Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Pós-Graduação em Matemática
Mestrado Profissional em Matemática
PROFMAT

Problemas de Otimização Pertinentes a Matemática do Ensino Médio

Milton Floriano Siqueira Filho

Teresina
2014

Milton Floriano Siqueira Filho

Dissertação de Mestrado:

Problemas de Otimização Pertinentes a Matemática do Ensino Médio

Dissertação submetida à Coordenação Acadêmica Institucional do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional na Universidade Federal do Piauí, oferecido em associação com a Sociedade Brasileira de Matemática, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador:
Prof°. Dr Jurandir de Oliveira Lopes

Teresina
2014

FILHO, Milton Floriano Siqueira.

xxxx Problemas de Otimização Pertinentes a Matemática do Ensino Médio Aluno do Ensino Médio.

Milton Floriano Siqueira Filho – Teresina: 2014.

Orientador: Prof°. Dr. Jurandir de Oliveira Lopes

1. Matemática - Ensino Médio. 2. Resolução de problemas.
3. Otimização. I. Título.

CDD xxx.xx

Dedicamos este presente trabalho aos meus queridos familiares pelo apoio incondicional, incentivo e dedicação.
E a todos os colegas de turma do PROFMAT 2012, amigos que sempre nos acolheram e nos apoiaram durante a realização deste curso, que é mais uma etapa da nossa vida concluída.

Agradecimentos

Agradecemos a Deus pelo dom da vida e pela oportunidade e privilégio que nos foram dados em compartilhar tamanha experiência.

A minha família pelo carinho, incentivo e suporte em todos os momentos, em especial a minha esposa Eduarda, meus filhos Rafael Saymon, Ana Sofia e minha irmã Mirna.

Ao orientador Jurandir de Oliveira Lopes, por conduzir todo o trabalho com competência, dedicação e, especialmente, pela sua amizade e sua compreensão e ao corpo docente da UFPI em especial aos que fazem o PROFMAT.

A todos os alunos que compreenderam a importância desse trabalho e colegas de turma em especial ao Hoseano e Francisco Alves que contribuíram incomensuravelmente por esta conquista.

Agradeço (a CAPES) pelo apoio financeiro, institucional e intelectual.

São meus sinceros agradecimentos.

"mente que se abre a uma nova idéia jamais voltará ao seu tamanho original"

Albert Einstein.

"A teoria sem a prática vira "verbalismo", assim como a prática sem a teoria, vira ativismo. No entanto, quando se une teoria e prática tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade"

Paulo Freire.

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo evidenciar os problemas de otimização, com aplicação imediata nos conteúdos do ensino médio, desenvolvendo no aluno a capacidade de resolver situações práticas do cotidiano, caracterizando e mostrando a função a ser otimizada, fazendo com que o aluno ponha em evidência conhecimentos prévios e a habilidade de resolver situações-problema, pois geralmente a questão não evidencia a função a ser otimizada. Nos cursos superiores de Matemática, problemas de otimização costumam ser resolvidos com o uso do cálculo diferencial. No contexto de ensino médio, a maioria dos problemas de otimização conduz a uma função polinomial do segundo grau, mas é claro que há uma ampla gama de problemas elementares que não se enquadram nessa simplificação. No entanto, mesmo no ensino médio podem ser tratadas situações relativas a otimização que normalmente só seriam abordadas no ensino superior, pois a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica mostra-se eficiente na resolução de tais problemas.

Palavras-chave

Resolução de problemas. Otimização. Matemática no Ensino Médio.

Abstract

This work aims to show the optimization problems, with immediate application in the content of high school students in developing the ability to solve practical everyday situations, characterizing and showing the function to be optimized, so that the student put in evidence prior knowledge and the ability to solve problem situations, usually because the issue does not show the function to be optimized. The upper courses of mathematics, optimization problems are usually solved with the use of differential calculus. In the context of high school, most optimization problems leads to a polynomial function of the second degree, but of course there is a wide range of basic issues that do not fall into this simplification. However, even in high school related situations can be dealt with optimization that would normally only addressed in higher education, since inequality between arithmetic and geometric averages proves efficient in solving such problems.

Keywords

Optimization; problem solving; mathematics in secondary education.

Sumário

Lista de Figuras

1 Introdução

O desenvolvimento de novas metodologias, baseadas em métodos clássicos para a otimização, mostra um objetivo para aplicação a problemas interdisciplinares e tem um grande potencial a ser explorado. A Matemática Aplicada é um ramo da matemática que trata da aplicação do conhecimento matemático a outros domínios, porém é pouco ou mal explorada nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio. A otimização, por exemplo, é uma de suas aplicações que auxilia na resolução de problemas ligados à economia, à administração, às engenharias, e as outras ciências, e que pode perfeitamente ser explorada, em um nível mais elementar, na Educação Básica. Diante desta realidade, este trabalho tem como objetivo principal apresentar alguns métodos algébricos acessíveis ao estudante do Ensino Médio, para resolução de problemas simples de otimização. Dentre estes, destacam-se a otimização de funções quadráticas, além de aplicações da desigualdade das médias. A aplicação dos métodos apresentados é exemplificada por meio de vários problemas, escolhidos de maneira a mostrar uma ampla e significativa diversidade que permite a utilização dos métodos aqui desenvolvidos. Consequentemente, estes métodos podem apresentar alguns conteúdos do Ensino Médio de uma forma interessante, despertando o interesse dos alunos, pois, uma vez bem assimilados podem tornar-se poderosas ferramentas na solução de vários problemas, frequentemente encontrados no próprio cotidiano dos alunos e, inclusive, em olimpíadas de matemática, vestibulares e concursos.

O professor deve expor seus alunos a situações-problema que estimulem o desenvolvimento da competência matemática. No desenvolvimento desta competência, os problemas são fundamentais, pois permitem ao aluno colocar-se diante de situações que possibilitem o exercício do raciocínio lógico, pensando por si próprio, sem a utilização de regras e fórmulas padronizadas. O Ensino da Matemática deve, dentre os principais objetivos, desafiar os alunos e incitar a curiosidade através da apresentação de problemas compatíveis com os conhecimentos destes. Assim, o professor deve auxiliá-los por meio de indagações estimulantes que objetivem o desenvolvimento de um pensamento crítico e autônomo. Mais do que o simples dever de ensinar, o professor encontra-se diante de um novo contexto sociocultural em que o aluno possui fácil acesso à informação, tornando-se desafiador mostrar e ressaltar a importância da Matemática. Utilizar problemas desafiadores que instiguem a curiosidade e o raciocínio-lógico pode ser uma maneira de aumentar o interesse pela Matemática. A forma de o professor questionar o aluno deve levá-lo a uma melhor compreensão do problema que consequentemente abre as portas para que o mesmo estabeleça uma boa estratégia de resolução. Assim, a escolha de bons problemas é fundamental para o sucesso do processo ensino-aprendizagem, estes devem ser desafiadores e interessantes, mas não tão complexos ao ponto de desmotivar os alunos. Logo, cabe ao professor estabelecer corretamente o nível de dificuldade dos problemas para seus alunos, pois, caso contrário, isto pode tornar-se mais um obstáculo no processo ensino-aprendizagem.

A resolução de problemas como método de ensino em Matemática tem como objetivo principal colocar o aluno diante de questionamentos que possibilitem o mesmo exercitar o raciocínio e desenvolver uma autonomia que o ajudará em outras situações na sua vida cotidiana e não simplesmente reproduzir conhecimentos repassados, que tornam o ensino da matemática monótono e improdutivo. É importante ressaltar a diferença entre exercício e problema. O exercício sustenta-se num procedimento padrão, onde o aluno coloca em prática um conhecimento adquirido ou memorizado.

A escolha dos problemas de otimização como objetivo de estudo deste trabalho deu-se pelo crescente desenvolvimento deste ramo e a diversidade de suas áreas de aplicação, além do fato que tais problemas apresentados neste trabalho têm como foco despertar a vontade do aluno em conhecer e investigar a utilização de determinados conteúdos estudados no Ensino Médio como, por exemplo, as noções de estatística e as funções quadráticas em situações que envolvem outros domínios promovendo assim atividades contextualizadas e/ou interdisciplinares. Tais problemas ajudam a responder algumas indagações feitas constantemente por alunos da Educação Básica como, por exemplo:

Para que estudar função quadrática? Por que estudar a desigualdade das médias?. A rotina do processo ensino-aprendizagem de Matemática quase sempre segue o modelo: definição, exemplos e exercícios de fixação. Porém, os problemas de aplicação devem ser usados como uma motivação para aprender determinado conteúdo, pois diversas vezes o ensino está se desenvolvendo muito abstratamente, sem exibir a relevância dos conceitos introduzidos. A utilização de problemas de aplicação, normalmente tem procurado inovar com situações-problema interessantes, contextualizadas e/ou interdisciplinares que propiciem a vontade nos alunos de aprender determinados conteúdos.

Um dos principais objetivos deste trabalho, que não pode deixar de ser mencionado é mostrar uma ideia a respeito do tema escolhido, que possa ser inovadora e ter impacto na prática didática em sala de aula, uma vez que os conteúdos explorados neste trabalho geralmente são mal e/ou pouco explorados no Ensino Médio, que é o caso principalmente do conteúdo Médias, cuja abordagem quase sempre se restringe ao seu cálculo propriamente dito o que não auxilia no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático. A forma de apresentação deste trabalho tem início na exibição de alguns conceitos e demonstrações de algumas propriedades, que diferem das aulas rotineiras, uma vez que, devido à grande quantidade de conteúdos exigidos pelas orientações curriculares nacionais e à pequena carga horária disponível no Ensino Médio para as aulas de matemática, geralmente os professores simplesmente fazem uso de determinados resultados (proposições, teoremas, fórmulas, etc) sem demonstrá-los. Tais propriedades, serão posteriormente utilizadas como ferramentas na resolução de vários problemas aqui expostos. Em seguida, serão apresentados alguns problemas de otimização, cuja as soluções remetem a conteúdos do Ensino Medio, este tema geralmente é intitulado como Problemas de Máximos e Mínimos, assim diante deste contexto tem-se um novo termo para este assunto, encontrar/extrair um ponto "ótimo" ou "ideal" para uma determinada situação. Fazendo uma busca nos sites de pesquisa sobre Otimização, destaca-se a definição apresentada por uma enciclopédia livre e colaborativa, a Wikipédia, que define este termo da seguinte forma: Em Matemática, o termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável. Observa-se que em diversas áreas do conhecimento humano existem problemas ou situações nas quais o principal objetivo é determinar o ponto "ótimo" de uma função, encontrar qual a alternativa mais viável para um investimento financeiro. Problemas como este possuem uma grande aplicabilidade em situações cotidianas. Minimizar gastos, maximizar lucro, obter a melhor maneira de se programar um dispositivo eletrônico qualquer, como, por exemplo, um elevador para reduzir o tempo e o consumo de energia em seu deslocamento, distribuir adequadamente água, luz e esgoto a uma região habitacional reduzindo os gastos, são alguns exemplos de situações cotidianas em que a otimização é o ramo da matemática responsável por estudá-las.

Como o Cálculo Diferencial, mais especificamente a derivada, é muito utilizada em problemas de máximos e mínimos como, por exemplo, problema de modelagem, problemas de crescimento populacional e decaimento radioativo ligados às funções exponencial e logarítmica. Uma vez retirado o Cálculo dos programas de ensino, tem-se uma menor quantidade de problemas que podem ser resolvidos e explorados usando a Matemática ensinada na Educação Básica. Entretanto, existem alguns métodos que podem ser aplicados a problemas muito interessantes e perfeitamente adequados ao atual currículo do Ensino Médio, alguns destes métodos serão explorados, e, em seguida, serão apresentados alguns problemas que podem ser resolvidos usando tais técnicas.

2 Métodos Algébricos para a Otimização de Funções

2.1 Máximos e Mínimos de Funções Quadráticas

Nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio, os problemas de máximos e mínimos usualmente explorados quase sempre estão ligados às funções quadráticas. Nestes, a tarefa mais difícil é achar a função que modela o problema, feito isso, resolver o problema resume se a encontrar as coordenadas do vértice do gráfico da função. A seguir será apresentada uma breve análise da forma canônica destas funções com o objetivo de encontrar as coordenadas do vértice, consequentemente, o seu valor máximo ou o seu valor mínimo.

Dada a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ com a, b e c números reais e $a \neq 0$, note que valem as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) - a\left(\frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(x^2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right).
\end{aligned}$$

Como $x \in \mathbb{R}$, o primeiro termo na expressão anula-se apenas para $x = -b/2a$. Logo, conclui-se que:

i) Se $a > 0$, o menor valor de $f(x)$ ocorre quando $x = \dfrac{-b}{2a}$.

ii) Se $a < 0$, o maior valor de $f(x)$ ocorre quando $x = \dfrac{-b}{2a}$.

A função quadrática $f(x) = ax^2+bx+c$, como já foi observado anteriormente, satisfaz a identidade

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \tag{2.1}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$. O valor mínimo (máximo) da função quadrática $f(x)$ é o menor (maior(valor possível que pode assumir $f(x)$ quando fazemos x percorrer o conjunto dos reais.

Da igualdade (2.1) segue-se que, quando $a > 0$ o valor mínimo do trinômio é obtido quando $x = -\dfrac{b}{2a}$ e este vale $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$. Similarmente, quando $a < 0$ o valor máximo do trinômio é obtido quando $x = -\dfrac{b}{2a}$, valendo também $f\left(-\dfrac{b}{2a}\right) = -\dfrac{\Delta}{4a}$

Exemplo 2.1. *Na figura abaixo* $ABCD$ *é um retângulo inscrito dentro do círculo de raio* r. *Encontre as dimensões que nos dão a maior área possível do retângulo* $ABCD$.

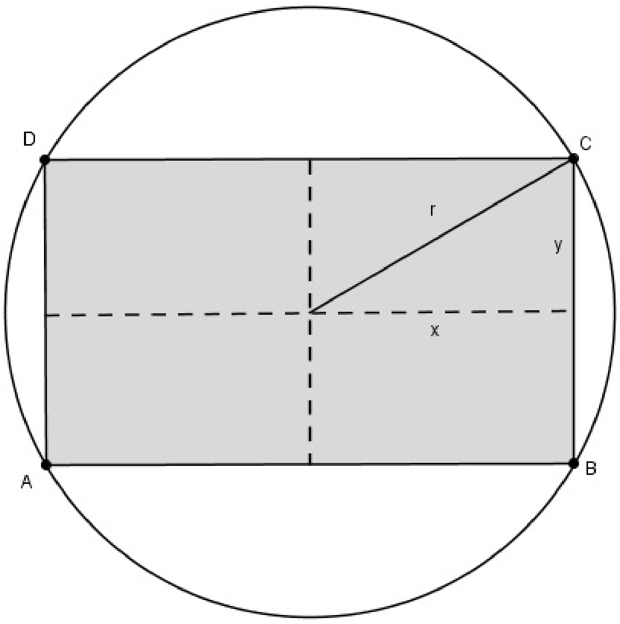


Figura 1: Exemplo 2.1

Solução: A área do retângulo vem dada pela fórmula

$$A = 2x \cdot 2y = 4xy.$$

Usando o teorema de Pitágoras, temos que

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}, \tag{2.2}$$

logo, substituindo esta última igualdade na fórmula de área anterior, obtemos

$$A = 4x\sqrt{r^2 - x^2}.$$

Não é muuito difícil nos convencermos de que as dimensões, que nos dão a maior área possível para o retângulo $ABCD$, são as mesma que nos dão o máximo para o quadrado desra área, ou seja, basta encontrar as dimensões que maximizam A^2. A vantagem que esta reformulação do problema é que A^2 tem uma expressão mais simples, dada por

$$A^2 = 16x^2(r^2 - x^2) = 16r^2x^2 - 16x^4,$$

Agora fazemos a mudança $z = x^2$, para obter

$$A^2 = -16z^2 + 16r^2z = -16\left(z - \frac{r^2}{2}\right) + 4r^4,$$

de onde segue que o menor valor de A^2 é obtido quando $z = \dfrac{r^2}{2}$ e portanto quando $x = \dfrac{r}{\sqrt{2}}$. Usando agora a igualdade (2.2) temos que

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \frac{r}{\sqrt{2}}.$$

Então, o retângulo de maior área possível é o quadrado de lado $\dfrac{2r}{\sqrt{2}} = r\sqrt{2}$.

Exemplo 2.2. *Um avião de 100 lugares foi fretado para uma excursão. A companhia exigiu de cada passageiro R\$ 800,00 mais R\$ 10,00 por cada lugar vago. Para que número de passageiros a rentabilidade da empresa é máxima?*

Solução: Seja x o número passageiros na excusão, tem-se que a receita(R) é dada, em reais, pela função:

$$R(x) = x[800 + 10(100 - x)] = -10x^2 + 1800x.$$

Logo, a solução do problema se resume a determinar o valor de x para que a função atinja seu maior valor, isto ocorre quando $x = -1800/2 \cdot (-10)$, ou seja, quando $x = 90$. Portanto, o número de passageiros que devem estar presentes na excursão para que a receita seja máxima é 90, neste caso a receita será igual a R$ 81 000,00.

Exemplo 2.3. *Com 80 metros de cerca um fazendeiro deseja circundar uma área retangular junto a um rio para confinar alguns animais.*

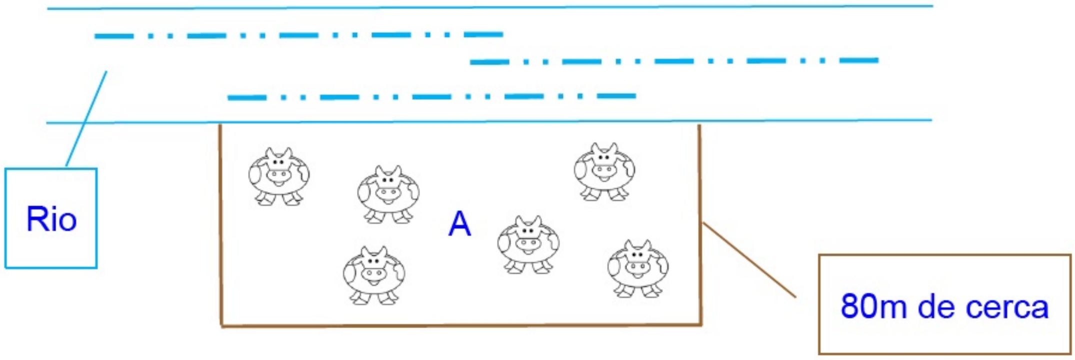


Figura 2: Exemplo 2.3

Quais devem ser as medias do retângulo para que a área cercada seja maior possivel?

Solução: Se os lados sao x e y, temos $2x + y = 80$, $y = 80 - 2x$. A área é

$$xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$$

e deve ser maxima. Devemos ter $x = \dfrac{-b}{2a} = 20$. Dai, $y = 80 - 2 \cdot 20 = 40$. A cerca deve ter os lados perpendiculares ao rio medindo 20 metros e o lado paralelo ao rio medindo 40 metros.

Nos cursos superiores de Matemática ou áreas afins os problemas de otimização costumam ser resolvidos com o uso de derivadas, já no Ensino Médio a maioria destes problemas conduzem a uma função quadrática, cuja solução foi analisada nesta seção. Porém, existe uma ampla quantidade de problemas que podem ser resolvidos usando outros recursos algébricos, tipicamente expressos por meio de desigualdades. Algumas destas serão discutidas a seguir.

2.2 A Desigualdade das Médias

A *desigualdade das médias*, por exemplo, mostra-se muito útil na solução de alguns problemas de otimização. Geralmente, no Ensino Médio, estas médias são tratadas no conteúdo de Noções de Estatística, onde as aplicações restringem-se ao seu simples cálculo com base em informações dadas em gráficos ou tabelas. A definição destas médias será apresentada a seguir:

Definição 1. *Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais positivos. Define-se:*

i) *A média aritmética (m_a) de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número* $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

ii) *A média geométrica (m_g) de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número* $\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

iii) *A média harmônica (m_h) de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número* $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

iv) *A média quadrática (m_q) de $a_1, a_2, \ldots, a_n$ como o número* $\sqrt{\dfrac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$.

Uma vez definidas, existe uma importante relação entre estas médias, apresentada no seguinte teorema:

Teorema 1 (Desigualdade das Médias)**.** *Para toda coleção de números reais positivos $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ e a_n verificam-se as seguintes desigualdades:*

$$m_h(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant m_g(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant m_a(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant m_q(a_1, a_2, \ldots, a_n).$$

Além disso, em cada caso a igualdade ocorre se, e somente se, $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Várias e interessantes demonstrações destas desigualdades para n números podem ser encontradas em Oliveira [9]. Porém a demonstração aqui apresentada será restrita ao caso que envolve apenas dois números reais positivos, sendo perfeitamente acessível aos alunos do Ensino Médio.

Demonstração. Sejam a_1 e a_2 dois números reais positivos quaisquer. Para mostrar que $m_g \leqslant m_a$, basta observar que

$$m_a - m_g = \frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2}{2} \geqslant 0.$$

Como $m_a - m_g$ é não negativo, segue que $m_g \leqslant m_a$ para quaisquer $a_1 \neq a_2$ e a igualdade ocorre quando $a_1 = a_2$.

Para mostrar que $m_a \leqslant m_q$, observa-se que

$$\begin{aligned}(a_1 - a_2)^2 \geqslant 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad a_1^2 - 2a_1 a_2 + a_2^2 \geqslant 0 \Longleftrightarrow 2a_1^2 + 2a_2^2 \geqslant a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{a_1^2 + a_2^2}{2} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 \Longleftrightarrow \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2}{2}} \geqslant \frac{a_1 + a_2}{2}.\end{aligned}$$

Observe que esta última implicação é válida porque a_1 e a_2 são números positivos, nota-se também que a igualdade ocorre quando $a_1 = a_2$.

E, finalmente, para mostrar que $m_h \leqslant m_g$, aplica-se a desigualdade $m_g \leqslant m_a$ aos números positivos $1/a_1$ e $1/a_2$, de onde tem-se que

$$\sqrt{\frac{1}{a_1}\cdot\frac{1}{a_2}} \leqslant \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{a_1 a_2}} \leqslant \frac{a_1+a_2}{2a_1a_2} \iff \frac{2a_1a_2}{a_1+a_2} \leqslant \sqrt{a_1a_2},$$

que completa a demonstração, pois

$$\frac{2a_1a_2}{a_1+a_2} = \frac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}}.$$

□

2.2.1 Desigualdade das Médias Generalizada

Se $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são números positivos Q, A, G e H são suas médias quadráticas, aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente, então $Q \geqslant A \geqslant G \geqslant H$. Além disso, duas quaisquer dessas médias são iguais se, e somente se, $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

Exemplo 2.4. *Mostre que, entre todos os retângulos de área A, o quadrado é o de menor perímetro.*

Solução: Se os lados do retângulo sao x e y, temos $xy = A$, isto é, a média geométrica de x e y é igual a $\sqrt{A}$. O perímetro do retângulo é $2(x+y)$. Temos

$$2(x+y) = 4\frac{x+y}{2} \geqslant 4\sqrt{xy} = 4\sqrt{A}$$

Portanto, $2(x+y) \geqslant 4\sqrt{A}$ e a igualdade só é obtida quando $x = y$. Portanto, o retângulo de menor perímetro é o quadrado de perímetro $4\sqrt{A}$.

Exemplo 2.5. *Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 litro de óleo. Encontre as dimensões que minimizarão o custo do metal para produzir a lata.*

Solução: A ideia é tentar exprimir uma função de acordo com a situação proposta pelo problema, e, se possível, colocá-la em função de uma única variável dependente. Finalmente, escolhe-se um método algébrico que permita minimizar a função encontrada.

O volume da lata cilíndrica é fixo e igual a 1 litro, ou seja, 1000 cm^3. A expressão que determina o volume do cilindro é $V = \pi R^2 h$, onde R representa o raio da base e h a altura do cilindro. Consequentemente,

$$\pi R^2 h = 1000 \tag{2.3}$$

Por outro lado, a área da superfície cilíndrica é dada por:

$$A = 2\pi R^2 + 2\pi R h \tag{2.4}$$

assim isolando h na equação (2.3) e substituindo em (2.4), tem-se

$$\begin{aligned} A &= 2\pi R^2 + 2\pi R \cdot \frac{1000}{\pi R^2} \\ &= 2\pi R^2 + \frac{2000}{R} \\ &= 2\left(\pi R^2 + \frac{1000}{R}\right), R > 0 \end{aligned}$$

Logo, o objetivo é determinar o valor de R que minimiza $\pi R^2 + 1000/R$, que pode ser adaptada para uma aplicação da desigualdade das médias geométrica e aritmética, observando que

$$\pi R^2 + \frac{1000}{R} = \pi R^2 + \frac{500}{R} + \frac{500}{R}.$$

Assim,

$$\frac{\pi R^2 + \frac{500}{R} + \frac{500}{R}}{3} \geqslant \sqrt[3]{\pi R^2 \cdot \frac{500}{R} \cdot \frac{500}{R}} \Longleftrightarrow \pi R^2 + \frac{1000}{R} \geqslant 150\sqrt[3]{2\pi},$$

e a igualdade, que minimiza a expressão, vale exatamente quando os três termos são iguais, ou seja, $\pi R^2 = 500/R$. Daí,

$$\pi R^3 = 500 \Longleftrightarrow R^3 = \frac{500}{\pi} \Longleftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}.$$

Substituindo o valor de R encontrado em (2.3) e simplificando, encontra-se $h = 2\sqrt[3]{500/\pi}$, ou seja, a altura do cilindro deve ser o dobro da medida do raio da base para que a área da superfície cilíndrica seja mínima e igual a $300\sqrt[3]{2\pi}$.

Algumas indagações são pertinentes, com base nesta solução, como: Quando podemos usar a desigualdade entre as médias para resolver problemas com funções como a encontrada neste problema? Qual é a relação, na expressão que precisava ser minimizada, entre a divisão de um dos termos em n partes e o grau do outro termo, para que seja possível usar a desigualdade das médias? Dentre as características do problema tem alguma condição que contradiz o teorema da desigualdade das médias?

Diante do exemplo anterior, é importante observar que a desigualdade das médias aritmética e geométrica é muito útil para estudar funções que envolvem somas de potências positivas e negativas de x com coeficientes positivos. Neste caso, pode ser conveniente decompor um mesmo termo em duas ou mais parcelas de modo que o produto de todas as parcelas resulte em uma constante. Observe esta ideia na seguinte função:

$$f(x) = x^3 + x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x}, \text{ para} x > 0.$$

Para que o produto dos termos seja independente de x, escreve-se

$$x^3 + x^2 + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x},$$

de onde tem-se, pela desigualdade das médias aritmética e geométrica, que

$$\frac{x^3 + x^2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}}{5} \geqslant \sqrt[5]{x^3 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x}} = 1.$$

Consequentemente, $f(x) = 5$ é o valor mínimo da função, que ocorre quando

$$x^3 = x^2 = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x},$$

ou seja, quando $x = 1$.

3 Aplicações

São apresentados, a seguir, outros exemplos de problemas de otimização que permitem aplicar os métodos desenvolvidos nas seções anteriores. Tais problemas podem servir como material didático de apoio para tratar deste assunto em turmas do Ensino Médio.

Problema 1 (UESPI). *Um agricultor tem* 140 *metros de cerca para construir dois currais: um deles, quadrado, e o outro, retangular, com comprimento igual ao triplo da largura. Se a soma das áreas dos currais deve ser a menor possível, qual é a área do curral quadrado?*

Solução: Seja x o lado do quadrado, logo para construir o curral retangular restaram $(140-4x)$ metros de cerca, ou seja, o comprimento será $3(140-4x)/8$ e a largura $(140-4x)/8$. Assim a função $A(x)$ que determina a soma das áreas dos dois currais é dada por:

$$A(x) = x^2 + \frac{3}{8}(140-4x)\cdot\frac{1}{8}(140-4x).$$

Logo,

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 + \frac{3}{64}\left(19600 - 1120x + 16x^2\right) \\ &= x^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{105}{2}x + \frac{3675}{4} \\ &= \frac{7x^2 - 210x + 3675}{4} \\ &= \frac{7}{4}(x^2 - 30x + 525) \\ &= \frac{7}{4}(x-15)^2 + 525. \end{aligned}$$

Assim analisando a forma canônica de $A(x)$ observamos que a função é mínima quando $x = 15$. Portanto, a área do curral quadrado é 225 m^2.

Neste problema algumas indagações são relevantes: Por que minimizar e não maximizar a área como seria o objetivo de uma situação real? Quando é possível utilizar este procedimento em algum outro problema?

Problema 2. *Um pedaço de arame com comprimento* l *será dobrado para formar um* *círculo ou um quadrado ou ambos, dividindo-se o arame em dois pedaços. Determine como dividir o arame para que a área das figuras contornadas pelo arame seja:*

a) *mínima;*

b) *máxima.*

Solução: Deseja-se cortar um fio, formando duas figuras: um círculo e um quadrado, com objetivo de minimizar e maximizar a soma das duas áreas. Uma maneira de tentar resolver este problema é transformar a situação descrita em uma função que possa ser otimizada. Sejam l_1 e l_2, respectivamente, os comprimentos dos fios utilizados para formar o círculo e o quadrado. Assim, temos que $l_1 + l_2 = l$, consequentemente:

$$A(l_1) = \frac{l_1^2}{4\pi} \text{ e } A(l_2) = \frac{l_2^2}{16},$$

onde $A(l_1)$ e $A(l_2)$, são respectivamente, as áreas do círculo e do quadrado obtidos pelo corte do fio. Logo,

$$\begin{aligned} A(l) &= A(l_1) + A(l_2) \\ &= \frac{l_1^2}{4\pi} + \frac{l_2^2}{16} \\ &= \frac{4l_1^2 + \pi l_2^2}{16\pi} \\ &= \frac{4(l - l_2)^2 + \pi l_2^2}{16\pi} \\ &= \frac{4l^2 - 8ll_2 + 4l_2^2 + \pi l_2^2}{16\pi} \\ &= \frac{(4+\pi)l_2^2 - 8ll_2 + 4l2}{16\pi}. \end{aligned}$$

Como l é um número real positivo fixado, observa-se na expressão anterior que tratase de uma função quadrática na variável l_2, sendo positivo o coeficiente do termo quadrático, consequentemente o valor mínimo ocorre quando

$$l_2 = \frac{8l}{2(4+\pi)} = \frac{4l}{4+\pi}.$$

Consequentemente, $l_1 = \pi l/(4+\pi)$, de onde conclui-se a resposta do item (a), ou seja, o fio deve ser cortado em dois pedaços medindo $\pi l/(4+\pi)$ e $4l/(4+\pi)$ onde com o primeiro pedaço forma-se o círculo e com o segundo pedaço o quadrado.

Já para responder o item (b), observa-se que $A(l)$ pode ser colocado na forma

$$A(l) = \frac{l_2[(4+\pi)l_2 - 8l] + 4l^2}{16\pi}.$$

Analisando o sinal de $(4+\pi)l_2 - 8l$, tem-se que o mesmo é negativo pois $(4+\pi)l_2 < 8l_2 < 8l$. como no item(b) deseja-se maximizar $A(l)$ então deve-se ter $l_2 = 0$ para que $A(l)$ seja máxima, consequentemente, o fio deve ser usado somente com um círculo de raio $l/2\pi$ para que a área seja máxima, ou seja, o fio não deve ser dividido.

Problema 3 (1ª prova de qualificação do PROFMAT - Turma 2011)**.**

a) *Dado um número $a > 0$ quanto medem os lados do retângulo de perímetro mínimo cuja área é a?*

b) *Justifique matematicamente por que não se pode responder a questão anterior se trocarmos "mínimo" por "máximo".*

Solução: Deve-se encontrar medidas x e y respectivamente do comprimento e da largura de um retângulo com área fixa, que minimize o perímetro do mesmo. E, em seguida, mostrar que não é possível maximizar o perímetro de um retângulo de área fixa. A desigualdade entre as médias geométrica e aritmética pode ser usada para resolver este problema uma vez que para calcular a área de um retângulo usa-se o produto entre os seus lados e para calcular o perímetro usa-se o dobro da soma dos seus lados não opostos. Assim, isto conduz a ideia de usar a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética.

a) Sejam x e y respectivamente as dimensões do comprimento e da largura do retângulo de área a. Daí, tem-se que $xy = a$, consequentemente $\sqrt{xy} = \sqrt{a}$. Aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica aos números reais positivos x e y tem-se que

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} = \sqrt{a}.$$

Como pretende-se minimizar o perímetro $P = 2x + 2y$, usa-se a igualdade, que ocorre quando $x = y$, ou seja,

$$\frac{x+x}{2} = \sqrt{a} \Longleftrightarrow x = \sqrt{a}.$$

Logo, o perímetro P é mínimo quando $x = y = \sqrt{a}$, ou seja, um quadrado de lado $\sqrt{a}$.

b) Precisa-se mostrar que não existe retângulo de perímetro máximo com área $a > 0$ fixada. Para isso basta observar, que se $xy = a$, multiplicando x por N tão grande quanto se queira e dividindo y pelo mesmo N, a área $A = Nx \cdot y/N$ é mantida igual a a, porém o perímetro $P = 2Nx + 2y/N$ pode tornar-se maior do que qualquer número fixado, ou seja, o perímetro não possui um valor máximo.

Problema 4 (AV2 da disciplina MA12 - PROFMAT - Turma 2011)**.** *: Uma caixa retangular sem tampa tem dimensões x, y e z representando respectivamente o comprimento, a largura e a altura.*

a) *Exprima a área e o volume da caixa em função de x, y e z.*

b) *Use a desigualdade das médias para mostrar que, se o volume da caixa é igual a 32, então sua área é maior ou igual a 48.*

c) *Determine as medidas das arestas da caixa de área mínima com volume igual a 32.*

Solução:

a) O volume da caixa é $V = xyz$ e a área total é $A = xy + 2xz + 2yz$.

b) Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se

$$\frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{xy \cdot 2xz \cdot 2yz} = \sqrt[3]{4x^2y^2z^2},$$

como $xyz = 32$ (volume da caixa) conclui-se que:

$$\frac{xy + 2xz + 2yz}{3} \geqslant \sqrt[3]{4 \cdot 32^2} = \sqrt[3]{4096} = 16.$$

Consequentemente, $xy + 2xz + 2yz \geqslant 48$ como pretendia-se mostrar.

c) Como $xy+2xz+2yz \geqslant 48$ tem-se pela desigualdade das médias aritmética e geométrica que a igualdade só ocorre quando $xy = 2xz = 2yz$, ou seja, $x = y = 2z$. Fazendo $x = a$ obtem-se que $a \cdot a \cdot a/2 = 32$, consequentemente $a^3 = 64 \Rightarrow a = 4$. Portanto, as dimensões do comprimento, da largura e da altura que minimizam a área total da caixa são respectivamente iguais a 4, 4 e 2.

É importante ressaltar que as indústrias (principalmente do setor alimentício) fazem este tipo de cálculo para minimizar o custo das embalagens de determinados produtos. Pode-se utilizar esta ideia para minimizar o material gasto em alguma embalagem, por exemplo, uma caixa de leite, com volume fixo igual a $1l$ e fazer alguma indagações com base na resposta encontrada.

Problema 5. *Mostre que entre todos os retângulos de mesmo perímetro o quadrado é o de área máxima.*

Solução: Uma vez que o cálculo de área envolve produto e o de perímetro envolve soma, a desigualdade entre as médias geométrica e aritmética pode ajudar a mostrar que o quadrado determina área máxima dentre todos os retângulos de perímetro fixado. Outra alternativa é usar a ideia de função, pois caso a função associada a este problema seja a quadrática, por exemplo, pode-se maximizar a função sem o uso do Cálculo Diferencial.

Seja R um retângulo de dimensões x e y. Logo o perímetro é dado por $P = 2x + 2y$ e área da sua região é dada por $A_1 = xy$. O quadrado Q de mesmo perímetro que R tem lado medindo $(x + y) = 2$, e sua área é dada por $A_2 = [(x + y)/2]^2$. Pretende-se mostrar que $A_2 \geqslant A_1$, isto é equivalente a mostrar que $A_2 - A_1$ é não-negativo. Usando a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se que

$$\frac{x+y}{2} \geqslant \sqrt{xy} \Longleftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant \sqrt{xy} \Longleftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy \geqslant 0 \Longleftrightarrow A_2 - A_1 \geqslant 0,$$

da última desigualdade conclui-se que $A_2 \geqslant A_1$, consequentemente o quadrado é o retângulo de maior área fixada.

Outra solução: Sendo R um retângulo de dimensões x e y seu perímetro é $P = 2x+2y$ e a sua área é $A = xy$. Daí,

$$P = 2x + 2y \Longrightarrow y = \frac{P - 2x}{2}\text{e,}$$

$$A = xy \Longrightarrow A(x) = x \cdot \left(\frac{P - 2x}{2}\right) = \frac{Px - 2x^2}{2} = \frac{-2x^2 + Px}{2} = -x^2 + \frac{P}{2}x.$$

Observe que trata-se de uma função quadrática em que o coeficiente do termo quadrático é negativo, logo o máximo desta função ocorre em $-b/2a$. Como neste caso $b = P/2$ e $a = -1$ tem-se que $x = P/4$ é o ponto máximo de $A(x)$, ou seja, a área será máxima quando o retângulo for um quadrado.

As duas soluções apesar de usar ferramentas distintas levaram ao mesmo resultado, sempre que isto acontecer pode-se ter certeza quanto ao resultado encontrado? Qual a principal conclusão deste problema, ou seja, esta situação pode ser generalizada? Se a resposta for sim, em quais situações este resultado pode ser utilizado?

Problema 6. *Prove que, de todos os triângulos de mesmo perímetro, o equilátero possui a maior área.*

Solução: A desigualdade entre as médias aritmética e geométrica pode ajudar a resolver este problema, pois o perímetro envolve soma dos lados e a área envolve o produto entre estes (fórmula de Herón).

Sejam a, b e c os lados do triângulo e $p = \dfrac{a+b+c}{2}$, ou seja, p o semi-perímetro. Usando a fórmula de Héron para cálculo de área de triângulos tem-se

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

como p é fixo, então A será máximo quando $(p-a)(p-b)(p-c)$ for máximo. Pela desigualdade entre as médias aritmética e geométrica tem-se

$$\sqrt[3]{p(p-a)(p-b)(p-c)} \leqslant \frac{p-a+p-b+p-c}{3} = \frac{p}{3}$$

e, ainda mais, a igualdade só ocorre quando $p-a = p-b = p-c$, ou seja, $a = b = c$, como pretendia-se demonstrar. O resultado deste problema traz uma importante propriedade válida para triângulos, este resultado também já tinha sido observado para retângulos. Será que este resultado é válido para um polígono com n lados? Em caso afirmativo, é possível ser mostrado usando simplesmente a desigualdde das médias geométrica e aritmética?

Problema 7. *Determinar as dimensões do paralelepípedo de menor diagonal possível, sabendo que a soma dos comprimentos de todas as suas arestas é* 12.

Solução: A desigualdade entre as médias quadrática e aritmética pode ajudar a resolver o problema. Pois, o comprimento da diagonal de um paralelepípedo de dimensões a, b e c é dado por: $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, o que sugere o uso da média quadrática. Por outro lado, a soma de todas as arestas pode ser associada à média aritmética.

Sejam a, b e c as dimensões do paralelepípedo, logo pretende-se minimizar

$$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2},$$

onde d representa o comprimento da diagonal do paralelepípedo. Por outro lado, tem-se

$$4a + 4b + 4c = 12 \Longleftrightarrow a + b + c = 3.$$

Assim, usando a desigualdade das médias quadrática e aritmética tem-se quer

$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}} \geqslant \frac{a+b+c}{3} = 1 \Longrightarrow a^2+b^2+c^2 \geqslant 3.$$

Portanto, para minimizar d usa-se a igualdade que ocorre quando $a = b = c = 1$, ou seja, quando o paralelepipedo for um cubo de lado 1, a diagonal será mínima e igual a

$\sqrt{3}$.

Algumas questões são pertinentes a respeito deste problema: Quando usar a desigualdade entre as médias quadrática e aritmética? É possível usar este mesmo resultado para outros poliedros regulares?

Problema 8. *Suponha uma estátua de altura* h *sobre um pedestal de altura* p. *Um observador de altura* m *(*$m < p$*) enxerga do pé ao topo da estátua sob um ângulo* α*, que varia de acordo com a distância* d *entre o observador e a base do pedestal, conforme figura 4. Determinar a distância* d *para que o ângulo de visão seja o maior possível.*

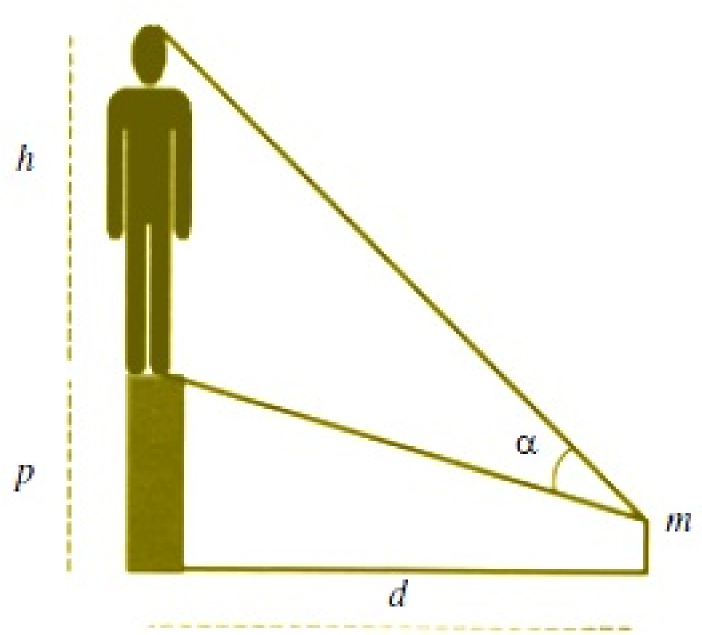


Figura 3: Problema 8

Solução: O observador vê a estátua sob o ângulo $\alpha = \theta_1 - \theta_2$ onde θ_1 e θ_2 são os ângulos entre a horizontal à altura do observador e os segmentos que ligam ao topo e ao pé da estátua, respectivamente. Logo tem-se

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \operatorname{tg}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{tg}(\theta_1) - \operatorname{tg}(\theta_2)}{1 + \operatorname{tg}(\theta_1) \cdot \operatorname{tg}(\theta_2)}.$$

Como d é a distância entre o observador e a estátua, tem-se

$$\operatorname{tg}(\theta_1) = \frac{h + p - m}{d} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg}(\theta_2) = \frac{p - m}{d},$$

assim fazendo $H_1 = h + p - m$ e $H_2 = p - m$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha) &= \frac{\dfrac{H_1}{d} - \dfrac{H_2}{d}}{1 + \dfrac{H_1 H_2}{d^2}} \\ &= \frac{H_1 - H_2}{d + \dfrac{H_1 H_2}{d}}. \end{aligned}$$

Sabe-se que $\operatorname{tg}(\alpha)$ é crescente no intervalo $[0; \pi/2[$, portanto maximizar α é equivalente a maximizar $\operatorname{tg}(\alpha)$. Por outro lado, para maximizar $\operatorname{tg}(\alpha)$ deve-se minimizar a expressão $d + (H_1 H_2)/d$ uma vez que $H_1 - H_2$ é constante. Para achar d que minimiza a expressão $d + (H_1 H_2)/d$, basta usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica.

Portanto:

$$\frac{d + \dfrac{H_1 H_2}{d}}{2} \geqslant \sqrt{d \cdot \frac{H_1 H_2}{d}} \iff d + \frac{H_1 H_2}{d} \geqslant 2\sqrt{H_1 H_2}.$$

Assim $d + (H_1 H_2)/d$ é sempre maior do que ou igual a $2\sqrt{H_1 H_2}$, a igualdade só ocorre quando $d = (H_1 H_2)/d$, ou seja, quando $d = \sqrt{H_1 H_2}$. Daí conclui-se que o ângulo de visão α é máximo quando $d = \sqrt{(h + p - m)(p - m)}$.

4 Noções de Derivadas

4.1 Derivada

O conceito de derivada está intimamente relacionado à taxa de variação instantânea de uma função, o qual está presente no cotidiano das pessoas, através, por exemplo, da determinação da taxa de crescimento de uma certa população, da taxa de crescimento econômico do país, da taxa de redução da mortalidade infantil, da taxa de variação de temperaturas, da velocidade de corpos ou objetos em movimento, enfim, poderíamos ilustrar inúmeros exemplos que apresentam uma função variando e que a medida desta variação se faz necessária em um determinado momento. Para entendermos como isso se dá, inicialmente vejamos a definição matemática da derivada de uma função em um ponto:

Definição 2. *Se uma função* f *é definida em um intervalo aberto contendo* x_0*, então a derivada de f em* x_0*, denotada por* $f'(x_0)$*, é dada por:*

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se este limite existir. Δx *representa uma pequena variação em* x*, próximo de* x_0*, ou seja, tomando* $x = x_0 + \Delta x (\Delta x = x - x_0)$ *, a derivada de* f *em* x_0 *pode também se expressa por*

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Interpretação física: a derivada de uma função f em um ponto x_0 fornece taxa de variação instantânea de f em x_0. Vejamos como isso ocorre:

Suponha que y seja uma função de x, ou seja, $y = f(x)$. Se x variar de um valor x_0 até um valor x_1, representaremos esta variação de x, que também é chamada de incremento de x, por $\Delta x = x_1 - x_0$, e a variação de y é dada por $y = f(x_1) - f(x_0)$, o que é ilustrado na figura 6 a seguir:

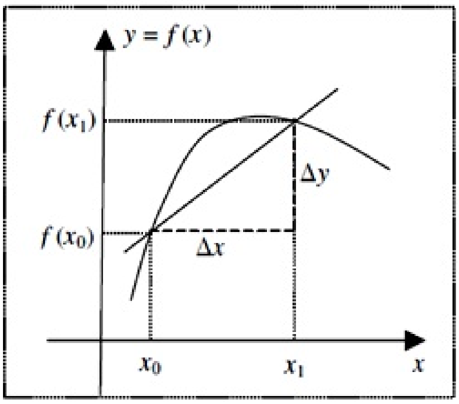


Figura 4: Representação Gráfica da Derivada

O quociente das diferenças, dado por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$, é dito taxa de variação média de y em relação a x, no intervalo $[x_0, x_1]$. O limite destas taxas médias de variação, quando $\Delta x \to 0$, é chamado de taxa de variação instantânea de y em relação a x, em $x = x_0$. Assim, temos:

$$\textit{Taxa de variação instantânea} = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Porém, $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$.

Portanto, a taxa de variação instantânea de uma função em um ponto é dada pela sua derivada neste ponto.

Interpretação Geométrica: a derivada de uma função f em um ponto a fornece o coeficiente angular (inclinação) da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$. Vejamos:

Dada uma curva plana que representa o gráfico de f, se conhecermos um ponto $P(a, f(a))$, então a equação da reta tangente r à curva em P é dada por $y - f(a) = m(x - a)$, onde m é o coeficiente angular da reta. Portanto, basta que conheçamos o coeficiente angular m da reta e um de seus pontos, para conhecermos a sua equação. Mas como obter m para que r seja tangente à curva em P?

Consideremos um outro ponto arbitrário sobre a curva, Q, cujas coordenadas são $(a + \Delta x, f(a + \Delta x))$. A reta que passa por P e Q que é chamada reta secante à curva.

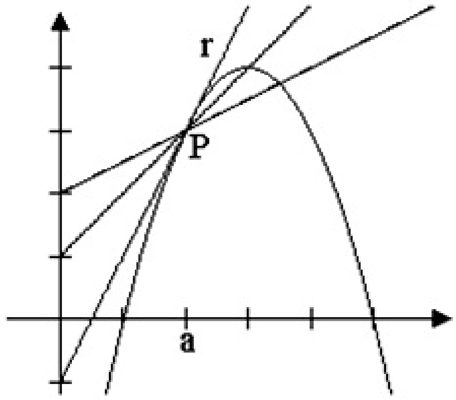


Figura 5: Coeficiente Ângular

Analisemos agora a variação do coeficiente angular da reta secante fazendo Q se aproximar de P, ou seja, tomando Δx cada vez menor.

Tudo indica que quando P está próximo de Q, o coeficiente angular m_{sec} da reta secante deve estar próximo do coeficiente angular m da reta r, ou seja, o coeficiente angular m_{sec} tem um limite m quando Q tende para P, que é o coeficiente angular da reta tangente r.

Indicando-se a abscissa do ponto Q por $x = a + \Delta x$ ($\Delta x = x - a$) e sabendo-se que a abscissa de P é expressa por a, então, se $Q \to P$ temos que $\Delta x \to 0$, o que é equivalente a $x \to a$. Assim:

$$m = \lim_{x \to a} m_{PQ} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

(se este limite existe), é o coeficiente angular da reta tangente r. Porém,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$

Logo, $m = f'(a)$, ou seja, a derivada de uma função em um ponto, de fato, fornece o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico desta função, neste ponto.

4.2 Regras de Derivação

No momento apresentaremos de forma sistemática as regras gerais para obter a derivada da soma, produto e quociente de duas ou mais funções. Apresentaremos também derivadas de funções como potência, polinomiais e trigonométricas. Por fim, apresentaremos a regra da cadeia, que permite encontrar a derivada de uma função que é a composição de duas funções que serão utilizadas posteriormente neste trabalho.

4.2.1 Derivada da Soma

Vamos provar que a derivada da soma de duas funções é a soma das derivadas das funções. Sejam $f(x)$ e $g(x)$ duas funções reais. Então

$$\begin{aligned}(f+g)(x+h)-(f+g)(x) &= f(x+h)+g(x+h)-(f(x)+g(x)) \\ &= (f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x))\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right] \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= f'(x)+g'(x),\end{aligned}$$

caso os limites envolvidos existam.

Provamos então a seguinte proposição:

Proposição 1. *Sejam* f *e* g *duas funções definidas em um intervalo aberto* I. *Se as duas funções forem deriváveis em* $x_0 \in I$, *então a função soma* $f+g$ *é derivável em* x_0 *e vale que*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$$

4.2.2 Derivada do Produto

Vamos obter uma fórmula para a derivada do produto de duas funções $(fg)(x) = f(x)g(x)$. Observe inicialmente que:

$$f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) = f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x)$$

em que simplesmente somamos e subtraímos na expressão a parcela $f(x)g(x+h)$.

Reagrupando a expressão:

$$\begin{aligned}f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x) &= f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x+h)+f(x)g(x+h)-f(x)g(x) \\ &= (f(x+h)-f(x))g(x+h)+f(x)(g(x+h)-g(x))\end{aligned}$$

Dividindo a expressão por h e passando ao limite $h \to 0$, obtemos:

$$\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h} g(x+h) + \lim_{h\to 0} f(x) \frac{(g(x+h) - g(x))}{h} \\ &= \left(\lim_{h\to 0} \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}\right) g(x) + f(x) \left(\lim_{h\to 0} \frac{(g(x+h) - g(x))}{h}\right) \end{aligned}$$

Observe que no desenvolvimento acima usamos as propriedades do limite da soma e do produto (a demonstração encontra-se na p.10 do material de cálculo do PROFMAT, unidade 3). Usamos também a continuidade da função g, assegurada para o caso em que g é derivável. Os limites na última equação acima são, supondo f e g deriváveis, respectivamente, os valores de $f'(x)$ e $g'(x)$.

Provamos, portanto, a seguinte proposição.

Proposição 2. *Sejam* $f(x)$ *e* $g(x)$ *duas funções definidas em um intervalo aberto* I. *Se as duas funções forem deriváveis em* $x_0 \in I$, *então a função produto* $(fg)(x)$ *é derivável em* x_0 *e vale que*

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$

4.2.3 Derivada do Quociente

Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo não trivial I. Definimos a função quociente

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

para todo ponto $x \in I$ tal que $g(x) \neq 0$.

Suponha agora que f e g são deriváveis em um ponto $x_0 \in I$ e que $g(x_0) \neq 0$. Provaremos que $\frac{f}{g}$ também é derivável em x_0 e obteremos uma expressão para a derivada da função $\frac{f}{g}$ em x_0.

Para começar, se g é derivável em x_0, então é contínua em x_0. Se $g(x_0) \neq 0$ então há um intervalo aberto J com $x_0 \in J$ tal que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in J$, ou seja, a função $\frac{f}{g}$ está definida em J. Para $x, x+h \in J$, temos que:

$$\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)}-\frac{f(x)}{g(x)}}{h}=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\frac{f(x+h)}{h}.g(x)-f(x).\frac{g(x+h)}{h}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\frac{f(x+h)}{h}.g(x)-\frac{f(x)g(x)}{h}+\frac{f(x)g(x)}{h}-f(x).\frac{g(x+h)}{h}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)g(x+h)}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.g(x)-f(x).\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

em que somamos e subtraímos um termo $\frac{f(x)g(x)}{h}$

Passando agora ao limite quando $h \to 0$, obtemos:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\lim\limits_{h\to 0} g(x)g(x+h)}\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}g(x)-\lim_{h\to 0}f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)\\
&= \frac{1}{g(x)\lim\limits_{h\to 0} g(x+h)}\left(g(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f(x)\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)
\end{aligned}$$

Se f e g forem deriváveis, então todos os limites envolvidos existem e $\lim\limits_{h\to 0} g(x+h) = g(x)$, pois sendo g derivável em x também é contínua em x.

Resulta que, se f e g são deriváveis em um ponto $x_0 \in I$ vale que:

$$\lim_{h\to 0}\frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x+h)-\left(\frac{f}{g}\right)(x)}{h}=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Provamos assim a seguinte proposição:

Proposição 3. *Sejam* f *e* g *duas funções definidas em um intervalo não trivial* I. *Se as duas funções forem deriváveis em* $x_0 \in I$ *e* $g(x_0) \neq 0$, *então a função produto* $\left(\frac{f}{g}\right)$ *é derivável em* x_0 *e vale que*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

4.2.4 Regra da Cadeia

Vamos encontrar a derivada da composição de duas funções.

Lembramos que dadas funções f e g, em que a imagem de f está contida no domínio de g, a composta $h = f \circ g$ é definida por:

$$h(x) = f(g(x))(x)$$

$$x \xrightarrow{g} g(x) \xrightarrow{f} f(g(x))(x)$$

Proposição 4. *Sejam f e g funções reais tais que a imagem de g está contida no domínio de f. Se g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$ então $f \circ g$ é derivável em x_0 e $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0))g'(x_0)$.*

Ver demostração no Material de Cálculo do PROFMAT

4.2.5 Derivadas das Funções Trigonométricas

Vamos encontrar as derivadas das funções $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$. As outras funções trigonométricas podem ser obtidas a partir destas duas utilizando as regras de derivação já estudadas.

Usaremos os dois limites trigonométricos abaixo para determinar a derivada da função $\operatorname{sen}(x)$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x} = 0$$

Calculando diretamente a derivada de $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen}(x))' &= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(h) + \operatorname{sen}(h)\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\cos(x)\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right) + \operatorname{sen}(x)\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right)\right]
\end{aligned}$$

em que usamos a fórmula do seno da soma:

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen}(a)\cos(b) + \operatorname{sen}(b)\cos(a)$$

e agrupamos os termos com $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$. Passando o limite quando $h \to 0$ e usando os limites citados acima, temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen}(x)}{h}\\
&= \cos(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)+\operatorname{sen}(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right)\\
&= \cos(x).1+\operatorname{sen}(x).0\\
&= \cos(x)
\end{aligned}$$

Concluímos assim: Se,

$$f(x)=\operatorname{sen}(x)\Longrightarrow f'(x)=\cos(x).$$

Passamos agora à derivada da função cosseno. O desenvolvimento é análogo ao que foi feito para a função seno.

Para a função $f(x)=\cos(x)$, temos:

$$\begin{aligned}
(\cos(x))' &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x)\cos(h)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(h)-\cos(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left[-\operatorname{sen}(x)\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)+\cos(x)\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right)\right]
\end{aligned}$$

em que usamos a fórmula do cosseno da soma $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)+\operatorname{sen}(a)\operatorname{sen}(b)$ e agrupamos os termos com $\operatorname{sen}(x)$ e $\cos(x)$. Passando o limite quando $h\to 0$, temos:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h}\\
&= -\operatorname{sen}(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{\operatorname{sen}(h)}{h}\right)+\cos(x)\lim_{h\to 0}\left(\frac{1-\cos(h)}{h}\right)\\
&= -\operatorname{sen}(x).1+\cos(x).0\\
&= -\operatorname{sen}(x)
\end{aligned}$$

Portanto, se

$$f(x)=\cos(x)\Longrightarrow f'(x)=\operatorname{sen}(x).$$

□

4.2.6 Derivada da Potência

Vamos calcular a derivada da função potência $f(x)=x^n$, para n inteiro qualquer.

Proposição 5. *A função* $f(x)=x^n$ *é derivável para todo* $x\in\mathbb{R}$ *e para* $n\in\mathbb{N}^*$*. Então*

$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\
&= \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\
&= \frac{\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}\cdot\Delta x + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(\Delta x)^n}{\Delta x} \\
&= \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}\cdot\Delta x + \binom{n}{3}x^{n-3}\cdot(\Delta x)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(\Delta x)^{n-1}
\end{aligned}$$

Logo,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \binom{n}{1}x^{n-1} = n\cdot x^{n-1}$$

A demostração foi realizada para n inteiro mas a aplicabilidade pode ser expandida $\forall n \in \mathbb{R}$. □

4.2.7 Derivada da constante

Proposição 6. *A função* $f(x) = c$ *é derivável para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Então* $f'(x) = 0$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h} \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

4.2.8 Derivada da exponencial

Proposição 7. *A função* $f(x) = a^x$ *é derivável para todo* $x \in \mathbb{R}$*, com* $a \in \mathbb{R}$ *e* $0 < a \neq 1$*. Então* $f'(x) = a^x \cdot \ln(a)$

Demonstração.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\cdot\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \\ &= a^x \cdot \ln(a) \end{aligned}$$

No caso particular da função exponencial de base e, $f(x) = e^x$, temos o resultado notável

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x \cdot \ln(e) \\ &= e^x \end{aligned}$$

□

4.3 Máximos e mínimos

O valor de máximo (mínimo) de uma função em todo seu domínio é chamado máximo (respectivamente, mínimo) absoluto. Iremos formalizar esta definição e, em seguida, veremos as noções de máximo e mínimo relativo.

Definição 3. *Um função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem máximo absoluto em c se $f(x) \leqslant f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor máximo de f em D.*

Definição 4. *Um função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem mínimo absoluto em c se $f(x) \geqslant f(c)$ para todo x no domínio D de f. Neste caso, o valor $f(c)$ é chamado valor mínimo de f em D.*

Definição 5. *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem máximo local (ou máximo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \leqslant f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor máximo local de f.*

Definição 6. *Uma função $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$tem mínimo local (ou mínimo relativo) em um ponto c de seu domínio, se existe intervalo aberto I, tal que $c \in I$ e $f(x) \geqslant f(c)$ para todo $x \in I$. Neste caso, dizemos que $f(c)$ é valor mínimo local de f.*

Teorema 2 (Weierstrass)**.** *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, definida em um intervalo fechado possui um máximo e mínimo absoluto em $[a, b]$*

Teorema 3. *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função f contínua definida em um intervalo aberto I. Se f tem máximo ou mínimo local em $x = c$, $c \in I$ e f é derivável em c então $f'(c) = 0$*

Definição 7. *Um ponto c do domínio de uma função f é chamado ponto crítico se ocorre um dos dois seguites casos:*

(a) f *não é derivável em* $\mathsf{x} = \mathsf{a}$*,*

(b) f *é derivável em* c *e* $\mathsf{f}'(\mathsf{c}) = 0$*.*

Teorema 4 (Teste da derivada primeira)**.** *Seja a função* $\mathsf{f} : [\mathsf{a}, \mathsf{b}] \to \mathbb{R}$ *contínua e derivável em* (a, b) *e seja* c *um ponto crítico de* f*.*

(i) *Se* f' *passa de positivo para negativo em* c *então* f *tem máximo local em* c*.*

(ii) *Se* f' *passa de negativo para positivo em* c *então* f *tem mínimo local em* c*.*

(iii) *Se* f' *não muda de sinal em* c *então não tem máximo nem mínimo local em* c*.*

As definições e os teoremas mencionados nesta secção, foram retirados do material de cálculo do PROFMAT, volume 13 e 14, e não foram mostrados ou demontrados, porque foge do foco da dissertação e servirão, apenas para ratificar os conceitos de máximos e mínimos de função, postulados nas questões.

Problema 9. *Encontre os valores máximo e mínimos da função* $\mathsf{f} : [-4, 2] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$\mathsf{f}(\mathsf{x}) = \mathsf{x}^3 + 2\mathsf{x}^2 - 4\mathsf{x} - 2.$$

Solução:

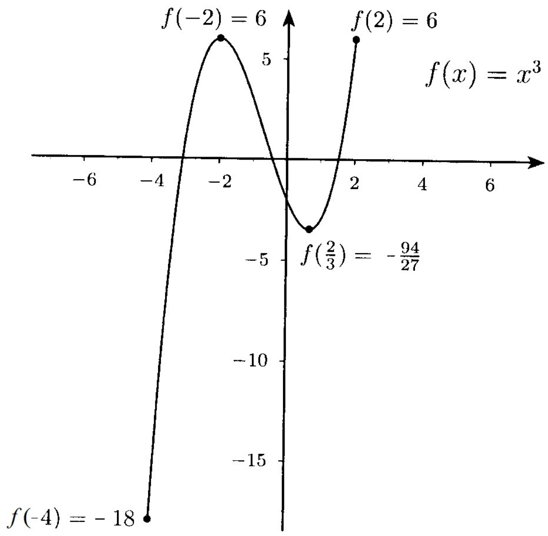


Figura 6: Problema 9

A função é derivavel no intervalo $(-4, 2)$. A derivada da função é

$$\mathsf{f}'(\mathsf{x}) = 3\mathsf{x}^2 + 4\mathsf{x} - 4.$$

Os únicos pontos críticos de f são os valores em que

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

Os valores de f nos pontos críticos são $f(-2) = 6$ e $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{94}{27}$. Os valores de f nos pontos inicial e final do intervalo são $f(-4) = -18$ e $f(2) = 6$.

Comparando estes números, concluímos que o mínimo absoluto da função no intervalo é $f(-4) = -18$ e o máximo absoluto da função é $f(-2) = f(2) = 6$. Como mostra a figura acima.

Aplicações de máximos e mínimos

Exemplo 4.1. *Um triângulo esta inscrito numa semi circunferência de raio* R*. Seus lados medem* a*,* b *e* $2R$*. Calcular* a *e* b *quando a área do triângulo é máxima.*

Solução:

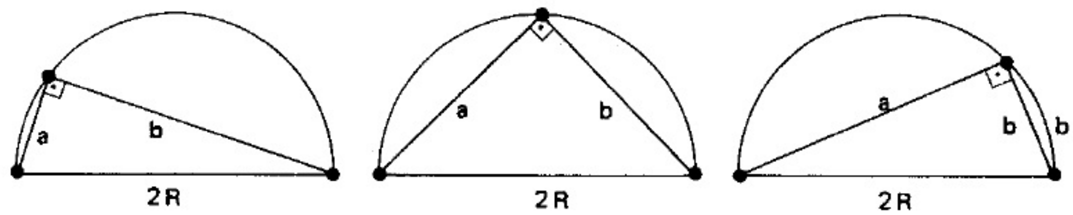


Figura 7: Exemplo 4.1

Notemos primeiramente que numa semi circunfêrencia de raio R é possivel inscrever diferentes triângulos, todos retângulos. Observamos que a e b, medidas dos catetos,variam de um triâgulo para outro e percorrem o instervalo $]0; 2R[$, isto é, $0 < a < 2R$ e $0 < b < 2R$. Para um mesmo triângulo são verificadas as seguintes relações:

$$S = \frac{ab}{2} \qquad \text{e} \qquad a^2 + b^2 = 4R^2$$

em que S é a área do triângulo. Para determinar o máximo de S devemos colocar S como função de uma variável só (a ou b). Eliminando b, pois $b = \sqrt{4R^2 - a^2}$, temos:

$$S = \frac{1}{2} \cdot ab = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2 - a^2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4R^2a^2 - a^4}$$

Provemos que S tem um ponto de máximo:

$$S' = \frac{1}{2} \cdot \frac{8R^2a - 4a^3}{2\sqrt{4R^2a^2 - a^4}} = \frac{2R^2a - a^3}{\sqrt{4R^2a^2 - a^4}}$$

$$S' = 0 \Rightarrow 2R^2a - a^3 = 0 \Rightarrow a = R\sqrt{2}$$

$0 < a < R\sqrt{2} \Rightarrow a^2 < 2R^2 \Rightarrow a^3 < 2R^2a \Rightarrow S' > 0$
$R\sqrt{2} < a < 2R \Rightarrow 2R^2 < a^2 \Rightarrow 2R^2a < a^3 \Rightarrow S' < 0$,
e, então, $a = R\sqrt{2}$ é um ponto de máximo local. Logo o triângulo de área máxima é aquele em que $a = R\sqrt{2}$ e $b = \sqrt{4R^2 - 2R^2} = R\sqrt{2}$, isto é, é o triângulo isósceles.

Exemplo 4.2. *Um triângulo de dimensões* x *e* y *tem perímetro* $2a$ *(*a *é constante dada). Determine* x *e* y *para que sua área seja máxima.*

Solução:

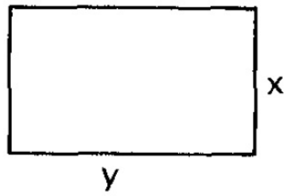


Figura 8: Exemplo 4.2

Temos que $x + y =$ semeperímetro $\Rightarrow x + y = a \Rightarrow y = a - x$. A área do retângulo é dada por $S = xy$. Então

$$S = x(a - x) \Rightarrow S = -x^2 + ax.$$

Derivando, $S' = -2x + a \Rightarrow x = \dfrac{a}{2}$ é raiz. Considerando $0 < x < \dfrac{a}{2}, S' = -2x + a > 0$ e para $\dfrac{a}{2} < x < a, S' = 2x + a < 0$, isto é, $x = \dfrac{a}{2}$, é ponto de máximo local.
A área máxima do retângulo se dá para $x = \dfrac{a}{2}$ e $y = a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{a}{2}$, isto é, quando o retângulo é um quadrado.

Exemplo 4.3. *Calcule o perímetro máximo de um trapézio que está inscrito numa semi-circunfêrencia de raio* R.

Solução:

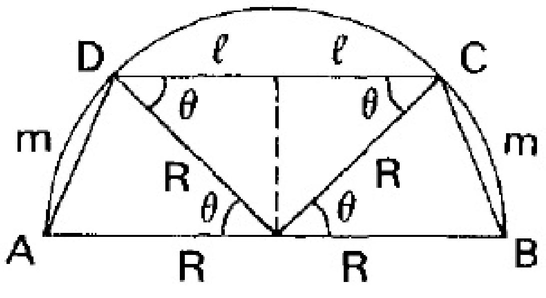
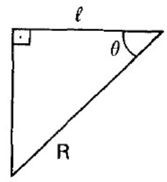


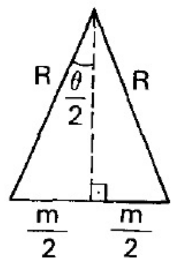
Figura 9: Exemplo 4.3

Perímetro $= 2R + 2l + 2m$, onde do triângulo abaixo encontramos as seguites relaçõs:



$$\begin{cases} l & = R \cdot \cos(\theta) \\ \dfrac{m}{2} & = R \cdot \operatorname{sen}\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases}$$

observando o triângulo, encontramos o seu perímetro



$$\begin{aligned} P &= 2R + 2R\cos(\theta) + 4R\operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ P' &= -2R\operatorname{sen}(\theta) + 2R\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P' = 0 \quad &\Rightarrow \quad \operatorname{sen}(\theta) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 < \theta < \dfrac{\pi}{3} \Rightarrow P' > 0 \\ \\ \dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow P' < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \frac{\pi}{3} \text{ é ponto de máximo local}$$

então o perímetro máximo é:

$$P_{\text{máx}} = P\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2R + 2R \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + 4R \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 5R$$

Exemplo 4.4. *Um fabricante de caixas de papelão pretende fazer caixas abertas a partir de folhas de cartão quadrado de* $576\ cm^2$, *cortando quadrados iguais nas quatro pontoas e dobrando os lados. Calcule a medida do lado do quadrado que deve ser cortado para obter uma caixa cujo volume seja maior possível.*

Solução:

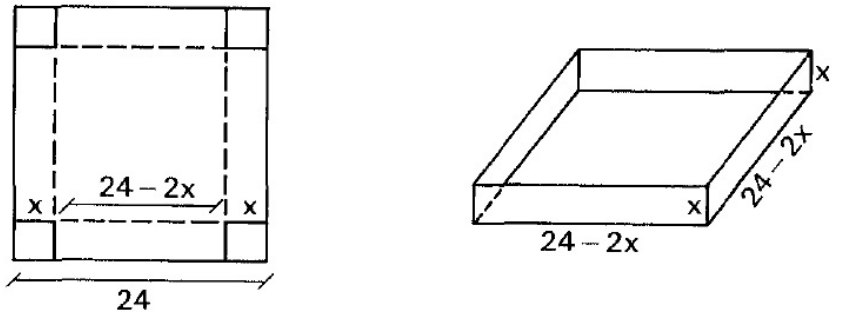


Figura 10: Exemplo 4.4

Volume da caixa aberta = área da base × altura

$$V = (24 - 2x^2)^2 \cdot x \Rightarrow V = 4x^3 - 96x^2 + 576x$$

Derivando, temos

$$V' = 12x^2 - 192x + 576,$$

cuja suas raízes são: $x = 4$ e $x = 12$. Assim, $x = 4$ é ponto de máximo e $x = 12$ é ponto de mínimo.
Logo o volume maior possível, devemos ter $x = 4$.

Exemplo 4.5. *Um foi de comprimento* L *é cortado em dois pedaços, um dos quais formará um círculo e o outro, um quadrado. Como deve ser cortado o fio para que a soma das áreas do cíulo e do quadrado seja mínima?*

Solução:

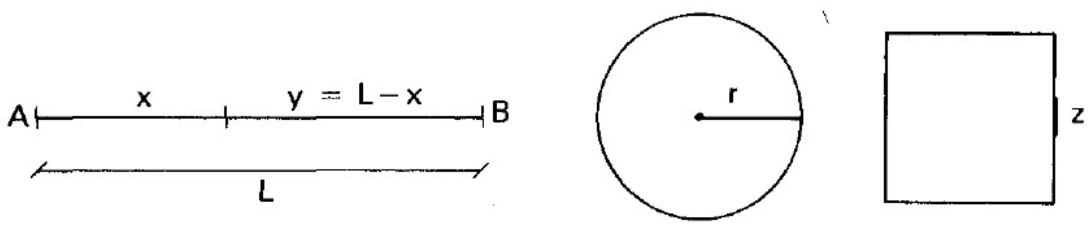


Figura 11: Exemplo 4.5

Temos as seguintes dados: $x = 2\pi r$ e $L - x = 4z$.

Área do cículo,

$$\begin{aligned} A_c &= \pi r^2 \\ A_c &= \pi \frac{x^2}{4\pi^2} \\ A_c &= \frac{x^2}{4\pi} \end{aligned}$$

Área do quadrado,

$$\begin{aligned} A_q &= z^2 \\ A_q &= \frac{(L-x)^2}{16} \\ A_q &= \frac{L^2 - 2Lx - x^2}{16} \end{aligned}$$

Assim,

$$A_t = A_c + A_q = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{L^2 - 2Lx - x^2}{16} = \frac{(4+\pi)x^2 - 2\pi Lx + \pi L^2}{16}$$

Para procura o volume máximo, devemos obter A':

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2(4-\pi)x - 2\pi L}{16\pi} \\ A' &= \frac{(4-\pi)x - \pi L}{8\pi} \end{aligned}$$

De onde,

$$A' = 0 \Rightarrow (4+\pi)x - \pi L = 0 \Rightarrow x = \frac{L\pi}{4+\pi}$$

e daí

$$y = L - x \Rightarrow y = \frac{L\pi}{4+\pi}.$$

Considerações Finais

O presente trabalho apresentou uma diversidade de problemas de otimização, possibilitou a aplicação de alguns métodos algébricos na resolução desses problemas, mostrou, por exemplo, que a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica possibilita a determinação do valor ótimo das funções. Enfatizou, a aplicação dos métodos apresentados é exemplificou cada por meio de várias situações-problemas, escolhidos de maneira a mostrar uma ampla e significativa diversidade que permite a utilização dos métodos aqui desenvolvidos.

A expectativa é que este material possa servir como referência ou apoio na construção de uma sequência didática inovadora e eficiente para a utilização de problemas de otimização em sala de aula em turmas do Ensino Médio, devido aos pré-requisitos necessários e o grau de amadurecimento intelectual dos alunos. O uso deste tipo de problema no Ensino Médio pode oferecer algumas vantagens, destacando-se uma ampla diversidade de problemas contextualizados e, em alguns casos, interdisciplinares, cujas aplicações estão próximas à realidade dos estudantes.

Espera-se que este trabalho possa contribuir como um pequeno exemplo de como é possível despertar o interesse dos alunos e motivá-los a partir de uma mudança na abordagem de um determinado conteúdo, como é a proposta apresentada pelo conteúdo Médias. Tais mudanças de abordagem nos conteúdos de Matemática do Ensino Médio devem ter como objetivo principal despertar o prazer de estudar, aprender e pesquisar Matemática. Outro importante fato, que não pode deixar de ser ressaltado, é que os Problemas de Otimização oferecem ao professor uma grande oportunidade de trabalhar a interdisciplinaridade, devido a sua relação natural com outras áreas do conhecimento como a Física, a Economia, a Administração, dentre outras não menos importantes.

Mais especificamente este trabalho mostra que a Desigualdade das Médias pode ser uma importante ferramenta capaz de resolver problemas de otimização, ligados à Geometria Plana e ao Cálculo Diferencial, é claro que existem algumas particularidades que devem estar presentes no problema para que seja possível resolvê-lo usando tal ferramenta, algumas destas resoluções foram discutidas neste trabalho. A maioria dos problemas apresentados, foram extraídos de livros conceituados de Cálculo Diferencial, e as suas soluções usando os métodos aqui expostos são perfeitamente compreensíveis pelos alunos do Ensino Médio, é claro que posteriormente as explicações de alguns conceitos e resultados imprescindíveis ao estudo deste tema, logo estes métodos podem servir como uma tentativa de suprir a ausência do Cálculo Diferencial nas atuais orientações curriculares para o Ensino Médio.

Diante de uma nova abordagem, a matemática aplicada é um ramo crescente e de novas oportunidades profissionais, onde os docentes podem ingressar-nos vários setores da atividade, aplicando os conceitos de otimização para desenvolver a pesquisa e se consolidar no mercado de trabalho, tornando-se cidadãos críticos, autônomos e modificadores da sua própria realidade social.

Referências

[1] DANTE, Luiz Roberto - *Matemática: contexto e aplicações*. Volumes 1,2 e 3. São Paulo: Editora Ática, 3ªEd., 2007.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. - *Um Curso de Cálculo*. Volume 1, 5ª edição. Rio de Janeiro. LTC, 2008.

[3] IEZZI, G., MURAKAMI, C., MACHADO, N. J. - *Fundamentos da Matemática Elementar - limites, derivadas e noções de integral*. Vol. 8. Atual. São Paulo. 2002.

[4] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA, Nilze de - *Matemática: Ciência e Aplicações*. Volumes 1, 2 e 3. São Paulo: Atual Editora, 2ª Ed., 2004.

[5] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César - *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 1. Rio de Janeiro: SBM, 9ª Ed., 2010.

[6] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César - *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 2. Rio de Janeiro: SBM, 2ª Ed., 2006.

[7] LIMA, Elon Lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César - *A Matemática do Ensino Médio*. Volume 4. Rio de Janeiro: SBM, 1ª Ed., 2010.

[8] MELLO, Jose Luiz Pastore - *Explorando o Ensino da Matemática*. Artigos. Volume 1. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, págs.152 à 155, 2004.

[9] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins; FERNÁNDEZ, Adán José Corcho - *Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções*. Rio de Janeiro: SBM, 2ª Ed., 2012.