UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional

PROFMAT

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

O Geogebra como ferramenta didática para um ensino integrado de cinemática, funcões afins e quadráticas

André Carlos Nascimento Maia da Silva

Instituto de Matemática

Maceió, Outubro de 2014

PROFMAT

UNIVERSIDADE FEDERAL DE ALAGOAS

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANDRÉ CARLOS NASCIMENTO MAIA DA SILVA

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA UM ENSINO INTEGRADO DE CINEMÁTICA, FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

MACEIÓ

2014

ANDRÉ CARLOS NASCIMENTO MAIA DA SILVA

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA UM ENSINO INTEGRADO DE CINEMÁTICA, FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 17 de outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.
Orientador: Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra

MACEIÓ
2014

Catalogação na fonte
Universidade Federal de Alagoas
Biblioteca Central
Divisão de Tratamento Técnico
Bibliotecário Responsável: Valter dos Santos Andrade

S586g Silva, André Carlos Nascimento Maia da.
O Geogebra como ferramenta didática para um ensino integrado de cinemática, Funções afins e quadráticas / André Carlos Nascimento Maia da Silva – 2014.
90 f. il., fots. color.

Orientador: Ediel Azevedo Guerra.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Universidade Federal de Alagoas. Instituto de Matemática. Programa de Pós Graduação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. Maceió, 2014.

Bibliografia: f. 75-78.
Anexos: f. 79-90.

1. Matemática – Estudo e ensino. 2. Física – Estudo e ensino. 3. Funções. 4. Funções (Matemática). 5. Cinemática. 6. Software GeoGebra. I. Título.

CDU: 511+531.172:37

O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA DIDÁTICA PARA UM ENSINO INTEGRADO DE CINEMÁTICA, FUNÇÕES AFINS E QUADRÁTICAS

ANDRÉ CARLOS NASCIMENTO MAIA DA SILVA

Dissertação de Mestrado Profissional, submetida em 17 de outubro de 2014 à banca examinadora, designada pelo Colegiado do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Alagoas em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos necessários à obtenção do grau de mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. Ediel Azevedo Guerra (Orientador - UFAL)

Prof. Dr. Vânio Fragoso de Melo (UFAL)

Prof. Dr. Vinícius Moreira Mello (UFBA)

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade e pela saúde que me concedeu para hoje está terminando este curso. Os meus sinceros agradecimentos a meus irmãos Rafael Maia e Suzana Maia e a minha sobrinha Ellen Nicolly.

Agradecimento especial ao professor Ediel Azevedo Guerra pela orientação neste trabalho. Os meus sinceros agradecimentos aos professores Vânio Fragoso de Melo e Vinícius Moreira Mello membros da banca examinadora deste trabalho, e a todos os professores do PROFMAT.

Agradeço a meus amigos Marcel Cerqueira, Aldo Agostinho, Evison Rosalino, Dayane Dallyse, Maria Patrícia, Rudson Albert, Ailton Cardoso, Marcelo Silva, Marciel Leonardo, Isnaldo Isaac, Kátia Regina, Walfredo, e também a meus colegas de trabalho do instituto de matemática(UFAL), da prefeitura de Passo do Camaragibe e da Escola Dom Otávio (estado), entre eles, Anderson Rangel, Genilton José, Paulo Lemos, entre outros que me desculpem, mas falhou da minha memória no momento. Aos alunos que aceitaram participar da expreriência do projeto da dissertação.

Não posso deixar de fazer um agradecimento especial aos professores Hilário Alencar e Marcelo Viana pela belíssima iniciativa e dedicação para a criação do PROFMAT, e também, à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo suporte financeiro ao longo de todo o curso de Mestrado.

Dedico este curso em especial a meus pais Francisco Maia e Selma Cristina pelo grande apoio que me deram em todo o curso, a minha filha Kévylla Elisabeth que me trouxe sempre bastante força de vontade nos momentos difíceis do curso, a minha esposa Maria Fernanda que sempre me incentivou bastante durante todo o mestrado.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é apresentar uma proposta didática para subsidiar uma abordagem interdisciplinar de física e matemática no primeiro ano do ensino médio. A proposta aqui apresentada se encontra fundamentada na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau e utiliza o GeoGebra como ferramenta didática. Neste trabalho encontra-se também o relato da aplicação dessa proposta em um primeiro ano do ensino médio de uma escola pública de Maceió.

Palavras-chave: Funções. Cinemática. Relações matemáticas. Funções afins e quadrática.

ABSTRACT

The objective of this work is to present a didactic proposal to subsidize an interdisciplinary approach to physics and mathematics in the first year of high school. The proposal presented here is based on the theory of didactic situations Guy Brousseau and use GeoGebra as a teaching tool. In this work also lies the account of the application of this proposal in a first year high school students from a public school in Maceio.

Key words: Functions. Kinematics. Mathematical relationships. Related and quadratic functions

Lista de Figuras

1.1 Ambiente do GeoGebra . . . 18

1.2 Simulação no geogebra . . . 21

2.1 Representação diagramática de função . . . 22

2.2 Congruência de triângulos . . . 25

2.3 Foto estroboscópica . . . 26

2.4 Movimento uniforme . . . 27

2.5 Espaço x tempo . . . 28

2.6 Velocidade x tempo . . . 28

2.7 Velocidade negativa . . . 29

2.8 Velocidade x tempo . . . 29

2.9 Parábola . . . 34

2.10 Função $f(x) = ax^2$ . . . 35

2.11 Translação horizontal . . . 36

2.12 Translação vertical . . . 37

2.13 Caminhão em MUV . . . 38

2.14 Trapézio . . . 39

2.15 Espaço x tempo . . . 40

2.16 Velocidade x tempo . . . 40

3.1 Mapeamento da teoria das situações . . . 45

3.2 Janela de visualização do Geogebra . . . 48

3.3 Corrida de atletas . . . 49

3.4 Simulação 1 . . . 50

3.5 Janela de visualização do Geogebra . . . 52

3.6 Motociclistas . . . 54

3.7 Simulação 2 . . . 56

3.8 Chute a gol 60

3.9 Simulação 3 63

4.1 Ambiente de desenvolvimento das atividades 64

4.2 Atividade 1 66

4.3 Atividade 2 67

4.4 Oficina 5 - Atividade 1 69

4.5 Oficina 5 - Atividade 1 72

4.6 Observação dos alunos 73

4.7 Participação de aluno em Institucionalização 73

4.8 Oficina 2 - Atividade 1 79

4.9 Oficina 2 - Atividade 1 (continuação) 80

4.10 Oficina 3 - Atividade 1 81

4.11 Oficina 2 - Atividade 1 82

4.12 Oficina 2 - Atividade 1 (continuação) 83

4.13 Oficina 2 - Atividade 1 (continuação) 84

4.14 Oficina 2 - Atividade 2 85

4.15 Oficina 3 - Atividade 1 86

4.16 Oficina 3 - Atividade 1 (continuação) 87

4.17 Oficina 3 - Atividade 1 (continuação) 88

4.18 Oficina 4 - Atividade 4 89

4.19 Oficina 4 - Atividade 4 (continuação) 90

Lista de Tabelas

3.1 Litros X Preço 47
3.2 Motociclista A 55
3.3 Motociclista B 55
3.4 Lado X Área 57
3.5 Tempo X Espaço 58
3.6 Tempo X Altura 60
3.7 Alunos X Valor (R\$) 62

Sumário

INTRODUÇÃO **13**

1 ASPECTOS DIDÁTICOS **13**

1 ASPECTOS DIDÁTICOS **14**

1.1 **Introdução** 14

1.2 **O conceito de função: uma síntese do desenvolvimento histórico** . 14

1.3 **Os computadores e o ensino da física** 15

1.4 **O GeoGebra e o ensino de funções** 17

1.5 **Dificuldades dos estudantes na interpretação de gráficos** 18

1.6 **O uso de simulações e modelagens computacionais na física** 19

1.7 **O GeoGebra e o ensino de Física** 20

2 FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA **22**

2.1 **Introdução** 22

2.2 **Funções Afins e o Movimento Uniforme (MU)** 22

2.2.1 **Movimento no sentido da trajetória** 28

2.2.2 **Movimento no sentido oposto ao da trajetória** 29

2.3 **Funções Quadráticas e o movimento uniformemente variado** 30

2.3.1 **Forma canônica da função quadrática** 31

2.3.2 **Valores de mínimo e máximo da função quadrática** 32

2.3.3 **Zeros da função quadrática e raízes da equação correspondente** 33

2.3.4 **Equações do MUV** 38

3 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA **42**

3.1 **Introdução** 42

3.2 **A teoria das situações didáticas** 42
3.3 **Propostas para oficinas** 46
3.3.1 **Oficina 1: Funções Lineares e Cinemática com auxílio do GeoGebra** 46
3.3.2 **Oficina 2: Funções Afins** 51
3.3.3 **Oficina 3: Funções Afins e o Movimento Uniforme** 54
3.3.4 **Oficina 4: Funções Quadráticas** 57
3.3.5 **Oficina 5: Funções Quadráticas e Cinemática** 59
3.3.6 **Oficina 6: Funções Quadráticas** 62

4 EXPERIMENTAÇÃO E RELATO DA EXPERIÊNCIA **64**
4.1 **Introdução** 64
4.2 **Coleta de dados** 64
4.2.1 **Atividades desenvolvidas - Aluno M** 65
4.2.2 **Atividades desenvolvidas - Aluno N** 70
4.3 **Análise dos dados coletados** 72

CONSIDERAÇÕES FINAIS **74**

REFERÊNCIAS **75**

ANEXOS **79**

INTRODUÇÃO

Este trabalho foi motivado em minha prática de ensino da matemática no primeiro ano do ensino médio ao perceber que muitos estudantes concluíam o primeiro ano sem perceber a relação entre os conteúdos de cinemática e de funções afim e quadrática. Daí veio a ideia de procurar uma forma de superação desse problema: criar uma proposta didática que propicie a percepção de que os conteúdos referentes às funções afins e quadráticas e os conteúdos referentes à cinemática no primeiro ano do ensino médio estão intimamente relacionados. Como fazer para que essa fragmentação do conhecimento seja superada? Como o uso de um software como o GeoGebra pode ser útil para essa finalidade?

A proposta que elaboramos se encontra fundamentada na teoria das situações didáticas de Guy Brousseau. A teoria das situações didáticas (em francês: Théorie des situations didactiques) é uma teoria didática desenvolvida por Guy Brousseau em contraposição aos trabalhos formalistas característicos da proposta didática da Matemática Moderna. Essa teoria se baseia em teorias construtivistas como a Epistemologia genética de Jean Piaget.

Este trabalho se encontra estruturado do seguinte modo. No capítulo 1, intitulado Aspectos Didáticos, apresentamos uma síntese do desenvolvimento histórico do conceito de função e de algumas questões ligadas à utilização de computadores no ensino da matemática e da física. No capítulo 2, intitulado Fundamentação Matemática, apresentamos os aspectos matemáticos básicos dos conteúdos de funções afim e quadrática e das equações do movimento uniforme (MU) e movimento uniformemente acelerado (MUV). No capítulo 3, apresentamos algumas noções fundamentais da teoria das situações didáticas de Guy Brousseau e a proposta da sequência didática. Finalmente, no capítulo 4, apresentamos o relato de uma implementação da proposta apresentada no capítulo 3 em uma escola pública do município de Maceió.

Capítulo 1

ASPECTOS DIDÁTICOS

1.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo uma síntese do desenvolvimento histórico do conceito de função e de algumas questões ligadas à utilização dos computadores no ensino de física e de matemática na educação básica.

1.2 O conceito de função: uma síntese do desenvolvimento histórico

Nosso objetivo, nesta seção, é apresentar alguns elementos acerca do desenvolvimento do conceito de função. Vamos nos apoiar basicamente em duas referências, Zuffi (1999) e Pitombeira & Roque (2012).

Não pretendemos analisar minuciosamente os pormenores e as contribuições de cada autor ao longo do tempo, mas deixar claro que esse conceito não foi concebido em um momento histórico único, por uma única pessoa. Esse conceito, na verdade, é um produto de um processo construtivo que envolve problemas e questões julgados relevantes pela sociedade e por diferentes comunidades científicas ao longo do tempo.

Para efeito didático, subdividiremos a construção do conceito de função em etapas:

a) da gênese da representação tabular (ou do "instinto de funcionalidade", como diz Youschkevitch(1976)), a qual se refere à utilização de tabelas para expressar a relação entre grandezas. Nesta etapa, enquadram-se as tabelas construídas pelos babilônios em seus tabletes de argila (tabelas sexagesimais de quadrados e de raízes quadradas de números, por exemplo) e pelos gregos (tabelas trigonométricas construídas por Hiparco e por Ptolomeu, por exemplo);

b) da gênese da representação diagramática, a qual envolve a expressão da relação de dependência entre grandezas por meio de diagramas. Nesta etapa, enquadram-se os diagramas representativos produzidos por Nicole Oresme, na França, em 1361, para expressar a relação entre grandezas referentes a um movimento uniformemente acelerado;

c) da gênese da representação simbólica, a qual se refere à utilização de letras para a representação da relação de dependência entre grandezas. Nesta etapa, podemos incluir os trabalhos de Fermat e de Descartes acerca da geometria analítica, na primeira metade do século XVII;

d) da matematização do movimento, a qual se refere às contribuições de Galileu e de Kepler na primeira metade do século XVII; os trabalhos de Newton e de Leibniz sobre o cálculo diferencial na segunda metade do século XVII; as contribuições de Jean Bernoulli, de Leonard Euler e de Lagrange durante o século XVIII;

e) da formalização ou do rigor, na qual se enquadram as tentativas e as contribuições de matemáticos para a obtenção de uma definição matematicamente satisfatória e aceitável dentro do padrão de rigor do século XIX. Destacam-se Cauchy, Riemann, Bolzano, Weierstrass e Dirichlet. Nesta etapa, entre os problemas propulsores do refinamento do conceito de função podemos citar o da formalização de número real e da noção de continuidade, o do estabelecimento de critérios mediante os quais pode-se garantir a convergência da série de Fourier, o da algebricidade ou da transcendência de certos números, o da caracterização e das propriedades dos conjuntos infinitos;

f) conjuntista, na qual ressaltam-se os papeis dos conjuntos e da univocidade na caracterização de uma função. Aqui se encontram as contribuições de Peano (1911) e do grupo Bourbaki (1939).

1.3 Os computadores e o ensino da física

Nesta seção, discutiremos alguns aspectos sobre o uso de computadores no ensino de física e, para isso, nos basearemos em Araujo & Veit (2004) e Martins & Garcia (2011).

Sem sombra de dúvidas, podemos destacar que o uso de computadores no ensino de física é um fator importantíssimo que pode possibilitar uma interação grande entre o aluno e os estudos de temas abordados em física. No entanto, Araujo & Veit (2004) chamam a atenção para as seguintes necessidades:

a) realização de pesquisa continuada na identificação das dificuldades dos estudantes em várias áreas da física e também na identificação dos tópicos em que a instrução baseada no uso do computador é mais efetiva;

b) desenvolvimento e teste de estratégias instrucionais, usando o computador, endereçadas às dificuldades específicas dos estudantes, exame preciso do que o estudante está aprendendo enquanto trabalha com o computador.

Já Martins & Garcia(2011) acentuam o uso das novas tecnologias de informação e comunicação (NTIC) no ensino de física, colocando em questão que este uso deve ter um contexto do processo de ensino-aprendizagem e coloca que uma dificuldade que emerge dos debates sobre tecnologia está em se vincular esta noção apenas ao uso de computadores e da informática.

Araujo & Veit (2004) fizeram uma análise da literatura sobre estudos relativos a tecnologias computacionais no ensino de física e, em suas análises, os autores identificaram três períodos distintos em que a aplicação da informática na escola buscou acompanhar a evolução das teorias de aprendizagem.

No primeiro período, moldado pela visão de mundo behaviorista, os seguintes pressupostos foram assumidos, segundo Fiolhais & Trindade (2003):

- o comportamento do aluno pode ser razoavelmente previsto se forem bem conhecidos os objetivos pretendidos para o ensino e os métodos para atingi-los;
- o conhecimento que o aluno deve adquirir pode ser decomposto em módulos elementares, os quais, depois de dominados, produzem o resultado desejado;
- a aplicação da teoria comportamentalista é confiável o suficiente para garantir a eficiência do ensino desenvolvido através de sua aplicação sistemática, sendo mesmo dispensável a intervenção do professor.

O segundo período, moldado pelo enfoque cognitivista, caracterizou-se pela crença de que não existem dois alunos psicologicamente iguais e que essas diferenças não podem ser ignoradas. Passou-se a enfatizar o design das atividades, tanto quanto o seu conteúdo.

Por fim, o terceiro período, no qual vivemos hoje, baseia-se na postura construtivista, onde se assume que cada aluno constrói sua visão de mundo de acordo com suas próprias experiências individuais. Também é característica deste período a promoção da capacidade de prever qualitativamente a evolução dos fenômenos como um fator mais importante do que a manipulação de fórmulas ou outras ferramentas formais. Também podemos apontar as seguintes implicações do construtivismo na concepção de ambientes de ensino, segundo Fiolhais & Trindade (2003):

- Propiciar múltiplas representações da realidade;
- Apresentar tarefas contextualizadas;
- Propiciar a análise de situações em ambientes reais de aprendizagem, em vez de sequências esquemáticas.

1.4 O GeoGebra e o ensino de funções

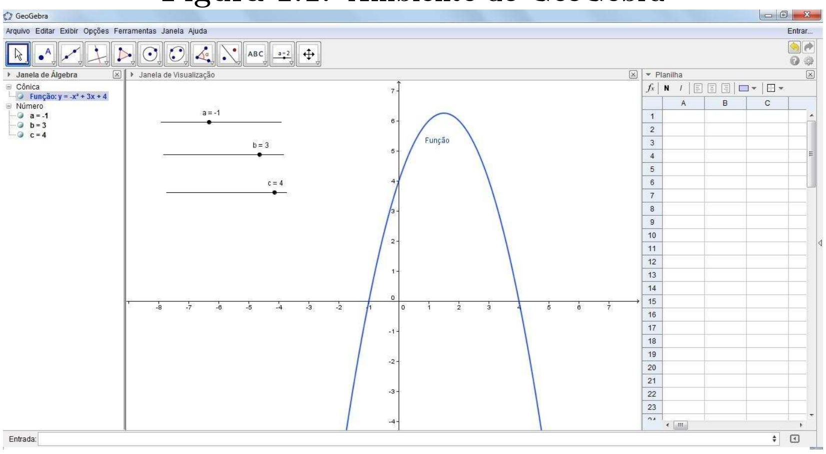
O GeoGebra é um software matemático que reúne geometria, álgebra e cálculo. Sabendo disso, Petra & Rolkouski(2009) falam sobre as possibilidades para o ensino de matemática com o auxílio do GeoGebra e trata esta metodologia de suma importância para o desenvolvimento de temas relacionados à matemática, sendo esta abordagem tratada como uma estratégia para auxiliar o ensino-aprendizagem.

Para o autor mencionado, os computadores não podem ser usados como apenas um caderno digital e, para que se efetive um conceito matemático, é preciso repensar o fazer pedagógico de tal modo que se interliguem os conceitos matemáticos e o uso de software matemáticos auxiliares como o GeoGebra. Os mesmos desenvolveram uma estratégia que, para densenvolver um tema matemático, por exemplo, funções afins, deve-se abordar o tema de forma bem elaborada com os alunos, através de alguns problemas, nos quais os alunos irão tirar algumas consclusões. Após tirar estas conclusões iniciais, os discentes deverão aplicar aquela teoria no GeoGebra e poderão testá-la com várias ferramentas existentes no software, se suas conclusões são verdadeiras ou não, e até realizar novas observações do tema abordado.

Já Melo & Silva (2013) abordam o conceito do uso do GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino de funções quadráticas e enfatizam a importância dos recursos computacionais de geometria dinâmica para desenvolver e tornar efetiva a pesquisa sobre propriedades geométricas, cujos resultados dificilmente seriam obtidos sem o uso desse recurso, utilizando-se apenas quadro e giz. Esses programas podem ser entendidos, de acordo com Moran (2007), como tecnologias que representam e medeiam o conhecimento do mundo que rodeia os alunos, sendo pontes para abrir a sala de aula ao mundo.

Vale ressaltar, também, que Melo & Silva (2013) observam que o GeoGebra fornece três diferentes vistas dos objetos matemáticos: a zona gráfica, a zona algébrica (ou numérica) e a folha de cálculo (figura abaixo). Elas permitem mostrar os objetos matemáticos em três diferentes representações: graficamente (pontos e gráficos de funções), algebricamente (coordenadas de pontos e equações) nas células da folha de cálculo (a partir da planilha). Assim, todas as representações do mesmo objeto estão ligadas dinamicamente e adaptam-se automaticamente às mudanças realizadas em qualquer delas, independentemente da forma como esses objetos foram inicialmente criados.

Figura 1.1: **Ambiente do GeoGebra**



Fonte: Autor (2014)

1.5 Dificuldades dos estudantes na interpretação de gráficos

Destacamos as dificuldades que alunos do 1º ano do ensino médio têm na intepretação de gráficos das funções afins e quadráticas, considerando que um dos problemas está no conceito básico, ou seja, o conceito de função. Quando não entendem bem esse conceito, eles acabam não entendendo o significado do gráfico. Sendo assim, não conseguem observar propriedades e outros elementos escondidos em um caso geral nestas relações.

As dificuldades, segundo Ramos (2011), nas atividades que se relacionam com gráficos encontram-se bem identificadas na literatura (Beichner (1994), Bell & Janvier (1981), Monteiro (s/d), Murphy (1999), referido por Araújo (2002)). Contudo, o autor destaca que poucos estudos têm sido desenvolvidos para conhecer as suas causas.

Bowen & Roth (2000) investigaram o modo como especialistas leem os gráficos e desenvolveram um modelo semiótico de leitura de gráficos. De acordo com tal modelo, o ato de intepretar um gráfico envolve retirar deste os seus aspectos fundamentais, que se tornam os signos e que se relacionam com um fenômeno, um conhecimento (da física, por exemplo), a que se chama referente.

Os gráficos da cinemática, segundo Ramos (2011), são propícios a interpretações múltiplas (polissemia). Gráficos respeitantes a movimentos retílineos exibem com frequência formas idênticas. Assim, os gráficos de posição para movimentos uniformes (m.u.) e os gráficos de velocidade para movimentos uniformemente variados (m.u.v.) correspondem a uma reta com declive diferente de zero que corresponde ao mesmo gráfico similar da função afim; gráficos de velocidade para m.u. e gráfico de aceleração para o m.u.v. correspondem a retas sem inclinação, o que especifica uma função constante; somente os gráficos de posição para m.u.v têm forma curvilínea, pois traduzem a função quadrática.

Também em Ramos (2011) fala sobre estudos realizados na área de gráficos de cinemática e que levaram a concluir que os alunos intepretam melhor os gráficos se estes surgirem simultâneos com o movimento. Assim se garantirá que os gráficos sejam "compreendidos no contexto das ações em que são utilizados". Monteiro (s/d) e Fiolhais & Trindade (2003) realçam a importância da interatividade, condição que assegura "uma aprendizagem individual e ativa" que, segundo Beichner (1990), é mesmo o fator determinante na aprendizagem dos gráficos (mais do que a simultaneidade movimento/gráfico)(p.8).

1.6 O uso de simulações e modelagens computacionais na física

O uso de simulações e modelagem computacionais na física vem sendo usado, mas ainda não está sendo aplicado com tanta frequência. Essa abordagem de ensino, quando aliada à teoria e a atividade experimental, pode produzir uma compreensão aprofundada na física.

Jimoyiannis & Komis (2001), referidos por Ramos (2011), salientam a importância das ferramentas de modelação na física, pela oportunidade que dão em:

a) isolar e manipular parâmetros;

b) ajudar a compreender as relações entre conceitos físicos, variáveis e fenômenos;

c) empregar várias representações, como gráficos, animações, imagens, vetores, dados numéricos;

d) expressar as representações mentais sobre o mundo físico;

e) investigar fenômenos difíceis de experienciar na aula por serem complexos, difíceis, perigosos, dispendiosos ou rápidos.

Ramos (2011) observa que Halloun (2007) constatou que, até à data de sua publicação, a utilização das TICs num curso de física não fez aumentar os ganhos dos alunos no teste Inventaire de Conceptions de base para a Mecânica (ICB-Mecânica), que mede qualitativamente a compreensão conceitual em Mecânica. Mas crê que um software desenhado de acordo com uma filosofia baseada na modelação, que ajude os alunos a construir, utilizar e compreender o papel fundamental dos modelos, poderá fazê-los chegar a uma aprendizagem inteligível das Ciências. E, além disso, Araújo e Veit (2008) tentaram adaptar o processo faseado de modelação proposto por Halloun (2007) (Construção, validação, análise e expansão) ao ensino dos gráficos de cinemática, servindo-se do computador como ferramenta cognitiva para a execução dos quatro estágios. Utilizaram, no seu estudo, o programa Modellus.

1.7 O GeoGebra e o ensino de Física

A tecnologia aliada ao ensino de física é um fator indispensável nos dias de hoje. Mas para que estas tecnologias sejam bem sucedidas deve-se ter um bom preparo dos profissionais que as empreguem.

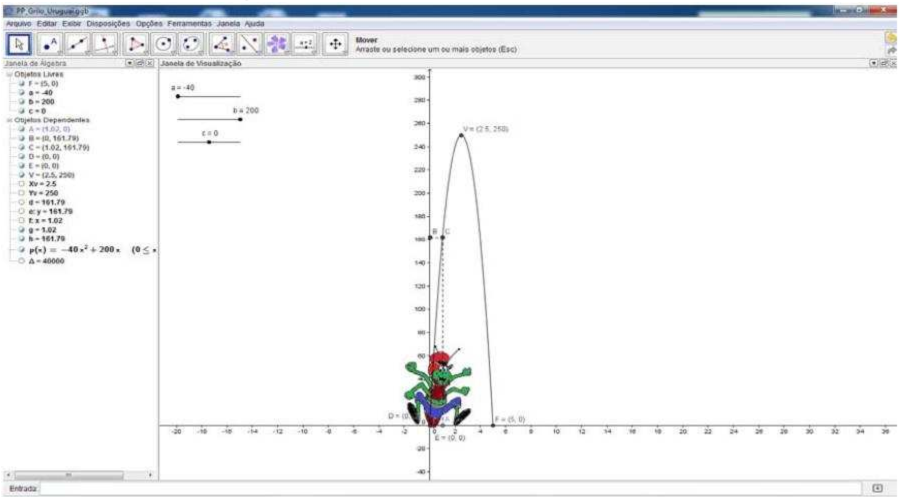
Vamos abordar neste caso o ensino de física com o uso do software GeoGebra, ferramenta que quando usada de forma didática torna o ensino desta disciplina mais interessante, proporcionando um maior interesse do aluno em seu aprendizado.

O GeoGebra no ensino de física pode proporcionar meios onde o aluno poderá visualizar e adaptar ambientes de interatividade e aprendizado. A Física, vista através de um software como o GeoGebra, segundo Maximiano et al (2012), envolve exemplos dos mais básicos aos mais avançados, ou seja, independe da sua complexidade para que se possa fazer uso de instrumentos auxiliares como este.

Também Maximiano et al (2012) falam que, com o propósito de apresentar uma atividade que envolvesse conceitos da física, pensou-se em elaborar, por meio do GeoGebra

(2012), uma situação-problema, ganhando, também, um novo sentido, indo além do campo algébrico e podendo explorar o visual por meio da geometria dinâmica, como podemos ver abaixo:

Figura 1.2: **Simulação no geogebra**



Fonte: Maximiano et al (2012)

Capítulo 2

FUNDAMENTAÇÃO MATEMÁTICA

2.1 Introdução

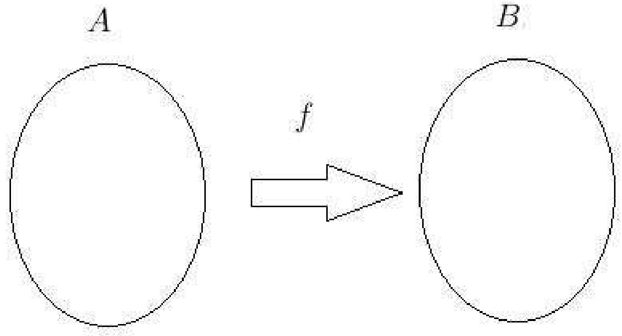
Apresentamos neste capítulo os aspectos matemáticos básicos dos conteúdos de funções afim e quadrática e das equações do movimento uniforme (MU) e do movimento uniformemente acelerado (MUV).

2.2 Funções Afins e o Movimento Uniforme (MU)

Definição 1.

Dados dois conjuntos A e B, não vazios, uma relação $f : A \longrightarrow B$ recebe o nome de função de A em B se, e somente se, para todo $x \in A$ existir um só $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. O conjunto A chama-se o domínio e B é o contradomínio da função f. Para cada $x \in A$, o elemento $f(x) \in B$ chama-se a imagem de x pela função f.

Figura 2.1: **Representação diagramática de função**



Fonte: Autor (2014)

Definição 2.

Uma função afim é uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada pela regra $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais fixados, com $a \neq 0$.

Exemplo 1.

- $f(x) = 2x + 5$, onde $a = 2$ e $b = 5$;
- $f(x) = -x + 4$, onde $a = -1$ e $b = 4$;
- $f(x) = 5x$, onde $a = 5$ e $b = 0$;
- $f(x) = \dfrac{-1}{5}x - 7$, onde $a = \dfrac{-1}{5}$ e $b = -7$.

Lima (2006) fala que é possível, mediante critérios como os que apresentaremos logo a seguir, saber que uma certa função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é afim sem que os coeficientes a e b sejam fornecidos explicitamente. Neste caso, a pode ser determinado a partir do conhecimento dos valores $f(x_1)$ e $f(x_2)$ que a função f assume em dois pontos distintos (porém arbitrários) x_1 e x_2. Com efeito,

$$f(x_1) = ax_1 + b$$

e

$$f(x_2) = ax_2 + b,$$

subtraindo as equações acima obtemos,

$$f(x_2) - f(x_1) = a(x_2 - x_1)$$

portanto,

$$a = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

.

Substituindo esse valor de a em $y_1 = f(x_1) = ax_1 + b$, obtemos o valor de b:

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 + b \Rightarrow y_1(x_2 - x_1) = y_2x_1 - y_1x_1 + b(x_2 - x_1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y_1x_2 - y_1x_1 - y_2x_1 + y_1x_1 = b(x_2 - x_1) \Rightarrow b = \frac{y_1 - y_2x_1}{x_2 - x_1}.$$

Além disso, o coeficiente b obtém-se como o valor que a função assume quando $x = 0$. O número $b = f(0)$ às vezes se chama o valor inicial (ou coeficiente linear) da função f.

Dados x, $x + h \in \mathbb{R}$, com $h \neq 0$, o número $a = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ chama-se a taxa de variação (ou coeficiente angular) da função f no intervalo de extremos x, $x + h$.

Devemos saber também que uma função $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, com $X \subset \mathbb{R}$, chama-se :

- crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;
- decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$;
- monótona não-decrescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$;
- monótona não-crescente quando $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Em qualquer dos quatro casos, f diz-se monótona.

Proposição 1.

i) a função afim $f(x) = ax + b$ é crescente se, e somente se, o coeficiente a for positivo.

Demonstração.

Para $x_1 \neq x_2$,

$f(x) = ax + b$ é crescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} > 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} > 0$

$\Leftrightarrow \frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2} > 0 \Leftrightarrow a > 0$

$\square$

ii) a função afim $f(x) = ax+b$ é decrescente se, e somente se, o coeficiente a for negativo.

Demonstração.

Para $x_1 \neq x_2$, tem-se

$f(x) = ax + b$ é decrescente $\Leftrightarrow \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} < 0 \Leftrightarrow \frac{(ax_1+b)-(ax_2+b)}{x_1-x_2} < 0$

$\Leftrightarrow \frac{a(x_1-x_2)}{x_1-x_2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$

$\square$

Exemplo 2.

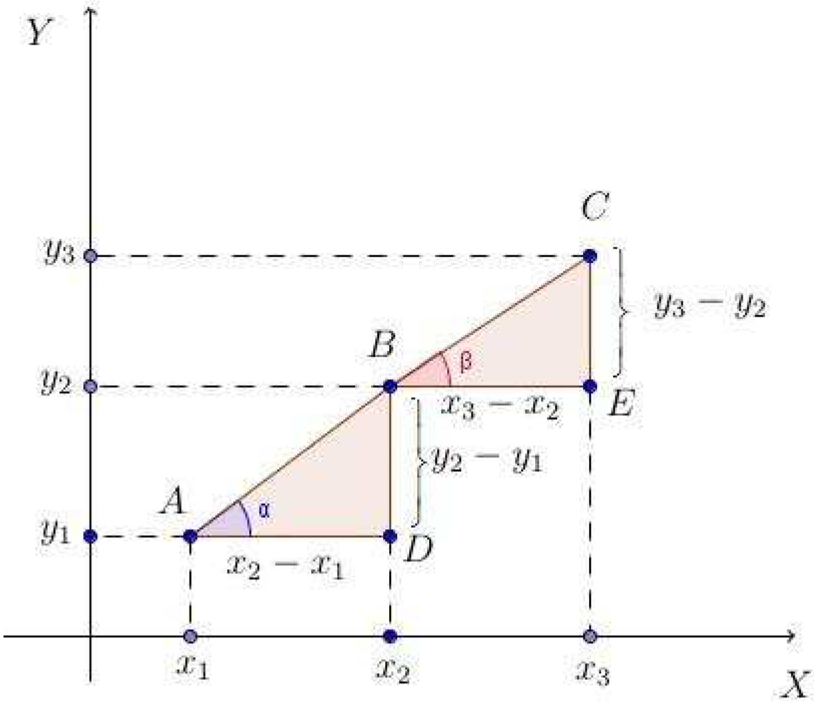
- $f(x) = 2x + 5$ é crescente, pois $a = 2 > 0$;
- $f(x) = -x + 4$ é decrescente, pois $a = -1 < 0$;
- $f(x) = 5x$ é crescente, pois $a = 5 > 0$;
- $f(x) = \dfrac{-1}{5}x - 7$ é decrescente, pois $a = \dfrac{-1}{5} < 0$.

Teorema 1.

O gráfico cartesiano da função $f(x) = ax + b$ $(a \neq 0)$ de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é uma reta.

Demonstração. Sejam A, B e C três pontos quaisquer, distintos dois a dois, do gráfico cartesiano da função $y = f(x) = a.x+b$ $(a \neq 0)$, com f crescente neste caso (o caso decrescente é similar) e (x_1, y_1), (x_2, y_2) e (x_3, y_3), respectivamente, as coordenadas cartesianas desses pontos.

Figura 2.2: Congruência de triângulos



Fonte: Autor (2014)

Para provarmos que os pontos A, B e C pertencem à mesma reta, mostremos, inicialmente, que os triângulos retângulos ABD e BCE são semelhantes.

De fato:

$(x_1, y_1) \in S \Rightarrow y_1 = a.x_1 + b$ (I)

$(x_2, y_2) \in S \Rightarrow y_2 = a.x_2 + b$ (II)

$(x_3, y_3) \in S \Rightarrow y_3 = a.x_3 + b$ (III)

Fazendo (III) - (II), obtemos $y_3 - y_2 = a(x_3 - x_2)$, onde $a = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$. Sabendo que para tomarmos 3 pontos distintos, devemos tomar 3 valores distintos do domínio então $x_3 \neq x_2$.

Por outro lado, (II) - (I), temos $y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$, ou seja, $a = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$.

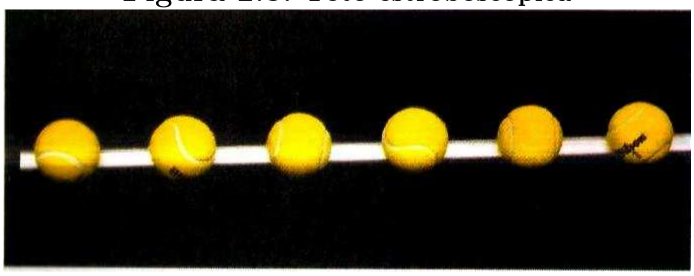
Logo $a = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Como os triângulos ABD e BCE são retângulos e têm lados proporcionais, então são semelhantes e, portanto, $\alpha = \beta$. Segue-se que os pontos A, B e C estão alinhados, pois, os lados AD e BE estão contidos em retas suportes paralelas e B é um vértice comum aos triângulos.

$\square$

Definição 3.

Movimento Uniforme (MU) é todo aquele em que a velocidade escalar v é constante e diferente de zero. Consequentemente, ocorrem iguais variações de espaço ΔS em iguais intervalos de tempo Δt.

Figura 2.3: Foto estroboscópica

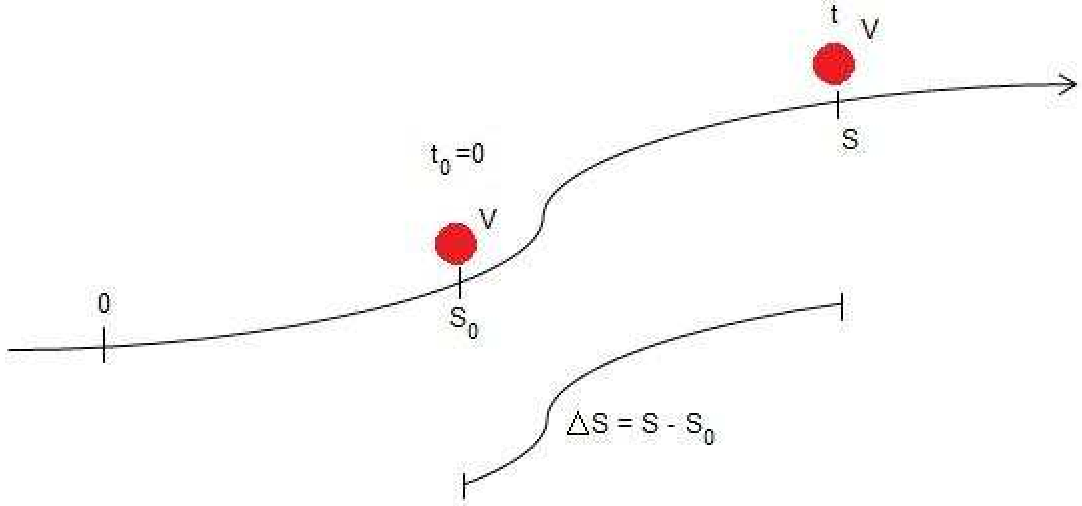


Fonte: Biscuola & Maiali (1998)

A foto mostra uma bolinha de beiseball em movimento uniforme paralelamente a uma régua. O tempo decorrido entre flashes consecutivos é sempre o mesmo. Note que o objeto percorre distâncias iguais em tempos iguais.

Para equacionar um movimento, vamos adotar uma origem de tempo $t_0 = 0$, instante em que se inicia a medição do tempo. Em outras palavras, esse é o instante em que começamos a estudar o movimento. O espaço em $t_0 = 0$, simbolizado por S_0, chama-se espaço inicial. Num instante t qualquer, o espaço é S:

Figura 2.4: Movimento uniforme



Fonte: Autor (2014)

Onde adotaremos, $v > 0$: movimento no sentido da trajetória e $v < 0$: movimento no sentido oposto ao da trajetória.

Proposição 2.

A equação $S = S_0 + v.t$ é denominada equação horária do espaço porque relaciona o espaço com o tempo.

Demonstração. Como em MU temos variações de espaços iguais em variações de tempos iguais, então v (velocidade) é constante, logo

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{S - S_0}{t - 0} \Rightarrow S = S_0 + v.t$$

□

Observação 1.

O que podemos notar é que a equação horária $S = S_0 + v.t$, com S_0 e $v \neq 0$ constantes, pode ser vista como uma função afim a depender da restrição em seu domínio, e poderia, sem perda de generalidade, ser vista como $f(x) = a.x + b$, onde neste caso x denotaria o tempo t positivo, a seria a velocidade e b o espaço inicial. O que faria a função ser de $\mathbb{R}_+$ em $\mathbb{R}_+$.

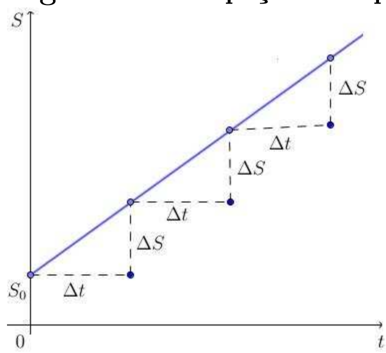
Exemplo 3.

Um móvel que inicia sua trajetória em um ponto inicial $2m$ e percorre um determinado espaço com velocidade escalar constante de $5m/s$ é relacionado através da função $s(t) = 2 + 5.t$, ou seja, uma função afim que também algumas vezes é chamada de função horária.

2.2.1 Movimento no sentido da trajetória

Então, de acordo com o que concluimos acima, podemos destacar que para $v > 0$ o gráfico $t \times S$ é uma semirreta crescente, como segue abaixo:

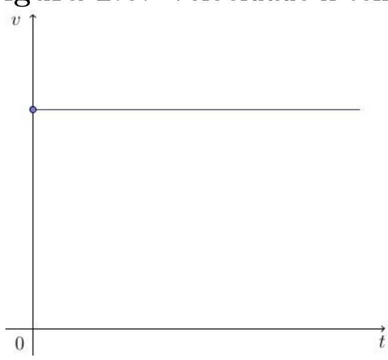
Figura 2.5: Espaço x tempo



Fonte: Autor (2014)

Além disso, o gráfico $t \times v$ é uma semirreta paralela ao eixo t.

Figura 2.6: Velocidade x tempo

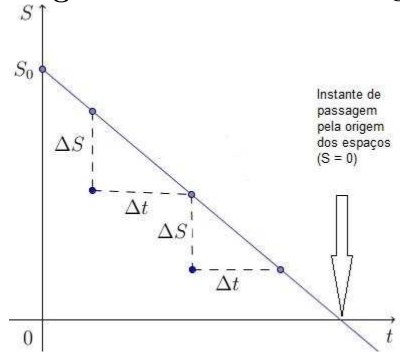


Fonte: Autor(2014)

2.2.2 Movimento no sentido oposto ao da trajetória

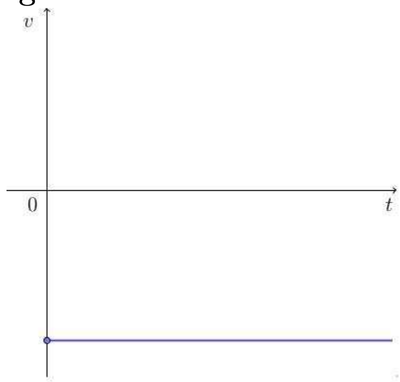
Em contrapartida ao caso anterior, para $v < 0$, temos uma semirreta decrescente:

Figura 2.7: Velocidade negativa



Fonte: Autor (2014)

Figura 2.8: Velocidade x tempo



Fonte: Autor (2014)

2.3 Funções Quadráticas e o movimento uniformemente variado

Definição 4.

Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a,b, c, com $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$

Exemplo 4.

- $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$, onde $a = 2$, $b = -3$ e $c = 4$;
- $f(x) = -x^2 + 5x - 1$, onde $a = -1$, $b = 5$ e $c = -1$;
- $f(x) = 8x^2 - x + 13$, onde $a = 8$, $b = -1$ e $c = 13$;
- $f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 7x + 1$, onde $a = \frac{3}{4}$, $b = -7$ e $c = 1$.

Lima (2006) destaca que os coeficientes a, b, c da função quadrática f ficam inteiramente determinados pelos valores que essa função assume. Noutras palavras, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Com efeito, seja, $ax^2+bx+c = a'x^2+b'x+c'$ para todo $x \in \Re$. Tomando $x = 0$, obtemos $c = c'$, tem-se $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Em particular, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$. Neste caso, cancelando x, obtemos $ax + b = a'x + b'$ para todo $x \neq 0$. Fazendo primeiro $x = 1$ e depois $x = -1$, vem, $a + b = a' + b'$ e $-a + b = -a' + b'$, donde, concluímos $a = a'$ e $b = b'$.

Sendo assim, identificaremos a função quadrática com o trinômio do segundo grau a ela associado e nos permitiremos falar da função $f(x) = ax^2 + bx + c$ sempre que não houver perigo de confundí-la com o número real $f(x)$, que é o valor por ela assumido no ponto x.

Para que se tenha $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, não é necessário exigir, como fizemos acima, que $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Basta supor que esta igualdade valha para três valores distintos de x. Como veremos adiante.

Suponhamos que as funções quadráticas $f(x) = ax^2 + bx + c$ e $g(x) = a'x^2 + b'x + c'$ assumam os mesmos valores $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ para três números reais distintos x_1, x_2 e x_3. Escrevendo $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$, queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Sabendo que $f(x_1) - g(x_1) = 0$, $f(x_2) - g(x_2) = 0$ e $f(x_3) - g(x_3) = 0$. Então,

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = y_1 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = y_2 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = y_3 \end{cases}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, vem:

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0$$

$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira destas equações por $x_2 - x_1$ e segunda por $x_3 - x_1$, obtendo,

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$$

$$\alpha(x_1 + x_3) + \beta = 0$$

Subtraindo membro a membro, temos $\alpha(x_3 - x_2) = 0$. Como $(x_3 - x_2) \neq 0$, resulta daí que $\alpha = 0$. Substituindo nas equações anteriores, obtemos suscessivamente $\beta = 0$ e $\gamma = 0$.

Acabamos de mostrar que se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2, x_3 então essas funções são iguais, isto é, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.

2.3.1 Forma canônica da função quadrática

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos escrever:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right]$$

As duas primeiras parcelas dentro dos colchetes são as mesmas do desenvolvimento do quadrado:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = x^2 + 2x.\frac{b}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}.$$

Completando o quadrado, temos:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a.\left[x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

ou seja,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a.\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

ou ainda,

$$f(x) = a.\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

chamando de:

$$m = \frac{-b}{2a}$$

e

$$k = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

concluimos que $k = f(m)$.

Assim, para todo $x \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ podemos escrever qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ da seguinte maneira:

$$f(x) = a(x - m)^2 + k$$

2.3.2 Valores de mínimo e máximo da função quadrática

Valor mínimo e valor máximo da função $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Suponhamos $a > 0$. A forma canônica

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a.\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right]$$

exibe, no interior dos colchetes, uma soma de duas parcelas. A primeira depende de x e é sempre maior ou igual a zero. A segunda é constante. O menor valor dessa soma é atingido quando

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

é igual a zero, ou seja, quando $x = \frac{-b}{2a}$. Neste ponto, f(x) também assume seu valor mínimo. Portanto, quando $a > 0$, o menor valor assumido por

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

é

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

.

Se $a < 0$, o valor $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Quando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ não assume valor máximo: é uma função ilimitada superiormente. Analogamente, quando $a < 0$, $f(x)$ não assume valor mínimo: é ilimitada inferiormente.

2.3.3 Zeros da função quadrática e raízes da equação correspondente

Um segundo fato importante que decorre da forma canônica é que podemos chegar à relação que fornece os zeros da função e, portanto, às raízes da equação do 2 grau $ax^2 + bx + c = 0$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

A passagem da linha (2) para linha (3) só tem sentido quando o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

é maior ou igual a zero. Caso $\Delta < 0$, a equivalência entre as linhas (1) e (2) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x + \frac{b}{2a}$ não pode ser negativo.

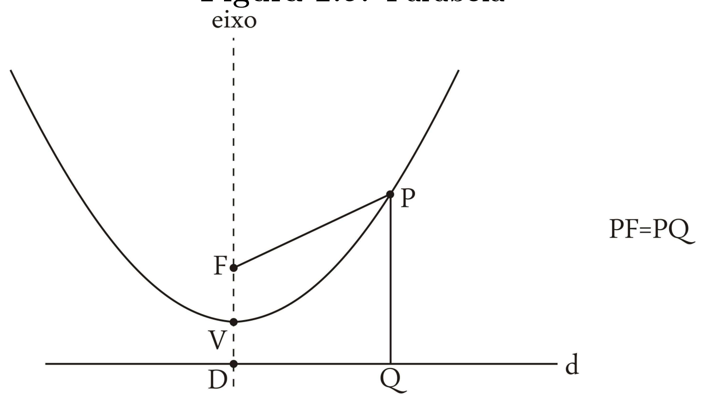
O método de completar quadrado é bem eficiente para resolver equações do 2º grau e faz o aluno refletir melhor em sua solução e, além disso, tem muitas aplicações.

Definição 5.

Dados um ponto F e uma reta reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que distam igualmente de F e de d.

A reta perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco, chama-se o eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo da diretriz chama-se o vértice dessa parábola. Ele é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

Figura 2.9: Parábola



Fonte: LIMA (2006)

Teorema 2.

Se $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = (0, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Demonstração. Seja $F(0, t)$ o foco sobre o eixo y do plano cartesiano e a reta $r : y = -t$ a diretriz dada pela definição e levando em conta que $y = f(x) = ax^2$ passa pela origem $O(0, 0)$. Agora seja $P(x, ax^2)$ um ponto qualquer, onde $a \neq 0$, e como o caso de $x = 0$ já foi considerado acima, iremos analisar quando $x \neq 0$, então:

$$d_{PF} = \sqrt{(x-0)^2 + (ax^2 - t)^2} = \sqrt{x^2 + (ax^2 - t)^2}.$$

Por outro lado,

$$d_{Pr} = \frac{|y+t|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |ax^2+t|$$

Como a definição de parábola diz que $d_{PF} = d_{Pr}$ temos:

$$\sqrt{x^2+(ax^2-t)^2} = |ax^2+t|$$

$$x^2+(ax^2-t)^2 = (ax^2+t)^2$$

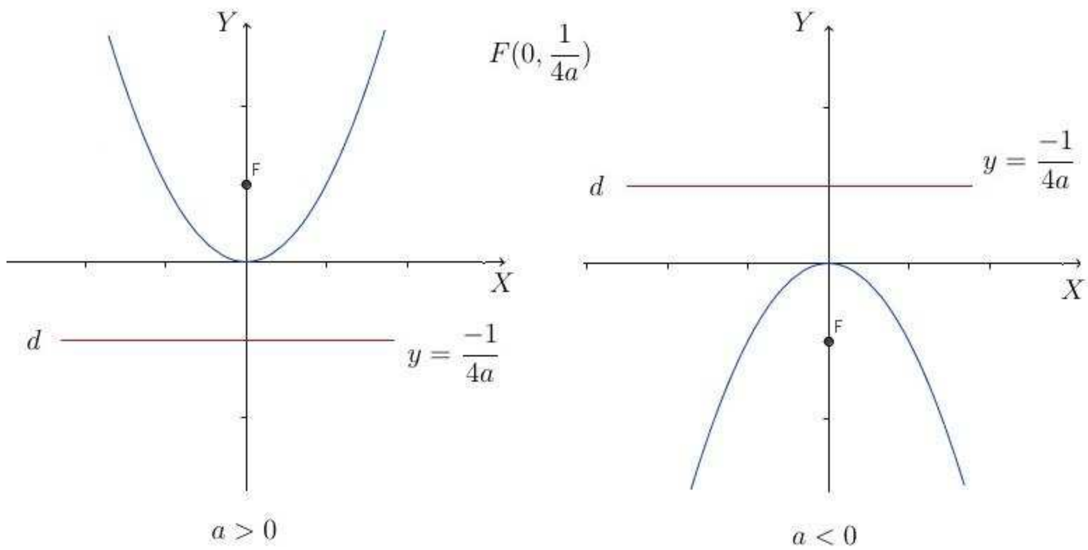
$$x^2+a^2x^4-2ax^2t+t^2 = a^2x^4+2ax^2t+t^2$$

$$x^2 = 4ax^2t$$

sendo $a \neq 0$ e $x \neq 0$ então $t = \frac{1}{4a}$

□

Figura 2.10: **Função** $f(x) = ax^2$



Fonte: Autor (2014): adaptado de LIMA (2006)

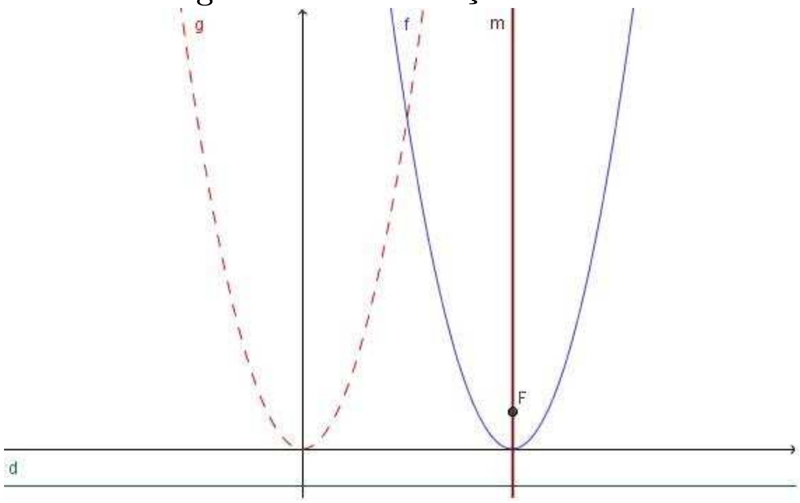
Conforme seja $a > 0$ ou $a < 0$, a parábola $y = ax^2$ tem sua concavidade voltada para cima ou para baixo.

Proposição 3.

Para todo $a \neq 0$ e todo $m \in \mathbb{R}$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2$ é uma parábola cujo foco é o ponto $F(m, \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\frac{1}{4a}$.

Demonstração. O gráfico da função $f(x) = a(x-m)^2$ resulta do gráfico de $g(x) = ax^2$ pela translação horizontal $(x, y) \to (x+m, y)$, a qual leva o eixo $x = 0$ no eixo $x = m$

Figura 2.11: Translação horizontal



Fonte: Autor (2014): adaptado de LIMA (2006)

□

Proposição 4.

Dados $a, m, k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é o ponto $F = (m, k + \frac{1}{4a})$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{1}{4a}$.

Demonstração. Levando em conta que o gráfico da função quadrática $f(x) = a(x-m)^2+k$ é obtido do gráfico de $g(x) = a(x-m)^2$ por meio da translação vertical $(x, y) \to (x, y+k)$, que leva o eixo Ox na reta $y = k$ e a reta $y = -\frac{1}{4a}$ na reta $y = k - \frac{1}{4a}$.

□

Segue-se que o gráfico de qualquer função quadrática

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

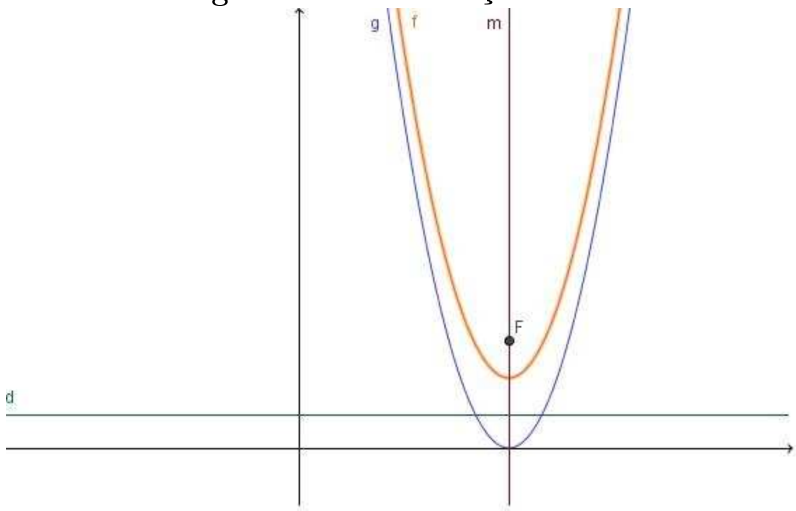
é uma parábola, cuja diretriz é a reta horizontal

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

e cujo foco é o ponto

$$F = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2 + 1}{4a} \right)$$

Figura 2.12: Translação vertical



Fonte: Autor (2014): adaptado de LIMA (2006)

.

Esta parábola tem sua concavidade voltada para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$. Com efeito, a forma canônica do trinômio

$$ax^2 + bx + c$$

nos dá

$$ax^2 + bx + c = a.(x - m)^2 + k,$$

onde

$$m = \frac{-b}{2a} \quad e \quad k = \frac{(4ac - b^2)}{4a}.$$

O ponto do gráfico de

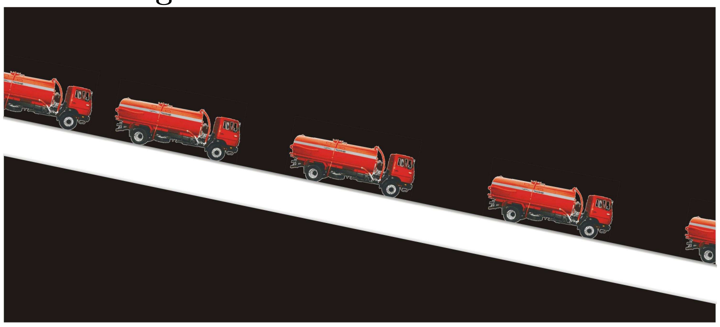
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

mais próximo da diretriz é aquele de abscissa $x = \frac{-b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Ainda quando $x = \frac{-b}{2a}$, o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico de $f(x)$.

Definição 6.

Movimento Uniformemente Variado (MUV) é todo aquele em que a aceleração escalar a é constante e diferente de zero. Consequentemente, ocorrem iguais variações de velocidade escalar Δv em iguais intervalos de tempo Δt.

Figura 2.13: **Caminhão em MUV**



Fonte: Autor(2014)

2.3.4 Equações do MUV

Proposição 5.

Num MUV, no instante inicial $t_0 = 0$ o espaço inicial é s_0 e a velocidade escalar inicial é v_0. Num instante posterior t qualquer, o espaço é S e a velocidade escalar é v.

Sendo a a aceleração escalar, as equações que descrevem o movimentos são:

- equação horária da velocidade:

$$v = v_0 + a.t \qquad (I)$$

- equação horária do espaço:

$$S = S_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2} \qquad (II)$$

- equação de Torricelli:

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta S \qquad (III)$$

Demonstração. .

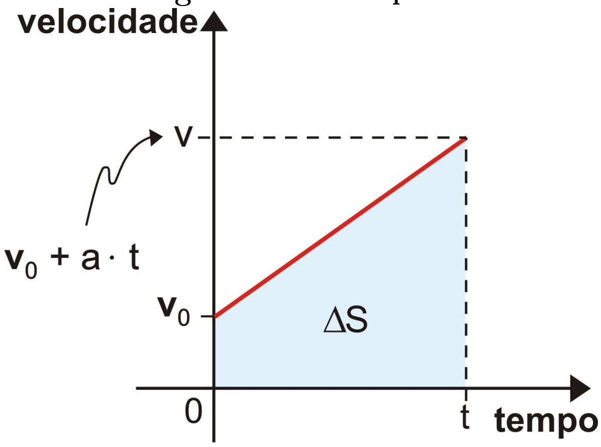
- A equação (I) é a equação horária da velocidade e vem de:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{v - v_0}{t - t_0} \Rightarrow v = v_0 + a.t$$

- A equação (II) é a equação horária do espaço e vem de:

  $\Delta S =$ "área"do trapézio destacado abaixo

Figura 2.14: Trapézio



Fonte: Autor (2014): adaptado de Biscuola & Maiali (2014)

$$\Delta S = \frac{(v + v_0).t}{2} = \frac{[(v_0 + a.t) + v_0].t}{2} \Rightarrow \Delta S = v_0.t + \frac{a.t^2}{2} \Rightarrow S = S_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$$

- A equação (III) é obtida da seguinte maneira: isola-se t na equação I e substitui-se t na equação (II). A equação (III) é conhecida por equação de Torricelli. Da equação (I), temos:

$$t = \frac{v - v_0}{a}$$

  Substituindo t na equação (II), obtemos:

$$\Delta S = v_0.\left(\frac{v - v_0}{a}\right) + \frac{a}{2}.\left(\frac{v - v_0}{a}\right)^2 \Rightarrow v^2 = v_0^2 + 2.a.\Delta S$$

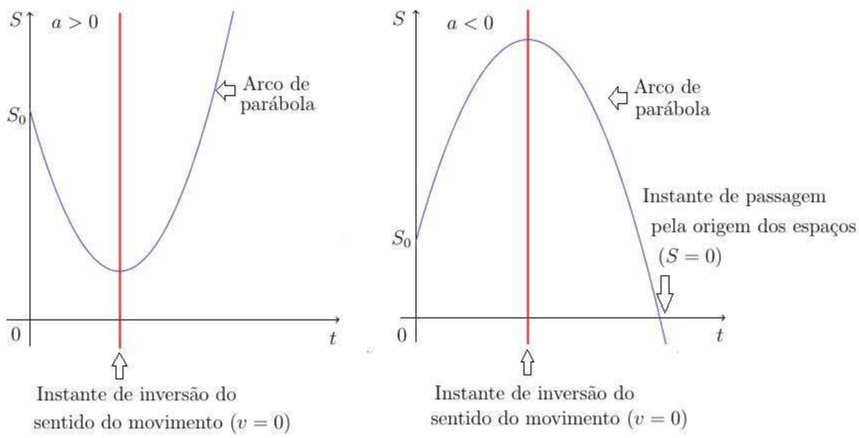
□

A equação horária do espaço $S = S_0 + v_0.t + \frac{a.t^2}{2}$, com S_0, v_0 e a constantes e $a \neq 0$, é uma função quadrática em t. Assim, o gráfico $S \times t$ é um arco de parábola uma vez que existe restrição no domínio desta função.

A equação horária da velocidade $v = v_0 + a.t$ é uma função afim em t. Por isso, o gráfico $v \times t$ é um segmento de reta inclinado em relação aos eixos.

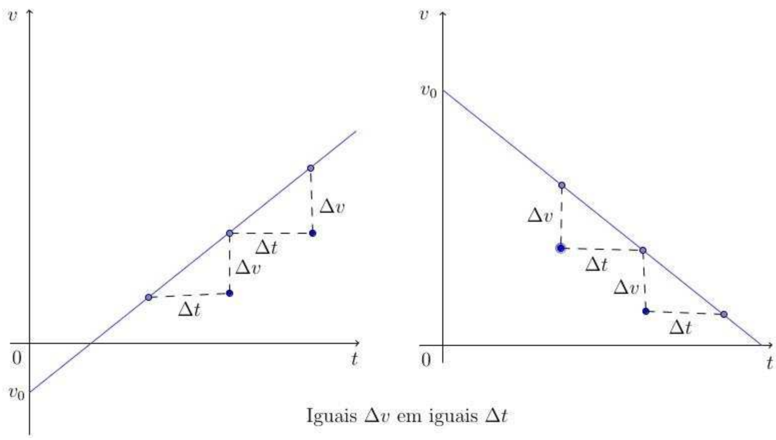
Como a aceleração escalar é constante, o gráfico $a \times t$ é um segmento de reta paralelo ao eixo dos tempos.

Figura 2.15: Espaço x tempo



Fonte: Autor (2014)

Figura 2.16: Velocidade x tempo



Fonte: Autor (2014)

Observação 2.

- Antes do instante de inversão do sentido do movimento, temos:
  MOVIMENTO RETARDADO: $|v|$ decresce com t ou v e a têm sinais contrários.

- Após o instante de inversão do sentido do movimento, temos:
  MOVIMENTO ACELERADO: $|v|$ cresce com t ou v e a têm sinais iguais.

Capítulo 3

A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

3.1 Introdução

Apresentamos neste capítulo algumas noções fundamentais da teoria das situações didáticas de Guy Brousseau e a proposta da sequência didática.

3.2 A teoria das situações didáticas

Iniciaremos esta seção com uma frase célebre que destaca algo sobre o que vamos refletir adiante:

"Não lhes explico tudo, para não privá-los do prazer de aprenderem sozinhos."

René Descartes

Objetivamente, a teoria de Guy Brousseau, desenvolvida no sistema educacional Francês, na década de 1970, pode ser explicada como a teoria das situações didáticas e mostra um processo de interação entre o aluno, o professor e o saber matemático. Para entendermos melhor a noção de situação didática, servir-nos-emos das explicações do próprio Brousseau(1986):

> “ Uma situação didática é um conjunto de relações estabecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou um grupo de alunos, num certo meio, compreendendo, eventualmente, instrumentos e objetos e um sistema educativo (o professor) com a finalidade de possibilitar a esses alunos um saber constituído ou em vias de constituição (...) o trabalho do aluno deveria, pelo menos em parte, reproduzir características do trabalho científico propriamente dito, como garantia de uma construção efetiva de conhecimentos pertinentes (p.8).”

A teoria das situações didáticas de Brousseau é uma teoria didática de cunho construtivista na qual a aprendizagem realiza-se por meio da resolução de problemas, de questões desafiadoras ou motivadoras.

Agora, para que o estudante construa o seu próprio conhecimento, ele deve empenhar-se pessoalmente nas atividades que lhe são propostas nas situações didáticas. Em tal caso, costuma-se dizer que o professor obteve êxito na devolução da situação.

Segundo D'amore (2007), a devolução é o processo ou atividade por meio da qual o professor consegue que o estudante empenhe sua própria responsabilidade pessoal na resolução de um problema (mais geralmente, em uma atividade cognitiva) a qual se torna, então, problema do aluno, aceitando as consequências dessa transferência momentânea de responsabilidade, particulamente no que concerne à incerteza que essa hipótese gera na situação.

Em Brousseau (1986), a devolução é definida como “o ato por meio do qual o professor faz o aluno aceitar a responsabilidade por uma situação de aprendizagem adidática ou de um problema e aceita, ele próprio, as consequências dessa transferência(p.49)”.

A situação adidática referida acima por Brousseau denota um tipo de situação didática e refere-se ao momento em que o professor transfere um determinado problema para o aluno que o aceita e se empenha em sua solução, tornando-se o protagonista de sua aprendizagem em uma atividade cognitiva proposta pelo professor.

Para Machado (2010), as situações adidáticas representam os momentos mais importantes da aprendizagem, pois o sucesso do aluno nelas significa que ele, por seu próprio mérito, conseguiu sintetizar algum conhecimento. Nesse sentido, elas não podem ser confundidas com as chamadas situações não-didáticas, isto é, aquelas que não foram planejadas visando a uma aprendizagem.

Ou seja, as situações não-didáticas citadas acima acontecem quando o professor chega em uma sala de aula, inventa um problema qualquer e manda os alunos reponderem. Como neste caso não foi criada nenhuma interação do aluno com o problema é muito provável que o discente não atinja o êxito esperado pelo professor.

Como os conhecimentos matemáticos não são apenas conceitos, mas também, sistema de representação simbólica; não somente método de desenvolvimento, como também validações de novas ideias matemáticas, Brousseau (1986) contempla vários tipos de situações tais quais iremos ver no que se segue.

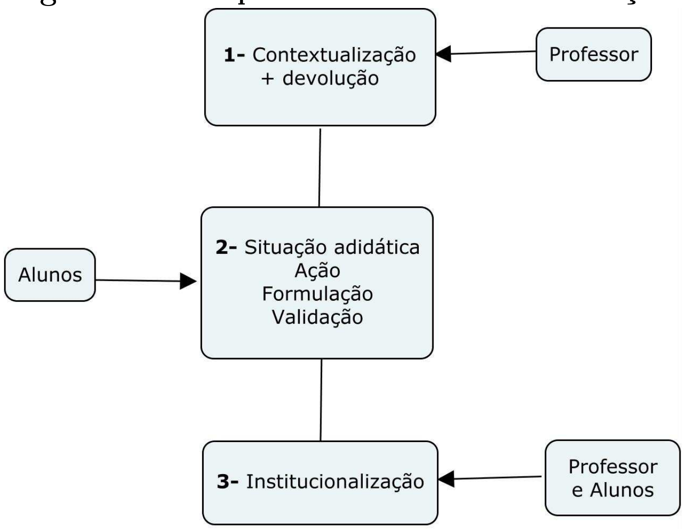
Uma situação adidática de *ação* é aquela em que o aluno realiza várias ações imediatas sem atinar em toda uma estruturação que se esconde nas tentatvas de solução. Quando, por exemplo, em um problema de geometria ele dá uma solução usando a régua e o compasso, mas não se preocupa com as propriedades ali presentes. Logo, dizemos que é uma situação de cunho puramente experimental.

Uma situação adidática de *formulação* acontece quando o aluno começa a utilizar, na resolução de um problema, aspectos mais teóricos com uma sistematização mais geral e sem uso de procedimentos experimentais.

Uma situação adidática de *validação* é aquela na qual o aluno já utiliza a prática de justificativas, provas ou demonstrações de propriedades e o saber já é visto de uma forma essencialmente teórica.

As situações de *institucionalização* têm a finalidade de obter a peculiaridade objetiva e universal do conhecimento estudado pelo aluno, é o momento onde professor e alunos socializam o tema, mas com o controle do professor. É um momento importantíssimo para o aluno que até validou o tema, mas necessita do olhar do professor para se convencer que suas soluções e provas estão corretas.

Figura 3.1: Mapeamento da teoria das situações



Fonte: Autor (2014) adaptado de Machado (2010)

3.3 Propostas para oficinas

Estas oficinas são voltadas ao ensino de alguns tipos de funções e têm a intenção de abordar os temas de forma contrutivista e seguindo o modelo proposto por Guy Brousseau.

A proposta é composta de 15 atividades, divididas em 6 oficinas. Algumas dessas atividades têm o objetivo de propiciar a compreensão de alguns conceitos, já outras, têm a finalidade de mostrar a analogia entre a matemática e a física no 1º ano do ensino médio com o auxílio do software GeoGebra.

3.3.1 Oficina 1: Funções Lineares e Cinemática com auxílio do GeoGebra

Objetivos:

Criar condições para que o estudante perceba algumas relações entre as funções lineares e a cinemática, com o auxílio do software GeoGebra.

Conteúdo:

Função Linear e Cinemática.

Tempo estimado:

2 horas/aulas

Material necessário:

Cópias do material impresso, papel milimetrado e laboratório de informática com acesso ao GeoGebra.

ATIVIDADE 1

João vai ao posto de combustível colocar gasolina em seu veículo. Neste posto o litro da gasolina custa $R\$ \ 3,00$.

a) Completar a tabela abaixo com valores que João poderá pagar a depender do número de litros colocados.

b) Se João tiver em sua carteira $R\$ \ 102,00$, quantos litros de gasolina ele poderá colocar no tanque?

Tabela 3.1: Litros X Preço

Número de litros	Preço a pagar (R$)
2 litros	
3 litros	
4 litros	
5 litros	
10 litros	
12 litros	

Fonte: Autor (2014)

c) Obter uma expressão $y = k.x$. Ou seja, encontrar um número k de tal forma que, dada uma quantidade de litros x, podemos determinar y, isto é, o valor que João pagará em reais.

d) Traçar em um papel milimetrado um plano cartesiano com os valores encontrados na tabela, colocando em um eixo horizontal o número de litros e no vertical o valor pago.

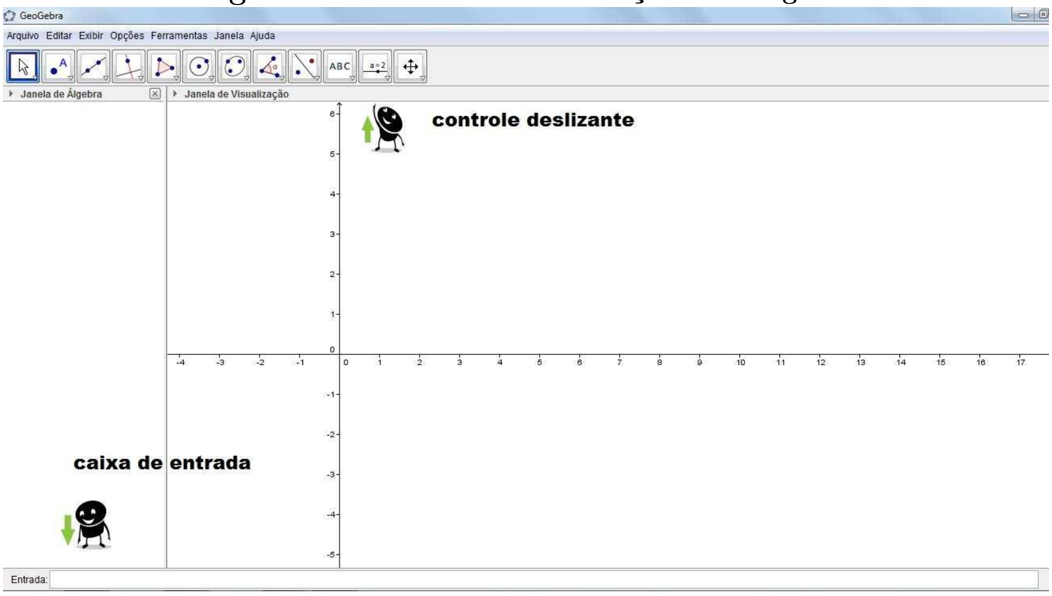
ATIVIDADE 2

Abra o software GeoGebra e defina na caixa de entrada $y = 5x$ e $y = -5x$. Logo depois crie um controle deslizante k com variação entre -5 e 5. Defina também na caixa de entrada $y = kx$.

a) Clique em mover  faça o k variar e observe o que ocorre com gráficos de $y = kx$ quando k aumenta de -5 a 5. O que ocorre com estes gráficos?

b) Existe alguma pecularidade com os gráficos de y quando k é positivo e negativos?

Figura 3.2: Janela de visualização do Geogebra



Fonte: Autor (2014)

ATIVIDADE 3

Um carro está viajando a 80 quilômetros por hora.

a) Que distância ele percorre em 2 horas? E em 3 horas? E se for em $4,5$ horas?

b) Se S representa o número de quilômetros que ele percorre em t horas, qual é a relação matemática para calcular S?

c) Que distância ele percorre em 90 minutos?

d) Traçar em um papel milimetrado um plano cartesiano que simbolize a distância percorrida com relação ao tempo. Que conclusão podemos tirar da relação encontrada? Existe alguma analogia com a relação encontrada no atividade 1?

ATIVIDADE 4

Dois atletas Aldo e Marcel partem de um mesmo ponto em uma pista retilínea de 60 m. Sabe-se que Aldo percorre 2 metros a cada segundo e Marcel $1,5$ metros por segundos, em trajetórias retilíneas e paralelas.

Figura 3.3: Corrida de atletas

Fonte: Autor (2014)

a) Em quanto tempo cada um percorrerá a prova?

b) Quando Aldo terminar a prova quantos metros Marcel terá percorrido?

c) Se a pista tivesse 500 metros podemos garantir que os desempenhos seriam os mesmos?

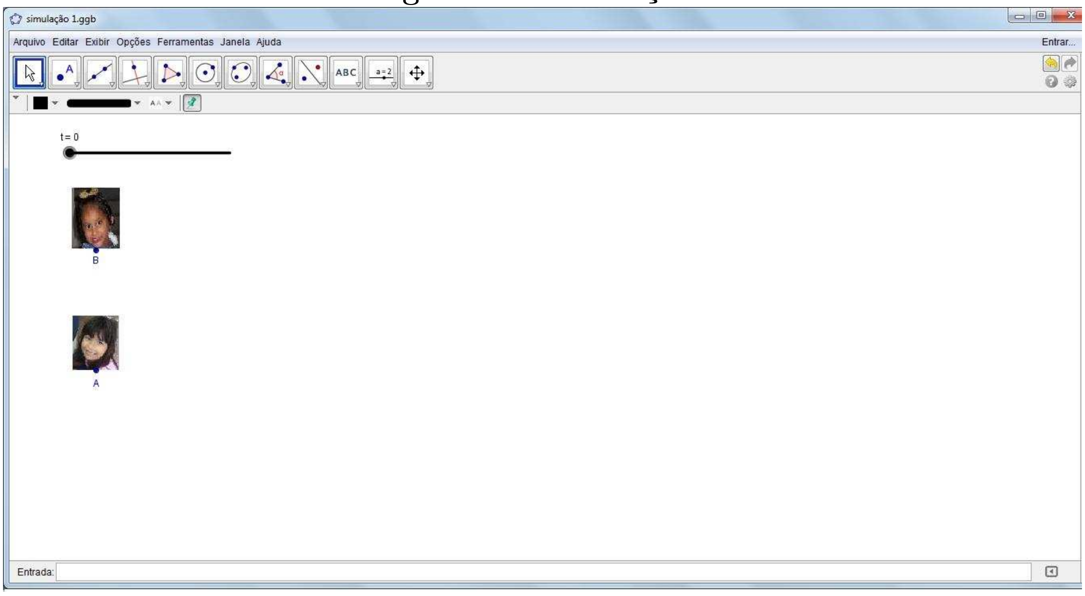
ATIVIDADE 5

Abrindo na sua área de trabalho o ícone intitulado SIMULAÇÃO 1.

A presente situação descreve no ponto A, Kévylla, que percorre 5 metros por minutos e no B, Beatriz, que percorre 2 metros em cada minuto.

a) Clique com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e em animar. Observem o que ocorrerá. Quais conclusões podemos tirar da situação?

Figura 3.4: Simulação 1



Fonte: Autor (2014)

b) Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto A e mudando a relação para $3t$ e no ponto B para $10t$ o que ocorre quando animamos novamente?

3.3.2 Oficina 2: Funções Afins

Objetivos:

Criar condições para que os estudantes conceituem funções afins e observem suas propriedades no GeoGebra.

Conteúdo:

Funções Afins.

Tempo estimado:

2horas/aulas

Material necessário:

Cópias do material impresso, papel milimetrado e laboratório de informática com acesso ao GeoGebra.

ATIVIDADE 1

O custo de uma corrida de táxi é formado por duas parcelas, uma fixa, chamada de bandeirada, e uma variável que é cobrada em cima do número de quilômetros rodados. Existem dois tipos de bandeiras: a bandeira 1 que ocorre quando tomamos um táxi de segunda à sexta de 6 hs às 22 hs e no sábado de 6 hs às 18 hs e a bandeira 2, caso contrário. Em Maceió, uma bandeirada custa atualmente $R\$ \ 4,00$, a bandeira 1 custa $R\$ \ 2,20$ por quilômetro rodado e a bandeira 2 custa $R\$ \ 2,65$. João tomou um táxi no Benedito Bentes (um bairro de Maceió) no horário de 10 horas da manhã de uma terça-feira.

a) Sabendo que João vai ao centro de Maceió, a 15 km do Benedito Bentes, qual é o valor que ele irá pagar por esta corrida?

b) Calcule quanto ele pagaria se percorresse 20 km, 25 km, 28 km e 30 km no mesmo horário.

c) Quanto ele pagaria se percorresse as mesmas distâncias do item anterior, mas após às 22 horas?

d) Chamando de $f(x)$ o custo da corrida de táxi em x quilômetros rodados com bandeira 1 e de $g(x)$ caso tenha rodado com bandeira 2. Como podemos expressar estas relações de acordo com o número de quilômetros rodados?

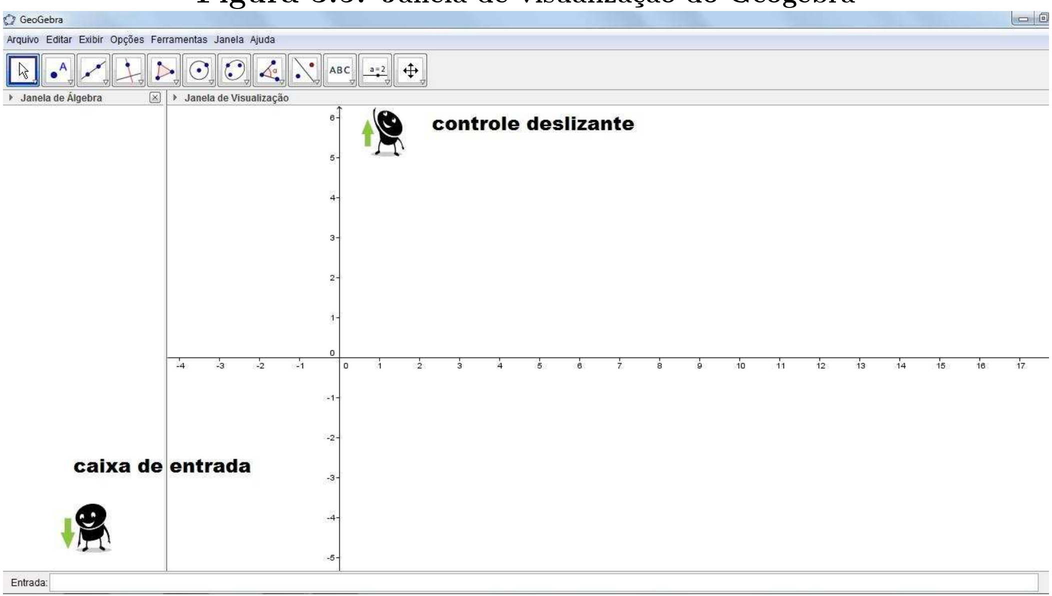
e) Traçar no papel milimetrado um plano cartesiano que represente a relação $f(x)$ utilizando os valores do item (b). Na horizontal o número de quilômetros rodados e na vertical o valor a se pagar. Que conclusões podemos tirar da relação encontrada?

f) Repetir o mesmo procedimento do item anterior, no entanto, aplicado a função $g(x)$ encontrada no item (d) a partir dos valores do item (c).

ATIVIDADE 2

Abra o software GeoGebra e defina dois controles deslizantes a e b com variações de -10 a 10. Logo após defina na caixa de entrada $f(x) = ax + b$.

Figura 3.5: **Janela de visualização do Geogebra**



Fonte: Autor (2014)

a) Clique em  (mover) e faça o coeficiente a variar. O que ocorre com os gráficos de $f(x)$, quando a oscila de -10 a 10?

b) O que ocorre quando fazemos o coeficiente b oscilar?

c) Analise os itens anteriores. Em qual dos coeficientes notamos uma variação angular dos gráficos de $f(x)$ com relação ao eixo x?

d) O que podemos observar quando o coeficiente a é positivo ou negativo? E quando o coeficiente b é positivo ou negativo?

3.3.3 Oficina 3: Funções Afins e o Movimento Uniforme

Objetivos:

Fazer o aluno perceber a grande analogia entre as funções afins e a cinemática da física.

Conteúdo:

Funções Afins e Movimento Uniforme.

Tempo estimado:

2horas/aulas

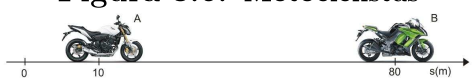
Material necessário:

Cópias do material impresso e papel milimetrado para alunos e laboratório com acesso ao GeoGebra.

ATIVIDADE 1

Dois motociclistas A e B percorrem uma mesma pista retilínea representada pelo eixo orientado.

Figura 3.6: **Motociclistas**



Fonte: Autor (2014)

No início da contagem dos tempos, suas posições são $A = 10\ m$ e $B = 80\ m$. Ambos percorrem a pista no sentido positivo do eixo com velocidades constantes, sendo $v_a = 30\ m/s$ e $v_b = 20\ m/s$.

a) Indique nas tabelas abaixo as posições das motocicletas a depender do tempo dado:

b) Em algum instante o motocicleta A alcança o B? Se sim, qual a posição de encontro?

c) Represente no papel milimetrado em um mesmo plano cartesiano as situações expressas nas tabelas e no item anterior.

Tabela 3.2: Motociclista A

Tempos (s)	Posição (m)
0	
1	
2	
3	
4	

Fonte: Autor (2014)

Tabela 3.3: Motociclista B

Tempos (s)	Posição (m)
0	
1	
2	
3	
4	

Fonte: Autor (2014)

d) Denotemos por $S_A(t)$ a posição da motocicleta A em função do tempo (t). Como podemos expressar $S_A(t)$? Que tipo de função é esta?

e) Repita o mesmo procedimento do item anterior, mas sabendo que $S_B(t)$ denota a posição da motocicleta B em um tempo (t). Que tipo de função é esta?

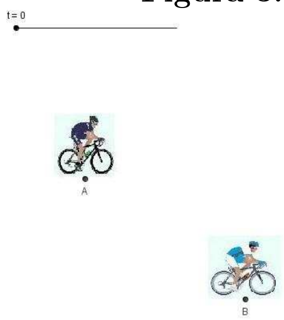
f) Abra o software GeoGebra e coloque na caixa de entrada cada uma das expressões encontradas nos itens (d) e (e).

ATIVIDADE 2

Abrindo na sua área de trabalho o ícone intitulado SIMULAÇÃO 2.

Marcelo e João vão disputar uma prova de ciclismo, como Marcelo que está no ponto “A”é mais ágil e corre a 2 m/s, então resolve dá uma vantagem de 4 m para João no ponto “B”que corre a 1 m/s.

Figura 3.7: Simulação 2



Fonte: Autor (2014)

a) Faça a animação da situação acima e diga se realmente Marcelo consegue alcançar João?

b) Clicando com o botão direito do mouse sobre o ponto A e mudando a relação para $1t$ e no ponto B para $4 + 2t$ o que ocorre quando animamos novamente?

3.3.4 Oficina 4: Funções Quadráticas

Objetivos:

Propiciar a aprendizagem da noção de função quadrática.

Conteúdo:

Funções quadráticas.

Tempo estimado:

2horas/aulas

Material necessário:

Cópias do material impresso e papel milimetrado para alunos.

ATIVIDADE 1

Sabemos que um quadrado de 1 cm de lado ocupa uma área de 1 cm^2.

a) Preencha a tabela abaixo que relaciona os lados de quadrados com a suas respectivas áreas.

Tabela 3.4: Lado X Área

Lado do quadrado (cm)	Área do quadrado (cm^2)
2	
3	
4	
4,5	
5	
5,5	

Fonte: [Autor],2014

b) Traçar em papel milimetrado um plano cartesiano que represente a relação entre o lado do quadrado e sua área.

c) Estabeleça uma função A que representa a área do quadrado a depender do lado l deste quadrado.

d) Abra o GeoGebra e coloque na caixa de entrada a função encontrada no item anterior e observe para quais valores a função pode safisfazer o problema da área do quadrado e para quais ela não pode.

ATIVIDADE 2

Galileu Galilei (1564-1642) foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano. Ele acreditava de início que a queda dos corpos em movimento natural aumentava sua velocidade proporcionalmente à distância de seu percurso. Mas ele mesmo notou que isso não era verdade e mostrou que a distância percorrida por um corpo em queda livre era proporcional ao quadrado do tempo de queda. Em uma de suas experiências Galileu observou as seguintes medições de tempo e espaço relacionando à queda de um objeto. Os resultados estão colocados na tabela abaixo:

Tabela 3.5: Tempo X Espaço

Tempos (s)	Espaço (m)
0	0
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,4
5	122,5

Fonte: Autor (2014)adaptado de Fainguelernt & Nunes (2012)

a) Traçar em papel milimetrado um plano cartesiano com os valores que relacionam o tempo e o espaço do objeto descrito acima.

b) De acordo com a observação de Galileu seria possível estabelecer uma função $S(t)$ que descreve a posição de um objeto, em queda livre, em função do tempo (t)? Se possível, que relação é esta?

3.3.5 Oficina 5: Funções Quadráticas e Cinemática

Objetivos:

Usar o GeoGebra para que o aluno perceba algumas propriedades das funções quadráticas e aplicá-las em problemas da cinemática propiciando ao aluno a percepção das analogias entre alguns temas da matemática e da física.

Conteúdo:

Função quadrática e cinemática.

Tempo estimado:

2horas/aulas

Material necessário:

Cópias do material impresso e laboratório de informática com acesso ao geogebra.

ATIVIDADE 1

Abra o software GeoGebra e faça o que se pede em cada item abaixo.

a) Coloque na caixa de entrada a expressão encontrada na atividade anterior. O que podemos dizer a respeito dos valores negativos expressos para t no gráfico?

b) Abra uma nova janela de visualização no GeoGebra e crie um controle deslizante “a” com variação de -10 a 10 e defina na caixa de entrada uma função $f(x) = ax^2$. Faça “a” variar e observe o que ocorre com seus gráficos.

c) Na situação descrita acima existe alguma consideração a ser feita caso “a” seja positivo ou negativo?E no caso de $a = 0$?

d) Crie um controle deslizante “k” com variação de -10 a 10 e defina na caixa de entrada uma função $g(x) = ax^2 + k$. Mude a cor da função $g(x)$ para azul e faça “a” variar. O que ocorre com os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$? E quando oscilamos o k ?

e) Crie um controle deslizante "m" com variação entre -10 e 10 e defina na caixa de entrada uma função $h(x) = a(x - m)^2 + k$ e mude a cor para vermelho. Faça m variar e diga o que ocorre?

f) Suponhamos que o coeficiente a seja um valor positivo, seria possível encontrar um valor mínimo para função $h(x)$? E um valor máximo?

ATIVIDADE 2

A trajetória da bola, num chute a gol, descreve uma parábola. Supondo que sua altura h, em metros, t segundos após o chute, seja dada por $h(t) = -t^2 + 8t$.

Figura 3.8: Chute a gol

Fonte: Dante (2011)

a) Preencha a tabela abaixo com valores que representam a situação descrita.

Tabela 3.6: Tempo X Altura

Tempos (s)	Altura (m)
0	
1	
2	
3	
4	
5	

Fonte: [Autor],2014

b) Em que instante a bola atinge a altura máxima?

c) Qual é a altura máxima?

3.3.6 Oficina 6: Funções Quadráticas

Objetivos:

Interpretar e reter o conceito de função quadrática.

Conteúdo:

Função quadrática e cinemática.

Tempo estimado:

2horas/aulas

Material necessário:

Cópias do material impresso e laboratório de informática com acesso ao geogebra.

ATIVIDADE 1

Os alunos de duas turmas do 1º ano do ensino médio da escola X resolveram fretar um ônibus para uma excursão em Maragogi (Litoral norte de Alagoas). Sabe-se que o ônibus tem capacidade para 60 pessoas e o dono da companhia de ônibus exigiu de cada passageiro $R\$ 20,00$ e mais $R\$ 5,00$ por cada lugar vago.

a) Complemente a tabela abaixo com número de alunos e o valor pago à companhia.

Tabela 3.7: Alunos X Valor ($R\$$)

x alunos	Valor recebido pela companhia ($R\$$)
60	
59	
58	
50	
40	
30	

Fonte: [Autor],2014

b) Represente no papel milimetrado um plano cartesiano com os valores encontrados na tabela.

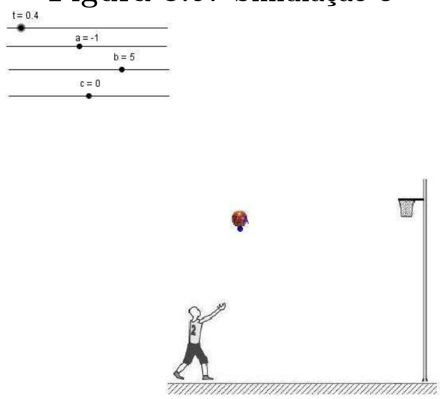
c) Determine uma função $f(x)$ que estabeleça o valor recebido pela empresa a depender do número de passageiros.

d) Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?

ATIVIDADE 2

Abrindo na sua área de trabalho o ícone intitulado SIMULAÇÃO 3.

Figura 3.9: Simulação 3



Fonte: Autor (2014)

A presente situação descreve um jogador de basquete fazendo um arremesso.

a) Clique com o botão direiro do mouse sobre o controle deslizante t e em animar. Observem o que ocorrerá. Quais conclusões podemos tirar da situação?

b) Mude o parâmetro a, o que ocorre? Caso mude o b? E se mudarmos o c?

Capítulo 4

EXPERIMENTAÇÃO E RELATO DA EXPERIÊNCIA

4.1 Introdução

Neste capítulo apresentamos o relato de uma implementação da proposta apresentada no capítulo anterior em uma escola pública estadual X do município de Maceió.

4.2 Coleta de dados

Figura 4.1: Ambiente de desenvolvimento das atividades

Fonte: Autor & Alunos (2014)

Foram convidados os alunos da turma do primeiro ano "A"(manhã) do ensino médio da escola X para participarem de um conjunto de oficinas intitulado **O ensino de matemática e física com auxílio do GeoGebra** que aconteceriam durante seis tardes do mês de junho de 2014. Do grupo, compareceram 14 alunos.

A referida turma já havia participado de um minicurso sobre o GeoGebra e logo ficou interessada em aplicar essa ferramenta numa abordagem dos assuntos que está vendo em sala de aula sobre matemática e física. As atividades foram totalmente desenvolvidas em um laboratório de informática da própria escola, que foi adaptado com quadro branco, e foi usada uma versão online do GeoGebra, pois não se conhecia a senha de usuário para instalar o software no linux educacional na referida escola.

A proposta das atividades foi pensada de modo a ser entregue cada atividade individualmente para cada aluno de forma impressa e, juntamente, uma folha de papel milimetrado quando a atividade não acontecia diretamente no computador.

Foi realizada uma avaliação diagnóstica, inicialmente, para conhecer o nível da turma, a fim de poder implementar o material; dessa avaliação, veio a ideia de basear as análises nas atividades de dois alunos: o primeiro, de menor grau de desempenho com algumas dificuldades em atividades consideradas mais simples, como na multiplicação e na interpretação de texto, o qual nominaremos, a partir de agora, de aluno M; e um outro, com nível de raciocínio mais ágil e com uma noção em matemática bem mais apurada, que nominaremos de aluno N.

Como já mencionado, a proposta é composta de 15 atividades, agrupadas em 6 oficinas. Algunas dessas atividades têm o objetivo de propiciar a aprendizagem de conceitos, já outras, têm a finalidade de mostrar a analogia entre a matemática e a física no 1º ano do ensino médio, com o auxílio do software GeoGebra.

Nas duas seções que se seguem, faremos uma análise das atividades 1 e 2 da segunda oficina, da atividade 1 da terceira oficina, da atividade 2 da quarta oficina, das atividades 1 e 2 da quinta oficina, desenvolvidas pelos dois alunos da referida turma. E no fim desta seção, faremos uma análise mais geral sobre a aplicação, baseado em um relatório feito, nos dias das aplicações das atividades, pelo autor. Vale ressaltar que os exercícios analisados têm um grande significado para os objetivos do trabalho.

4.2.1 Atividades desenvolvidas - Aluno M

Oficina 2 - Atividade 1

Figura 4.2: Atividade 1

Fonte: Alunos (2014)

O aluno leu a questão e achou muito comprida e cheia de informações. Falei que não precisava ter pressa e que as analisasse com muito cuidado. Os itens (a),(b) e (c) foram pensados para motivar o aluno a ter algumas ações imediatas (situação adidática de ação), ou seja, ele deveria fazer multiplicações e encontrar os valores das corridas de táxi. Apesar de suas dificuldades, o aluno obteve um sucesso razoável.

O item (d) veio causar uma certa dificuldade, uma vez que o aluno deveria reformular as ideias usadas nos itens (a),(b) e (c). Por conta dessas dificuldades, deixei os alunos ficarem em grupo para conversarem e tirarem suas conclusões. E assim eles o fizeram. Quando algum grupo conseguia resolver o item, surgiam, inclusive, aplausos. O grupo do aluno M conseguiu chegar ao resultado, mas esse grupo denotou as funções por $f = x2,20 + 4,00$ e $g = x.2,65 + 4,00$. O que foi notado é que alguns alunos desse grupo conseguiram validar a situação observando que os valores de f e de g estavam aumentando de $2,20$ e $2,65$, respectivamente. E observaram, inclusive que, se esses valores fossem negativos, as relações f e g iriam diminuir. Diante da institucionalização, os mesmos se convenceram a respeito das nomenclaturas $f(x)$ e $g(x)$ e que, escrevendo $f(x) = 2,20x + 4$ e $g(x) = 2,65x + 4$, a escrita ficaria mais elegante.

Os itens (e) e (f) foram resolvidos sem muitas dificuldades.

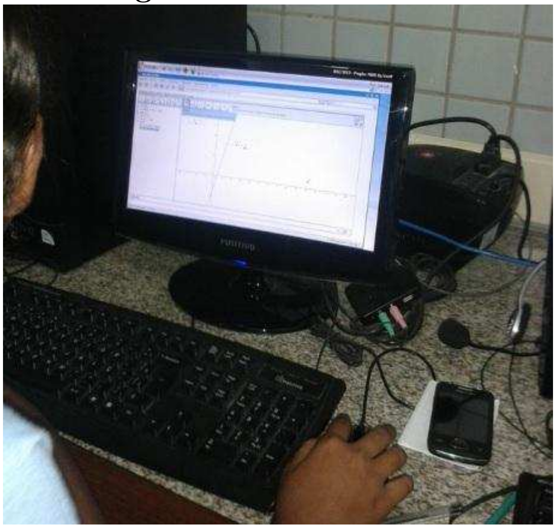
Também na institucionalização, vimos a definição formal da função $f(x) = ax + b$ e observamos algumas características básicas desse tipo de função.

Além disso, o aluno M assim como alguns alunos que estavam com dificuldades em operações básicas foram convocados a terem aulas extras sobre tal tema.

Oficina 2 - Atividade 2

O referido aluno desenvolveu a atividade com um pouco de dificuldade inicialmente, pois

Figura 4.3: Atividade 2



Fonte: Aluno M(2014)

tinha esquecido como criar os controles deslizante a e b; mas, com uma ajuda de um colega, as dificuldades foram amenizadas. No item (a), ele fez o que foi pedido e respondeu que o gráfico fica girando; já no item (b), ele disse que o gráfico sobe e desce (situação adidática de ação). Já para o item (c), ele precisava formular a ideia dos itens (a) e (b) e relembrar sobre o que é o eixo x e coeficiente angular, validou sua ideia dizendo que é o coeficiente a, pois o gráfico gira. Quanto ao caso do item (d), o aluno percebeu que a função aumenta quando a é positivo e diminui quando a é negativo. Quanto ao coeficiente b, falou que a função desce cada vez mais. Fizemos uma discussão mais geral no fim do desenvolvimento dessa atividade (institucionalização) e denotamos que a função chama-se crescente quando $a > 0$ e descrescente quando $a < 0$, inclusive, com prova geral para o caso $a > 0$.

Oficina 3 - Atividade 1

Os itens (a) e (b) foram resolvidos sem muitas dificuldades, em virtude de toda uma construção que já havia sido feita (foram desenvolvidas as situações de ação, formulação e validação pelo próprio aluno). No item (c), o aluno ficou sem entender como colocar os valores das tabelas em um mesmo plano cartesiano e acabou fazendo-o em dois casos: o da tabela A e o da tabela B e acabou me perguntando. Orientei-o que fizesse tudo no mesmo plano, ou seja, que fizesse os valores das duas tabelas em outro plano. Mesmo assim, o aluno só fez um plano em cada uma.

Já o item (d) causou mais um desconforto no aluno, pois este achou muita informação $S_A(t)$, e, quando olhou o item (e), viu que teria a mesma dificuldade, pois apareceu $S_B(t)$.

Novamente veio me questionar e eu indaguei: "Como você fez para encontrar os valores das tabelas?" Também falei que ele analisasse de uma forma mais geral e que a gente já tinha feito algo parecido. Ele perguntou: "É aquele negócio do táxi?" Eu disse: "Reflita e veja se é." Depois de algum tempo, o aluno encontrou $S = t.30 + 10$ no item (d) e $S = t.20 + 80$ no item (e) e falou que parecia a função do táxi, mas lá era x e aqui t.

O aluno iniciou o item (f) e, mais uma vez, teve problemas com a manipulação no GeoGebra e continou a atividade em dupla com um colega mais ágil na manipulação. Mas, mesmo assim, ainda obtiveram algum problema, pois a escala dos eixos estava de um para um e faz a observação das relações um tanto difícil. Foi quando interferi e pedi que eles colocassem em escala de um para cem que eles iriam observar melhor. Eles o fizeram, tendo, mais uma vez, um rendimento razoável.

Mesmo com alguma dificuldade em alguns pontos, o aluno passou por cada fase da situação adidática, inclusive validando a analogia entre as funções afins e as relações encontradas na cinemática. Na institucionalização, vimos mais alguns detalhes dessa analogia e definimos de forma mais teórica a equação do espaço em movimento uniforme ($S = S_0 + vt$), vulgarmente conhecida como fórmula do sorvete.

Oficina 4 - Atividade 2

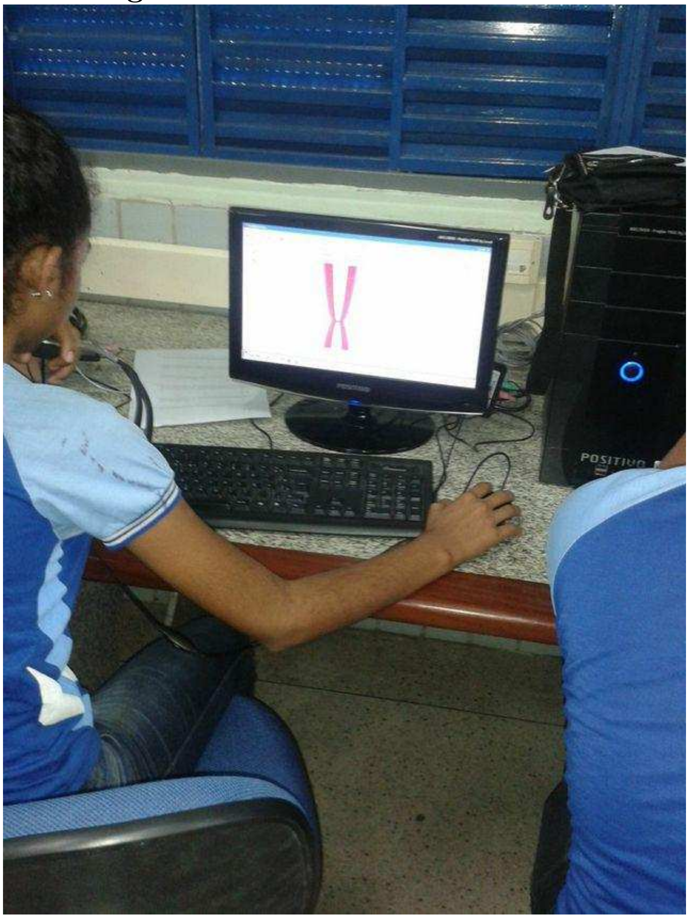
O item (a), de início, causou uma certa dificuldade, pois o aluno notou que os valores do espaço aumentavam muito rapidamente e falou que não daria para colocar. Falei que podia fazer o eixo dos espaços tipo uma escala, ou seja, cada pontinho seria dez unidades, e fisesse algumas aproximações visuais. Ele realizou, depois de algum tempo. No item (b), ele passou um certo tempo pensando, no entanto, colocou uma expressão incorreta e sem muitas justificativas.

Portanto, para esse item, tal aluno não conseguiu desenvolver todas as fases da teoria das situações; apesar disso, foi dada continuidade e na institucionalização feitas as devidas observações da função $S(t) = at^2$. O aluno M e alguns colegas foram convocados mais uma vez para terem uma aula extra sobre proporcionalidades e operações básicas no final da oficina.

Oficina 5 - Atividade 1

Para o item (a), o aluno colocou a expressão na caixa de entrada do GeoGebra sem problemas. Quanto ao caso de fazer referências aos valores negativos, ele ficou meio sem entender a pergunta, então, propus que visse direitinho o que ocorria. Mesmo assim, ele não respondeu.

Figura 4.4: **Oficina 5 - Atividade 1**



Fonte: Aluno M(2014)

O item (b) já foi realizado sem tantas dificuldades, uma vez que o aluno já estava bem familiarizado com o GeoGebra. O item (c) ele falou que fica com uma boca para cima e para baixo, caso seja $a > 0$ ou $a < 0$; já o caso $a = 0$ ele falou inicialmente, que não aparecia nada e eu pedi que mudasse a cor do gráfico de f. Quando ele mudou e colocou $a = 0$ notou que ficava sobre o eixo x. No item (d), o aluno observou que o gráfico subia ou descia sobre o plano cartesiano. O item (e) também saiu sem tantas dificuldades e o aluno falou que o gráfico passeava para a direita e para a esquerda. Já o item (f) causou muitas dificuldades para observação do aluno e perguntei a ele se $(x - m)^2$ era positivo ou negativo. Mais uma vez, notei suas dificuldades em operações matemáticas. Mesmo assim, foi observado que tal aluno assimilou bem o tema e veio a progredir tendo um aproveitamento considerável.

Na institucionalização, definimos, formalmente, as funções quadráticas e provamos algumas propriedades desse tipo de funções. Além do mais, definimos o seu gráfico como sendo uma parábola. Não poderíamos também deixar de falar sobre os valores máximos e mínimos dessas funções.

Oficina 5 - Atividade 2

O item (a) foi realizado com poucos problemas nos cálculos, pois o aluno tinha aprendido melhor esse tipo de operação. No item (b), ele percebeu (com a ajuda da tabela) que, a partir de $t = 4$, a altura começava a diminuir e viu que essa altura era $16m$. Ele também observou que estava trabalhando com uma função quadrática. Fizemos a institucionalização, construindo as equações do movimento uniformemente variado.

4.2.2 Atividades desenvolvidas - Aluno N

Oficina 2 - Atividade 1

Nos itens (a),(b) e (c), o aluno fez as devidas multiplicações e somou com a bandeirada, sem problemas. O aluno preferiu fazer o item (d) sozinho e, após pouco tempo, respondeu $f(x) = 4,00 + 2,20x$ e $g(x) = 4,00 + 2,65x$ sem dificuldades. Nos itens (e) e (f), ele respondeu que parece com uma função linear, mas não passa pela origem. No momento de institucionalização, tal aluno teve uma participação considerável, com algumas sugestões, inclusive sobre o fato de as funções f e g se encontrarem apenas no ponto $(0, 4)$.

Oficina 2 - Atividade 2

No item (a), ele disse que a função muda de crescente para decrescente. No item (b), o gráfico sobe ou desce. No item (c), ele disse que era no coeficiente a. Além disso, o mesmo veio perguntar o que ocorria se colocasse outra função. Falei que ele estava com um computador e poderia fazer os testes. Ele disse que havia visto uma função $g(x)$. Mandei-o definir e visualizar e ele colocou $g(x) = ax + b$ e, como eu já previa, não aconteceu nada (aparentemente). Então mandei-o definir outros controles deslizantes a' e b' que teria melhores resultados. Ele o fez e já conseguiu observar muitas propriedades das funções afins. Tal aluno se desenvolveu muito bem nas institucionalizações, inclusive auxiliando os colegas com algumas observações no computador.

Oficina 3 - Atividade 1

O aluno montou as tabelas do item (a) inicialmente com um equivoco em uma delas; porém, depois de uma observação melhor, notou e fez os devidos ajustes. No item (b), fez a observação que, embora a motocicleta A estivesse antes da B, tinha uma velocidade maior e, com isso, pode ultrapassar a motocicleta B em algum ponto. Ele resolveu os itens (c), (d) e (e) sem tantos problemas, inclusive com observação que a relação era uma função afim . Já no (f) teve um pequeno problema, pois as retas ficam muito inclinadas e, com isso, não dá para perceber bem o que ocorre; mas, o aluno buscou a solução algebricamente e observou que elas se encontram após 7 s. Além disso, também pedi para ele mudar a escala; ele o fez e se convenceu melhor.

Oficina 4 - Atividade 2

O aluno traçou o plano cartesiano do item (a) e, além disso, a partir do enunciado, observou as seguintes equivalências: $\frac{4{,}9}{1^2} = \frac{19{,}6}{2^2} = \frac{44{,}1}{3^2} = \frac{78{,}4}{4^2} = \frac{122{,}5}{5^2} = 4,9$. Ele não teve dificuldades em perceber que a relação do item (b) era $S(t) = 4,9t^2$.

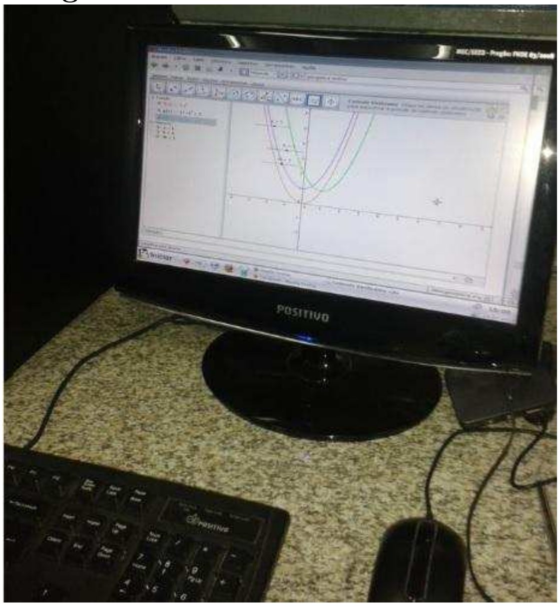
Oficina 5 - Atividade 1

Para o item (a), tal aluno falou que a função possui valores em $S(t)$. Então, falei: "Será que é só isto?" Mas ele não percebeu que gostaria que ele analisasse que o tempo não poderia ser negativo. Então, para esse caso, ele não passou por todas as etapas da teoria das situações didáticas. Por outro lado, os demais itens dessa atividade, o aluno desenvolveu sem tantas complicações, inclusive criando outras funções para analisar as interseções. No momento de institucionalização, foi mostrado a ele e aos demais alunos que, o item (a), no GeoGebra, mostra o gráfico da função para todos os reais, no entanto, na física, não adotamos o tempo como negativo e, por isso, só analisamos a parte positiva do gráfico.

Oficina 5 - Atividade 2

O aluno resolveu a atividade, assim como o aluno M, através da análise da tabela; no entanto, para ele, foi feito o questionamento se ele não poderia encontrar o resultado de outra forma, por exemplo, de acordo com o que foi visto no problema anterior, e ele percebeu que poderia encontrar, para esse caso, o t_v similarmente ao x_v analisado na institucionalização do exercício anterior e, com isso, ele comprovou (validou) que o estudo de funções quadráticas realmente tem uma grande analogia com a física.

Figura 4.5: Oficina 5 - Atividade 1



Fonte: Aluno N(2014)

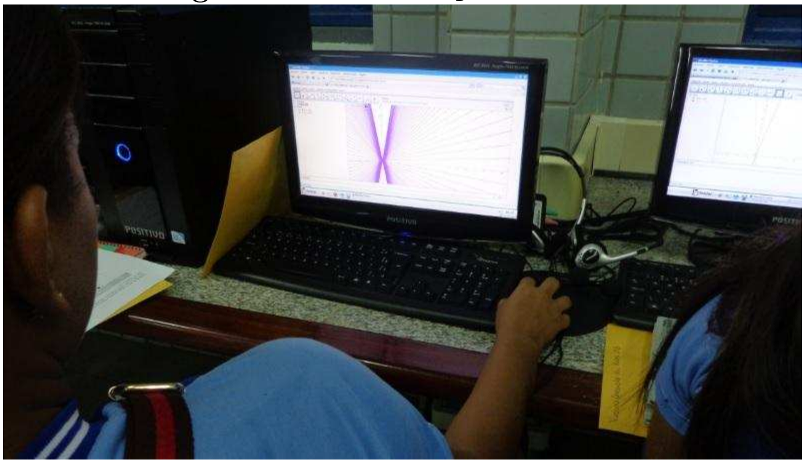
4.3 Análise dos dados coletados

Constatou-se, no decorrer das análises dos exercícios desenvolvidos, que os alunos, no geral, tiveram um maior interesse no estudo das funções e da física. Esse reflexo, com certeza, despertou um novo ganho para que eles continuem seus estudos sobre os temas abordados e acerca de novas propriedades que neles poderão ser acrescentado.

Durante a implementação da proposta, várias colocações e processos de resoluções interessantes foram apresentados, na grande maioria das vezes pelos próprios alunos, em um processo de troca de conhecimento. Por exemplo, ao construirem os gráficos das funções lineares $y = kx$ com k, oscilando entre -10 e 10 no GeoGebra, tiveram a curiosidade de saber o que ocorria se deixasse um rastro daquele gráfico e animasse. A imagem é bem interessante e eles ficaram muito curiosos em saber o porquê aquilo ocorria. Então, no momento de institucionalização, fomos levados a discutir os reais fatos que levaram aquelas imagens bonitas a aparecerem. Também podemos salientar que, a partir desse fato, eles, sempre que faziam gráficos no GeoGebra, queriam colocar rastro e animar. Isso trouxe um grande ganho para a interação aluno-computador.

Também podemos evidenciar o quanto proveitoso foram os momentos de intitucionalização, onde muitos alunos despertaram o seu interesse em mostrar suas observações tanto do problema específico como para um caso mais geral, e isso, mais uma vez, fez a diferença no ensino e na aprendizagem dos assuntos.

Figura 4.6: **Observação dos alunos**



Fonte: Autor & Alunos(2014)

Figura 4.7: **Participação de aluno em Institucionalização**

Fonte: Autor & Alunos (2014)

No próximo capítulo, apresentaremos as considerações finais frente a todo o andamento da construção do trabalho e das experiências vividas durante o processo de implementação.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo mostrar que as funções afim e quadrática podem ser trabalhadas de forma paralela ao ensino da cinemática no primeiro ano do ensino médio e sem o uso de tantas fórmulas e regras tão comuns no ensino de Matemática. A maneira diferente com o auxílio de software, como são trabalhados esses conteúdos, caracterizam um ensino motivador que pode contribuir efetivamente para o sucesso no ensino da Matemática.

Essa proposta é importante pois incentiva o professor a considerar em suas aulas a realidade dos alunos, ensinando-os a desenvolver habilidades com o seu cotidiano de maneira diferente, permitindo assim o exercício da criatividade. Saber trabalhar essas questões é de fundamental importância para o êxito no ensino das funções no ensino médio.

Mostramos aqui que, com a metodologia construtivista e com o uso do software GeoGebra, podemos resolver vários problemas da matemática e da física.

Acreditamos que esta pesquisa contribuirá para uma melhor reflexão das práticas pedagógicas de muitos profissionais envolvidos com o ensino da Matemática e servirá para discutirmos qual o melhor caminho para fazer com que os alunos eliminem as dificuldades do ensino dessa disciplina e que essas propostas os incentive a gostar de aprender com o seu cotidiano.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARAÚJO, I. & VEIT, E. *Um estudo sobre o desempenho de alunos de física usuários da ferramenta computacional Modellus na interpretação de gráficos em cinemática.* 2002.111f. Dissertação(mestrado em física)-Instituto de física, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre,2002.

ARAUJO, I.S. & VEIT, E.A. *Uma revisão da literatura sobre estudos relativos a tecnologias computacionais no ensino de física.* Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências, v.4, n.3, p.5-18, 2004.

ARAÚJO, I. & VEIT, E. (2008) *Physics students? performance using computational modelling activities to improve kinematics graphs interpretation..* Computers & Education, Great Britain, v.50,p.1128-1140,2008.

BEICHNER, R. *Testing student interpretation of kinematics graphs.* American Journal of Physics, v.62, p.750-762. Disponível em:
http://www.ncsu.edu/per/Articles/TUGKArticle.pdf.
Acesso em: 29 de fevereiro de 2014.

BELL, A.W. & JANVIER, C. (1981) *The interpretation of graphs representing situations.* For the learning of mathematics, v.2,n.1, p.34-42,1981.

BISCUOLA, G.J. & MAIALI, A.C. *Física Volume Único.*3ª Ed. São Paulo: Saraiva, 1998.650p.

BONJORNO, R.A. et al. *Temas de Física 1: Mecânica.*São Paulo: FTD, 1997.479p.

BOURBAKI, N. *Éléments de mathématique.* 10 vols. Paris: Hermann, 1939.

BOWEN,G. & ROTH, W. *Learning Difficulties Related to Graphing: A Hermeneutic Phenomenological Perspective.* Research in Science Education, 30(1), 123-139. Disponível em: http://www.springerlink.com/content/846q00p81845j0j5/fulltext.pdf. Acesso em: 29 de fevereiro de 2014.

BROUSSEAU, G. *Fondements et Méthodes de la Didáctique des Mathématiques.* Recherches en didactique des mathématiques, v.7, n.2, p.33-115, 1986.

BROUSSEAU, G. *Théorie des situations didactiques.*Paris: La Pensée Sauvage, 1998.

D'AMORE, B. *Elementos da Didática da Matemática.(Tradução Bonomi, M.C.)* São Paulo: Editora Livraria da Física, 2007.450p.

DANTE, R.L. *Matemática Contexto & Aplicações volume 1.*1ª Ed. São Paulo: Ática , 2011.239p.

FAINGUELERNT, E.K. & NUNES, K.R.A. *Matemática: Práticas pedagógicas para o ensino médio.* São Paulo: Penso , 2012.

FIOLHAIS, C. & TRINDADE, J. *Física no computador: o computador como uma ferramenta no ensino e na aprendizagem das Ciências Físicas.* Revista Brasileira de Ensino de Física, São Paulo, v.25, n.3, p.259-272, set. 2003.

HALLOUN, I. *Technologies de modélisation pour un apprentissage intelligible des sciences.* Disponível em:
http://www.halloun.net/images/stories/technologies_de_modelisation.pdf
Acesso em: 29 de maio de 2014.

HOHENWARTER, M. *Construções de gráficos e simulações.* GeoGebra. 2001. Disponível em: http://www.geogebra.org/ . Acesso em: 01 out 2013.

IEZZI, G. & MURAKAMI, C. *Fundamentos da Matemática Elementar 1.* 8ª Ed. São Paulo: Saraiva Atual, 2011.374p.

JIMOYIANNIS, A. & KOMIS, V. (2001) *Computer simulations in physics teaching and learning: a case study on students' understanding of trajectory motion.* Computers & Education, Great Britain,v.36,p.183-204,2001.

LIMA, E.L. et al.*Temas e Problemas.*3ª Ed. Rio de Janeiro:SBM, 2003.193p.

LIMA, E.L. et al. *A Matemática do Ensino Médio 1.*9ª Ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.237p.

MACHADO, S.D.A. et al. *Educação Matemática: Uma (nova) Introdução.*3ª ed. São Paulo:Educ, 2010.247p.

MARTINS, A.A. & GARCIA, N.M.D. *Ensino de física e novas tecnologias de informação e comunicação: uma análise da produção recente* In: VIII Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências - I Congreso Iberoamericano de Investigación en Enseñanza de las Ciencias, 2011, Campinas - SP. Anais do VIII ENPEC e Anais do I CEIC. Campinas: ABRAPEC, 2011. v. 1. p. 1-12.

MAXIMIANO, R.C.P. et al. *O GeoGebra e o ensino de física: aprender a aprender* Disponível em: http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/78.pdf. Acesso em: 29 de maio de 2014.

MELO, A.L.C.D & SILVA, G.S.C. *Utilização do software GeoGebra como ferramenta auxiliar ao estudo das funções quadráticas no ensino fundamental e médio.* In: 6º encontro de formação de professores (ENFOPE),2013,Sergipe. Utilização do software GeoGebra como ferramenta auxiliar ao estudo das funções quadráticas no ensino fundamental e médio, 2013.v.4.

MONTEIRO, C. *Interpretação de gráficos: atividade social e conteúdo de ensino* Disponível em: http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_22/carlos.pdf. Acesso em: 10 de junho de 2014.

MORAN, J.M. *A educação que desejamos: novos desafios e como chegar lá.*2ª Ed. Campinas: Papirus, 2007.

MURPHY, L.D. *Graphing Misinterpretations and Microcomputer-Based Laboratory Instruction, with Emphasis on Kinematics.* Disponível em: http://mste.illinois.edu/murphy/Papers/Gra
Acesso em: 10 de junho de 2014.

PAIS, L.C. *Didática da Matemática: Uma análise da influência francesa.* 3ª ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2011.236p.

PAIVA, M. *Matemática volume único.* 1ª Ed. São Paulo: Moderna , 2005. 578p.

PEANO, G. *Sulla definizione de funzione.* Atti della accademia nazionali dei Lincei, Rendiconti, Classe di scieze fisiche, matematiche e naturali, 20-I: 3-5, 1911.

PETLA, R.J. & ROLKOUSKI, E. *GeoGebra - possibilidades para o ensino de matemática* Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1419-8.pdf. Acesso em: 29 de maio de 2014.

PITOMBEIRA, J.B. & ROQUE, T.M. *Tópicos de história da matemática coleção PROF-MAT.* 1 ed. Rio de Janeiro: SBM , 2012. 285p.

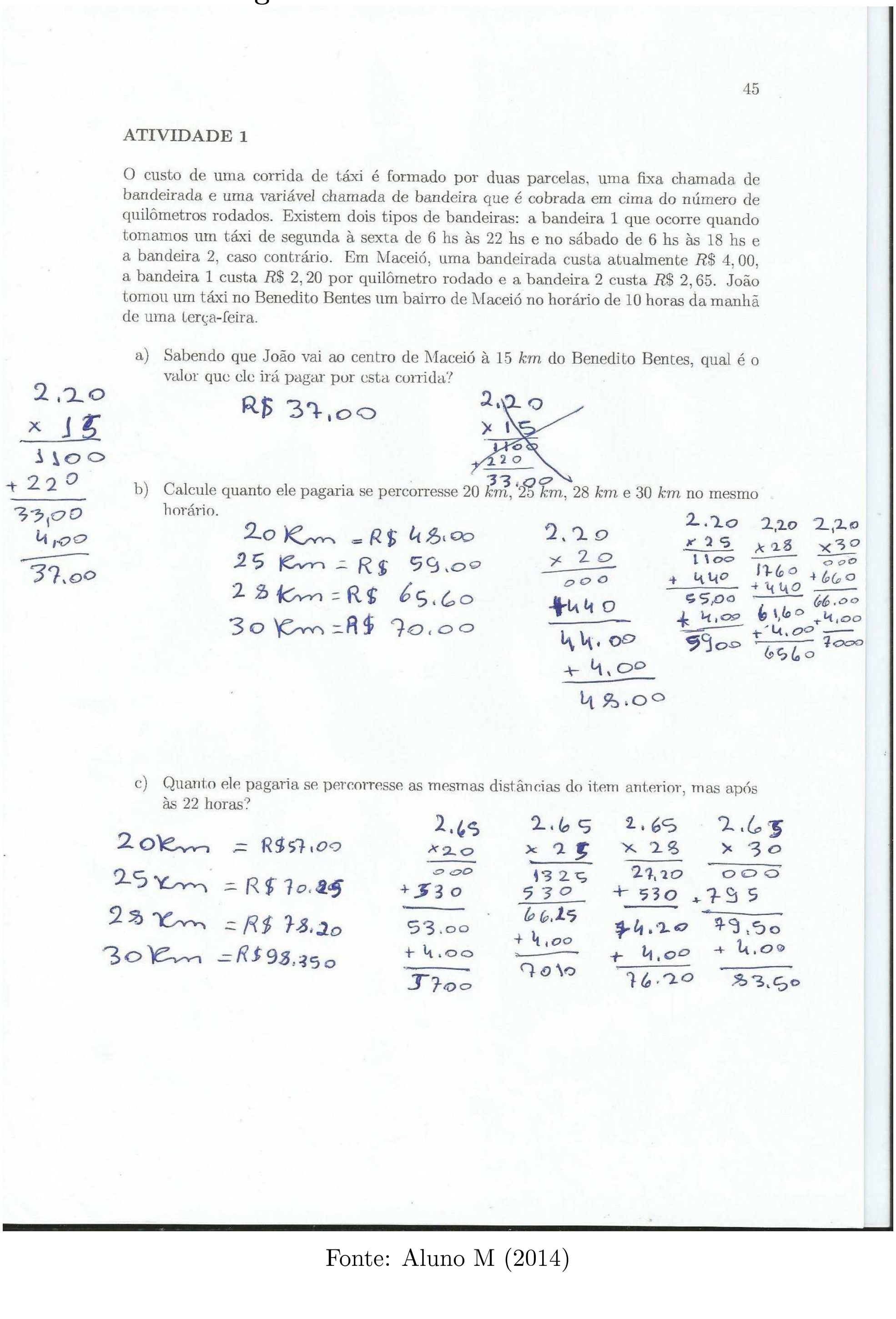
RAMOS, I.C.P.N. *Construção e interpretação de gráficos de cinemática com o software modellus: um estudo com alunos do 11º ano de escolaridade.* 2011. 143p. Dissertação (mestrado em educação) - Instituto de educação, Universidade de Lisboa, Lisboa.2011.

YOUSCHKEVITCH, A.P. *The concept of function.* Archive for History of Exact Sciences, v.16, n.1, p.37-85, 1976.

ZUFFI, O. *O tema "funções" e a linguagem matemática de professores do Ensino Médio por uma aprendizagem de significados.* São Paulo: Tese de Doutorado, Faculdade de Educação USP, 1999, 307 p.

ANEXOS

Figura 4.8: Oficina 2 - Atividade 1



45

ATIVIDADE 1

O custo de uma corrida de táxi é formado por duas parcelas, uma fixa chamada de bandeirada e uma variável chamada de bandeira que é cobrada em cima do número de quilômetros rodados. Existem dois tipos de bandeiras: a bandeira 1 que ocorre quando tomamos um táxi de segunda à sexta de 6 hs às 22 hs e no sábado de 6 hs às 18 hs e a bandeira 2, caso contrário. Em Maceió, uma bandeirada custa atualmente $R\$\ 4,00$, a bandeira 1 custa $R\$\ 2,20$ por quilômetro rodado e a bandeira 2 custa $R\$\ 2,65$. João tomou um táxi no Benedito Bentes um bairro de Maceió no horário de 10 horas da manhã de uma terça-feira.

a) Sabendo que João vai ao centro de Maceió à 15 *km* do Benedito Bentes, qual é o valor que ele irá pagar por esta corrida?

R$ 37,00

b) Calcule quanto ele pagaria se percorresse 20 *km*, 25 *km*, 28 *km* e 30 *km* no mesmo horário.

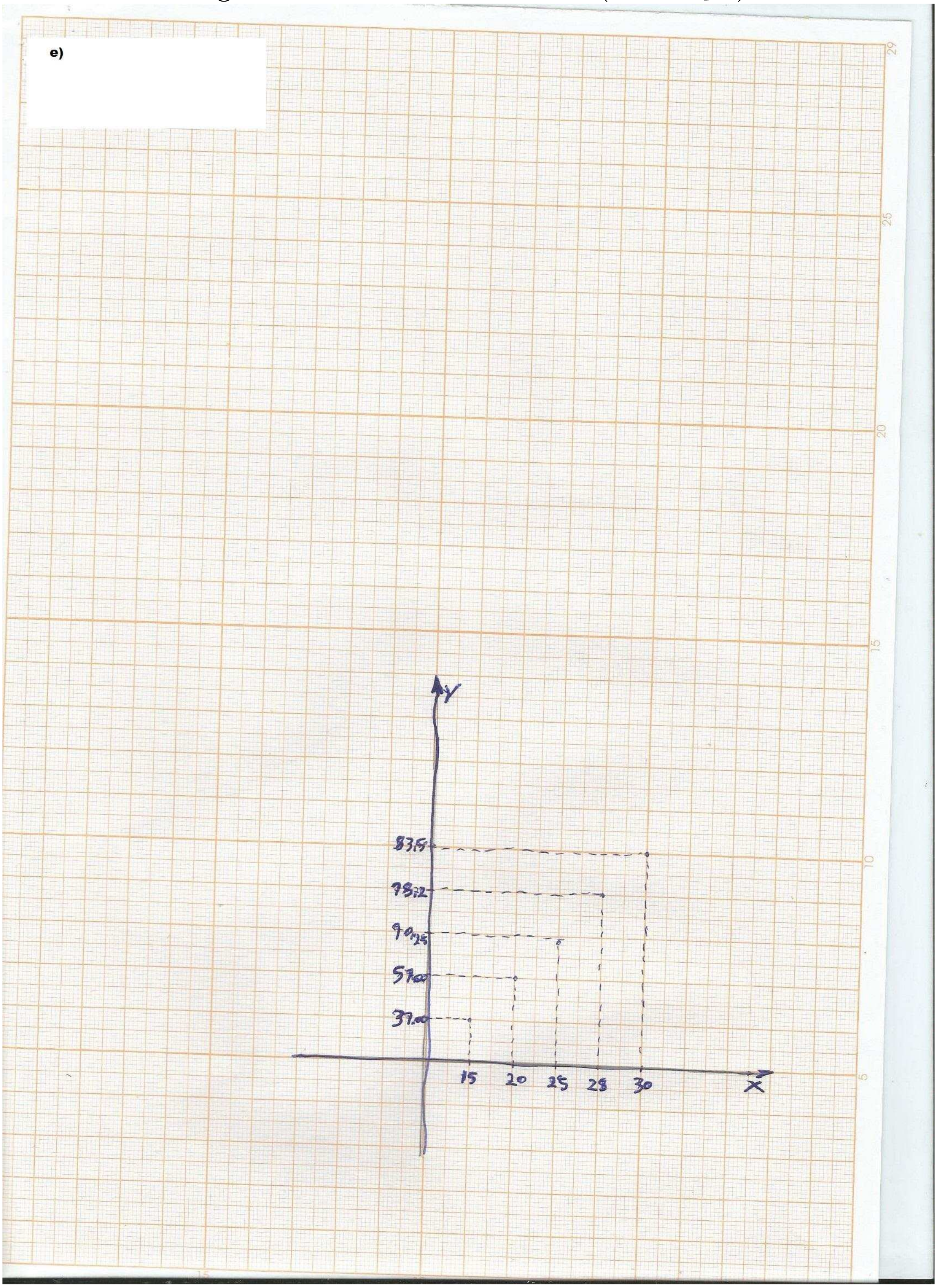
20 Km = R$ 48.00
25 Km = R$ 59.00
28 Km = R$ 65.60
30 Km = R$ 70.00

c) Quanto ele pagaria se percorresse as mesmas distâncias do item anterior, mas após às 22 horas?

20Km = R$57,00
25Km = R$ 70.25
28 Km = R$ 78.20
30Km = R$98.350

Fonte: Aluno M (2014)

Figura 4.9: **Oficina 2 - Atividade 1 (continuação)**



Fonte: Aluno M (2014)

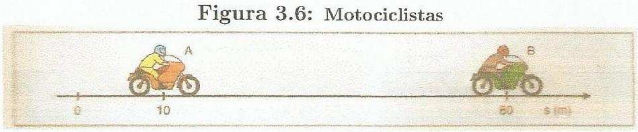
Figura 4.10: **Oficina 3 - Atividade 1**

49

ATIVIDADE 1

Dois motociclistas A e B percorrem uma mesma pista retílinea representada pelo eixo orientado.

Figura 3.6: Motociclistas



Fonte: [MAIALI],1998

No início da contagem dos tempos, suas posições são $A = 10\ m$ e $B = 80\ m$. Ambos percorrem a pista no sentido positivo do eixo com velocidades contantes, sendo $v_a = 30\ m/s$ e $v_b = 20\ m/s$. Determine:

a) Indique nas tabelas abaixo as posições das motocicletas a depender do tempo dado:

Tabela 3.2: Motociclista A

Tempos (s)	Posição (m)
0	0
1	40
2	70
3	100
4	130

Fonte: [Autor],2014

Tabela 3.3: Motociclista B

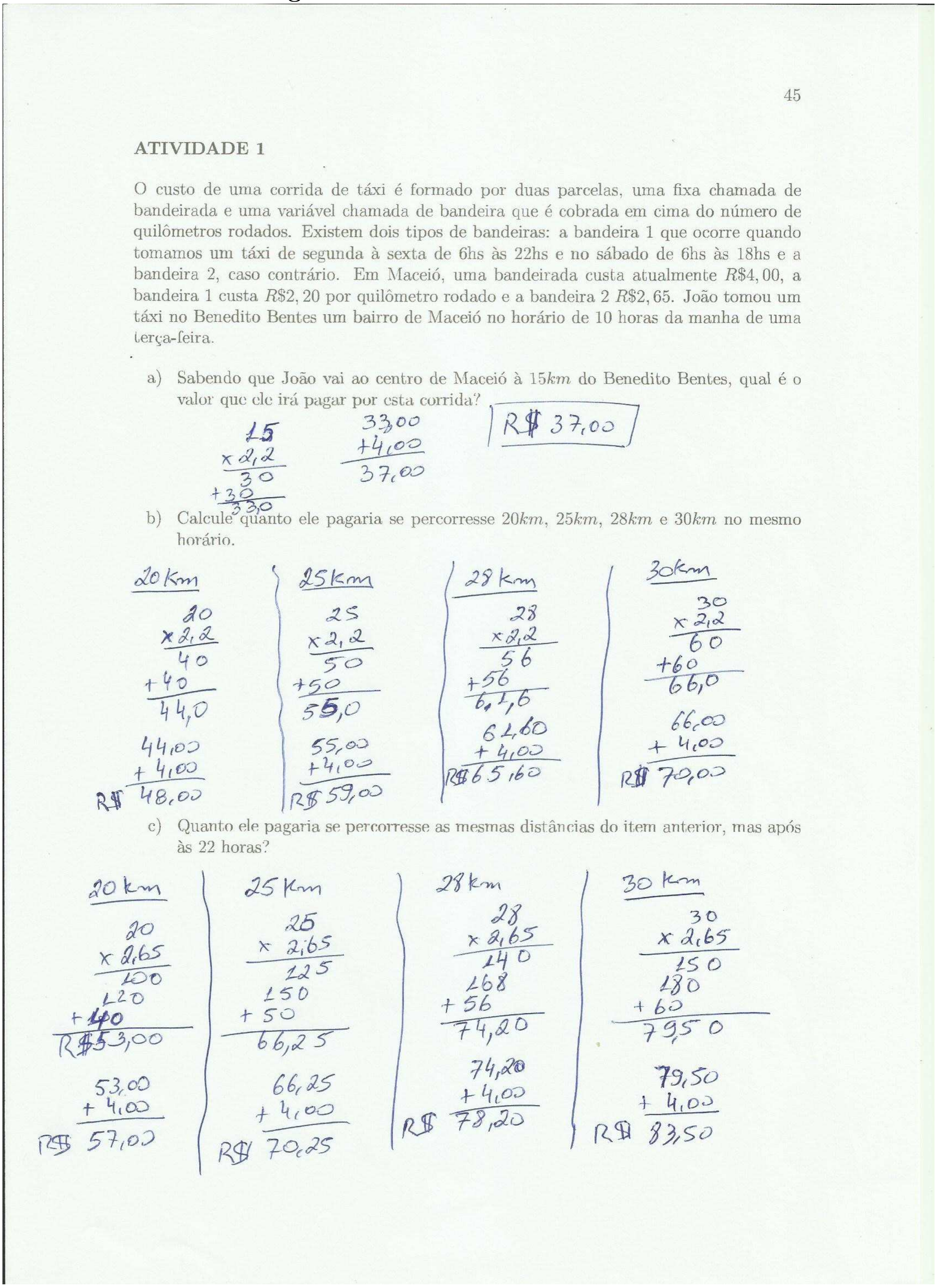
Tempos (s)	Posição (m)
0	80
1	100
2	120
3	140
4	160

Fonte: [Autor],2014

b) Em algum instante o motocicleta A alcança o B? Se sim, qual a posição de encontro? Sim 220m

Fonte: Aluno M (2014)

Figura 4.11: **Oficina 2 - Atividade 1**



45

ATIVIDADE 1

O custo de uma corrida de táxi é formado por duas parcelas, uma fixa chamada de bandeirada e uma variável chamada de bandeira que é cobrada em cima do número de quilômetros rodados. Existem dois tipos de bandeiras: a bandeira 1 que ocorre quando tomamos um táxi de segunda à sexta de 6hs às 22hs e no sábado de 6hs às 18hs e a bandeira 2, caso contrário. Em Maceió, uma bandeirada custa atualmente $R\$4,00$, a bandeira 1 custa $R\$2,20$ por quilômetro rodado e a bandeira 2 $R\$2,65$. João tomou um táxi no Benedito Bentes um bairro de Maceió no horário de 10 horas da manha de uma terça-feira.

a) Sabendo que João vai ao centro de Maceió à $15km$ do Benedito Bentes, qual é o valor que ele irá pagar por esta corrida?

15 × 2,2 = 30 + 30 = 33,0 | 33,00 + 4,00 = 37,00 | R$ 37,00

b) Calcule quanto ele pagaria se percorresse $20km$, $25km$, $28km$ e $30km$ no mesmo horário.

20 Km: 20 × 2,2 = 40 + 40 = 44,0; 44,00 + 4,00 = R$ 48,00

25 Km: 25 × 2,2 = 50 + 50 = 55,0; 55,00 + 4,00 = R$ 59,00

28 Km: 28 × 2,2 = 56 + 56 = 61,6; 61,60 + 4,00 = R$ 65,60

30 Km: 30 × 2,2 = 60 + 60 = 66,0; 66,00 + 4,00 = R$ 70,00

c) Quanto ele pagaria se percorresse as mesmas distâncias do item anterior, mas após às 22 horas?

20 km: 20 × 2,65 = 100 + 120 + 40 = R$ 53,00; 53,00 + 4,00 = R$ 57,00

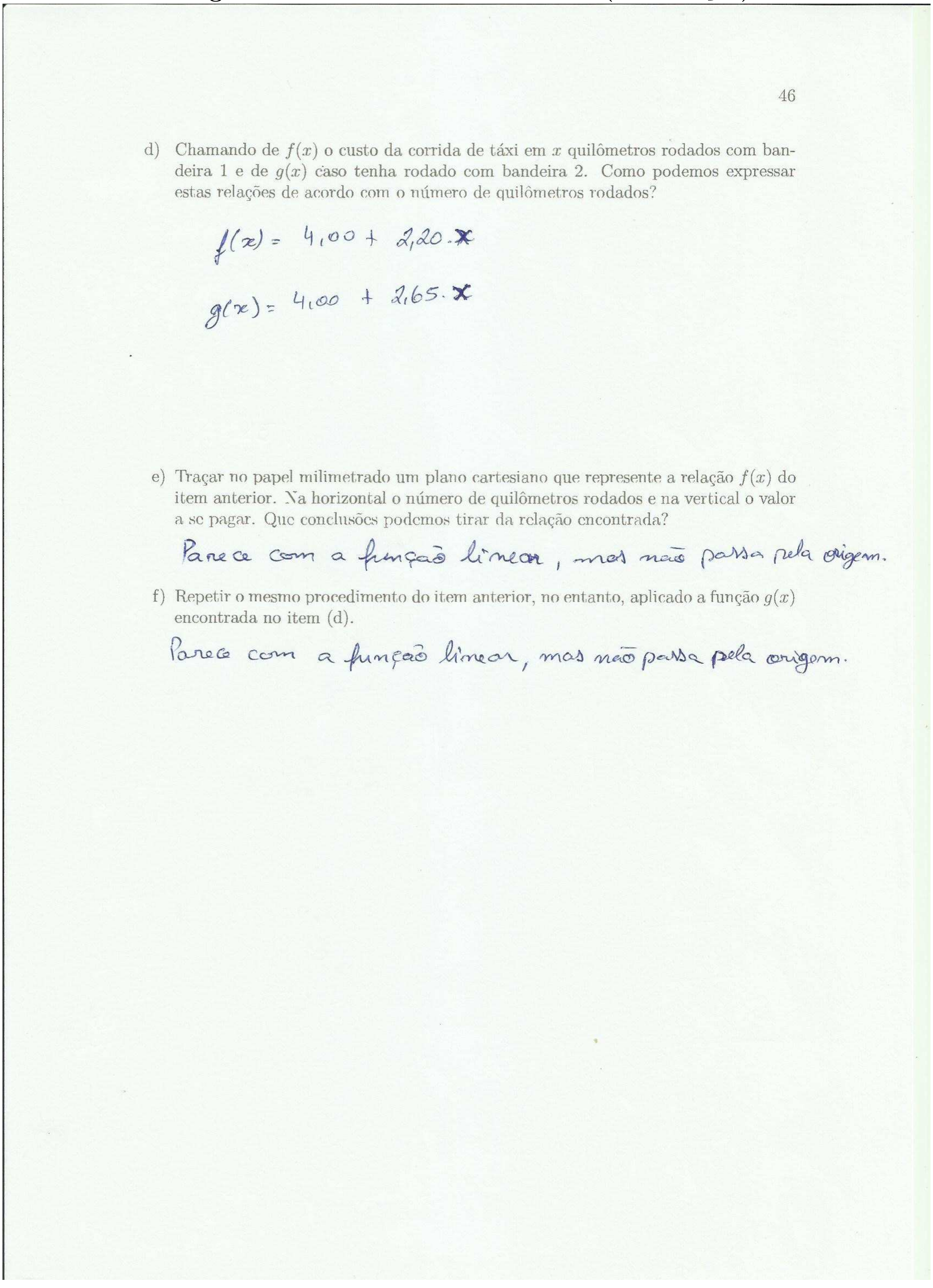
25 Km: 25 × 2,65 = 125 + 150 + 50 = 66,25; 66,25 + 4,00 = R$ 70,25

28 km: 28 × 2,65 = 140 + 168 + 56 = 74,20; 74,20 + 4,00 = R$ 78,20

30 km: 30 × 2,65 = 150 + 180 + 60 = 79,50; 79,50 + 4,00 = R$ 83,50

Fonte: Aluno N (2014)

Figura 4.12: Oficina 2 - Atividade 1 (continuação)



46

d) Chamando de $f(x)$ o custo da corrida de táxi em x quilômetros rodados com bandeira 1 e de $g(x)$ caso tenha rodado com bandeira 2. Como podemos expressar estas relações de acordo com o número de quilômetros rodados?

$f(x) = 4,00 + 2,20 \cdot x$

$g(x) = 4,00 + 2,65 \cdot x$

e) Traçar no papel milimetrado um plano cartesiano que represente a relação $f(x)$ do item anterior. Na horizontal o número de quilômetros rodados e na vertical o valor a se pagar. Que conclusões podemos tirar da relação encontrada?

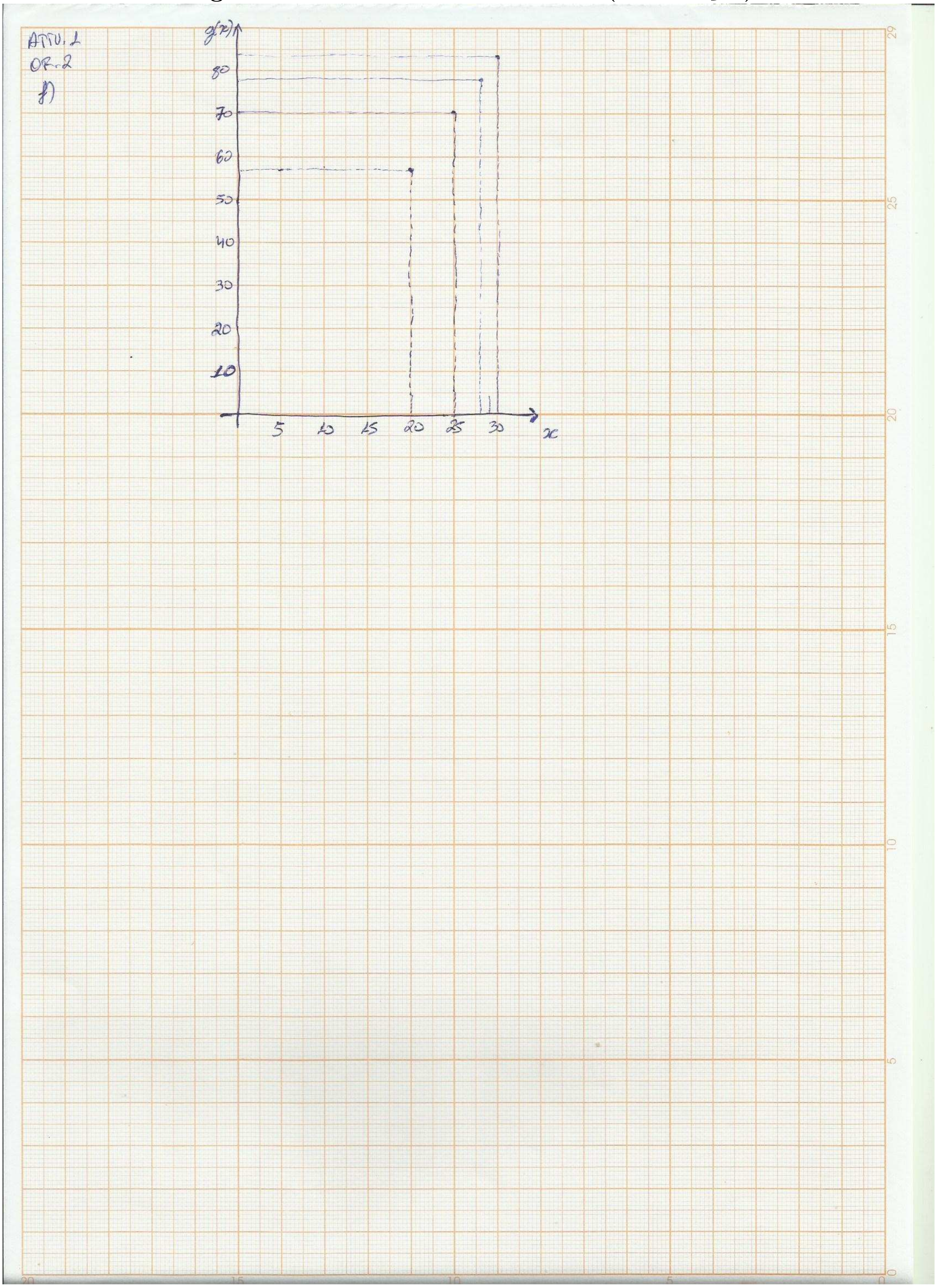
Parece com a função linear, mas não passa pela origem.

f) Repetir o mesmo procedimento do item anterior, no entanto, aplicado a função $g(x)$ encontrada no item (d).

Parece com a função linear, mas não passa pela origem.

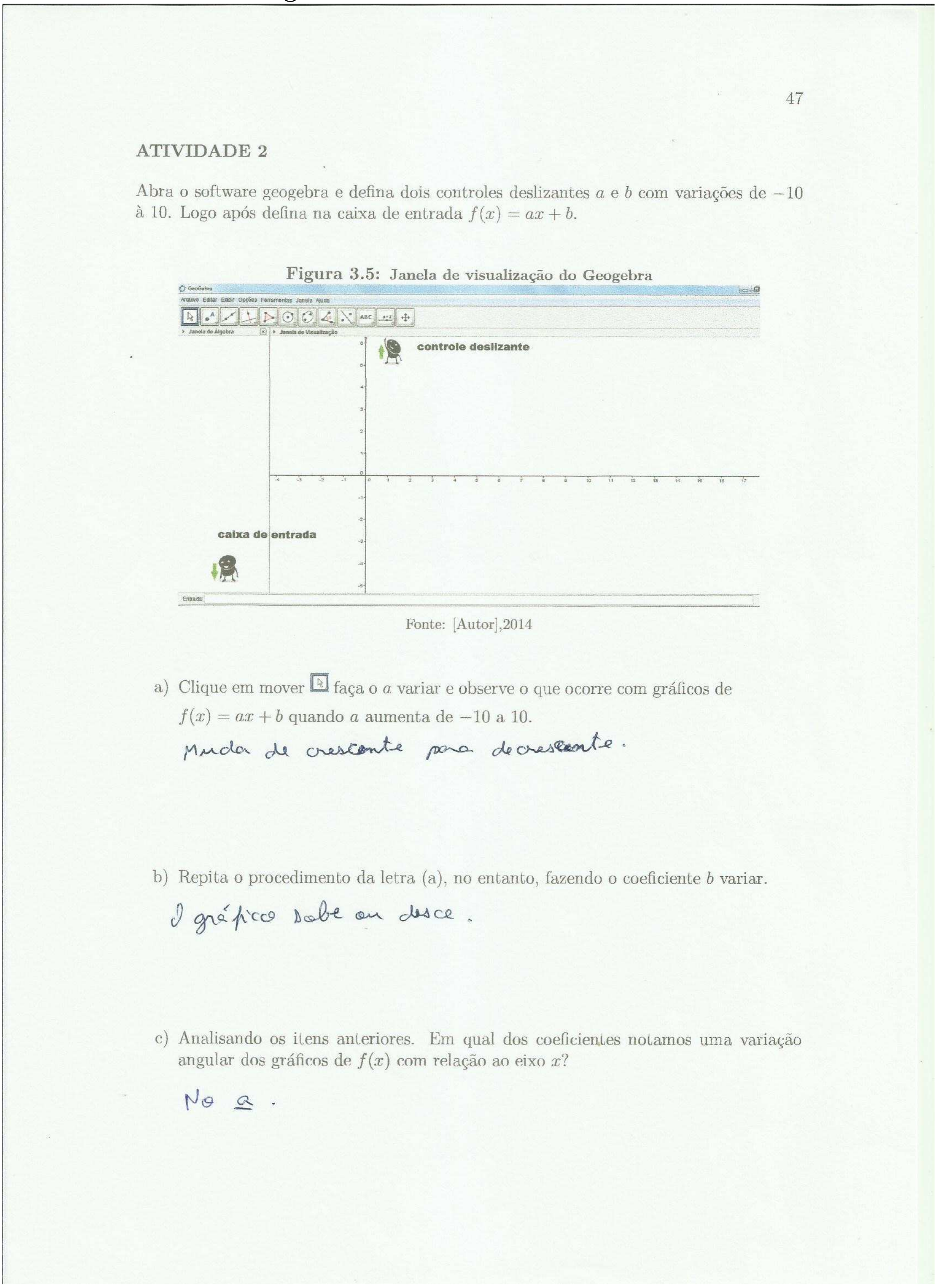
Fonte: Aluno N (2014)

Figura 4.13: **Oficina 2 - Atividade 1 (continuação)**



Fonte: Aluno N (2014)

Figura 4.14: **Oficina 2 - Atividade 2**



47

ATIVIDADE 2

Abra o software geogebra e defina dois controles deslizantes a e b com variações de -10 à 10. Logo após defina na caixa de entrada $f(x) = ax + b$.

Figura 3.5: Janela de visualização do Geogebra

Fonte: [Autor],2014

a) Clique em mover faça o a variar e observe o que ocorre com gráficos de $f(x) = ax + b$ quando a aumenta de -10 a 10.

Muda de crescente para decrescente.

b) Repita o procedimento da letra (a), no entanto, fazendo o coeficiente b variar.

O gráfico sobe ou desce.

c) Analisando os itens anteriores. Em qual dos coeficientes notamos uma variação angular dos gráficos de $f(x)$ com relação ao eixo x?

No $\underline{a}$.

Fonte: Aluno N (2014)

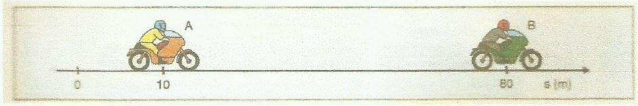
Figura 4.15: **Oficina 3 - Atividade 1**

49

ATIVIDADE 1

Dois motociclistas A e B percorrem uma mesma pista retílinea representada pelo eixo orientado.

Figura 3.6: **Motociclistas**



Fonte: [Autor],2014

No início da contagem dos tempos, suas posições são $A = 10m$ e $B = 80m$. Ambos percorrem a pista no sentido positivo do eixo com velocidades contantes, sendo $v_a = 30m/s$ e $v_b = 20m/s$. Determine:

a) Indique nas tabelas abaixo os espaços percorridos por ambas os motocicletas a depender dos tempos dados:

Tabela 3.2: Motociclista A

Tempos (s)	Espaço (m)
0	10
1	~~20~~ 40
2	~~30~~ 70
3	~~40~~ 100
4	~~50~~ 130

Fonte: [Autor],2014

Tabela 3.3: Motociclista B

Tempos (s)	Espaço (m)
0	80
1	100
2	120
3	140
4	160

Fonte: [Autor],2014

b) Em algum instante o motocicleta A alcança o B? Se sim, qual a posição de encontro?

Sim, Como A anda 10m a mais do que B, então para A passar B levará 70÷10 = 7 s, já que a distância entre eles é de 80-10 = 70m. E em 7s o A estará na posição 30.7+10 = 210+10 = 220 m.

Fonte: Aluno N (2014)

Figura 4.16: Oficina 3 - Atividade 1 (continuação)

50

c) Represente no papel milimetrado em um mesmo plano cartesiano as situações expressas nas tabelas e no item anterior.

d) Denotemos por $S_A(t)$ o espaço percorrido pela motocicleta A em um tempo t. Como podemos expressar $S_A(t)$ em função do tempo?

$S_A(t) = 30.t + 10.$

e) Repita o mesmo procedimento do item anterior, mas sabendo que $S_B(t)$ denota o espaço percorrido pela motocicleta B em um tempo t.

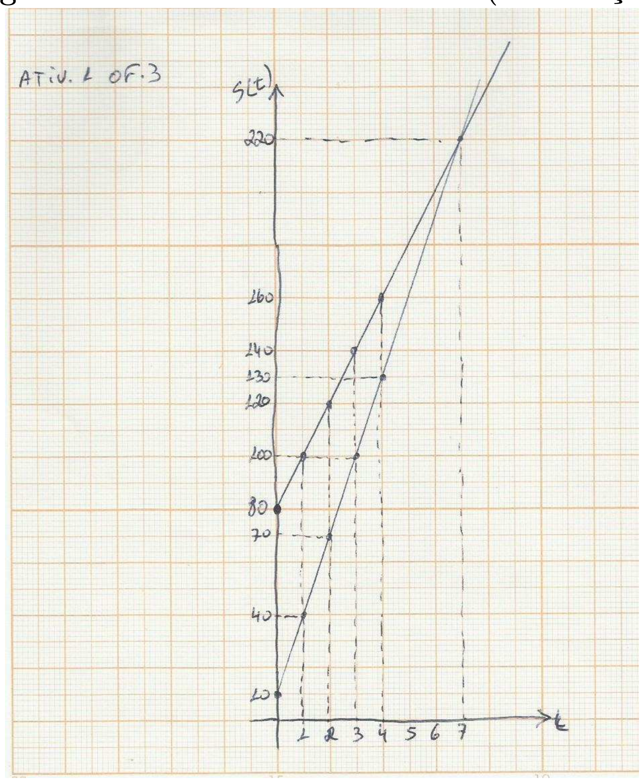
$S_B(t) = 80.t + 80$

f) Abra o software GeoGebra e coloque na caixa de entrada cada uma das expressões encontradas nos itens (d) e (e).

Duas funções afins que se interseptam em 220m quando o tempo é 7s.

Fonte: Aluno N (2014)

Figura 4.17: **Oficina 3 - Atividade 1 (continuação)**



Fonte: Aluno N (2014)

Figura 4.18: Oficina 4 - Atividade 4

54

ATIVIDADE 2

Galileu Galilei (1564-1642) foi um físico, matemático, astrônomo e filósofo italiano. Ele acreditava de início que a queda dos corpos em movimento natural aumentava sua velocidade proporcionalmente à distância de seu percurso. Mas ele mesmo notou que isso não era verdade e mostrou que a distância percorrida por um corpo em queda livre era proporcional ao quadrado do tempo de queda. Em uma de suas experiências Galileu observou as seguintes medições de tempo e espaço relacionando à queda de um objeto. Os resultados estão colocados na tabela abaixo:

$\frac{4,9}{1^2} = 4,9$

$\frac{19,6}{2^2} = \frac{196}{40} = 4,9$

$\frac{44,1}{3^2} = \frac{441}{90} = 4,9$

$\frac{78,4}{4^2} = \frac{784}{160} = 4,9$

$\frac{122,5}{5^2} = \frac{1225}{250} = 4,9$

Tabela 3.5: Tempo X Espaço

Tempos (s)	Espaço (m)
0	0
1	4,9
2	19,6
3	44,1
4	78,4
5	122,5

Fonte: [Autor],2014

196 | 40 ; −160 → 4,9 ; 360 ; −360 ; 0

441 | 90 ; −360 → 4,9 ; 810 ; −810 ; 0

784 | 160 ; −640 → 4,9 ; 1440 ; −1440 ; 0

1225 | 250 ; −1000 → 4,9 ; 2250 ; −2250 ; 0

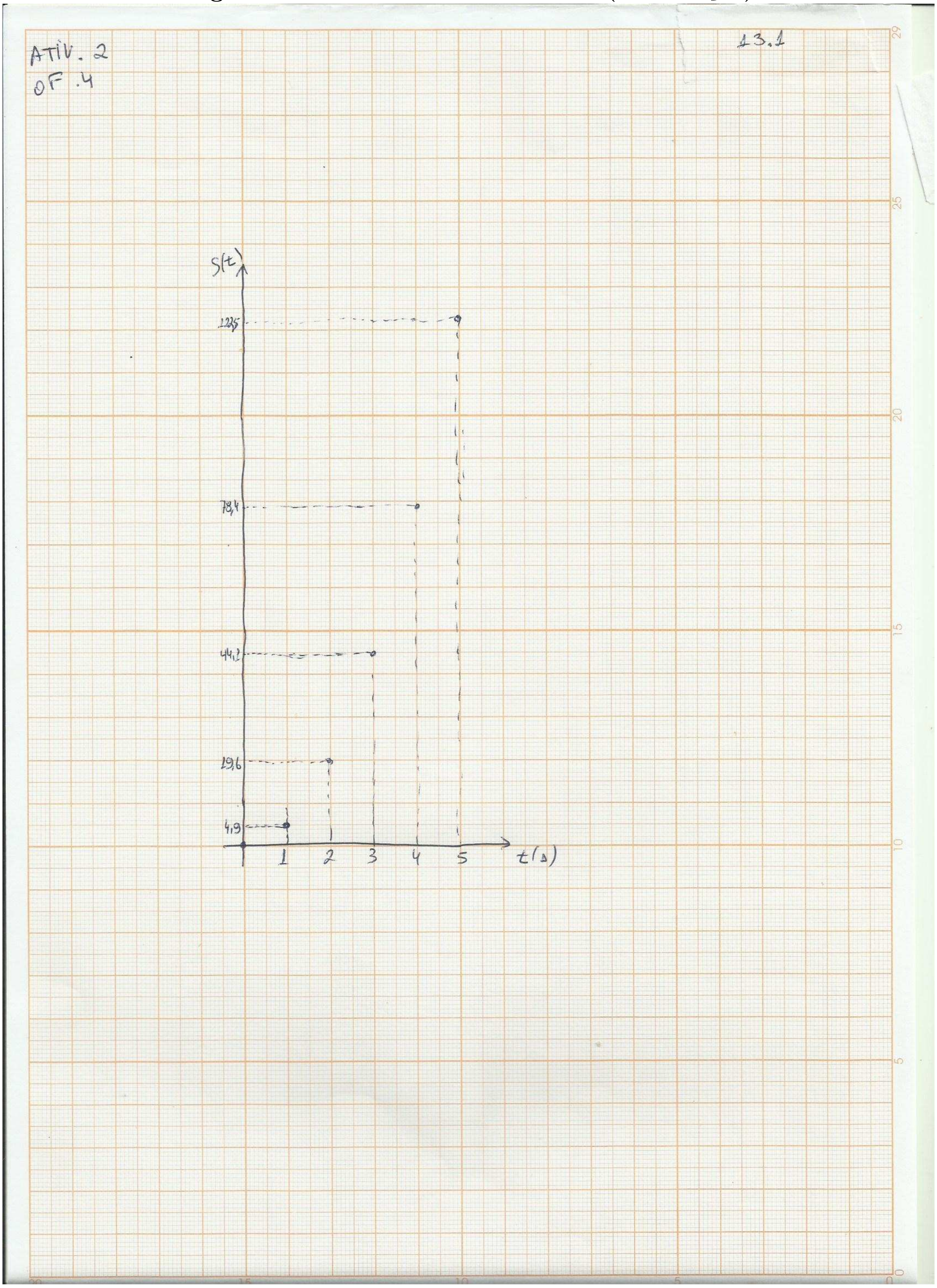
a) Traçar em papel milimetrado um plano cartesiano os valores que relacionam o tempo e o espaço do objeto descrito acima.(no eixo vertical cada tracinho loccalize como dez unidades para facilitar a visualização).

b) De acordo com a observação de Galileu seria possível estabelecer uma função $S(t)$ espaço percorrido em queda livre com tempo t? Se possível que relação seria esta?

Sim. $S(t) = 4,9\,t^2$

Fonte: Aluno N (2014)

Figura 4.19: **Oficina 4 - Atividade 4 (continuação)**



Fonte: Aluno N (2014)