Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Teorema de Marden

Mário Jonas da Silva Santos

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	**MÁRIO JONAS DA SILVA SANTOS**				
E-mail:	**Mariojonas27@gmail.com**				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [**X**]Sim [ ] Não					
Vínculo empregatício do autor	**PROFESSOR DO COLÉGIO SANTO AGOSTINHO**				
Agência de fomento:				Sigla:	
País:	**BRASIL**	UF:	**GO**	CNPJ:	
Título:	**TEOREMA DE MARDEN**				
Palavras-chave:	**TEOREMA DE MARDEN, POLINÔMIOS COM COEFICIENTES COMPLEXOS.**				
Título em outra língua:	**MARDEN'S THEOREM MARDEN.**				
Palavras-chave em outra língua:	**MARDEN'S THEOREM, POLYNOMIALS WITH COMPLEX COEFFICIENTS.**				
Área de concentração:	**MATEMÁTICA DO ENSINO BÁSICO**				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	**26/09/2014**				
Programa de Pós-Graduação:	**MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA ProfMat-IME-UFG**				
Orientador (a):	**DR. PAULO HENRIQUE DE AZEVEDO RODRIGUES**				
E-mail:	**paulo_rodrigues@ufg.br**				
Co-orientador(a):*	**Não houve**				
E-mail:	**Não houve**				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [**X**] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Mário Jonas da Silva Santos

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 26 / 10 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Mário Jonas da Silva Santos

Teorema de Marden

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique

Goiânia

2014

Ficha catalográfica elaborada
Automaticamente com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Santos, Mário Jonas da Silva.
Teorema de Marden [manuscrito] / Mário Jonas da Silva Santos. - 2014.
lxi, 61 f.

Orientador: Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues.
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Goiânia, 2014.
Bibliografia.
Inclui siglas, tabelas, inclui lista de figuras.

1.Teorema de Marden 2.Polinômio com coeficientes complexos. I. Rodrigues, Dr. Paulo Henrique de Azevedo, Orient. II. Titulo

Mario Jonas da Silva Santos

Teorema de Marden

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de setembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Paulo Henrique de Azevedo Rodrigues
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca - orientador

Silvia Cristina Belo e Silva

Prof.ª. Drª. Sílvia Cristina Belo e Silva
Membro, MAF/PUC-GO

Prof. Dr. Fabiano Fortunato Teixeira dos Santos
Membro, Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Mário Jonas da Silva santos nasceu em Fazenda Nova Goiás em 1982, em 2011 graduou-se em Matemática pela Universidade Estadual Vale do Acaraú.

Dedico este trabalho a todos os meus familiares e amigos que sempre estiveram do meu lado me dado o suporte necessário para o cumprimento de mais esse desafio.

Agradecimentos

Agradeço a Deus, primeiramente, pela minha vida, saúde e ter me abençoado para chegar nesse momento. Meus sinceros agradecimentos a meu orientador Professor Dr. Paulo Henrique pela dedicação, paciência e orientação desse trabalho. Muito obrigado Professor!! Também a todos os professores que contribuiram com a minha formação profissional, especialmente ao professor Valdivino que ministrou a disciplina de Estatística com muita dedicação, e isto me proporcionou um aprimoramento em meus conhecimentos e o resultado disso foi a minha aprovação em um concurso publico na area de Estatística e Probabilidade.

Quero agradeçer a minha esposa, Ester, pela ajuda, compreensão, carinho e paciência demonstrada ao longo desses anos. Também a meus pais Cleidemar e Aparecida. Me desculpe pelos momentos que tive que me ausentar para estudar. Vocês são muito importantes na minha vida.

Agradeçer a todos os amigos do mestrado e em especial a Vitor Braga, Gleisson Santana e José Moraes que proporcionaram embates matemáticos que contribuiram para um melhor aprendizado. Não posso deixar de agradecer a SBM, pela criação deste Curso em Rede Nacional, a UFG, pelo oferecimento deste Curso em Rede Nacional.

Resumo

Vamos começar fazendo uma explanação de alguns conteúdos importantes. Começando com o conjunto dos números complexos, polinômios, elipse, derivada de uma função na variável complexa e conguência de triângulos em seguida vamos enuciar três lemas e demonstrá–los para então enunciar e demonstrar o Teorema de Marden. Ao final teremos uma proposta de aula em forma de oficina matemática, aplicada para alunos da 3ª Série do ensino médio.

Palavras-chave

Teorema de Marden, Polinômios com coeficientes complexos.

Abstract

Let's start making an explanation of some important content. Starting with the set of complex numbers, polynomials, ellipse, derivative of a function in the complex variable and congruence triangles then we enunciate three lemma and demonstrates for them then enunciate and prove Theorem Marden. At the end we will have a proposal to class in the form of math workshop, students applied for the 3rd Series of high school.

Keywords

Marden's Theorem, Polynomials with complex coefficients .

Lista de Figuras

Sumário

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

Observando que o ensino da matemática ainda funciona na forma do "decoreba", ou seja, o professor faz exemplos e propõe uma série de exercícios parecidos para que os alunos memorizem a fórmula ou o conteúdo ensinado. Pensando neste fato, e tentando encontrar uma maneira diferente de ensinar alguns conteúdos e tornando-os mais significativos, realizamos este trabalho. Que tem por objetivo discutir a relação entre as raízes de um polinômio de coeficientes complexos de grau 3 e as raízes de sua derivada.

Em matemática, as indagações instigam os alunos, e também professores, a expandirem seus conhecimentos e a buscarem conhecimentos novos a respeito do tema ensinado, e essa busca torna o processo ensino-aprendizagem muito mais prazeroso e proveitoso. Pensando nisso, esse trabalho tem como ponto de partida a seguinte indagação: Considere um polinômio q, com coeficientes complexos, de 3º grau, cujas raízes são não colineares, ou seja, as raízes são os vértices de um triângulo T. O que podemos dizer das raízes da derivada desse polinômio? Toda a abordagem do trabalho é em torno dessa temática, agrupando todos os pressupostos teóricos e epstemológicos para que essa questão seja respondida, e mais, apresentando sugestões de aplicações e de aulas para que esse assunto seja abordado na escola com alunos do ensino médio.

A questão levantada no parágrafo anterior é no mínimo curiosa, e desperta de imediato o desejo de investigação sobre o assunto. O que se verifica é que as raízes do polinômio q são pontos internos ao triângulo T, esses pontos são os focos de uma elipse E inscrita no triângulo T, e mais, ela tangência os lados de T nos seus respectivos pontos médios. Essa elipse é denominada de *Elipse de Steiner* e este resultado é denominado de *Teorema de Marden*.

Todo o trabalho foi estruturado para demonstrar o resultado apresentado acima como Teorema de Marden e propor sujestões de aplicações do estudo em sala de aula. Para isto apresentamos no capítulo dois estudos preliminares sobre coordenadas no plano, elipse, números complexos, equações polinômiais e sobre derivadas, para dar o suporte teórico para demonstração do teorema. No capítulo três fazemos a demonstração do teorema usando uma linguagem voltada para alunos do ensino médio. E fechamos o trabalho apresentando no capítulo quatro oficinas pedagógicas e sugestões de aulas sobre Teorema de Marden.

Esperamos que esse trabalho possa ser um referêncial de estudo para professores e alunos que buscam aprofundar seus conhecimentos sobre o Teorema de Marden.

Capítulo 2

PRELIMINARES

2.1 COORDENADAS NO PLANO CARTESIANO

Um sistema de coordenadas (cartesianas) no plano Π consiste num par de eixos perpendiculares OX e OY contidos nesse plano, com a mesma origem O. OX chama-se o eixo das abcissas e OY é o eixo das ordenadas. O sistema é indicado com a notação OXY.

A escolha de um sistema de coordenadas no plano Π permite estabelecer uma correspondência biunívoca $\Pi \to \mathbb{R}^2$ onde $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) de números reais. A cada ponto p do plano Π corresponde um par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Os números x e y são as coordenadas do ponto P relativamente ao sistem OXY: x é a abcissa e y é a ordenada de P. As coordenadas x, y do ponto P são definidas do seguinte modo:

Se P estiver sobre o eixo OX, o par ordenado que lhe corresponde é $(x, 0)$, onde x é a coordenada de P no eixo OX. Se P estiver sobre o eixo OY, a ele corresponde o par $(0, y)$, onde y é a coordenada de P nesse eixo. Se P não está em qualquer dos eixos, traçamos por P uma paralela ao eixo OY, a qual corta OX no ponto de coordenada x e uma paralela ao eixo OX, a qual corta OY no ponto de coordenada y. Então x será a abcissa e y a ordenada do ponto P. Ou seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ é o par ordenado de números reais que corresponde ao ponto P.

O ponto O, origem do sistema de coordenadas, tem abcissa e ordenada ambas iguais

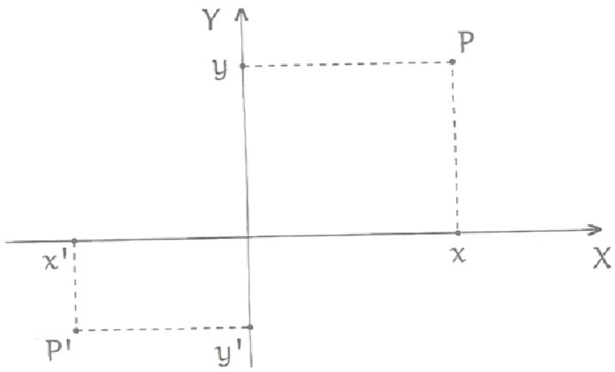

Figura 2.1: Plano Cartesiano

a zero. Assim, a ele corresponde o par $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Se x é a abcissa e y é a ordenada do ponto P, o ponto P' de coordenadas $(x,0)$ chama-se a projeção de P sobre o eixo OX enquanto o ponto P'', de coordenadas $(0,y)$ é chamado a projeção de P sobre o eixo OY.

O emprego de coordenadas no plano serve a dois propósitos que se complementam. O primeiro é, o de atribuir um significado geométrico a fatos de natureza numérica, como o comportamento de uma função real de uma variável real, que ganha muito em clareza quando se olha para seu gráfico. O segundo propósito do uso das coordenadas vai no sentido oposto: recorre-se a elas a fim de resolver problemas da Geometria. Este é o objetivo da Geometria Analítica. No primeiro caso, a ênfase recai sobre a correspondência $\mathbb{R}^2 \to \Pi$ e no segundo sobre sua inversa $\Pi \to \mathbb{R}^2$. Na prática, esses dois pontos de vista se entrelaçam: para estabelecer os fatos iniciais da Geometria Analítica usam-se resultados básicos da Geometria Euclidiana.

2.1.1 Distância Entre Dois Pontos

Se os pontos $P = (x,y)$ e $Q = (x',y)$ têm a mesma ordenada y então a distância $d(P,Q)$ entre eles é igual à distância $|x'-x|$ entre suas projeções sobre o eixo OX. Analogamente, se $P = (x,y)$ e $Q' = (x,y')$ têm a mesma abcissa x então $d(P,Q') = |y'-y|$ distância entre as projeções de P e Q sobre o eixo OY

Se entretanto, $P = (x,y)$ e $Q = (u,v)$ têm abcissas e ordenadas diferentes então,

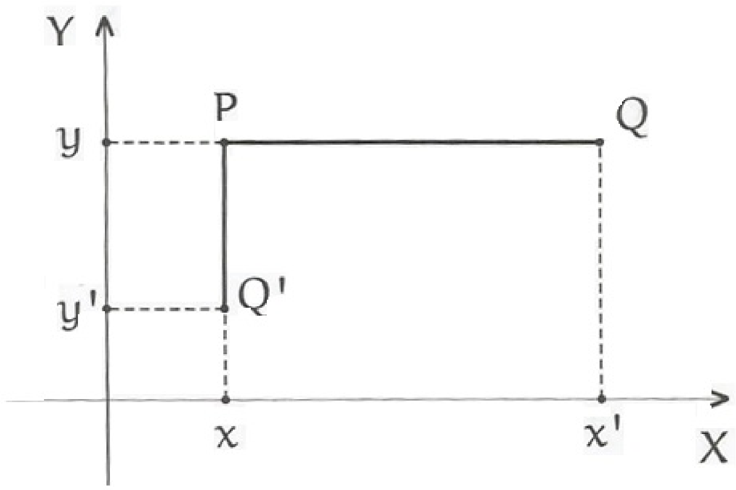

Figura 2.2: Distância entre pontos

considerando o ponto $S = (u, y)$, vemos que PQS é um triângulo retângulo cuja hipotenusa é PQ. Como P e S têm a mesma ordenada, enquanto S e Q têm a mesma abcissa, segue-se que

$$d(P, Q) = |x - u| \ e \ d(S, Q) = |y - v|$$

Pelo Teorema de Pitágoras, podemos escrever

$$d(P, Q)^2 = d(P, S)^2 + d(S, Q)^2$$

Portanto,

$$d(P, Q)^2 = (x - u)^2 + (y - v)^2$$

logo

$$d(P, Q) = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2}$$

Em particular, a distância do ponto $P = (x, y)$ à origem $O = (0, 0)$ é

$$d(O, P) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

A fórmula da distância entre dois pontos, dada em termos das coordenas desses pontos, serve de partida para um grande número de resultados da Geometria Analítica.

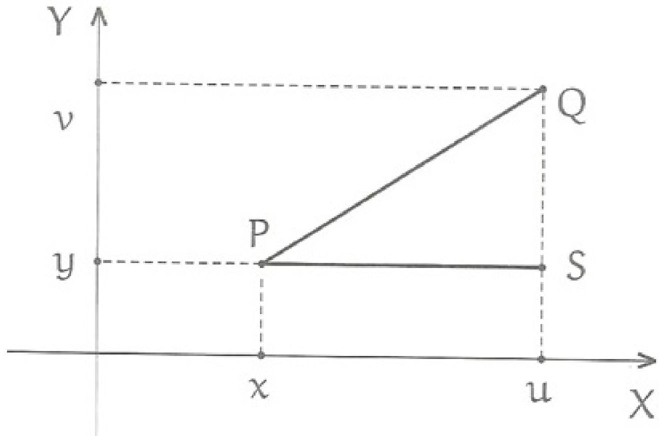

Figura 2.3: Plano Cartesiano

Exemplo 2.1.1. . *Se o centro de uma circunferência C é o ponto $A = (a, b)$ e o raio é o número real $r > 0$ então, por definição, um ponto $P = (x, y)$ pertence a C se, e somente se, $d(A, P) = r$.*

Pela fórmula da distância entre dois pontos, vemos que

$$C = (x, y); (x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

Diz-se então que,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

é a equação da circunferência de centro no ponto $A = (a, b)$ e o raio r.

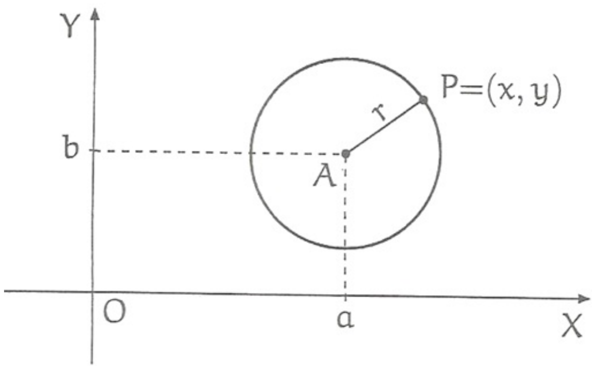

Figura 2.4: Circunferência

2.2 ELIPSE

Uma elipse é obtida como uma secção cônica, se o plano secante não for paralelo a nenhuma geratriz e, neste caso, o plano intercepta todas as geratrizes como na figura 2.5. Um caso especial da elipse é a circunferência, conforme mostra na figura 2.5 à direita, formada quando o plano secante que intercepta todas as geratrizes também for perpendicular ao eixo do cone. Vamos definir agora a elipse como um conjuntos de pontos num plano.

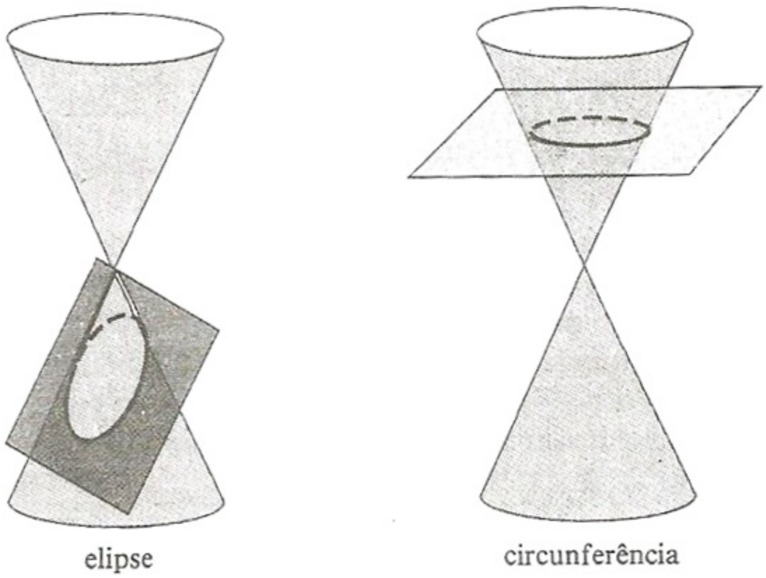

Figura 2.5: Elipse

Elipse é o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distância a dois pontos fixos é constante. Os pontos fixos são chamados de focos.

Seja $2c$ a distância não orientada entre os focos, onde $c > 0$. Para obter a equação de uma elipse escolhemos o eixo x como a reta que passa pelos focos F e F' e escolhemos a origem como sendo o ponto médio do segmento FF'.

Os focos F e F' têm coordenadas $(c, 0)$ e $(c, 0)$, respectivamentoe. Seja $2a$ a soma constante mencionada na definição. Então, $a > c$ e o ponto $P(x, y)$ da Figura 3 será um ponto qualquer da elipse se e somente se $|FP| + |F'P| = 2a$.

Como

$$|FP| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ e } |F'P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2},$$

P está sobre a elipse se e somente se

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

Vamos simplificar essa equação escrevendo-a de tal maneira que um radical fique à esquerda e outro à direita e, em seguida, elevaremos ao quadrado ambos os membros. Assim obtemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \\
(x-c)^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + (x+c)^2 + y^2 \\
x^2 - 2cx + c^2 + y^2 &= 4a^2 - 4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + x^2 + 2cx + c^2 + y^2 \\
4a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 4a^2 + 4ax \\
\sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= a + \frac{c}{a}x \\
x^2(1 - \frac{c^2}{a^2}) + y^2 &= a^2 - c^2 \\
(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 &= a^2(a^2 - c^2) \\
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} &= 1
\end{aligned}$$

Como $a > c$, $a^2 - c^2 > 0$ e podemos fazer $b^2 = a^2 - c^2$
Substituindo essa equação em

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a^2 - c^2)} = 1$$

temos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(b^2)} = 1$$

Assim mostramos que as coordenadas (x, y) de qualquer ponto P sobre a elipse satisfazem a equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

.

2.3 NÚMEROS COMPLEXOS

2.3.1 Um Pouco de História

Em 1545, Jerônimo Cardano (1501 – 1576), em seu livro "Ars Magna"(A Grande Arte), mostrou o método para resolver equações do terceiro grau que é hoje chamado de Fórmula de Cardano. Bombelli ($1526-1572$), discípulo de Cardano, em sua "Álgebra", aplicou a fórmula de Cardano à equação $x^3 - 15x - 4 = 0$ obtendo

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Embora não se sentisse completamente a vontade em relação às raízes quadradas de números negativos, Bombelli operava livremente com elas, aplicando–lhes as regras usuais da Álgebra.

No caso, Bombelli mostrou que

$$\begin{aligned}(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3.2^2\sqrt{-1} + 3.2(\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\ &= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\ &= 2 + 11\sqrt{-1} \\ &= 2 + \sqrt{-121}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$$

e, analogamente,

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$$

Portanto, o valor de $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Como 4 é realmente raiz da equação, a partir de Bombelli os matemáticos passaram a usar as raízes quadradas de números negativo, embora se sentissem um pouco desconfortáveis com isso. Apenas no século XIX, quando Gauss $(1787 - 1855)$ divulga a represent ção geométrica dos números complexos é que essa sensação de desconforto desaparece.

2.3.2 A Forma Algébrica

Um número complexo é um número da forma $x + yi$, com x e y reais e $i = \sqrt{-1}$. Fixando um sistema de coordenadas no plano, o complexo $z = x + yi$ é representado pewlo ponto $P(x, y)$. O ponto P é chamado de *imagem* do complexo z. Como a correspondência entre os complexos e suas imagens é um–a–um, frequentemente identificaremos os complexos a suas imagens escrevendo $(x, y) = x + yi$ O plano no qual representamos os complexo é chamado de plano de Argand–Gauss.

Os números representados no eixo dos x são da forma $(x, 0) = x + 0i$, isto é, são números reais. Por esse motivo, o eixo dos x é chamdo de *eixo real.*

Os números representados no eixo dos y são da forma $(0, y) = 0 + yi$, isto é, são números reais. Esses complexos são chamdos de números *imaginários puros.*

As coordenadas x, y do complexo $z = x+yi$ são chamadas respectivamente de parte real e parte imaginária de z_0. Escreve-se $Re(z) = x$ e $im(z) = y$.

Operações na forma algébrica

Adição

Seja $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, definimos adição de $z_1 + z_2$ por:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \\ &= (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i \end{aligned}$$

Multiplicação

Dados $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, definimos a multiplicação de $z_1 \cdot z_2$ por:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2 i + x_2 \cdot y_1 i + x_2 \cdot y_2 i^2 \\ &= (x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot y_2) + (x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i \end{aligned}$$

O conjugado do complexo $z = x + yi$, x e y reais, é o complexo $\overline{z} = x - yi$. Note que o produto

$$z.\overline{z} = (x + yi).(x - yi) = x^2 - y^2 i^2 = x^2 + y^2$$

é um número real.

Divisão

Dados $z_1 = x_1 + y_1 i$ e $z_2 = x_2 + y_2 i$, definimos a divisão de z_1 por z_2 como:

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \\
&= \frac{x_1 + y_1 i}{x_2 + y_2 i} \cdot \frac{x_2 - y_2 i}{x_2 - y_2 i} \\
&= \frac{(x_1 \cdot x_2 - x_2 \cdot y_2) + (-x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)i}{x_2^2 + y_2^2}
\end{aligned}$$

2.3.3 A Forma Trigonométrica

Suponhamos fixado um sistem de coordenadas no plano.

Vamos agora representar cada complexo $z = x + yi$ não mais pelo ponto $P = (x, y)$, mas sim pelo vetor $\overrightarrow{OP}(x, y)$.

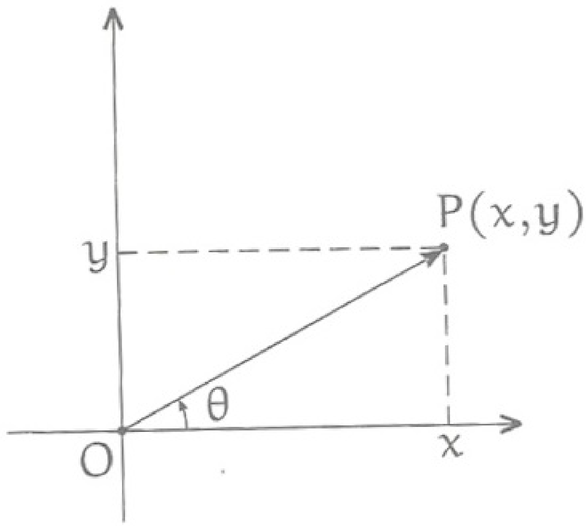

Figura 2.6: Forma Trigonométrica

O módulo de um complexo $z = x + yi$ é definido como sendo o módulo do vetor que representa, ou seja, é o valor de r da distância de usa imagem P à origem. Portanto,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Um *argumento* de um complexo $z \neq 0$, $z = x + yi$, é, por definição, qualquer dos ângulos $\theta = arg z$ que o vetor $\overrightarrow{OP}$ forma com o semi–eixo positivo dos x. É claro que todo complexo não–nulo tem uma injinidade de argumentos, dois quaisquer deles diferindo entre si por um múltiplo de 2π. O argumento que pertence ao intervalo $(-\pi, \pi]$ é chamdo de argumento principal e é representado por Arg z.

Se θ é um argumento de $z = x + yi$ então $x = r.cos\theta$ e $y = r.sen\theta$, o que permite escrever $z = x + yi = r.cos\theta + r.sen\theta = r(cos\theta + sen\theta)$, que é a chamada *forma trigonométrica* ou *polar* do complexo Z.

Exemplo 2.3.1. *Escreva a forma trigonométrica e represente graficamente o número complexo* $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Resolução: Vamos primeiramente determinar o módulo de z,

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

Além disso,

$$cos\theta = \frac{x}{r} = -\frac{1}{2} \; e \; sen\theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Logo, um dos valores possíveis para θ é $\frac{2\pi}{3}$ e a forma trigonométrica de z é

$$z = 2\left(cos\frac{2\pi}{3} + isen\frac{2\pi}{3}\right)$$

2.4 EQUAÇÕES POLINOMIAIS

2.4.1 Polinômios Complexos

Uma função $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é uma função polinomial complexa quando existem números complexos $a_0, a_1, ..., a_n$ tais que

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

para todo $x \in \mathbb{C}$. Os números $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são os *coeficienter* da função polinomial. Se $a_n \neq 0$, dizemos que p tem grau n. Se um número complexo α é tal que $p(\alpha) = 0$, dizemos que α é *raiz* de p.

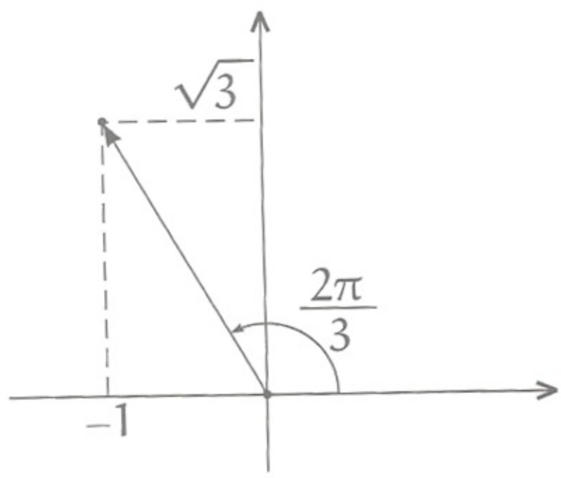

Figura 2.7: Exemplo

Exemplo 2.4.1. *Seja $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que $p(x) = x^2 + 1$. A restrição de p para $\mathbb{R}$ é a função quadrática $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$.*

Evidentemente, $f(x) > 0$ para todo x, o que mostra que f não tem raízes e que p não tem raízes reais. Mas p é definida em todo o conjunto dos números complexos. Em particular $p(i) = i^2 + 1 = -1 + 1 = 0$. Portanto i é uma raiz complexa de p.

Somas e produtos de funções polinomiais complexas são, também, funções polinomiais complexas. No caso particular de ambas funções tem todos os seus coeficientes reais, a soma e o produto também têm coeficientes reais. Note que, se p e q são funções polinomiais, então o grau de $p + q$ é menor do que ou igual ao maior entre os graus de p e q, enquanto o grau de pq é a soma dos graus de p e q. Quando uma função polinomial p pode ser expressa como o produto $p = qr$ das funções polinomiais q e r, dixzemos que p é *divisível* por q e r.

Exemplo 2.4.2. *A função polinomial $P(x) = x^n - \alpha^n$ é divisível por $x - \alpha$, onde α um número complexo qualquer*

Basta verificar que

$$x^n - \alpha^n = (x - \alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + ... + \alpha^{n-2} x + \alpha^{n-1})$$

Teorema 2.4.1. *Se o número complexo α é raiz de uma função polinomial p, então $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$*

Demonstração. Como $p(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x) - p(\alpha) \\ &= (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) - (a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) \\ &= a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots + a_1(x - \alpha) \end{aligned}$$

Do exemplo anterior temos que cada uma das parcelas da expressão acima é divisível por $x - \alpha$. Logo $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$; isto é, existe um polinômio q tal que $p(x) = q(x)(x - \alpha)$.

De modo mais geral, se os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$, são raízes distintas de uma função polinomial p de grau n, então existe uma função polinomial q de grau $n - k$ tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ \cdots\ (x - \alpha_k)q(x)$$

□

Podemos observar que uma função polinomial complexa de grau n pode ter, no máximo, n raízes.

Note também que uma função polinomial não pode ser nula para todo valor de x, a menos que todos os seus coeficientes sejam nulos. Isto é p deve ser da forma $p(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots$.

De fato, se algum coeficiente de p fosse não-nulo, então p teria um coeficiente a_n não-nulo de índice máximo; ou seja, teria grau n. Portanto, p teria no máximo n raízes, o que contradiz o fato de p se anular para todos os valores de x.

A função polinomial p tal que $p(x) = 0$ para todo x é chamada de *função polinomial identicamente nula*. Observe que, de acordo com nossa definição, p não possui grau, por não possuir nenhum coeficiente não nulo.

Tomemos agora duas funções polinomiais p e q. Para que p e q sejam iguais, isto é, sejam tais que $p(x) = q(x)$ para todo $x \in \mathbb{C}$, sua diferença $p - q$ tem que ser identicamente nula. Mas, como vimos, isso ocorre somente se todos os coeficientes de $p - q$ são nulos; portanto, *duas funções polinomiais p e q são iguais se, e somente se, p e q têm coeficientes respectivamente iguais.*

Chamamos de polinômio complexo a uma expressão formal do tipo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

onde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são números complexos e X é um símbolo, chamado de indeterminada. Quando dizemos "expressão formal" queremos dizer que, essencialmente, vemos um polinômio como a lista ordenada $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ de seus coeficientes e que somamos e multiplicamos polinômios através das regras usuais de multiplicação de monômios e adição de monômios semelhantes. Em particular dizemos que dois polinômios são iguais quando possuem exatamente os mesmos coeficientes. A todo polinômio complexo

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0,$$

corresponde a uma função polinomial complexa $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tal que

$$p(X) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Note que o conceito de polinômio contempla apenas a lista de seus coeficientes e a forma pela qual os somamos e multiplicamos; quando nos referimos à função polinomial, passamos a estar interessados na correspondência entre números complexos estabelecida pelo valor que a função assume em cada ponto. É claro que a todo polinômio corresponde uma única função polinomial; por outro lado, vimos que duas funções polinomiais só são iguais quendo têm a mesma lista de coeficientes. Assim, a uma fução polinomial também corresponde um único polinômio. Desse modo, existe uma correspondência bi-unívoca entre funções polinomiais e polinômios, o que nos permite, nos referirmos indistintamente ao polinômio p por a função polinomial p.

Exemplo 2.4.3. *Verificar se o polinômio* $p(x) = 9x^3 - 3x^2 - 5x - 25$ *é divisível por* $3x - 5$

Queremos verificar se existe um polinômio q tal que

$$p(x) = (3x - 5)q(x).$$

Observamos inicialmente que, caso exista o polinômio q, ele deve ser do segundo grau, da forma $q(x) = ax^2 + bx + c$. Isto é, procuramos números a, b e c tais que:

$$9x^3 - 3x^2 - 5x - 25 = (3x - 5)(ax^2 + bx + c).$$

Efetuando o produto do lado direito, obtemos:

$$9x^3 - 3x^2 - 5x - 25 = 3ax^3 + (3b - 5a)x^2 + (3c - 5b)x - 5c.$$

Portanto, deve–se ter:

$$\begin{aligned} 3a &= 9 \\ 3b - 5a &= -3 \\ 3c - 5b &= -5 \\ -5c &= -25. \end{aligned}$$

Na 1ª equação, obtemos $a = 3$. Substituindo na 2ª, vem $b = 4$. Finalmente, da 3ª vem que $c - 5$. Como a 4ª equação é satisfeita por esses valores, concluímos que a resposta é afirmativa. Isto é, $p(x)$ é divisível por $3x - 5$ e $q(x) = 3x^2 + 4x + 5$.

2.4.2 Divisão de Polinômios

Se um polinômio p pode ser escrito como o produto $p = p_1p_2$ de dois polinômios p_1 e p_2, então um complexo α é raiz de p se, e somente se, α é a raiz de p_1 ou raiz de p_2, já que

$$p_1(x)p_2(x) = 0 \Rightarrow p_1(x) = 0 \text{ } ou \text{ } p_2(x) = 0.$$

Cosndideremos, então, a seguinte questão: dados polinômios D e d, como verificar se D é divisível pro d ? Uma alternativa é repetir o que fizemos no exemplo anterior e verificar a divisibilidade de D por d tentando encon trar os coeficientes de um polinômio q tal que $D = qd$.

Uma outra alternativa é olharmos o problema de um ponto de vista mais geral, que nos leva a um processo algorítmico de divisão de polinômios, através do qual podemos obter q ou demonstrar que D não é divisível por d. Isso é inteiramente análogo ao que ocorre com os números inteiros: a form mais prática de verificar se o número 248.987 é divisível pro 211 consiste em efetuar a divisão e verificar se o resto é ou não igual a zero.

Vamos recordar o conceito de divisão de números inteiros. Dado um inteiro dividendo D e um inteiro divisor $d \neq 0$, dividir D por d consiste em encontar inteiros q e r, onde $0 \leq r \leq |d| - 1$, chamados, respectivamente, de quaciente e resto da divisão, que cumpram $D = dq + r$.

Da mesma forma, dividir um polinômio complexo d por um polinômio complexo d não identicamente nulo consiste em obter polinômios complexos q e r, chamados respectivamente, de quociente e resto da divisão, que cumpram:

$$grau(r) < grau(d) \text{ } e \text{ } D = dq + r. \tag{2.1}$$

Teorema 2.4.2. *o quociente e o resto da divisão de um polinômio D por um polinômio d, não identicamente nulo, existem e são únicos.*

Demonstração. Comecemos com a unicidade. Suponhamos que existam dois pares de polinômios (q_1, r_1) e (q_2, r_2) satisfazendo a definição de divisão de D por d. Isto é:

$$D = dq_1 + r_1$$

$$D = dq_2 + r_2.$$

Temos

$$dq_1 + r_1 = dq_2 + r_2$$

e

$$d(q_1 - q_2) = r_2 - r_1$$

Note que o polinômio do lado direito tem grau menor que o grau de d, por ser a diferença de dois polinômios de grau menor do que o grau de d. Já o polinômio da esquerda tem grau maior ou igual ao de d, a menos que $(q_1 - q_2)$ seja identicamente nulo. Logo, a identidade ocorre somente quando os polinômios em ambos os lados são identicamente nulos. Portanto, temos, necessariamente, $q_1 = q_2$ e $r_1 = r_2$.

Para demonstração da existência, empregaremos um processo algorítmico através do qual reduziremos sucessivamente o grau do dividendo até que ele se torne menor que o do divisor e a divisão se torne menor que o do divisor e a divisão se torne imediata. Note que, se D tem grau menor que d, então certamente D pode ser dividido por d, já que $q = 0$ e $r = D$ cumprem as condições em 2.1. Suponhamos, então, que D tenha grau n e d tenha grau m. Se $m > n$, não há nada a fazer: o quociente da divisão é $q = 0$ e o resto é $r = D$. Caso contrário, consideremos os termos $a_n x^n$ e $b_m x^m$, que são os termos de mais alto grau em D e d, respectivamente. Seja r_1 o polinômio definido por

$$r_1(x) = D(x) - \frac{a_n}{b_m} x^{n-m} d(x).$$

Note que r_1 é obtido subtraindo de D o resultado da multiplicação de d pelo quociente dos termos de mais alto grau de D e d; r_1 é chamado de primeiro resto parcial no porcesso de divisão.

Observe que

$$\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} d(x).$$

é um polinômio de grau n cujo termos de mais alto grau é igual ao termo de mais alto grau $a_n x^n$ de D. Logo r_1 tem grau no máximos igual a $n - 1$. Não sabemos ainda se r_1 pode ser dividido por d; isto é, se existem polinômios q_1 e r com $grau(r) < grau(d)$ tais que $r_1 = q_1 d + r$. Mas, se tais polinômios existirem, então D também pode ser dividido por d, já que teremos

$$\begin{aligned} D(x) &= \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x) + r_1(x) \\ &= \frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x) + q_1(x)d(x) + r(x) \\ &= \left(\frac{a_n}{b_m}x^{n-m} + q_1(x)\right)d(x) + r(x) \end{aligned}$$

isto é, o resto é o mesmo que na divisão de r_1 por d, enquanto o quociente é obtido somando ao polinômio de q, cujo grau é no máximo $n - m - 1$, o termo

$$\frac{a_n}{b_m}x^{n-m}d(x).$$

esta forma, reduzimos o problema de dividir D por d ao de dividir r_1 por d, onde r_1 tem grau mais baixo. Mas podemos aplicar o mesmo processo a r_1, obtendo um novo resto parcial r_2 e assim por diante, sempre obtendo um polinômio de grau inferior ao do anterior. Após um número finito de passos, obteremos um resto parcia r_k de grau menor que m, para o qual a divisão é possível e imediata: o quociente é $q_k = 0$ e o resto é $r = r_k$. Retornando sobre nossos passos, conclluímos que cada resto parcial pode ser dividido por d. O resto da divisão original é igual ao último resto parcial r_k e o quociente é formado colecionando os termos obtidos em cada passo. $\square$

Assim, temos uma prova de que é possível dividir D por d e simultaneamente, um processo para executar a divisão em um número finito de passos. Toda a discussão acima é válida para polinômios complexos. No entanto, se todos os coeficientes de D e d são reais, então todos os coeficientes gerdos no processo são obtidos através de operações envolvendo somente números reais e são, portanto, rais. Logo, o quociente e o resto da divisão de um polinômio real por outro são tambem polinômios reais.

Exemplo 2.4.4. *Dividir* $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 1$ *por* $x - 2$

Temos $D(x) = x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 1$, e $d(x) = x - 2$.

$$
\begin{aligned}
r_1 &= D(x) - \left(\frac{1}{1}\right)x^{4-1}d(x) \\
&= x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 6x + 1 - x^3(x-2) \\
&= -x^3 + 4x^2 - 6x + 1 \\
r_2 &= r_1(x) - \left(\frac{-1}{1}\right)x^{3-1}d(x) \\
&= -x^3 + 4x^2 - 6x + 1 + x^2(x-2) \\
&= 2x^2 - 6x + 1 \\
r_3 &= r_2(x) - \left(\frac{2}{1}\right)x^{2-1}d(x) \\
&= 2x^2 - 6x + 1 - 2x(x-2) \\
&= -2x + 1 \\
r_4 &= r_3(x) - \left(\frac{-2}{1}\right)x^{2-1}d(x) \\
&= -2x + 1 + 2(x-2) \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Como r_4 tem grau menor que o de $d(x)$, o processo está terminado, com quociente $q(x) = x^3 - x^2 + 2x - 2$ e o resto $r(x) = -3$.

2.4.3 Divisão de um Polinômio por $(x - \alpha)$

O caso mais importante de divisão de polinômio é aquele em que o divisor é da forma $(x - \alpha)$. Sempre que um número α é identificado como uma raiz de um polinômio $p(x)$, podemos concluir que $p(x)$ é divisível por $(x - \alpha)$. O teorema da divisão oferece um outro modo de chegar à mesma conclusão. De fato, ao dividir um polinômio qualquer por $(x - \alpha)$ obtemos um quociente $q(x)$ e um resto $r(x) = r_0$, satisfazendo $p(x) = (x - \alpha)q(x) + r_0$. Calculando o valor numérico de ambos os lados para $x = \alpha$, obtemos $p(x) = r_0$.

Assim, o resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $(x - \alpha)$ é o polinômio constante igual a $p(\alpha)$. Em particular, concluímos que um núero α é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $p(x)$ é divisível por $x - \alpha$.

A divisão de um polinômio por divisores da forma $(x - \alpha)$ é parte integrante do processo de resolução de equações algébricas: uma vez se tendo encontrado uma raiz

α de $p(x)$, a divisão de $p(x)$ por $(x-\alpha)$ permite obter um polinômio de menor grau cujas raízes são as demais raízes de $p(x)$.

Consideremos um polinômio

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Sejam

$$q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

e $(x) = r_0$ o quociente e o resto, respectivamente, da divisão de $p(x)$ por $(x-\alpha)$. Dessa forma, temos $p(x) = q(x)(x-\alpha) + r_0$. Desenvolvendo a expressãio do lado direito segundo as potências de x, obtemos:

$$b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - \alpha b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - \alpha b_{n-2})x^{n-2} + (b_0 - \alpha b_1)x + (r_0 - \alpha b_0).$$

Igualando os coeficientes aos dos termos respectivos de p, obtemos

$$b_{n-1} = a_n$$

esta equação permite calcular o coeficiente do termo de mais alto grau de q.

$$b_{n-2} - \alpha b_{n-1} = a_{n-1} \Rightarrow b_{n-2} = a_{n-1} + \alpha b_{n-1}$$

exprime o próximo coeficiente de q em função do obtido na equação anterior

$$b_{n-3} - \alpha b_{n-2} = a_{n-2} \Rightarrow b_{n-3} = a_{n-2} + \alpha b_{n-2}$$

repetindo uma quantidade finita de vezes vamos encontrar o último coeficiente de q

$$r_0 - \alpha b_0 = a_0 \Rightarrow r_0 = a_0 + \alpha b_0.$$

Como os cálculos acima mostram, temos um processo recursivo para obter sucessivamente os termos de q, a partir do termo de mais alto grau, e o resto da divisão. Evidentemente, poderíamos ter chegado à mesma conclusão acompanhando, passo-a-passo, o algoritmo genérico de divisão com divisor da form $x - \alpha$.

Os cálculos descritos acima são facilmente efetuados quando dispostos na forma abaixo, que constitui o chamado *dispositivo de Briot-Ruffini.*

$$\begin{array}{c|ccccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & \\
\hline
\alpha & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \cdots & b_1 & b_0 & & r
\end{array}$$

Exemplo 2.4.5. *Dividir o polinômio* $x^4 - 2x + 1$ *por* $x + 2$

Utilizando o dispositivo de Briot-Ruffini temos

	1	0	0	-2	1
-2	1	$1 \cdot (-2) + 0 = -2$	$-2 \cdot (-2) + 0 = 4$	$4 \cdot (-2) - 2 = -10$	$-10 \cdot (-2) + 1 = 21$

2.4.4 O Teorema Fumdamental da Álgebra

Se os números complexos $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ são raízes distintas de uma função polinomial p de grau n, então existe uma função polinomial q de grau $n - k$ tal que

$$p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_k)q(x).$$

O polinômio $q(x)$ não pode ser divisível por nenhum novo fator da forma $(x - \alpha)$, com α diferente de todos os α_i; do contrário, α também seria raiz de p. Por outro lado, $q(x)$ pode ainda ser divisível por um ou mais dos fatores $(x - \alpha_i)$. Suponhamos que tenhamos sucessivamente extraído todos os possíveis fatores do quociente. Nesse ponto, teremos

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ \cdots \ (x - x_m)q_1(x),$$

onde $x_1, x_2, \cdots, x_m$ incluem todas as raízes de p, algumas possivelmente repetidas, e $q_1(x)$ é um polinômio que não possui raízes.

Se estivéssemos restritos ao conjunto dos números reais, a afirmativa acima representaria o ponto final da teoria. Se considerarmos, por exemplo, o polinômio $p(x) = x^6 - x^2$, vemos que ele pode ser fatorado como

$$p(x) = x^2(x + 1)(x - 1)(x^2 + 1).$$

As raízes reais de p são $0, 1, -1$; o fator restante $x^2 + 1$ não possui raiz real e não pode mais ser reduzido.

Se considerermos os números complexos, no entanto, a situação muda de figura.

Resolvendo a equação $x^2 + 1 = 0$, encontramos $x = i$ ou $x = -i$. Deste modo, podemos fatorar p completamente, na forma:

$$p(x) = x^2(x + 1)(x - 1)(x - i)(x + i).$$

Note que o que aconteceu não foi específico a esse caso. No conjunto dos complexos, não há polinômios de grau maior ou igual a 1 que não possuem raízes.

Teorema 2.4.3. *Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau n pode ser fatorado na forma $p(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\ \cdots\ (x-x_n)$, onde c é um número complexo e $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são raízes complexas de $p(x)$ possivelmente repetidas. Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.*

Demonstração. Já vimos que $p(x)$ pode ser escrito como

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m)q_1(x),$$

onde $q_1(x)$ não possui raízes. Mas, pelo ;teorema Fundamental da Álgebra, apenas polinômios constantes não possuem raízes complexas. Assim

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ \cdots (x - x_m,)$$

para algum valor de c. Mas p tem grau n; isso implica que o número de fatores do 1º grau deve ser n. Logo $m = n$ e provamos que p se decompõe num produto de um fator constante de n fatores do 1º grau.

Para demonstrar a unicidade da deconposição, suponhamos que p possua duas decomposições distintas:

$$p(x) = c(x - x_1)(x - x_2)\ \cdots\ (x - x_n)$$

e

$$p(x) = c'(x - x'_1)(x - x'_2)\ \cdots\ (x - x'_n).$$

Inicialmente, comparando o termo de mais alto grau em ambas as expressões, verificamos que $c = c'$.

Logo, temos

$$(x - x_1)(x - x_2)\ \cdots\ (x - x_n) = (x - x'_1)(x - x'_2)\ \cdots\ (x - x'_n).$$

Calculando o valor dos dois lados da igualdade para $x = x_1$, obtemos

$$0 = (x_1 - x'_1)(x_1 - x'_2)\ \cdots (x_1 - x'_n)$$

Logo, pelo menos um dos números $x'_1, \cdots, x'_n$ é igual a x_1. Sem perda de generalidade, podemos supor que $x_1 = x'_1$. Substituindo $x_1 = x'_1$ em (1), temos:

$$(x - x_1)(x - x_2)\ \cdots\ (x - x_n) = (x - x'_1)(x - x'_2)\ \cdots\ (x - x'_n).$$

Como o fator $(x - x_1$ é comum aos dois lados da igualdade, ela se verifica se, e somente se, os polinômios obtidos cancelando $(x - x_1)$ em ambos os lados são iguais. Logo, temos

$$(x - x_2) \cdots (x - x_n) = (x - x'_2) \cdots (x - x'_n).$$

A aplicação repetida do mesmo argumento permite identificar e eliminar, em cada passo, um par de termos idênticos em cada lado da igualdade. Desta forma, fica estabelecida uma correspondência entre os termos das duas fatorações.

Como um polinômio p de grau n pode ser decomposto em n fatores do 1º grau, é comum dizer que p possui n raízes. Naturalmente, isso não significa que p necessariamente se anule para n valores distintos de x. Como vimos anteriormente, pode haver repetição de fatores na decomposição de $p(x)$. Agrupando tais fatores, podemos escrever $p(x)$ na forma

$$p(x) = (x - \alpha_1)^{\beta_1}(x - \alpha_2)^{\beta_2} \cdots (x - \alpha_k)^{\beta_k}$$

onde $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_k$ são as raízes de p e os expoentes $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_k$ satisfazem $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_k = n$. O expoente de cada termo do 1º grau é chamado de *multiplicidade* da raiz correspondente. Raízes de multiplicidade 1 são chamadas de raízes simples; raízes de multiplicidade 2 são chamadas de raízes duplas; e assim por diante. Note que um número complexo α é raiz de multiplicidade k de p se, e somente se, $p(x)$ é diviível por $(x - \alpha)^k$ e não é divisível por $(x - \alpha)^{k+1}$.

2.5 DERIVADA

2.5.1 A Derivada de uma Função de Variável Real

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto:

Definição 2.5.1. *Se uma função f é definida em um intervalo aberto contendo x_0, então a derivada de f em x_0, denotada por $f'(x_0)$, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

2.5.2 Interpretação Geométrica

Derivada de uma função f em um ponto a fornece o coeficiente angular *(inclinação)* da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Dada uma curva plana que representa o gráfico de f, se conhecermos um ponto $P(a, f(a))$, então a equação da reta tangente r à curva em P é dada por $y - f(a) = m(x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação. Mas como obter m para que r seja tangente à curva em P?

Consideremos um outro ponto arbitrário sobre a curva, Q, cujas coordenadas são $(a + h, f(a + h))$. A reta que passa por P e Q que é chamada reta secante à curva.

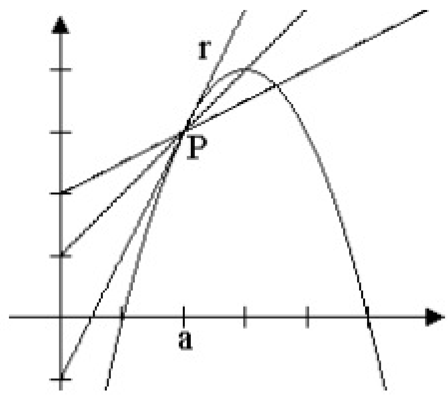

Figura 2.8: Interpretação Geométrica da Derivada

Analisemos agora a variação do coeficiente angular da reta secante fazendo Q se aproximar de P, ou seja, tomando h cada vez menor.

Tudo indica que quando P está próximo de Q, o coeficiente angular msec da reta secante deve estar próximo do coeficiente angular m da reta r, ou seja, o coeficiente angular m_{sec} tem um limite m quando Q tende para P, que é o coeficiente angular da reta tangente r.

Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + h \Rightarrow h = x - a$ e sabendo-se que a abscissa de P é expressa por a, então, se $Q \to P$ temos que $h \to 0$, o que é equivalente a $x \to a$. Assim:

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(se este limite existe), é o coeficiente angular da reta tangente r

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Logo, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto, de fato, fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

Definição 2.5.2. *Seja $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ uma função contínua, onde $\mathbb{U}$ é um aberto de $\mathbb{C}$. Dizemos que f é holomorfa em $z_0 \in \mathbb{U}$, se existe o limite*

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 - h) - f(z_0)}{h}$$

O número complexo $f'(z_0)$ é chamado de *derivada* de f em z_0. Se f for holomorfa em todos os pontos de um subconjunto $\mathbb{X}$ de $\mathbb{U}$, diremos que f é *holomorfa* em $\mathbb{X}$.

Teorema 2.5.1. *Seja $f : \mathbb{U} \to \mathbb{C}$ uma função contínua, onde $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$ é um aberto. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) f é holomorfa em $z_0 \in \mathbb{U}$

(b) As partes real e imaginária de f satisfazem às relações de Cauchy–Riemann e f é diferenciável em z_0 do ponto de vista real.

(c) f possui derivada real em z_0 e esta transformação linear corresponde à multiplicação por um número complexo.

Aplicando–se este teorema a função $f(z) = z^n$ vemos que ela é holomorfa em $\mathbb{C}$, para todo $n \geq 1$. Vamos calcular a derivada de f.

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(z-h) - f(z)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(z-h)^n - z^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(z^n + nhz^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 z^{n-2} + \cdots + h^n - z^n\right) \\ &= nz^{n-1} \end{aligned}$$

Observação 2.5.1. *Sejam f e g funções contínual em $\mathbb{U}$, aberto em $\mathbb{C}$ e holomorfas em $z_0 \in \mathbb{U}$. Obtemos as seguintes regras*

(a) $(f+g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$.

(b) $(f \cdot g)'(z_0) = f(z_0) \cdot g'(z_0) + g'(z_0) \cdot f'(z_0)$.

A verificação destas regras pode ser feita de maneira análoga ao das funções reais de variável real.

2.6 CONGRUÊNCIA

Definição 2.6.1. *Diremos que dois segmentos AB e CD são congruentes quando $\overline{AB} = \overline{CD}$; diremos que dois ângulos $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ são congruentes se eles têm a mesma medida.*

Note que, com esta definição, as propriedades da igualdade de números passam a valer para a congruência de segmentos e de ângulos. Como consequência, um segmento é sempre congruente a ele mesmo e dois segmentos, congruentees a um terceiro, são congruentes entre si. O mesmo valendo para ângulos.

Definição 2.6.2. *Dois triângulos são congruentes se for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre seus vértices de modo que lados e ângulos correspondentes sejam congruentes.*

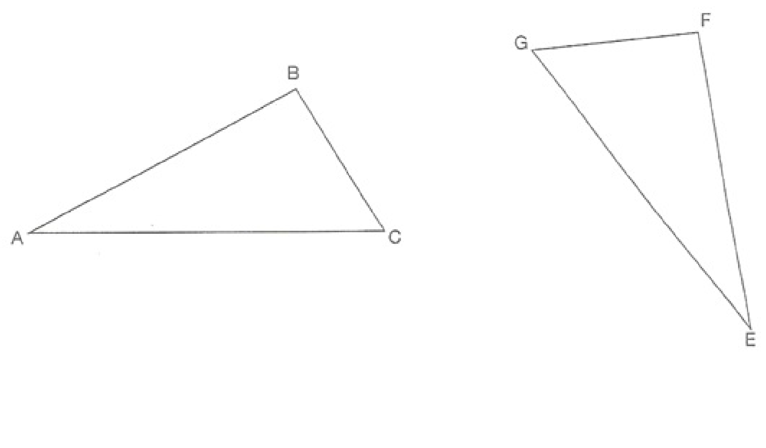

Figura 2.9: Triângulos congruentes

Se ABC e EFG são dois triângulos congruentes e se

$$A \longleftrightarrow E$$
$$D \longleftrightarrow F$$
$$C \longleftrightarrow G$$

é a correspondência que define a congruência, então valem, simultaneamente, as seis relações seguintes

$AB = EFG$	$BC = FG$	$AC = EG$
$\widehat{A} = \widehat{E}$	$\widehat{B} = \widehat{F}$	$\widehat{C} = \widehat{G}$

Se, nos triângulos abaixo, considerarmos a correspondência $C \longleftrightarrow F$, $B \longleftrightarrow D$ e $A \longleftrightarrow E$, verificaremos que $\widehat{C} = \widehat{F}$, $\widehat{B} = \widehat{D}$, $\widehat{A} = \widehat{E}$, $CB = FD$, $BA = DE$ $eAC = EF$. Portando os triângulos CBA e FDE são congruentes.

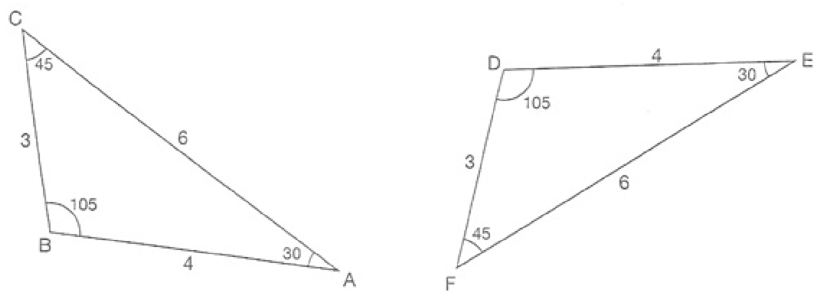

Figura 2.10: Exemplo de triângulos congruêntes

Escreveremos $ABC = EFG$ para significar que os triângulos ABC e EFG são congruente e que a *congruência* leva A em E, B em F e C em G.

2.6.1 Casos de Congruência

Axioma 2.6.1. *1º Caso (**LAL**)] Dados dois triêngulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $AC = EG$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$ então ABC e EFG são congruentes.*

Observe que, de acordo com a definição (2.6.2), para verificarmos se dois triângulos são congruentes temos que verificar seis relações: congruência dos três pares de lados e congruência dos três pares de ângulos correspondentes. O axioma acima afirma que é suficiente verificar apenas três delas, ou seja:

Teorema 2.6.1 (2º Caso (**ALA**))**.** *Dados dois triêngulos ABC e EFG, se $AB = EF$, $\widehat{B} = \widehat{F}$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$ então ABC e EFG são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $AB = EF$, $\widehat{B} = \widehat{F}$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$. Seja D um ponto da semirreta S_{AC} tal que $AD = EG$.

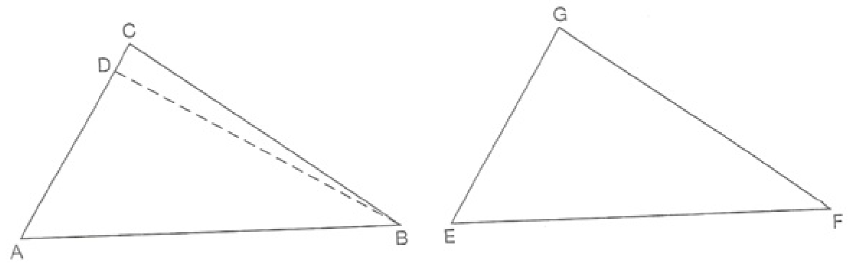

Figura 2.11: Caso de congruência

Considere o triângulo ABD e o compare com o triângulo EFG. Como $AD = EG$, $AB = EF$ e $\widehat{A} = \widehat{E}$, concluímos, pelo axioma 2.6.1, que ABD e EFG são congruêntes. Como consequência, tem–se que $A\widehat{B}D = \widehat{F}$. Mas, por hipótese, $\widehat{F} = A\widehat{B}C$. Logo $A\widehat{B}D = A\widehat{B}C$.

Consequentemente as semi–retas S_{BD} e S_{BC} coincidem. Mas então o ponto D coincide com o ponto C e, portanto, coincidem os triângulos ABC e ABD. Como já provamos que ABD e EFG, são congruentes, então ABC e EFG também são. □

Definição 2.6.3. *Um Triângulo é dito isósceles se tem dois lados congruentes. Estes lados são chamados de laterais, e o terceiro lado é chamado de base*

Definição 2.6.4. *Seja ABC um triângulo e Seja D um ponto da reta que contém B e C. O segmento AD chama–se mediana do triângulo relativamente ao lado BC, se D for o ponto médio de BC. O segmento AD chama–se bissetriz do ângulo $\widehat{A}$ se a* *semirreta S_{AD} divide o ângulo $C\widehat{A}B$ em dois ângulos iguais, isto é, se $C\widehat{A}D = D\widehat{A}B$. O segmento AD chama–se altura do triângulo relativamente ao lado BC, se AD for perpendicular a reta que contém B e C.*

Na figura 2.12, em (a) AD é mediana, em (b) AD é bissetriz, e em (c) AD é altura.

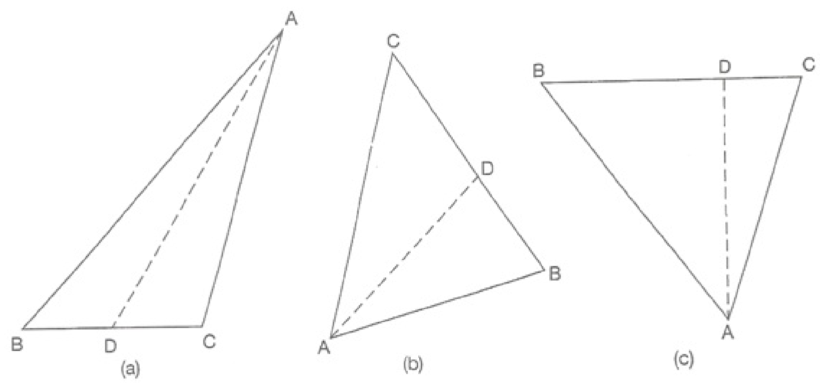

Figura 2.12: Mediana, bissetriz e altura

Definição 2.6.5. *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.*

Teorema 2.6.2 (3º Caso (**LLL**))**.** *Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.*

Demonstração. Sejam ABC e EFG dois triângulos tais que $AB = EF$, $BC = FG$ e $AC = EG$. Vamos provar que $ABC \equiv EFG$.

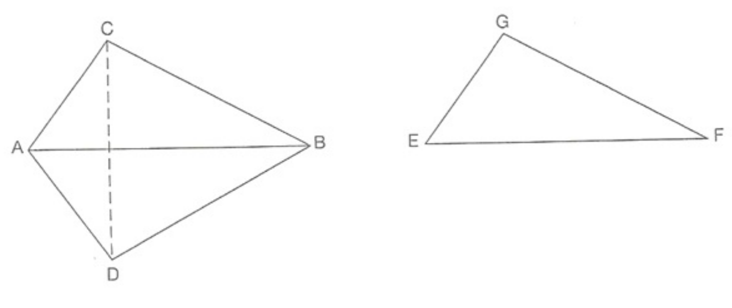

Figura 2.13: Caso de congruência LLL

Para isto, construa, a partir da semirreta S_{AB} e no semi-plano oposto ao que contém o ponto C, um ângulo igual ao ângulo $\widehat{E}$. No lado deste ângulo que não contrém o ponto B, marque um ponto D tal que $AD = EG$ e ligue D a B. como $AB = EF$, e por construção $AD = EG$, e $D\widehat{A}B = \widehat{E}$, então $ABD = EFG$. Agora vamos mostrar que os triângulos ABD e ABC são congruentes. Para isto trace CD. Como $AD = EG = AC$ e $DB = FG = BC$, então os triângulos ADC e BDC são isósceles. Segue–se que $A\widehat{D}C = A\widehat{C}D$ e $C\widehat{D}B = D\widehat{C}B$. Mas então, pelo primeiro caso de congruência de triângulos, podemos concluir que $ABD = ABC$. Como $ABD = EFG$ então $ABC = EFG$. $\square$

Capítulo 3

O TEOREMA

3.1 O TEOREMA DE MARDEN

Teorema 3.1.1. *Seja $p(z)$ um polinômio de terceiro grau, com coeficientes complexos, cujas raízes z_1, z_2, e z_3 são não colineares no plano complexo. Seja T o triângulo com vértices em z_1, z_2, e z_3. Há uma única elipse inscrita em T e tangente aos lados nos seus respectivos pontos médios. Os focos de elipse são as raízes da derivada do polinômio $p(z)$.*

Antes de demonstrar o teorema de Marden faremos algumas observações. Note que, podemos transladar, girar e redimensionar o triângulo de uma forma conveniente. Além disso, observamos que essas transformações podem ser impostas por uma função linear $M : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Seja $M(z) = \alpha z + \beta$, com $\alpha \neq 0$ e β, números complexos, vamos escrever α na forma polar $re^{i\theta}$. Em seguida, transformando z para $M(z)$ temos a seguinte interpretação geométrica: dilata z por r, gira sobre a origem através de ângulo θ, e traslada por β. Assim, qualquer combinação de dilatação, rotação e translação pode ser realizada através da aplicação de uma função linear M. Agora podemos justificar que a imposição destas transformações não representa perda de generalidade em nossas provas. Temos então que o teorema de Marden vale para uma terna z_1, z_2, z_3 se e somente se ele também é válido para as imagens $M(z_1)$, $M(z_2)$, $M(z_3)$.

Observando que as funções lineares são inversíveis precisamos mostrar apenas uma direção da dupla implicação. Então, se nós sabemos que o Teorema de Marden vale para$z_1,\ z_2,\ z_3$, vamos ver que ele também deve manter para $M(z_1),\ M(z_2),\ M(z_3)$. Na Figura 3.1, o triângulo com vértices no z_j é mostrado, com a elipse inscrita e tangente nos pontos médios dos lados do triângulo.

Os focos da elipse, que devem ser as raízes de de p', também são mostrados. Olhando M geometricamente, observa-se que a ampliação, rotação e translação dessa figura preserva todos as caracteristicas, ou seja, a imagem do triângulo é um triângulo semelhante, a imagem da elipse é ainda uma elipse tangente e inscrita nos pontos médios dos lados do novo triangulo, e as imagens dos focos da elipse inicial são os focos da elipse transformada por M.

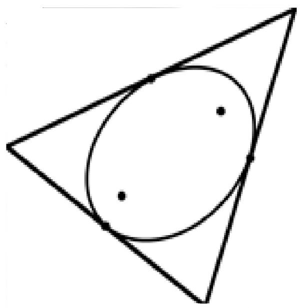

Figura 3.1: Configuração geométrica do Teorema de Marden

Considere o novo polinômio

$$p_M(z) = (z - M(z_1))(z - M(z_2))(z - M(z_3))$$

temos então que a derivada de p é

$$p'_M(z).$$

O nosso objetivo é mostrar que as raízes da derivada de p são equivalentes às raízes de p_M. Para isto, vamos substituir z por $M(z)$ em p_M. Temos então que

$$P_M(M(z)) = (M(z) - M(z_1))(M(z) - M(z_2))(M(z) - M(z_3) \tag{3.1}$$

Note que $M(z) - M(zj) = \alpha(z - z_j)$. Portanto, a equação 3.1 pode ser escrita como

$$p_M(M(z)) = \alpha^3 p(z) \tag{3.2}$$

Agora diferenciando ambos os lados da equação 3.2, lembre que $M(z) = \alpha z + \beta$ então $M'(z) = \alpha$.

Obtemos

$$\alpha \cdot p'_M(M(z)) = \alpha^3 p'(z)$$

e, consequentemente,

$$p'_M(M(z)) = \alpha^2 p'(z)$$

Isso mostra que, se z é uma raiz de p', e que $M(z)$ é uma raiz de p'_M. Isso é o que queríamos mostrar.

Para a demonstração do teorema vamos utilizar três lemas, enunciados e demonstrados a seguir.

Lema 3.1.1. *Considere uma elipse com focos F_1 e F_2, e um ponto A para fora da elipse. Considere duas tangentes a elipse passando por A. Seja G_1 e G_2 os pontos de tangência. Então $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$.*

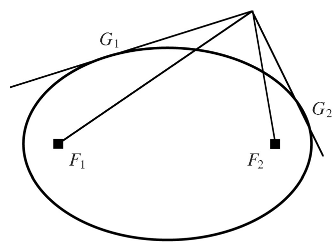

Figura 3.2: Elipse, retas tangentes

Demonstração. Seja H_1 o reflexo de F_1 em relação AG_1, e K_1 o ponto de interseção de F_1H_1 com AG_1 (figura 3.1). Pela construção temos que o triângulo AK_1F_1 e o triângulo AK_1H_1 são congruentes pois o lado AK_1 é comum, $\angle F_1K_1A = \angle H_1K_1A$ e $F_1K_1 = H_1K_1$, portanto $AF_1 = AH_1$ e $\angle F_1AK_1 = \angle H_1AK_1$. De modo análogo faça a construção para G_2. Nosso objetivo e ver que $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$, para isto vamos mostrar que $\angle F_1AH_1 = \angle F_2AH_2$.

Note que os triângulos AF_1H_1 e AF_2H_2 são isósceles de base F_1H_1 e F_2H_2, respectivamente. Trace os segmentosF_1G_1 e F_2G_2, observe que $F_1G_1 = H_1G_1$, pois o triângulo AF_1H_1 é isósceles, então F_2, G_1 e H_1 são colineares, pois $\angle F_1G_1K_1 = \angle H_1G_1K_1$, então $\angle H_1G_1K_1 = \angle F_2G_1A$ (3.4). Faça a mesma construção para G_2 e verifique que $\angle H_2G_2K_2 = \angle F_1G_2A$ Agora temos que os triângulos AH_1F_2 e AF_1H_2 são congruentes, pois $AH_1 = AF_1$, $AF_2 = AH_2$ e $F_2H_2 = F_2G_1 + G_1F_1 = F_2G_2 + G_2F_1 = F_1H_2$, pelos fato de G_1 e G_2 serem pontos da elipse, temos então que $\angle H_1AF_2 = \angle F_1AH_2$,

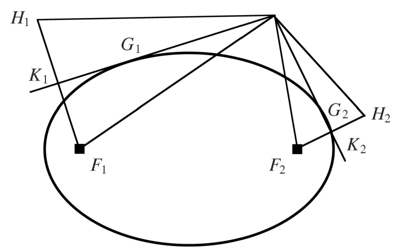

Figura 3.3: Triângulos isósceles

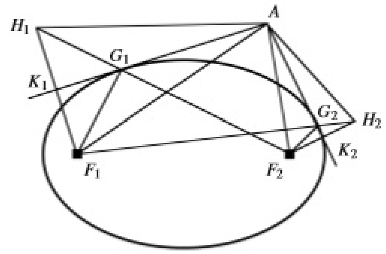

Figura 3.4: Demonstração

logo $\angle H_1AF_1 + \angle F_1AF_2 = \angle F_1AF_2 + \angle F_2AH_2$ pela lei do corte temos que $\angle H_1AF_1 = \angle F_2AH_2$ portanto $\angle F_1AG_1 = \angle F_2AG_2$. $\square$

Lema 3.1.2. *Seja o polinômio $p(z)$, de raízes z_1, z_2, e z_3, e o triângulo T como na demonstração do Teorema de Marden. Agora considere, a elipse com focos nas raízes de p' e que passa pelo ponto médio de um dos lados do triângulo é realmente tangente a esse lado.*

Demonstração. Lembre-se que, podemos girar, transladar, reduzir ou ampliar o triângulo de forma conveniente. Portanto vamos as considerar que um lado do triângulo encontra-se ao longo do eixo x centrado na origem, e tem um comprimento de 2, enquanto que o vértice oposto fica no semi–plano superior. Assim, vamos considerar que os vértices do triângulo (que são as raízes de p) são 1 , -1 , e $w = a + bi$, onde $b > 0$. Vamos olhar para a elipse passando por zero, que é o ponto médio do lado que se encontra sobre o eixo x. A fim de mostrar que a elipse é tangente a esse lado, que irá mostrar que os segmentos de reta a partir da origem para cada foco faz ângulos iguais com o eixo x . Seja $p(z) = (z-1)(z+1)(z-w) = z^3 - wz^2 - z + w$. Diferenciando, encontramos $p'(z) = 3z^2 - 2wz - 1 = 3(z^2 - \frac{2WZ}{3} - \frac{1}{3})$. Assim, se as raízes de p'

são $z_4 = r_4e^{i\theta_4}$ e $z_5 = r_5e^{i\theta_5}$ (com $0 \leqslant \theta_4, \theta_5 < 2\pi$), concluímos que $z_4 + z_5 = \frac{2w}{3}$ e $z_4z_5 = -\frac{1}{3}$. Seja $z_4 = c_1 + d_1i$ e $z_5 = c_2 + d_2i$ a forma algebrica das raízes de p', note que $z_4 + z_5 = (c_1 + c_2) + (d_1 + d_2)i = \frac{2w}{3}$ perceba que $d_1 + d_2 = \frac{2b}{3} > 0$, ou seja, pelo menos uma das raízes de p' deve estar no semi–plano superior, e a segunda, mostra que $\theta_4 + \theta_5 = \pi$, pois $z_4z_5 = r_4e^{i\theta_4}.r_5e^{i\theta_5} = -\frac{1}{3}$ isto significa que a parte imaginária é igual a zero. Isto por sua vez também nos diz que ambas as raízes deve estar no semi–plano superior. Além disso, considerando essas raízes como vetores da origem, os ângulos dos vetores fazem com o eixo x positivo são suplementares. Assim, ou ambas as raízes estão no eixo y, ou uma raiz faz um ângulo agudo com o eixo x positivo e a outra raiz faz um ângulo igual, com o eixo x negativo. Em ambos os casos, isto mostra que os segmentos de reta formados pela origem e pelos focos da nossa elipse, faz ângulos iguais com o eixo x, portanto, o eixo x é tangente a elipse. □

Lema 3.1.3. *Seja o polinômio $p(z)$, de raízes z_1, z_2 e z_3, e o triângulo T serem como na demonstração do Teorema de Marden. Considere a elipse com focos nas raízes de p' e que é tangente a um lado do T no seu ponto médio. Então esta mesma elipse é tangente aos outros dois lados de T.*

Demonstração. Assim como visto anteriormente, podemos colocar o triângulo de qualquer maneira que desejarmos. A elipse E é tangente a um lado do triângulo, e novamente colocar esse lado ao longo do eixo x. No entanto, desta vez, colocar um vértice na origem, e outro no 1. O vértice restante será novamente colocado em $w = a + bi$, onde $b > 0$. Esta configuração nos permite ver que a elipse é tangente ao lado $0w$. Com raízes a 0, 1 e w, $p(z)$ pode ser feita como $z(z - 1)(z - w)$. Fazendo a multiplicação temos

$$p(z) = z^3 - (1 + w)z^2 + wz$$

a derivada nos leva a

$$p'(z) = 3z^2 - 2(1 + w)z + w.$$

Por um argumento similar como anteriormente, observa-se que $z_4 + z_5 = (\frac{2}{3})(1 + w)$. Isto mostra que pelo menos uma das raízes de p' deve ser no semi–plano superior. Mas aqui também sabemos que essas raízes são os focos de uma elipse tangente ao eixo x. Portanto, ambos estão na metade plano superior, o que nos permite expressar as raízes de p' como $z_4 = r_4e^{i\theta_4}$ e $z_5 = r_5e^{i\theta_5}$, onde $0 < \theta_4 \leqslant \theta_5 < \pi$. Passando ao lado do termo constante de p', temos que $z_4z_5 = \frac{w}{3}$. Isto mostra que $\theta_4 + \theta_5$ é igual ao ângulo entre o eixo x positivo e Ow . Consequentemente, o ângulo entre Oz_5 e Ow igual θ_4. Ver Figura 3.5

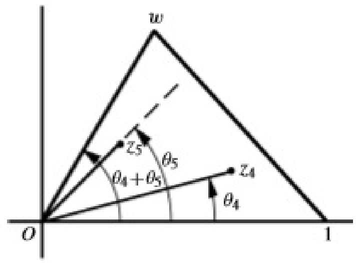

Figura 3.5: Triângulo com vértice na origem

Aplicando 3.1.1, com a origem na função do ponto A externa (Figura 3.6). Como sabemos que a origem é externa? Isto é aparente uma vez que E é tangente ao eixo x em $x = \frac{1}{2}$. Com efeito , o eixo x é uma das duas retas tangentes a E a partir da origem; deixar o outro lado da reta tangente ser seguida por L. Lema 1, o ângulo β entre Oz_5 e L é igual ao ângulo entre o eixo x e Oz_4, que por sua vez é igual a θ_4 . Mas isso é o mesmo que o ângulo entre Oz_5 e Ow. Isto mostra que L é coincidente com Ow, e assim, é tangente a E.

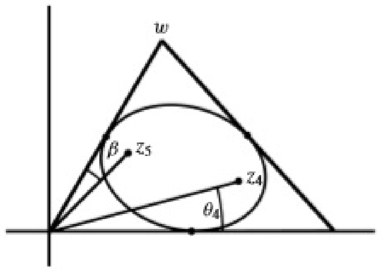

Figura 3.6: Elipse tangente nos pontos médios

□

Enfim vamos a demonstracão do teorema de Marden.

Demonstração. (Teorema de Marden) Vamos supor que o polinômio p, e suas raízes z_j, e triângulo T são como no teorema. Usando as raízes de p' como focos, desenhar uma elipse E e que passa pelo ponto médio de um dos lados do triângulo. Pelo Lema 2, E, na verdade, é tangente a esse lado de T. Pelo Lema 3, E é também tangente ao dos outros dois lados do T. Agora afirmamos que os pontos de tangência com estes dois lados devem ser os pontos médios. Provando assim o Teorema de Marden. $\square$

Capítulo 4

OFICINA

4.1 Currículo de Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás

Segundo o currículo de referência da Rede Estadual de Educação de Goiás, os conteúdo referentes a 3ª Série do ensino médio, no primeiro, terceiro e quarto bimestre são:

- Geometria Analítica;
- Números Complexos;
- Polinômios.

Expectativas de aprendizagem

- Compreender os conceitos de ponto, reta e plano;
- Calcular a distância entre dois pontos na reta orientada e no plano cartesiano;
- Resolver problemas utilizando o cálculo da distância entre dois pontos;
- Obter o ponto médio de um segmento de reta;
- Reconhecer e verificar a condição de alinhamento de três pontos;

- Identificar e determinar a equação geral e reduzida da reta;
- Identificar a equação de uma reta apresentada a partir de dois pontos dados ou de um ponto e sua inclinação;
- Interpretar geometricamente os coeficientes da equação de uma reta;
- Identificar retas paralelas e retas perpendiculares a partir de suas equações;
- Determinar as posições relativas entre duas retas no plano comparando os respectivos coeficientes angulares;
- Determinar a distância entre ponto e reta;
- Determinar a área de um triângulo conhecidas as coordenadas de seus vértices;
- Determinar a equação da circunferência na forma reduzida e na forma geral, conhecidos o centro e o raio.
- Reconhecer, dentre as equações do 2º grau com duas incógnitas, as que representam circunferências;
- Identificar posições relativas entre pontos e circunferências, retas e circunferências e entre duas circunferências
- Identificar e conceituar a unidade imaginária;
- Identificar o conjunto dos números complexos e representar um número complexo na forma algébrica;
- Calcular expressões envolvendo as operações com números complexos na forma algébrica;
- Calcular potências de expoente inteiro na unidade imaginária.
- Resolver problema envolvendo funções;
- Identificar o gráfico que representa uma situação descrita em um texto;
- Resolver problema envolvendo informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos;
- Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.

- Identificar um polinômio e determinar o seu grau;
- Calcular o valor numérico de um polinômio;
- Efetuar operações com polinômios;
- Utilizar o teorema do resto para resolver problemas;
- Resolver equações polinomiais utilizando o teorema fundamental da álgebra e o Teorema da Decomposição.
- Resolver problemas do cotidiano através da revisão geral.

4.1.1 Princípio da Desaprendizagem.

Aprender a desaprender, a não usar conceitos, estratégias irrelevantes para a sobrevivência. Uma vez que um novo conhecimento interage com o conhecimento prévio já existente na estrutura cognitiva, essa interação não necessariamente ocorre de forma a favorecer a aprendizagem. Alguns conhecimentos prévios podem dificultar ou mesmo impedir a aprendizagem de um novo conhecimento.

Desaprender não significa apagar determinado tipo de conhecimento prévio (se houve aprendizagem significativa isso não vai ocorrer), trata-se de não utilizá-lo como subsunçor. Tal princípio é particularmente importante, pois nos encontramos num mundo em rápida transformação, onde os conceitos e estratégias previamente aprendidos podem se tornar obsoletos. Assim, é crucialmente importante identificar quais conhecimentos prévios são relevantes para as novas demandas.

Este é o objetivo desta oficina, desaprender para aprender, ou seja, vamos propor um olhar diferente para as disciplinas citadas acima. Além dos conteúdos referentes ao 3ª Série do ensino médio vamos propor também o estudo das derivadas para que o aluno não sinta dificuldades em partes do processo.

A proposta é de trabalhar a oficina em 4 aulas de 50 minutos cada.

4.1.2 Aula 1

Geometria Analítica:

(i) Teorema de Pitágoras

(ii) Plano cartesiano

(iii) Distância entre pontos

(iv) Elipse

4.1.3 Aula 2

Números complexos:

(i) Forma Algébrica

(ii) Forma trigonométrica

(iii) operações na forma algébrica e na forma trigonométrica

Polinômios com coeficientes complexos:

(i) Definição de polinômio

(ii) Operações de adição, multiplicação e divisão entre polinômios

(iii) Dispositivo de Briot–Ruffini

(iv) Teorema fundamental da Álgebra

4.1.4 Aula 3

Derivada:

(i) Interpretação geométrica

(ii) Definição de derivada

(iii) Derivada de uma função polinomial na variável real.

(iv) Derivada de uma função polinomial na variável complexa

(v) Derivada de uma função polinomial.

4.1.5 Aula 4

- Teorema de Rolle
- Teorema de Mardem.

Para instigar a curiosidade dos alunos a respeito das relações entre as raízes de um polinômio complexo $p(z)$ e as raízes de sua derivada.Vamos começar discutindo o *Teorema de Rolle.*

Teorema 4.1.1 (Teorema de Rolle.)**.** *Seja f uma função definida e contínua em $[a, b]$ é derivável em (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então existe pelo menos um ponto c entre a e b tal que $f'(c) = 0$*

Demonstração. Vamos considerar primeiramente que $f(x) = 0$, para todo x, e $a \leq x \leq b$. Então $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b); logo, qualquer número entre a e b pode ser tomado como c. Agora, considere que $f(x)$ não se anula para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b). Como f é continua no intervalo fechado $[a, b]$, do teorema do valor extremo, f tem um valor máximo e, ou um valor mínimo absolutos em $[a, b]$. Se $f(a) = f(b) = 0$. Além disso, $f(x)$ não é zero para todo x em (a, b). Logo, f terá um valor valor máximo absoluto positivo em algum c_1 de (a, b), um valor valor mínimo absoluto negativo em algum c_2 de (a, b), ou ambos. Assim para $c = c_1$ ou $c = c_2$, conforme o caso, existe um extremo absoluto num ponto interior ao intervalo $[a, b]$. Logo, o extremo absoluto $f(c)$ é também um extremo relativo, e como por hipótese existe $f'(c)$, segue que $f'(c) = 0$. $\square$

A partir desse ponto podemos começar a fazer especulações sobre sobre polinômios complexos, suas derivadas e raízes. Vamos começar com o seguinte exemplo:

Exemplo 4.1.1. *Vamos considerar o polinômio $p(x) = x^2 - 5x - 6$. Calcule as raízes de p, e a raiz da derivada de p. Faça uma representação grafica de todas as raízes, fazendo uma relação entre elas.*

Resolução Primeiramente vamos determinar as raízes de p

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2-4(1)(-6)}}{2(1)} \\ &= \frac{5 \pm \sqrt{49}}{2} \\ &= \frac{5 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

então $x_1 = 6$ *e* $x_2 = -1$.

Calculando $p'(x)$:

$$\begin{aligned} p'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{p(x-h)-p(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2-5(x+h)-6-(x^2-5x-6)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-5x-5h-6-x^2+5x+6}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2xh+h^2-5h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2x+h-5 \\ &= 2x-5 \end{aligned}$$

Calculando a raiz de $p'(x)$

$$\begin{aligned} 2x-5 &= 0 \\ 2x &= 5 \\ x &= \frac{5}{2} \\ x &= 2,5 \end{aligned}$$

Note que a raiz da derivada está no segmento de reta $\overline{x_1x_2}$ e mais ela é o ponto médio deste segmento.

Exemplo 4.1.2. *Considere o polinômio complexo* $p(z) = z^2 - 2iz - 5$.

a) Determine as raízes de $p(z)$.

b) Calcule a derivada de $p(z)$.

c) Determine as raízes de $p'(z)$.

d) Represente graficamente todas as raízes.

a) **Resolução:**

Vamos determinar as raízes de $p(z)$, utilizando a fórmula de Baskara.

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)} \\ &= \frac{2i \pm \sqrt{16}}{2} \\ &= \frac{2i \pm 4}{2} \\ &= i \pm 2 \end{aligned}$$

então $z_1 = 2 + i$ e $z_2 = -2 + i$

b) **Resolução:**

Agora vamos calcular a derivada de $p(z)$

$$\begin{aligned} p'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{p(z-h) - p(z)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(z+h)^2 - 2i(z+h) - 5 - (z^2 - 2iz - 5)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{z^2 + 2zh + h^2 - 2iz - 2ih - 5 - z^2 + 2iz + 5}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{2zh + h^2 - 2ih}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} 2z + h - 2i \\ &= 2z - 2i \end{aligned}$$

Portanto $p'(z) = 2z - 2i$.

c) **Resolução:**

Vamos determinar a raiz de $p(z)$, para isto basta fazer $p(z) = 0$

$$\begin{aligned} 2z - 2i &= 0 \\ 2z &= 2i \\ z &= \frac{2i}{2} \\ z &= i \end{aligned}$$

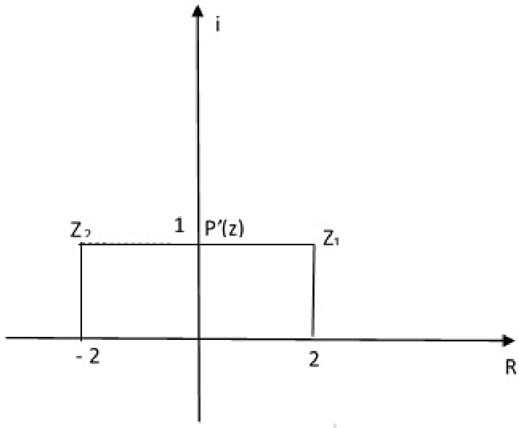

Figura 4.1: Representação gráfica

d) **Resolução:**

Ápos a resolução do exemplo seria importante chamar a atenção do aluno para o fato de que a raiz de $p'(z)$ é interna a figura formada pelas raízes de $p(z)$, ou seja, o ponto $(0, 1)$ pertence ao segmento $\overline{z_1 z_2}$.

A pergunta que fica no ar é: e um polinômio do terceiro grau? Será que podemos garantir tal fato?

Neste momento podemos então enunciar o teorema de Marden e dar uma aplicação.

Teorema 4.1.2 (Teorema de Marden). *Seja $p(z)$ um polinômio de terceiro grau, com coeficientes complexos, cujas raízes z_1, z_2, e z_3 são não colineares no plano complexo. Seja T o triângulo com vértices em z_1, z_2, e z_3. Há uma única elipse inscrita em T e tangente aos lados nos seus respectivos pontos médios. Os focos de elipse são as raízes da derivada do polinômio $p(z)$.*

Exemplo 4.1.3. *Seja o polinômio $p(z) = \frac{z^3}{3} - iz^2 - 2z + 6i$ e $3i$ uma de suas raízes. Determine:*

a) Determine as raízes de $p(z)$.

b) Calcule a derivada de $p(z)$.

c) Determine as raízes de $p'(z)$.

d) Deternine a equação da elipse inscrita, e tangente aos pontos médios dos lados do triangulo, com vertice nas raízes de $p(z)$

a) **Resolução:**

Vamos determinar as raízes de $p(z)$, para isto utilizaremos o dispositivo de Briot Ruffini para reduzir o grau de $p(z)$, ou seja,

$$p(z) = (z - 3i)(az^2 + bz + c)$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \frac{1}{3} & -i & -2 & 6i \\
\hline
3i & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}.(3i) + (-i) = 0 & 0.(3i) + (-2) = -2 & -2.(3i) + (6i) = 0
\end{array}$$

Entao $p(z) = (z - 3i)(\frac{z^2}{3} - 2)$, basta então determinar as raízes de $\frac{z^2}{3} - 2$

$$\begin{aligned}
\frac{z^2}{3} - 2 &= 0 \\
\frac{z^2}{3} &= 2 \\
z^2 &= 6
\end{aligned}$$

$z_1 = \sqrt{6}$ e $z_2 = -\sqrt{6}$. Temos então que $3i, \sqrt{6}\ e\ -\sqrt{6}$, são as raízes de $p(z)$.

b) **Resolução:**

Agora vamos calcular a derivada de $p(z)$

$$\begin{aligned}
p'(z) &= \lim_{h \to 0} \frac{p(z-h) - p(z)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(z+h)^3}{3} - i(z+h)^2 - 2(z+h) - 6i - (\frac{z^3}{3} - iz^2 - 2z + 6i)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(z^3 3z^2h + 3zh^2 + h^3}{3} - i(z^2 + 2zh + h^2) - 2z - 2h - 6i - \frac{z^3}{3} + iz^2 + 2z - 6i}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{z^3}{3} + z^2h + zh^2 + \frac{h^3}{3} - iz^2 - 2izh - ih^2 - 2z - 2h - 6i - \frac{z^3}{3} + iz^2 + 2z - 6i}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} z^2h + zh^2 - 2izh - h^2 - 2h \\
&= z^2 - 2iz - 2
\end{aligned}$$

c) **Resolução:**

Vamos determinar as raízes de $p'(z)$, utilizando a fórmula de Bhaskara.

$$\begin{aligned} z &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ &= \frac{-(-2i) \pm \sqrt{(-2i)^2 - 4(1)(-2)}}{2(1)} \\ &= \frac{2i \pm \sqrt{4}}{2} \\ &= \frac{2i \pm 2}{2} \\ &= i \pm 1 \end{aligned}$$

então $z_1 = 1 + i$ e $z_2 = -1 + i$

d) **Resolução:**

Pelo teorema de Marden temos que as raízes de $p'(z)$ são os focos da elipse inscrita no triângulo cujos vértices são os pontos $(0, 3)$, $(\sqrt{6}, 0)$ e $(-\sqrt{6}, 0)$. Perceba que o ponto $(0, 1)$ é o centro da elipse e que o menor eixo da elipse $2b = 2$ então $b = 1$, note também que a distância focal $2c = 2$ logo $c = 1$. Temos também que $a^2 = b^2 + c^2$, segue daí que $a = \sqrt{2}$. Portanto a equação da elipse é

$$\frac{x^2}{2} + (y - 1)^2 = 1$$

Capítulo 5

CONCLUSÃO

O objetivo deste trabalho é de discutir e demonstrar o Teorema de Marden e mostrar uma maneira de aplicar este conteúdo para alunos do ensino médio.

Algo motivador nessa proposta é o caminho percorrido para a sua demonstração, observamos a necessidade de revisar alguns conteúdos: plano cartesisano, números complexos, polinômios e ensinar outros, tais como derivada de uma função polinomial na variável real e na variável complexa.

Encerramos esse trabalho com uma proposta na forma de oficina matemática com quatro encontros de 50 minutos cada.

Referências Bibliográficas

[1] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio - volume 1. 3ª.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2003

[2] LIMA, Elon Lages. A matemática do ensino médio - volume 3. 6ª.ed. - Rio de Janeiro: SBM 2006

[3] BARBOSA, João Lucas Marques.Geometria Euclidiana Plana - volume 1. 5ª.ed - Rio de Janeiro: SBM 2003.

[4] DANTE, Luiz Roberto. Matemática contexto & aplicações - volume 3ª.ed. - São Paulo: Ática 2009.

[5] LEITHOLD, Louis. Cálculo com Geometria Analítica. 3ª.ed. Harbra, 1994. v. 1

[6] FLEMMING, Diva Marília & GONÇALVES, Mirian Buss - Cálculo A - volume 1. 5ª.ed. Editora da UFSC

[7] LINS, Alcides Neto - Funções de uma Variável Complexa. 2ª.ed. Rio de Janeiro: SBM

[8] D. Kalman, The most marvelous theorem in mathematics, Journal of Online Mathematics and its Appli- cations, available at http://www.JOMA.org (for journal), http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa= contentsa=viewDocumentnodeID =1663 (direct to article).