUTRA DESFAZ. SOMENTE NA MATEMÁTICA É QUE CADA GERAÇÃO CONSTRÓI UM NOVO ANDAR SOBRE A ANTIGA ESTRUTURA.”

(HERMANN HANKEL)

RESUMO

Os logaritmos possuem inúmeras aplicações na Matemática e em outras áreas do conhecimento. Em algumas eles são considerados essenciais e em outras, eles são facilitadores de cálculos. Neste trabalho apresentamos um pequeno levantamento histórico dos logaritmos, passando pelos principais matemáticos envolvidos e suas contribuições. Adicionalmente, definimos logaritmos e indicamos suas propriedades. Em destaque, apresentamos possibilidades de integração dos logaritmos com outros conteúdos matemáticos e com diversas outras áreas do conhecimento. Finalmente apresentamos a forma como a UEPG (Universidade Estadual de Ponta Grossa) tem abordado o assunto em seus últimos vestibulares.

Palavras Chave: Logaritmos; Aplicação; Abordagem nos vestibulares da UEPG.

ABSTRACT

The logarithms have numerous applications in mathematics and in other areas of knowledge. In some, of them, the logaritms are considered essential and in others they are facilitators of calculations. In this work we present a brief historical research of logarithms, through the leading mathematicians involved and their contributions. Additionally, we define logarithms and we indicate their properties. In spotlight, we present possibilities for integration of logarithms with other mathematical content and with various other areas of knowledge. Finally we present how the UEPG (Universidade Estadual de Ponta Grossa) has addressed the issue in his last college entrance exams.

Key words: Logarithms; Application; Approach in vestibular State University of Ponta Grossa.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – John Napier e Jost Bürgi... 14

Figura 2 – Henry Briggs 17

Figura 3 – Tábua de logaritmos de Napier 18

Figura 4 – Tábua de logaritmos decimais de Bürgi 19

Figura 5 – Gráfico de uma função logarítmica crescente 23

Figura 6 – Gráfico de uma função logarítmica decrescente 23

Figura 7 – Gráfico de funções logarítmica e exponencial 24

SUMÁRIO

1 – **INTRODUÇÃO** 12

2 – **HISTÓRIA DOS LOGARITMOS** 14

3 – **CONCEITOS E DEFINIÇÕES PARA A RESOLUÇÃO DE LOGARITMOS**..... 21

3.1 – DEFINIÇÃO 21

3.2 – PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS... 26

3.3 – PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DE LOGARITMOS 29

3.4 – MUDANÇA DE BASE DO LOGARITMO 33

4 – **PROBLEMAS DO COTIDIANO QUE ENVOLVE LOGARITMO** 35

4.1 – LOGARITMOS NA ECONOMIA 37

4.2 – LOGARITMOS NA MATEMÁTICA FINANCEIRA 39

4.3 – LOGARITMOS EM GEOGRAFIA 41

4.4 – LOGARITMOS EM QUÍMICA 42

4.5 – LOGARITMOS EM GEOLOGIA 43

4.6 – LOGARITMOS EM BIOLOGIA 46

4.7 – LOGARITMOS EM FÍSICA 46

5 – **COMO O TEMA LOGARITMO É TRATADO NO VESTIBULAR DA UEPG** 48

6 – **CONCLUSÃO** 52

REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICA 54

1- INTRODUÇÃO

Durante pelo menos três séculos, os logaritmos, através de suas tábuas, desempenharam o papel de simplificador de cálculos aritméticos, pois transformavam multiplicações ou divisões de dois grandes números em operações mais simples e com resultados precisos.

Atualmente, as tábuas de logaritmos caíram em desuso, porém o estudo dos logaritmos continua fundamental para o desenvolvimento da Matemática. Sônego e Simões (2013, p. 54) reforçam essa importância na revista Cálculo – Matemática para todos:

> [...] visto que os logaritmos são utilíssimos na própria matemática (por exemplo, na teoria dos números e no cálculo), acabam sendo usadíssimos em situações reais, nas quais um cientista ou engenheiro usa a matemática para modelar um problema qualquer. [...] Além da escala Richter e do pH, os logaritmos aparecem no estudo dos sons e da música; aparecem na astronomia; aparecem aos montes na economia e na ciência da computação. A mensagem é clara: sem compreender os logaritmos, o jovem não avança na matemática, e sem avançar na matemática, não tem como virar cientista ou engenheiro ou economista.

Considerando a importância do estudo dos logaritmos para a resolução de situações que atingem o cotidiano do educando, é de se pensar que o professor explore suas aplicações na sala de aula, mostrando a relevância de se estudar, aprender e entender logaritmos. Porém isso muitas vezes não acontece. Os livros didáticos utilizados no Ensino Médio, na sua grande maioria, trazem apenas as regras aplicadas para a resolução de logaritmos, mas não suas várias formas de aplicação. É o conhecimento pelo conhecimento, desconectado do mundo real.

Em sua dissertação de Mestrado intitulada: Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio via Aplicações, Thiengo (2013, p. 13) relata:

> [...] o ensino da matemática nos centros escolares tornou-se, nas últimas décadas, um pesadelo para a maioria das pessoas. Seja por falta de compreensão, seja por alguma deficiência no processo de ensino-aprendizagem nas séries iniciais, seja por vários outros fatores, não é proveitoso para os alunos. Muitos se perguntam, às vezes: “Para que serve a Matemática?”, “Onde eu vou usar isto na minha vida?”. A quase totalidade dos discentes (e também grande parte dos docentes), ao ensinar um conteúdo específico da disciplina, não vê utilidade naquilo que estão aprendendo (ou ensinando). Alguns dos conceitos matemáticos com grande gama de aplicações em problemas práticos são os de Exponenciais e Logaritmos e, curiosamente, são conceitos que apresentam um baixo rendimento por parte dos alunos.

Desta forma, serão apresentadas várias situações do cotidiano que envolve a aplicação de logaritmos para sua resolução. Os conceitos, definições e propriedades apresentados nos livros didáticos são importantes para a resolução desses problemas, mas sem uma contextualização, elas perdem seu sentido e são esquecidos. É importante que após a exposição dessas regras o aluno veja que elas se aplicam em situações reais.

No **Capítulo 2** deste trabalho vamos abordar um pouco da história dos logaritmos e a importância dessa descoberta para a evolução da Matemática. No **Capítulo 3** serão expostas as definições e conceitos necessários para o estudo e cálculo de logaritmos. No **Capítulo 4,** serão apresentados e resolvidos alguns problemas de vida real que envolve o uso dos logaritmos e suas propriedades. No **Capítulo 5** será apresentado o enfoque do tema logaritmos nos últimos vestibulares feitos pela Universidade Estadual de Ponta Grossa e finalmente no **Capítulo 6** serão expostas as considerações e conclusões finais.

2- HISTÓRIA DO LOGARITMO

No século XVI, era muito difícil efetuar com rapidez multiplicações, divisões, potenciações e extrações de raízes. A invenção das frações decimais foi de fundamental importância, mas não era suficiente para desenvolver os longos e trabalhosos cálculos exigidos pela Astronomia e Navegação. Várias pessoas trabalhavam simultaneamente, de maneira independente, para descobrir uma maneira de agilizar esses cálculos e torná-los mais simples. (LIMA, 1991, p. 2)

Assim aconteceu com os logaritmos. Desconhecendo inteiramente um ao outro, Jost Bürgi (1552 - 1632), representado à direita na figura 1, suíço, matemático, inventor e fabricante de instrumentos astronômicos e John Napier (1550 – 1617), representado à esquerda na figura 1, um nobre escocês, teólogo e matemático, publicaram as primeiras tábuas de logaritmos. As de Napier foram publicadas em 1614 e as de Bürgi em 1620. A influência de Napier no desenvolvimento dos logaritmos foi maior do que a de Bürgi, devido a suas conclusões serem publicadas alguns anos antes e por ele apresentar uma maior relacionamento com professores universitários. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/logaritmos.htm>. Acesso 02 fev. 2014.

Figura 1: Imagens de John Napier e Jost Bürgi

Fonte: Disponível em: <http://www.thocp.net/biographies/napier_john.html>. Acesso em 12 fev. 2014. <http://ecalculo.if.usp.br/historia/burgi.htm>. Acesso em 12 fev. 2014.)

No final do século XVI e início do XVII, os praticantes do cálculo eram astrônomos, navegadores, não só também mercadores e comerciantes. Logo no prefácio de sua obra *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* (Descrição da maravilhosa tabela de logaritmos), Napier se dirige a eles ao exprimir a preocupação, comum na época, de facilitar certas operações: (NAPIER, 1614, prefácio apud ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p 182)

> “Dado que nada (caros amadores apaixonados pela Matemática) é tão desagradável à prática Matemática (freiando e retardando os especialistas no cálculo) quanto as multiplicações, as divisões e as extrações de raízes quadradas ou cúbicas de números grandes que, além do incômodo devido ao seu tamanho, induzem a diversos erros perigosos; como consequência, eu me dediquei a procurar por que meios seguros e cômodos poderia me livrar destas dificuldades” .

Para construir sua primeira tábua de logaritmos, Napier considerou as potências de um número bem próximo de 1. Assim Napier decidiu utilizar:

$$b = 0{,}9999999$$

Escrevendo *b* de outra forma temos que:

$$b = 1 - 10^{-7}$$

No que segue, indicaremos por *Nap log b* o logaritmo de *b* segundo Napier. Inicialmente Napier definiu:

$$Nap\ \log\ b = 1$$

$$Nap\ \log\ 0{,}9999999 = 1$$

$$Nap\ \log\ (0{,}9999999)^2 = 2$$

$$Nap\ \log\ (0{,}9999999)^3 = 3$$

e assim por diante.

Como o cálculo de potências de base *0,9999999* são muito trabalhosos, Napier decidiu substituir esse valor por $1 - 10^{-7}$.

Logo:

$$b^2 = b.b = b.(1-10^{-7}) = b - \frac{b}{10^7} = b - \frac{b}{10000000}$$

$$b^3 = b^2.b = b^2.(1-10^{-7}) = b^2 - \frac{b^2}{10^7} = b^2 - \frac{b^2}{10000000}$$

e assim por diante.

Como $b = 0,9999999$, temos que:

$$b^2 = b - \frac{b}{10000000} = 0,9999999 - \frac{0,9999999}{10000000}$$

Efetuando as operações, determinou que:

$$b^2 = 0,9999999 - 0,0000000999\,9999 = 0,9999998000\,0001$$

Para determinar o valor de b^3, ele utilizou o resultado determinado para b^2.

$$b^3 = b^2 - \frac{b^2}{10000000} = 0,9999998000\,0001 - \frac{0,9999998000\,0001}{100000000}$$

Efetuando as operações, determinou que:

$$b^3 = 0,9999998000\,0001 - 0,0000000999\,9998000000\,1 = 0,9999997000\,0002999999\,9$$

Napier calculou as potências de b^2 até b^{50} (usando $b= 0,9999999$) através de subtrações sucessivas e com esses valores, montou a primeira tabela de logaritmos representada na figura 3. Disponível em: <http://www.dm.ufscar.br/profs/sampaio/logshistoria.PDF>. Acesso em 18 mai. 2014.

Jost Bürgi desenvolveu o logaritmo de forma semelhante a Napier. Bürgui escolheu o número $1 + 10^{-4}$, e o multiplicou por 10^8. A importância do número irracional *e= 2,718* utilizada por Napier só foi reconhecida com o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

> Hoje em dia, um logaritmo é universalmente considerado como um expoente; assim, se $n = b^x$, dizemos que x é o logaritmo de n na base b. Dessa definição, as leis dos logaritmos decorrem imediatamente das leis dos expoentes. Uma das incongruências da história da matemática é que os logaritmos foram descobertos antes de se usarem expoentes. (EVES, 2008, p. 346)

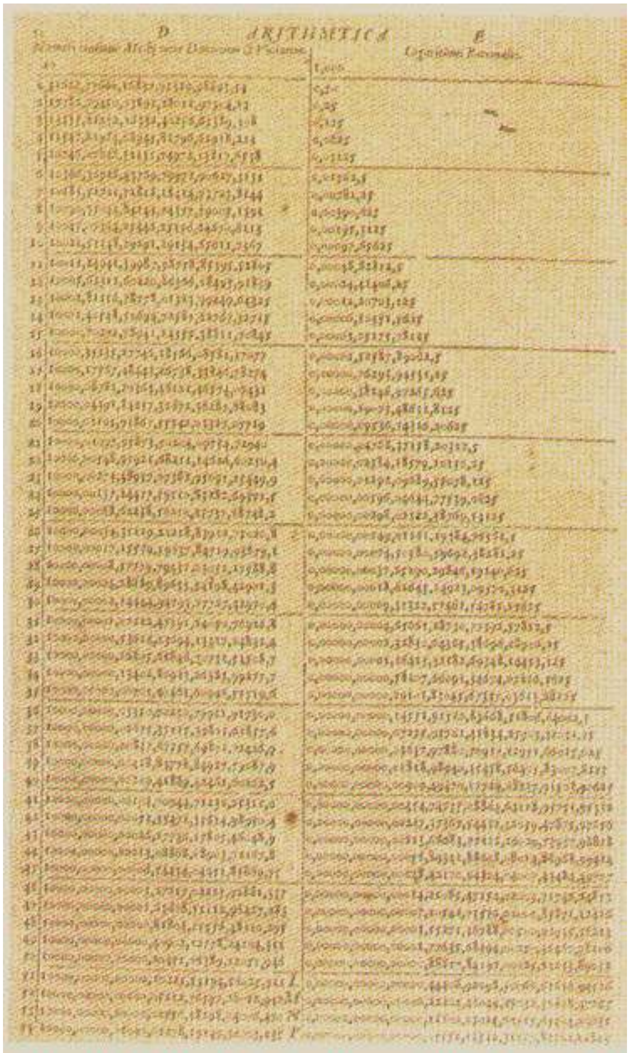
O matemático inglês Henry Briggs (1561 – 1631) professor da universidade de Londres, observou que os logaritmos introduzidos por Napier utilizavam bases inadequadas. Em 1616, Briggs sugeriu a Napier a mudança dos logaritmos para uma base decimal. Napier tentou introduzir nos seus logaritmos a base sugerida por Briggs e concluir a sua obra em que descrevia como construiu o logaritmo, mas sem sucesso. Esta última obra foi concluída pelo seu filho, Robert Napier. Partindo dos estudos de Napier, Briggs desenvolveu logaritmos na base decimal, construindo uma tabela de logaritmos dos números de 1 a 1000. Henry Briggs representado na figura 2, foi responsável pela introdução dos logaritmos na prática e da imensa vantagem em sua utilização. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm44/historia.htm>. Acesso em 25 jan. 2014.

Figura 2: Henry Briggs

Fonte: Disponível em: < http://sliderules.lovett.com/background.html>. Acesso em 12 fev. 2014.

Na figura 3 apresentamos a tábua de logaritmos de Napier e na figura 4 a tábua de logaritmos na base decimal. O funcionamento de uma tábua de logaritmos decimal é bastante simples. Ela consiste de duas colunas de números. A cada número à esquerda, corresponde um número a sua direita, chamado de logaritmo. Ao multiplicar dois números basta somar seus logaritmos; o resultado é o logaritmo do produto. Ao dividir dois números, basta subtrair os logaritmos. Para elevar um número a uma potência multiplica-se o logaritmo do número pela potência. Semelhantemente, para extrair a raiz n-ézima de um número, divide-se o logaritmo do número pelo índice da raiz.

Figura 3: Tábua de logaritmos de Napier



Fonte: Disponível em: < http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm44/historia.htm>. Acesso em 13 fev. 2014.

Figura 4: Tabela de logaritmos decimais de Briggs

TABELA DE LOGARITMOS DECIMAIS

n°	log	n°	log
1	0	50	1,69897
2	0,30103	51	1,70757
3	0,477121	52	1,716003
4	0,60206	53	1,724276
5	0,69897	54	1,732394
6	0,778151	55	1,740363
7	0,845098	56	1,748188
8	0,90309	57	1,755875
9	0,954243	58	1,763428
10	1	59	1,770852
11	1,041393	60	1,778151
12	1,079181	61	1,78533
13	1,113943	62	1,792392
14	1,146128	63	1,799341
15	1,176091	64	1,80618
16	1,20412	65	1,812913

17	1,230449	66	1,819544
18	1,255273	67	1,826075
19	1,278754	68	1,832509
20	1,30103	69	1,838849
21	1,322219	70	1,845098
22	1,342423	71	1,851258
23	1,361728	72	1,857332
24	1,380211	73	1,863323
25	1,39794	74	1,869232
26	1,414973	75	1,875061
27	1,431364	76	1,880814
28	1,447158	77	1,886491
29	1,462398	78	1,892095
30	1,477121	79	1,897627
31	1,491362	80	1,90309
32	1,50515	81	1,908485
33	1,518514	82	1,913814
34	1,531479	83	1,919078

35	1,544068	84	1,924279
36	1,556303	85	1,929419
37	1,568202	86	1,934498
38	1,579784	87	1,939519
39	1,591065	88	1,944483
40	1,60206	89	1,94939
41	1,612784	90	1,954243
42	1,623249	91	1,959041
43	1,633468	92	1,963788
44	1,643453	93	1,968483
45	1,653213	94	1,973128
46	1,662758	95	1,977724
47	1,672098	96	1,982271
48	1,681241	97	1,986772
49	1,690196	98	1,991226
		99	1,995635

Fonte: Disponível em: <http://matensinomedio.blogspot.com.br/2010/10/dicas-sobre-ensino-de-logaritmos.html>. Acesso em 13 fev. 2014.

A correspondência estabelecida por meio das tábuas de logaritmos é uma função, porém, a invenção dos logaritmos foi anterior à introdução do conceito de função na matemática.

Assim, concluímos que o *logaritmo* é o número de uma razão, o *arithmo* (número) de uma *logos* (razão). A palavra *logaritmo* foi adotada por Napier depois de ter usado inicialmente a expressão *número artificial*. (ROQUE e PITOMBEIRA, 2012, p. 183)

Apesar do advento das calculadoras e consequente abandono das tábuas de logaritmos criadas por Napier, o ensino de logaritmos permanece necessário.

> O ensino de logaritmos, como instrumento de cálculo, está desaparecendo das escolas [...]. Os produtos da grande invenção de Napier tornaram-se peças de museu. A função logaritmo, porém, nunca morrerá, pela simples razão que as variações exponencial e logarítmica são partes vitais da natureza e da análise. Consequentemente, um estudo das propriedades da função logaritmo e de sua inversa a função exponencial, permanecerá sempre uma parte importante do ensino da matemática. (EVES, 2008, p. 347)

Em sua dissertação de mestrado intitulada: Logaritmos - Construção da definição geométrica com o uso do GeoGebra, Azevedo (2013, p. 54) relata a importância dos logaritmos:

> Evidentemente a aplicação primeira dos logaritmos hoje é substituída pelas calculadoras, mas as vantagens que os logaritmos apresentam para as outras ciências, de forma alguma, serão substituídas por qualquer advento eletrônico.

Atualmente, as tábuas de logaritmos são obsoletas. Os computadores e calculadoras substituíram completamente seu uso. Mas o estudo dos logaritmos é e continuará a ser de vital importância para o desenvolvimento da Matemática e das Ciências em geral, pois vários fenômenos físicos, químicos, biológicos e econômicos são estreitamente relacionados com os logaritmos.

3- CONCEITOS E DEFINIÇÕES PARA O CÁLCULO DE LOGARITMOS

Neste capítulo apresentaremos a definição e propriedades necessárias para o estudo dos logaritmos. Esses estudos serão necessários para que o aluno possa compreender o que é logaritmo, conhecer sua operacionalidade e aplicar esses conhecimentos para resolver as situações problemas apresentadas no próximo capítulo.

3.1 DEFINIÇÕES

Os livros didáticos utilizados no Ensino Médio geralmente apresentam o tema logaritmos de uma forma direta, com aplicações de regras e fórmulas e não mostram que o tema é aplicado em situações de vida real. As regras são realmente essenciais para cálculos envolvendo logaritmos, mas se faz necessário mostrar que elas fazem parte de um contexto maior, a resolução de problemas que envolvam o uso dos logaritmos nas mais diversas áreas do conhecimento. Em sua dissertação de Mestrado intitulada Logaritmos e Aplicações, Silva (2013 p. 2), reforça essa visão:

> [...] após trabalhar com várias coleções de livros didáticos que são utilizados em diversas escolas públicas brasileiras, percebemos que o tema logaritmos é tratado de tal forma que leva os alunos a aprender de forma mecânica.

No livro didático Matemática Elementar 2, Iezzi, Dolce e Murakami (1985, p. 52B) afirmam que: “ A operação, pela qual se determina o logaritmo de b numa dada base a, chamamos de logaritmação e o resultado dessa operação é o logaritmo.” Esta definição praticamente não sofreu alterações e permanece praticamente inalterada nos livros atuais. No livro é apresentada como:

Definição: Dados $a, b, c \in \Re$, chamamos de logaritmo de b, na base a, ao número c, tal que: a elevado à potência c é igual a b. Usamos a seguinte notação:

$$\log_a b = c$$

Onde:

a = base do logaritmo
b = logaritmando ou argumento
c = logaritmo

Geralmente a definição de logaritmo é apresentada como:

O logaritmo de um número b na base a é igual a c se, e somente se, $a^c = b$. Escrevemos essa afirmação da seguinte maneira:

$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$$

Notemos que se tomarmos um número c como o expoente de uma determinada base a, temos $b = a^c$, e se aplicarmos a esse resultado o logaritmo na base a, pela definição temos que:

$$\log_a (a^c) = \log_a b \Rightarrow c.\log_a a = a^c \Rightarrow c = \log_a b$$

$$\log_a b = c, \text{pois } b = a^c$$

Define-se função logarítmica de base *a*, à função *f*, de]0, + ∞[em $\Re$, que a todo número real $x > 0$ associa o logaritmo de *x,* numa base a $(a > 0$ e $a \neq 1)$.

$$f(x) = y = \log_a x$$

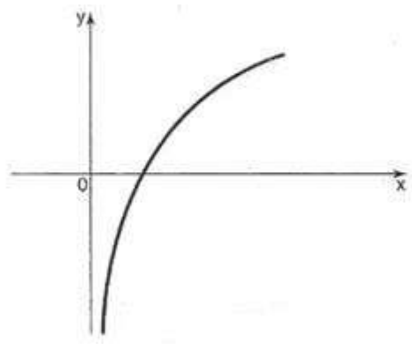
Uma observação importante sobre o estudo dos logaritmos diz respeito ao seu domínio ou campo de existência. Só existem logaritmos de números positivos, com bases também positivas e diferentes de 1. Ou seja, para calcular o logaritmo de b, na base a, é necessário que $0 < a \neq 1$ e $b > o$.

Determinada uma base fixa, o logaritmo assim definido é biunívoco; cada número positivo admite um único logaritmo, e reciprocamente, a cada logaritmo corresponde um único número. (KAJ, 1974, p. 9)

Uma função logarítmica é crescente se a base a é um número maior do que um e decrescente se a base for um número maior do que zero e menor do que um.

Se $a > 1$, então $f(x) = y = \log_a x$ será uma função crescente. Na figura 5 temos o gráfico de uma função crescente.

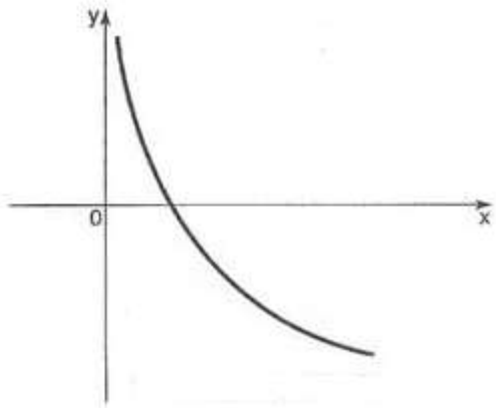
Figura 5: Gráfico de uma função crescente



Fonte: A autora

Se $0 < a < 1$, então $f(x) = y = log_a x$ será uma função decrescente e apresentará como o gráfico que é observado na figura 6.

Figura 6: Gráfico de uma função decrescente

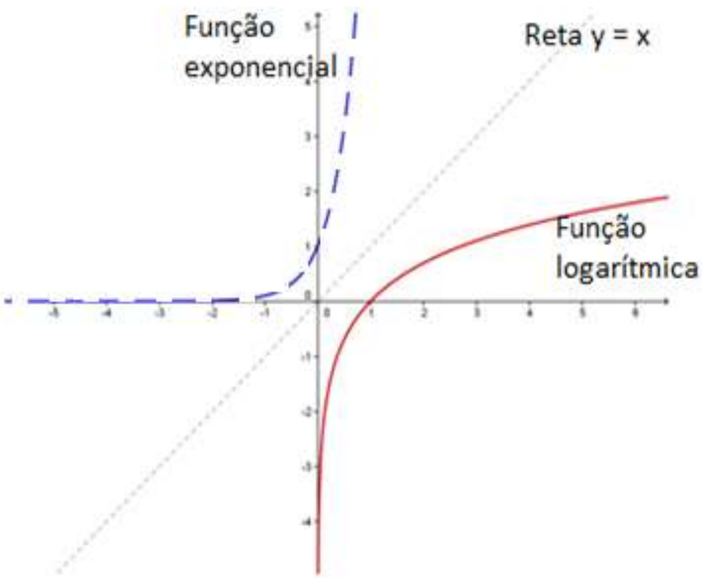


Fonte: A autora

O gráfico de uma função logarítmica é uma curva que se aproxima do eixo das ordenadas *y* (sem interceptá-lo) Na figura 7 observamos o comportamento da função logarítmica comparando-a com o gráfico de uma função exponencial.

> Nesse sentido, o logaritmo é operação inversa da exponencial. Esse argumento é válido também, e melhor em termos formais, quando se pensa na função exponencial e na função logarítmica. Vejamos que o gráfico de ambas são simétricos em relação a reta y = x, que é uma característica das funções e suas inversas. (BARICHELLO, p. 4)

Figura 7: Gráfico das funções $f(x) = 10^x$ em linha tracejada, $g(x) = \log x$ em linha contínua e reta $y = x$ pontilhada.



Fonte: BARICHELLO, Leonardo. **O que é logaritmo.** Série O que é? Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). MEC/UNICAMP. Campinas. 2007, p. 4.

Outras situações que não são apresentadas em livros didáticos são as justificativas do porquê das restrições à base dos logaritmos. É importante ressaltar para os alunos o motivo dessas restrições. Alguns exemplos podem ser expostos abordando as situações de restrições, vejamos:

a) Por que a base não pode ser negativa?

Consideremos que seja possível resolver um logaritmo de base negativa, por exemplo: $\log_{-4} x = \frac{1}{2}$. Vejamos o que ocorre na tentativa de resolução.

$$\log_{-4} x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (-4)^{\frac{1}{2}} = x \quad \Rightarrow \quad \sqrt{-4} = x$$

Segundo a definição de logaritmo, o logaritmando x deve ser um número real positivo. Como, x $\notin \Re$, então não define log de base negativa.

b) Por que a base não pode ser igual a 1?

Consideremos que a base do logaritmo seja igual a 1 como nos exemplos: $\log_1 x = 5$ e $\log_1 y = 3$. Observemos o que ocorre na resolução.

$$\log_1 x = 5 \quad \Rightarrow \quad 1^5 = x \quad \Rightarrow \quad 1 = x.$$

$$\log_1 y = 3 \quad \Rightarrow \quad 1^3 = y \quad \Rightarrow \quad 1 = y$$

Desta forma, não está definido o $\log_1 x$ para $x \neq 1$e ainda não existe unicidade.

c) Por que a base não pode ser igual a 0?

Consideremos que seja possível resolver um logaritmo de base igual a zero, como por exemplo: $\log_0 x = 2$ e $\log_0 x = 5$. Verifiquemos o que ocorre nessas situações:

$$\log_0 x = 2 \quad \Rightarrow \quad 0^2 = x \quad \Rightarrow \quad 0 = x$$

$$\log_0 x = 5 \quad \Rightarrow \quad 0^5 = x \quad \Rightarrow \quad 0 = x$$

Desta forma, não está definido o $\log_0 x$ para $x \neq 0$e ainda não existe unicidade.

É importante que o aluno saiba que as restrições feitas à base possuem fundamento, que não são aleatórias. Isso o ajuda a compreender melhor os logaritmos.

Outra forma de definir logaritmos de forma que os alunos possam compreender melhor o processo, é relacioná-lo com potenciação, define-se logaritmo como: “Logaritmo é o expoente ao qual se eleva a base para se obter o número”.

Consideremos os seguintes exemplos:

$$\log_2 16 = x \quad \Rightarrow \quad 2^x = 16 \quad \Rightarrow \quad 2^x = 2^4 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$
$$\log_7 49 = y \quad \Rightarrow \quad 7^y = 49 \quad \Rightarrow \quad 7^y = 7^2 \quad \Rightarrow \quad y = 2$$
$$\log_5 15625 = z \quad \Rightarrow \quad 5^z = 15625 \quad \Rightarrow \quad 5^z = 5^6 \quad \Rightarrow \quad z = 6$$

Desta forma, o aluno compreende a relação existente entre logaritmos e potenciação.

3.2 PROPRIEDADES DOS LOGARITMOS

Para apresentação das propriedades abaixo, consideraremos a base fixa $a \; (a \neq 1 \;\; e \;\; a > 0)$.

i) O logaritmo da unidade, em qualquer base, é igual a zero.

$\log_a 1 = 0$, pois $a^0 = 1$.

ii) O logaritmo da base , é sempre igual a 1.

$\log_a a = 1$, pois $a^1 = a$.

iii) O logaritmo de uma potência, cuja base seja igual à base do logaritmo, será igual ao expoente da potência.

$\log_a a^m = m,$ pois $a^m = a^m$.

iv) Se dois logaritmos em uma mesma base são iguais, então os logaritmandos também são iguais. Esta propriedade é muito utilizada na solução de exercícios envolvendo equações onde aparecem logaritmos (equações logarítmicas). Isso ocorre porque a função logarítmica é injetora.

$\log_a M = \log_a N$, logo $M = N$.

v) A potência de base a e expoente $\log_a b$, é igual a *b*.

$a^{\log_a b} = b$

Seja $c = \log_a b$.

Pela definição $a^c = b$.

Logo: $a^{\log_a b} = b$.

Para facilitar o entendimento, consideremos alguns exemplos numéricos das propriedades acima:

Exemplo 1) $\log_5 1 = x$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\log_5 1 = x$$
$$5^x = 1$$
$$5^x = 5^0$$
$$x = 0$$

Logo a solução é $x = 0$.

Exemplo 2) $\log_7 7 = x$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\begin{aligned} \log_7 7 &= x \\ 7^x &= 7 \\ 7^x &= 7^1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Logo a solução é $x = 1$

Exemplo 3) $\log_3 3^5 = x$

Aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\begin{aligned} \log_3 3^5 &= x \\ 3^x &= 3^5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Logo a solução é $x = 5$

Exemplo 4) $\log_7 x = \log_7 9$

Pela propriedade (iv) temos que $x = 9$.

Logo a solução é $x = 9$

Exemplo 5) $3^{\log_3 5} = x$

Pela definição de logaritmo, temos que: $\log_a b = c$, logo $a^c = b$. Aplicando o caminho inverso no exemplo, temos que:

$$\begin{aligned} 3^{\log_3 5} &= x \\ \log_3 x &= \log_3 5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Pela propriedade (v) concluímos que a solução é $x = 5$.

3.3 PROPRIEDADES OPERATÓRIAS DE LOGARITMOS

Quando os valores utilizados nos cálculos dos fenômenos cotidianos das ciências adquirem valores grandes, as propriedades operatórias dos logaritmos tornam esses valores menores, facilitando os cálculos e a construção de gráficos. As propriedades operatórias apresentadas a seguir são baseadas nas referências de número 8 , Iezzi (2010) e número 19, Smolle e Diniz (2005).

i) Logaritmo do produto:

Em qualquer base, o logaritmo do produto de dois números reais positivos é igual à soma dos logaritmos de cada um deles, isto é, se $0 < a \neq 1, b > o\, e\, c > 0$, então:

$$\log_a (b\,.\,c) = \log_a b + \log_a c$$

Demonstração:

Fazendo: $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a (b\,.\,c) = z$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a (b\,.\,c) = z \Rightarrow a^z = b\,.\,c \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = a^x.a^y = a^{x+y} \Rightarrow z = x + y$$

Logo: $\log_a (b\,.\,c) = \log_a b + \log_a c$

ii) Logaritmos do quociente:

Em qualquer base, o logaritmo do quociente de dois números reais positivos é igual à diferença entre o logaritmo do numerador e o logaritmo do denominador, isto é se $(0 < a \neq 1,\ b > 0\ \ e\ \ c > 0)$, então:

$$\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c\,.$$

Demonstração:

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_a c = y$ e $\log_a \frac{b}{c} = z$, vem:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a c = y \Rightarrow a^y = c \\ \log_a \frac{b}{c} = z \Rightarrow a^z = \frac{b}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow a^z = \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y} \Rightarrow z = x - y$$

Logo: $\log_a \frac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$

iii) Logaritmo da Potência:

Em qualquer base, o logaritmo de uma potência de base real e positiva é igual ao produto do expoente pelo logaritmo da base da potência, isto é, se $(0 < a \neq 1, b > o \text{ e } c > 0)$ e $r \in \Re$, então:

$$\log_a b^r = r\,.\,\log_a b$$

Demonstração:

Fazendo: $\log_a b = x$, $\log_a b^r = y$ temos:

$$\left.\begin{array}{l} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b \\ \log_a b^r = y \Rightarrow a^y = b^r \end{array}\right\} \Rightarrow a^y = \left(a^x\right)^r = a^{r.x} \Rightarrow y = x.r$$

Logo: $\log_a b^r = r\,.\,\log_a b.$

Para facilitar o entendimento, consideremos alguns exemplos numéricos da aplicação das propriedades operatórias dos logaritmos.

Exemplo 1) Logaritmo do Produto: Pretende-se calcular $\log_3 (9 \,.\, 27)$

$$\log_3 (9 \,.\, 27) = \log_3 243 = 5$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um produto, temos:

$$\log_3 9 + \log_3 27 = 3 + 2 = 5$$

Exemplo 2) Logaritmo do Quociente: Pretende-se calcular $\log_2 \frac{32}{4}$

$$\log_2 \frac{32}{4} = \log_2 8 = 3$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de um quociente, temos:

$$\log_2 32 - \log_2 4 = 5 - 2 = 3$$

Exemplo 3) Logaritmo da Potência: Pretende-se calcular $\log_2 4^3$

$$\log_2 4^3 = \log_2 64 = 6$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos

$$3.\ \log_2 4 = 3 \,.\, 2 = 6$$

Exemplo 4) Logaritmo de expressão: Para determinarmos o logaritmo de uma expressão, se faz necessário o conhecimento de propriedades elementares da matemática.

Calcule o valor de x na expressão a seguir, sabendo que $\log_a b = -2$ e $\log_a c = 3$.

$$x = \log_a \left(\frac{\sqrt{b}}{b.\sqrt[3]{c}} \right)^3$$

Aplicando a propriedade do logaritmo de uma potência, temos:

$$x = 3.\left[\log_a \sqrt{b} - \left(\log_a b + \log_a \sqrt[3]{c}\right)\right]$$

Transformando os radicais em expoentes fracionários:

$$x = 3.\left[\log_a b^{\frac{1}{2}} - \left(\log_a b + \log_a c^{\frac{1}{3}}\right)\right]$$

Aplicando novamente a propriedade do logaritmo de uma potência:

$$x = 3.\left[\frac{1}{2}\log_a b - \left(\log_a b + \frac{1}{3}\log_a c\right)\right]$$

Fazendo as substituições dos dados do exercício e resolvendo as operações matemáticas envolvidas.

$$x = 3.\left[\frac{1}{2}.(-2) - \left(-2 + \frac{1}{3}.3\right)\right]$$

$$x = 3.\left[-1 - (-2+1)\right]$$

$$x = 3.\left[-1+1\right]$$

$$x = 0$$

Desta forma, concluímos que a solução é $x = 0$.

3.4 MUDANÇA DE BASE DE UM LOGARITMO

Existe uma propriedade dos logaritmos denominada mudança de base, que permite o cálculo do logaritmo em qualquer base, a partir dos logaritmos decimais. Fazemos uso dessa propriedade em situações onde um logaritmo encontra-se em determinada base e é necessário convertê-lo a outra base para aplicar as propriedades operatórias.

Para mudar qualquer base um logaritmo, fazemos o quociente entre o logaritmo do logaritmando na nova base, pelo logaritmo da antiga base na nova base, isto é, se $(0 < a \neq 1, b > 0 \text{ e } 0 < c \neq 1)$, então:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ , } \log_c a \neq 0$$

Fazendo $\log_a b = x$, $\log_c b = y$ e $\log_c a = z \neq 0$, aplicando a definição de logaritmo, temos:

$$\left.\begin{array}{ll} \log_a b = x \Rightarrow a^x = b & (1) \\ \log_c b = y \Rightarrow c^y = b & (2) \\ \log_c a = z \Rightarrow c^z = a & (3) \end{array}\right\}$$

Substituindo (3) e (2) em (1), vem:

$$\left(c^z\right)^x = c^y \quad \Rightarrow \quad c^{z.x} = c^y \quad \Rightarrow \quad z.x = y \quad \Rightarrow \quad x = \frac{y}{z} \quad com \quad z \neq 0$$

Isto é $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Consideremos como exemplo um cálculo de mudança de base usando a calculadora para os valores de logaritmos na base 10. Pretende-se calcular $\log_2 5$

Para calcular $\log_2 5$ utilizando mudança para base 10, temos:

$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{0{,}699}{0{,}301} \cong 2{,}32$$

As propriedades apresentadas são necessárias para que os problemas envolvendo logaritmos sejam resolvidos.

4- PROBLEMAS DO COTIDIANO QUE ENVOLVE LOGARITMOS:

Neste capítulo apresentaremos abordagens de situações que envolvem o uso de logaritmos para a sua resolução. Independente da área que o aluno pretenda seguir na continuação de seus estudos, ele encontrará situações onde o uso de logaritmos é aplicado para resolvê-las. Nesse momento, a interdisciplinaridade se faz necessária, pois ela realiza a integração da matemática com diversas áreas e mostra ao aluno que a solução de diversas situações com as quais ele vai se defrontar na sua atuação profissional encontra-se vinculada ao estudo dos logaritmos.

> A interdisciplinaridade não dilui as disciplinas, ao contrário, mantém sua individualidade. Mas integra as disciplinas a partir da compreensão das múltiplas causas ou fatores que intervêm sobre a realidade e trabalha todas as linguagens necessárias para a constituição de conhecimentos, comunicação e negociação de significados e registro sistemático dos resultados. (PCN, 1999, p. 89).

A interdisciplinaridade é um elo entre o entendimento das disciplinas nas suas mais variadas áreas. Nenhuma disciplina é estanque. Focada em si só. Elas interagem entre si, participam da construção de novos conhecimentos, em novas áreas. Muitas vezes o aluno não consegue ver isso. É papel do professor levar esse conhecimento para a sala de aula, ao alcance do aluno.

Muitas vezes, o aluno não compreende determinados assuntos por que eles são negligenciados pelo professor; porque o professor não consegue ensinar aos alunos o que nem ele mesmo compreende; porque o programa anual precisa ser cumprido e não há tempo hábil para fazê-lo com qualidade. Em sua dissertação de Mestrado, Thiengo (2013, p.34) reforça essa ideia:

> Em nossa experiência, já vimos muitos fatos a cerca desse ponto acontecer, tais como:[...] deixa-se para ensinar esses tópicos ao final do ano letivo, em que o interesse dos alunos se torna menor e, por vezes, o professor precisa "acelerar" o conteúdo para que o cronograma seja cumprido. Esse é o pior quadro possível de ensino de exponenciais e logaritmos. [...] O professor deve ter segurança em lidar com o conteúdo de forma correta e clara. Dar um embasamento teórico bem fundamentado aos seus alunos. A partir daí então poder ter a confiabilidade deles para trabalhar problemas aplicados à vida que envolvem conceitos matemáticos.

Ferrari (2013) fez uma entrevista com professores do Ensino Médio da cidade de Juiz de Fora a respeito do conteúdo Logaritmos e Exponenciais. Foi elaborado um questionário com o seguinte título: Abordagem do assunto Logaritmos e Exponenciais no Ensino Médio. Nessa entrevista, os professores relatam suas experiências com o ensino de logaritmos e exponenciais e comentam sobre a apresentação do assunto nos livros didáticos. Relatam que a abordagem feita pelos livros didáticos não consegue explicitar ao aluno qual o significado do logaritmo. Sugerem também que alguns autores se preocupam mais em apresentar as propriedades e aplicações e se esquecem das aplicações práticas.

Para manter o objetivo da formação no indivíduo é necessário que ele seja o foco do trabalho e não as disciplinas.

> [...] a emergência da noção de competências decorre essencialmente da insatisfação com a excessiva fragmentação a que o trabalho multidisciplinar tem conduzido, afastando o foco de organização do trabalho escolar da formação pessoal. Disso resulta um aparente consenso sobre a necessidade de um retorno à ideia de unificação do conhecimento em migalhas, propiciado pelas disciplinas, o que se busca em duas frentes: deslocando o centro das atenções das disciplinas para as competências pessoais e buscando uma interligação entre as disciplinas que atende pelo nome genérico de “interdisciplinaridade”. (MACHADO, 2002, p. 149)

A interdisciplinaridade é realmente uma necessidade do mundo atual. Alguns temas se relacionam de maneira tal que não podem deixar de ser abordados com a devida atenção durante o Ensino Médio. Mas será este o caso dos logaritmos? Será que seu estudo é realmente necessário para a compreensão e estudo de outras áreas?

> A justificativa maior para o ensino do logaritmo reside em seu aspecto funcional, isto é, no fato de ser o logaritmo uma função. As funções logarítmicas, juntamente com as suas inversas, as exponenciais, constituem modelos ideais para descrever matematicamente certos fenômenos de variação nos quais uma grandeza tem taxa de variação proporcional à quantidade daquela grandeza existente em cada instante. Exemplos deste tipo de variação, chamado variação exponencial, são encontrados em diversas áreas do conhecimento, [...] em quantidade e importância suficientes para justificar o enorme interesse das funções exponenciais e logarítmicas na Matemática, nas Ciências e na Tecnologia. (JESUS *et all*, 2000, p.2)

É importante salientar que os conceitos, definições e propriedades dos logaritmos devem ser trabalhadas pelo professor, mas elas devem estar vinculadas ao mundo que cerca o aluno.

> Será, então, que inserindo a matemática em um contexto de aplicação em problemas práticos o processo de ensino-aprendizagem será mais bem conduzido? A aplicação da teoria em situações-problema bastaria para resolvermos este problema? Sabemos que só isso não basta. Há de haver um correto embasamento teórico da disciplina, das proposições e dos teoremas, do uso correto das equações e das variáveis do problema. (THIENGO, 2013, p.13)

No livro Matemática e Ensino, é destacada a importância de apresentar aos alunos exemplos de problemas que envolvam logaritmos.

> Exemplos de problemas, de origem variada, onde surgem logaritmos e exponenciais de forma espontânea, devem ser apresentados aos estudantes, a fim de habituá-los com o manuseio de questões relativas ao crescimento exponencial e logarítmico. (LIMA, 2007, p. 106)

Desta forma, apresentamos alguns problemas de logaritmos aplicados a outras áreas de ensino, e que retratam a interdisciplinaridade existente entre a matemática e outras disciplinas e como logaritmo não é um assunto estanque em si, mas que é amplamente aplicado às mais diversas áreas do conhecimento.

4.1) Logaritmos na Economia

Um automóvel custa hoje R$ 40 000,00. A cada ano, ele sofre uma desvalorização de 20% e seu valor pode ser calculado pela fórmula: $V(t) = V_0.(0{,}8)^t$, onde *V(t)* é o valor do automóvel após *t* anos de uso; V_0 é o valor inicial do automóvel e *t* é o tempo em anos de uso que ele possui. Determine após quanto tempo o valor desse automóvel será de R$ 20 000,00.

Dado: *log 2 = 0,301*

Resolução:

Sendo 100% o valor do automóvel e considerando que a cada ano ele desvaloriza 20%, teremos então:

100% - 20% = 80% = 0,8, que corresponde ao valor utilizado na fórmula, ou seja, 80% do valor do inicial do automóvel.

Substituindo na fórmula $V(t) = V_0.(0{,}8)^t$ os dados do exercício:

$$V(t) = 20\ 000$$
$$V_0 = 40\ 000$$

Teremos:

$$20\ 000 = 40\ 000.(0{,}8)^t$$
$$\frac{20000}{40000} = (0{,}8)^t$$
$$0{,}5 = (0{,}8)^t$$

Ao chegar a essa igualdade, o aluno verifica que a equação apresentada é uma exponencial, mas que não consegue igualar as bases para encontrar a solução. Sendo que o dado do problema é que *log 2 = 0,301*, então precisamos reescrever a equação usando frações:

$$\frac{1}{2} = \left(\frac{8}{10}\right)^t$$

Aplica-se o logaritmo a ambos os membros da equação:

$$\log\frac{1}{2} = \log\left(\frac{8}{10}\right)^t$$

Aplicando a propriedade de logaritmo de uma potência, temos:

$$\log\frac{1}{2} = t.\log\left(\frac{8}{10}\right)$$

Como temos uma divisão no logaritmando, aplicamos a propriedade da divisão:

$$\log 1 - \log 2 = t.(\log 8 - \log 10)$$

Como $\log 1 = 0 \ e \ \log \ 10 = 1$, temos:

$$0 - \log 2 = t.(\log 8 - 1)$$

Decompondo o algarismo 8, temos:

$$-\log 2 = t.(\log 2^3 - 1)$$

Aplicando novamente a propriedade da potência, temos:

$$-\log 2 = t.(3.\log 2 - 1)$$

Substituindo o dado do problema: *log 2 = 0,301*, encontramos:

$$-0{,}301 = t.(3.0{,}301 - 1) \Rightarrow \ -0{,}301 \ = \ t.\ (0{,}903 \ - \ 1) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ -0{,}301 = \ -0{,}097.t \ \Rightarrow \ \frac{0{,}301}{0{,}097} = t \ \Rightarrow \ t \ = 3{,}10 \ \therefore \ t \ \cong \ 3 \ anos$$

Após aproximadamente 3 anos esse carro terá seu valor reduzido para R$20,000,00.

4.2) Logaritmos em Matemática Financeira

Um investimento de renda fixa rende juro composto de aproximadamente 8% a.a. já descontado o Imposto de Renda. Quanto tempo após uma aplicação de R$10000,00 , terá o saldo de R$18000,00 ?

Dados: *log 2 = 0,3010; log 3 = 0,4771*

Resolução:

A relação do montante determinada pelos juros compostos é determinada por: $M(t) = C.(1+i)^t$, onde *M(t)* é o Montante, *i* é taxa de juros, *C* é o Capital e *t* é o tempo.

Substituindo os dados do exercício: $M = 18000$; $C = 12000$ e $i = 0{,}08$, teremos:

$$18000 = 10000.(1 + 0{,}08)^t$$

$$\frac{18000}{10000} = (1{,}08)^t$$

$$\frac{18}{10} = \left(\frac{108}{100}\right)^t$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros, temos:

$$\log \frac{18}{10} = \log \left(\frac{108}{100}\right)^t$$

Aplicando as propriedades dos logaritmos:

$$\log 18 - \log 10 = t \,.\, \log \left(\frac{108}{100}\right)$$

$$\log 18 - \log 10 = t \,.\, (\log 108 - \log 100)$$

Decompondo os valores, encontramos:

$$\log (2.3^2) - \log 10 = t \,.\, \left[\log (2^2.3^3) - \log 10^2\right]$$

Aplicando novamente as propriedades de logaritmos, temos:

$$\log 2 + \log 3^2 - \log 10 = t \,.\, \left[\log 2^2 + \log 3^3 - \log 10^2\right]$$

$$\log 2 + 2 \,.\, \log 3 - \log 10 = t \,.\, \left[2 \,.\, \log 2 + 3 .\, \log 3 - 2 \,.\, \log 10\right]$$

Substituindo os valores dados do problema, calculamos:

$$0{,}3010 \ + \ 2 \ . \ 0{,}4771 - 1 \ = t \ . \ \left[2 \ . \ 0{,}3010 \ + \ 3 \ . \ 0{,}4771 - 2 \ . \ 1 \right]$$

$$0{,} \ 2552 = t \ . \ 0{,}0333 \quad \Rightarrow \quad \frac{0{,}2552}{0{,}0333} = t \quad \Rightarrow \quad t \ = \ 7{,}7 \ anos$$

Após aproximadamente 7,7 anos (7 anos e 8 meses), o saldo da aplicação será de R$ 18 000,00.

4.3) Logaritmos em Geografia

Em uma determinada cidade, a taxa de crescimento populacional é de 3% ao ano, aproximadamente. Em quantos anos aproximadamente a população desta cidade irá dobrar, se a taxa de crescimento continuar a mesma?

Dados: *log 2 = 0,3010; log 103 = 2,0128*

Resolução:

Consideremos a população inicial da cidade P_0 e a população da cidade após t anos de *P(t).* Se a população final da cidade irá dobrar, então teremos $P(t) = 2.P_0$.

Partindo da relação: $P(t) = P_0.(1+i)^t$ temos que:

$$2.P_0 = P_0.(1+0{,}03)^t \quad \Rightarrow \quad 2 \ = \ (1{,}03)^t$$

Simplificando P_0:

$$2 = (1{,}03)^t$$

Aplicando logaritmo em ambos os membros, e aplicando a propriedade de logaritmo de uma potência, encontramos:

$$\log\ 2 = t.\ \log\ (1{,}03) \quad \Rightarrow$$

$$\log\ 2\ =\ t.\ \log\left(\frac{103}{100}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\log\ 2\ =\ t.\ (\log\ 103\ -\ \log\ 100)$$

Substituindo os dados fornecidos no exercício, temos:

$$0{,}3010 = t.(2{,}0128 - 2)$$

$$0{,}301 = t.0{,}0128$$

$$\frac{0{,}301}{0{,}0128} = t$$

$$t\ =\ 23{,}5\ anos$$

A população da cidade irá dobrar após aproximadamente 23,5 anos.

4.4) Logaritmos em Química

Determine o tempo que leva para que 1000 g de certa substância radioativa, que se desintegra a taxa de 2% ao ano, se reduza a 200 g. Utilize a seguinte expressão: $Q(t) = Q_0.e^{-r.t}$, em que $Q(t)$ é a massa da substância após certo tempo, Q_0 é a massa inicial da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

Dado: $ln\ 5 = 1{,}6094$.

Resolução:

Sabe-se que: $Q(t) = 200$, $Q_0 = 1000$ e $r = 2\% = 0{,}02$

Fazendo a substituição dos valores da equação dada:

$$Q(t) = Q_0.e^{r.t} \qquad \Rightarrow \qquad 200\ =\ 1000\ .\ e^{-0{,}02.t}$$

Logo:

$$\frac{200}{1000} = e^{-0,02.t} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} = e^{-0,02.t}$$

Aplicando logaritmo natural em ambos os membros e na sequência a propriedade da potência de um logaritmo, temos:

$$\ln\frac{1}{5} = -0,02.t.\ln e \quad \Rightarrow \quad \ln 1 - \ln 5 = -0,02.t$$

Substituindo o dado do exercício, temos que:

$$0 - 1,6094 = -0,02.t \quad \Rightarrow \quad -1,6094 = -0,02.t$$

$$\frac{1,6094}{0,02} = t \quad \Rightarrow \quad t = 80,47 \; anos$$

1000 g da substância radioativa demorarão 80,5 anos aproximadamente para desintegrar-se e reduzir-se em 200 g.

4.5) Logaritmos na Geologia

A escala Richter foi desenvolvida por Charles Richter e Beno Gutenberg, no intuito de medir a magnitude de um terremoto provocado pelo movimento das placas tectônicas. As ondas produzidas pela liberação de energia do movimento das placas podem causar desastres de grandes proporções. Os estudos de Charles e Beno resultaram em uma escala logarítmica denominada Richter, que possui pontuação de 0 a 9 graus. A magnitude (graus) é o logaritmo da medida das amplitudes (medida por aparelhos denominados sismógrafos) das ondas produzidas pela liberação de energia do terremoto. A fórmula utilizada é a seguinte: $M = \log A - \log A_0$, onde M é a magnitude do terremoto, A é a amplitude máxima, A_0 é a amplitude de referência. Para calcular a energia liberada por um terremoto, utiliza-se a seguinte fórmula: $I = \frac{2}{3}.\log\left(\frac{E}{E_0}\right)$, onde I varia de 0 a 9, E é a energia liberada em kW/h e E_0 = 7 x 10^{-3} kW/h (valor fixo).

Comparar as magnitudes e determinar a energia liberada por dois terremotos: um de 6 graus e outro de 8 graus de magnitude, todos na escala Richter.

Resolução:

Como queremos comparar a magnitude de dois terremotos, iremos utilizar a fórmula: $M_1 - M_2 = (\log A_1 - \log A_0) - (\log A_2 - \log A_0)$ que indica a diferença entre a magnitude dos terremotos.

Substituindo os dados do problema na relação, temos:

$$6 - 8 = (\log A_1) - (\log A_2)$$

Aplicando a propriedade da diferença de dois logaritmos:

$$-2 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right)$$

Utilizando a propriedade fundamental dos logaritmos:

$$-2 = \log\left(\frac{A_1}{A_2}\right) \Leftrightarrow 10^{-2} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$10^{-2} = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{A_1}{A_2}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{A_1}{A_2}$$

$A_2 = 100.A_1$

As ondas do terremoto A_2 possuem amplitudes 100 vezes mais intensas do que a do terremoto A_1.

Determinando a energia liberada por cada terremoto, vamos calcular a energia liberada pelo terremoto de grau 6.

$$6 = \left(\frac{2}{3}\right)\log\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$

$$9 = \log\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$

$$10^9 = \left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$

$$10^9.7.10^{-3} = E$$

$$E = 7.10^6 \ kW/h$$

Cálculo da energia liberada pelo terremoto de grau 8:

$$8 = \left(\frac{2}{3}\right)\log\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$

$$12 = \log\left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$

$$10^{12} = \left(\frac{E}{7.10^{-3}}\right)$$

$$10^{12}.7.10^{-3} = E$$

$E = 7.10^9 \ kW/h$

A energia liberada por um terremoto de 6 graus na escala Richter é de 7 x 10^6 kW/h e por um de grau 8 é de 7 x 10^9 kW/h. Embora na escala Richter a diferença seja de 2 graus, a energia liberada pelo terremoto de grau 8 proporciona uma energia liberada 1000 vezes maior do que a de um terremoto de grau 6.

4.6) Logaritmos na Biologia

A altura média do tronco de certa espécie de árvore, que se destina à produção de madeira evolui desde que é plantada, segundo o seguinte modelo matemático: $h(t) = 1,5 + \log_3 (t + 1)$, com *h(t)* em metros e *t* em anos. Se uma dessas árvores foi cortada quando seu tronco atingiu 3,5 m de altura, o tempo transcorrido do momento da plantação até o do corte foi de quantos anos?

Resolução:

Substituindo os dados do problema:

$$3,5 = 1,5 + \log_3 (t + 1)$$

$$2 = \log_3 (t + 1)$$

Aplicando a definição de logaritmo:

$$3^2 = t + 1$$

$$t = 8 \ anos$$

Logo, essa árvore foi cortada 8 anos após o momento da plantação.

4.7) Logaritmos na Física

Uma pessoa com audição normal é capaz de ouvir uma grande faixa de sons de intensidades bem diferentes. O Som pode ser classificado como fraco ou forte quanto à sua intensidade, que é representada por *I*, expressa em W/m^2. Existe um valor mínimo de intensidade de som, abaixo do qual é impossível ouvir algo. A essa intensidade, damos o nome de limiar da audibilidade, que vale em média, 10^{-12} W/m^2. Com base nos valores de intensidade de som, podemos definir o nível de intensidade (β) medido em decibel (dB): $\beta = 10\ .\ \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$, onde: *I* é a intensidade correspondente ao nível β; I_0 é a constante limiar de audição. Determine a intensidade do som correspondente a um nível de 40 dB;

Resolução:

Substituindo os dados do exercício:

$$40 = 10\ .\ \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$$4 = \log\left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$$10^4 = \left(\frac{I}{10^{-12}}\right)$$

$$10^4\ .\ 10^{-12} = I$$

$$I = 10^{-8}\ W/m^2$$

Logo, a intensidade de som correspondente a 40 decibels é de 10^{-8} W/m^2.

Os exemplos citados são apenas alguns entre as muitas aplicações referentes a logaritmos que se estendem a inúmeras áreas. Além das já apresentadas: Comércio, Matemática Financeira, Geografia, Química, Geologia, Biologia, Física, apresenta aplicações também na Medicina, na Música, na Economia, na Astronomia, Engenharia e na Computação.

5- COMO O TEMA LOGARITMO É TRATADO NOS VESTIBULARES DA UEPG

Segundo as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná para a disciplina de Matemática (2008, p. 45),

> A aprendizagem da Matemática consiste em criar estratégias que possibilitam ao aluno atribuir sentido e construir significado às ideias matemáticas de modo a tornar-se capaz de estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar. Desse modo, supera o ensino baseado apenas em desenvolver habilidades, como calcular e resolver problemas ou fixar conceitos pela memorização ou listas de exercícios.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCNEM) para as Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias (2000, p. 42) são destacadas a importância da compreensão dos conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas e a aplicação do conhecimento matemático em situações diversas no contexto da ciência, da tecnologia e das atividades cotidianas.

Apesar do que objetiva as Diretrizes Curriculares para a Educação Básica do Estado do Paraná e os Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio, a Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG), principal Universidade Pública da cidade de Ponta Grossa, trata o tema Logaritmos em seus vestibulares como simples aplicação de regras, sem abordar suas implicações práticas. Na sequência apresentamos alguns exercícios aplicados nos últimos vestibulares da UEPG que demonstram a forma como a Instituição aborda Logaritmos.

Vestibular de Verão 2013

Assinale o que for correto:

01) A soma das soluções da equação $a^{(x+1)} = b^{1/x}$, em x, onde a e b são números reais positivos, tais que $\ln(b) = 2.\ln(a)$ é -1.

02) A solução da equação:

$\log_3 x + \log_3 x^2 + \log_3 x^3 + \ldots \log_3 x^{22} = 759$ é $x = 27$.

04) Se os números positivos $\frac{m}{3}$, $\log_4(2.4^{2m} - 7.4^m - 8)$e $12m$ são, nessa ordem os três primeiros termos de uma progressão geométrica, então m vale $\frac{3}{2}$.

08) Se $y = \dfrac{3^{-1} + 3.6^{-1}}{1 + 2.3^{-1^2}}$, então o valor de y é igual a $\frac{15}{26}$.

16) O conjunto solução da inequação $\dfrac{2}{x^2} < \dfrac{-2}{9-6x}$, com , $x \in N$ é $\{x \in N | x > 1 \;\; e \;\; x \neq 3\}$

Vestibular de Inverno 2012

Quanto aos valores reais de *x* para os quais é verdadeira a igualdade $\log_9(2x-5) + \log_3(\sqrt{3x}) = 1$, assinale o que for correto:

01) Existe uma única solução, que é um número primo.

02) Existem duas soluções cuja soma é positiva.

04) Existem duas soluções cujo produto é negativo.

08) Existe uma única solução fracionária.

16) Existe uma única solução, que é menor do que $\log_5 625$.

Vestibular de Inverno 2011

Sobre a equação $a^{x+1} = b^{\frac{1}{x}}$, onde *a* e *b* são números reais positivos tais que $\log b = 6.\log a$, assinale o que for correto:

01)A soma das soluções da equação é -1.

02) As soluções da equação pertencem ao intervalo [-3, 3].

04) A equação tem duas soluções negativas.

08) O produto das soluções da equação é positivo.

16) Uma das soluções da equação é negativa.

Vestibular de Verão 2011

Sejam *x* e *y* números positivos, tais que $x^3y^{-2} = 128$ e $x^2y^{-1} = 16$. Nesse contexto, assinale o que for correto:

01) $\log_8 \ (x.y) = -\dfrac{1}{3}$

02) $2.\log x - \log y = 16$

04) $3.\log x + 2\log y = \dfrac{1}{x}$

08) $\log_2 y = -1$

16) $\log_{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x}{y}\right) = 6$

Vestibular de Verão 2010

20) A sequência *(a, 4, b, c)* forma uma progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{5}$.

Considerando $\log 2 = 0{,}3$, assinale o que for correto:

01) $\log \ (a.b) = 1{,}9$

02) $\log \left(\frac{a}{b}\right) = 0{,}7$

04) $\log (a.c) = 0{,}5$

08) $\log a = 1{,}3$

16) $\log c = -0{,}8$

A Universidade Estadual de Ponta Grossa aplica repetidamente o mesmo tipo de cobrança sobre logaritmos em seus vestibulares. A pesquisa apresentada neste trabalho foi feita com as provas dos últimos 5 anos. Verificamos que essa tendência se repete nos vestibulares dos anos anteriores.

6. CONCLUSÃO

A matemática é apresentada nos anos escolares como uma disciplina complicada, difícil de ser entendida e que surgiu da mente brilhante de alguns gênios do passado e que somente os gênios do presente conseguem decifrá-la. É muito comum encontrarmos alunos que procuram cursos universitários que passem “longe” da matemática, pois não vêem uma utilização prática para aquele monte de regras e propriedades que fingiram aprender ao longo dos anos; É como se a matemática fosse fechada em si. Como se ao escolherem um curso superior teoricamente sem cálculo estivessem livres dela para sempre. As várias aplicações de logaritmos apresentadas neste trabalho mostram que o estudo e compreensão da matemática são necessários em diversas áreas.

Os livros didáticos não ajudam na mudança desse modo de pensar. Apresentam o estudo dos logaritmos de forma mecânica com poucas (às vezes nenhuma) situações problemas e não despertam no aluno a curiosidade e interesse para esse estudo. É importante salientar ao aluno que logaritmos são muito mais que uma ferramenta matemática, que seu uso transcende a regras, conceitos e propriedades e que seu estudo permite o avanço de diversas ciências e novas descobertas tecnológicas.

Apesar da diversidade de áreas abrangidas pelos logaritmos seu estudo é menosprezado durante o ensino médio. Suas aplicações não são estudadas. Seu ensino baseia-se me uma coletânea de regras desvinculadas da realidade. O aluno passa pelo Ensino Médio sem entender o porquê do seu estudo.

Se a matemática se dispõe a entender e explicar as coisas que há no mundo (conforme os PCNs apresentam a etimologia da palavra matemática, (BRASIL, 2007, p.17), cabe aos professores de matemática que trabalham com o Ensino Médio fazerem o papel de mediadores nessa função. Logo, não podemos deixar de lado o “para que” se estuda os logaritmos. É mister que levemos aos alunos o porquê os estudamos.

Diante do exposto, neste trabalho foi proposto aliar os conhecimentos adquiridos para resolver exercícios de logaritmos com situações onde esses conhecimentos possam ser aplicados. Para tanto, foi apresentado uma pequena coletânea de situações que utilizam os logaritmos na sua resolução. Essas aplicações trazem para o universo da sala de aula situações palpáveis que necessitam das aplicações dos logaritmos. Isso torna mais fácil para o aluno a compreensão de suas diversas regras e propriedades que ele aprendeu. Também o tornará mais consciente de que o que se estuda no ensino médio, está vinculado às novas tecnologias e conhecimentos; e no caso especial dos logaritmos, está na raiz da resolução de inúmeras situações nas diversas áreas de ensino e trabalho.

Para dar melhor enfoque ao problema da aprendizagem dos logaritmos, foi feito um levantamento sobre a forma como a UEPG (Universidade Estadual de Ponta Grossa) maior e mais antiga Instituição de Ensino Público da região, aborda o tema logaritmos em seus vestibulares. Observamos que, assim como em muitos livros didáticos, a Instituição não se preocupa em colocar em suas provas de ingresso aos cursos de graduação, situações do cotidiano onde os conhecimentos dos alunos sobre logaritmos possam ser verificados. As questões cobram unicamente a aplicações das regras sem qualquer contextualização, reforçando assim a mecanização da resolução em detrimento do raciocínio.

Podemos dizer que o ensino de matemática tem como função desenvolver o raciocínio lógico do aluno, aguçando a sua criatividade e tornando-o capaz de resolver problemas que ele encontrará no mundo fora da escola. Não fazer isso é deixar de cumprir uma parte fundamental do nosso papel de educador. Cumprindo nossa função com disposição e interesse, podemos tornar o ensino da Matemática mais palpável, mais interessante e consequentemente, mais prazeroso.

REFERÊNCIAS

1- BARICHELLO, Leonardo. **O que é logaritmo.** Série O que é? Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE). MEC/UNICAMP. Campinas, 2007.

2- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação a Distância. ***Objetos de aprendizagem: uma proposta de recurso pedagógico***. Organização: Carmem Lúcia Prata, Anna Christina A. de Azevedo Nascimento. Brasília : MEC, SEED, 2007.

3- BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. SEF. Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília, 2000.

4- BRITO. Carla. et al. **Exponencial VS Logarítmica.** Um pouco de história. 2000. Disponível em:<http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm44/historia.htm> Acesso em 25/01/2014.

5- EVES, H..**Introdução à história da matemática**, tradução: Hygino H. Domingues. 3ª reimpressão. Campinas, SP: UNICAMP: 2008

6- FERRARI. Anderson. **Aplicação do Número "e" e do Logaritmo Natural em Fenômenos da Natureza**. 2013, 45 f, Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional – ProfMat) – Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2013.

7- IEZZI, G., *et all* **– Fundamentos de Matemática Elementar 2**. São Paulo, Ed Atual, 1985.

8- IEZZI, G., *et all*. **Matemática: Ciências e Aplicações**. Ensino Médio, v. 1, pp.190-217. São Paulo, Saraiva, 2010.

9- KAJ, Nielsen L. **Tábuas Logarítmicas e Trigonométricas**. 1974 p. 9

10- LIMA, Elon Lages. **Logaritmos**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2010.

11- LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino**. Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 2007.

12- MACHADO, Nilson J. Sobre a ideia de competência. In PERRENOUD, Phillippe (Org.) **As competências para ensinar no século XXI:** a formação dos professores e o desafio da avaliação? (Trad. Cláudia Schilling e Fabiana Murad). Porto Alegre: Artmed, 2002.

13- PCNEM. **Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio**. Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias. Brasília, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/ arquivos/pdf/ ciencian.pdf >. Acesso em 11/02/2014.

14- PEREIRA. Josiel P. da. **Logaritmos e Aplicações**. 2013, 57 f, Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional – ProfMat) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2013.

15- PITOMBEIRA, J.B., ROQUE, T.M. **Tópicos de história da Matemática**. coleção PROFMAT. 1 ed**. Rio de Janeiro: SBM, 2012**

16- RIBEIRO, A. et all. **Exponenciais e Logaritmos**. Instituto de Matemática UFBA, 2007.

17- SAMPAIO. João Carlos V. **Logaritmos e História.** São Carlos. Disponível em **<**http://www.dm.ufscar.br/sampaio/logshistoria.PDF > Acesso em 18/05/2014.

18- SILVA, Marcos N. P. da. **Logaritmos**. Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/logaritmos.htm> Acesso em 02/02/2014.

19- SMOLE, K. S; DINIZ, M. I. **Matemática**. Ensino Médio, v.1, pp. 215-228. São Paulo, Saraiva, 2005.

20- SÔNEGO, D; SIMÕES, M**. A coisa sem sentido tem sentido há tempos.** Cálculo: Matemática para todos. Osasco (SP), ano 3, número 33, outubro de 2013.

21- THIENGO. V. **Ensino de Exponenciais e Logaritmos no Ensino Médio.** 2013, 50 f, Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional – ProfMat) – Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro, 2013.

22- XAVIER, Luciano. **Logaritmos: Construção da definição geométrica com o uso do Geogebra**. 2013, 55 f, Dissertação (Mestrado em Matemática Profissional – ProfMat) – Universidade Estadual do Paraná, Maringá, 2013.