Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Divisibilidade do Determinante de uma Matriz com Entradas Inteiras

Neydiwan Ferreira da Silva

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[x] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Neydiwan Ferreira da Silva					
E-mail:	neydiwan@hotmail.com					
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não						
Vínculo empregatício do autor		Secretaria Estadual de Educação do estado de Goiás				
Agência de fomento:		Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior			Sigla:	CAPES
País:	Brasil	UF:	GO	CNPJ:	**00.889.834/0001-08**	
Título:	Divisibilidade do Determinante de uma Matriz com Entradas Inteiras					
Palavras-chave:	Propriedades, Determinantes					
Título em outra língua:	Divisibility of the Determinant of a Class of Matrices With Integer Entries					
Palavras-chave em outra língua:	Properties, Determinants					
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico					
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	07/03/2014					
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional					
Orientador (a):	Mário José de Souza					
E-mail:	mario_jose_souza@ufg.br					
Co-orientador (a):*	--					
E-mail:	--					

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

____ Data: ____ / ____ / _____

Assinatura do (a) autor (a)

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Neydiwan Ferreira da Silva

Divisibilidade do Determinante de uma Matriz com Entradas Inteiras

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr.Mário José de Souza.

Goiânia
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

Silva, Neydiwan Ferreira.
S586d Divisibilidade do Determinante de uma Matriz com Entradas Inteiras [manuscrito] / Neydiwan Ferreira da Silva. - 2014.
45 f.

Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
Bibliografia.
1. Matrizes (matemática) – Estudo e ensino (ensino médio) 2. Propriedades - Matemática 3. Matrizes 4. Determinantes I. Título.

CDU:519.677

Neydiwan Ferreira da Silva

Divisibilidade de Determinante de Matrizes com Entradas Interias

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 07 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
Matemática campus Arraias- UFT

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Neydiwan Ferreira da Silva graduou-se em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás, obtendo o título de bacharel e licenciado em matemática. Cursou pós graduação em Ensino de Ciências Exatas e Matemática também na mesma instituição supra citada.

Dedico esse trabalho à minha amada esposa Karla e minhas filhas Letícia e Larissa minhas paixões

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, "porque Dele, por Ele e para Ele são todas as coisas", pela capacidade que me foi dada para aprender.

À minha família pelo suporte e pela paciência nesses dois anos de muito estudo.

Especialmente ao professor Dr. Guilherme Colherinhas de Oliveira que foi a pessoa que mais me motivou a fazer um mestrado. Até hoje me lembro de suas palavras de motivação: "Gordo, você precisa fazer um mestrado!"

Aos meus amigos de sala, mas especialmente aos que andaram mais perto de mim, se angustiaram comigo e sorriram comigo, Ronaldo Caetano Junior e Rogério Sulivan. Vocês se tornaram grandes amigos nessa caminhada.

Ao meu orientador, o professor Dr. Mário José de Souza pela orientação e motivação nesse projeto.

E a CAPES, pelo suporte financeiro durante esses dois anos.

Sumário

Resumo

Frequentemente, no ensino básico, conteúdos de matemática são apresentados sem justificativas satisfatórias, as vezes até sem justificativas e sem um desenvolvimento lógico que faça sentido desses conteúdos e ideias num contexto mais amplo. Quando o conteúdo de determinantes é trabalhado no segundo ano do ensino médio, é frequente que nossos alunos não consigam conectar essa ferramenta dentro de seu contexto. Não são poucas as vezes que encontramos estudantes que não conseguem descrever com suas palavras a utilidade dessa ferramenta e muito menos seu contexto histórico. Esse trabalho aborda um pouco da história dos determinantes, alguns conceitos de matrizes, a definição formal de determinante, um pouco de aritmética dos números inteiros e apresenta uma visão sobre a divisibilidade do determinante de uma matriz com entradas inteiras de ordem qualquer.

Palavras-chave

Propriedades, Determinantes

Abstract

Frequently, in the high school, contents of math are presented without satisfactory justifications, sometimes without justifications and without a logical development that does sense of these contents and ideas in a larger context. When the content of determinants is worked in the second year of the high school, it is frequent that our pupils do not manage to connect this tool inside his context. They are not little sometimes that we find students who do not manage to describe with his words the usefulness of this tool and much less his historical context. This work boards a little of history of the determinants, some concepts of matrices, the formal definition of determinant, a little of arithmetic of the integer numbers and presents a vision about the divisibility of determinant of matrices with integer entries of any order.

Keywords

Properties, Determinants

1 Introdução

É de comum conhecimento que vários estudantes, desde bem cedo, desenvolvem uma certa aversão à Matemática que, cultivada ao longo dos anos escolares, tende a evoluir para um total bloqueio aos conteúdos desta disciplina. Estudando matrizes, determinantes e permutações, os alunos nem sempre correlacionam esses conhecimentos. É papel do professor estabelecer uma conexão entre esses conhecimentos e mostrar que juntos eles constituem uma ferramenta no mínimo interessante ao estudo de sistemas.

Neste trabalho trataremos essas informações conectadas e não excludentes, de forma que o produto final seja uma teoria sólida e consistente. O assunto de matrizes, determinantes, representação dos números inteiros são relembrados e juntos são usados na elaboração do assunto de divisibilidade do determinantes de uma matriz, que é o nosso foco final.

É conhecido que os números 14529, 15197, 20541, 38911 e 59619 são múltiplos de 167. Caculando o determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 & 9 \\ 1 & 5 & 1 & 9 & 7 \\ 2 & 0 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 8 & 9 & 1 & 1 \\ 5 & 9 & 6 & 1 & 9 \end{bmatrix}$, comprovamos que ele é também um múltiplo de 167.

Na situação citada, nos é dado uma matriz 5 por 5 e o cálculo do seu determinante à mão é tedioso. Discutiremos, inicialmente, o problema para matrizes de ordem menor, isto é, se os números inteiros formados pelos elementos da linha de uma matriz, são divisíveis por um número inteiro K, então é verdade que esse K também dividirá o determinante da matriz original. Investigamos este caso para determinantes de matrizes de ordem 2 e vimos que ele se extende para matrizes de ordem 3 por 3 até n por n. O objetivo deste trabalho é mostrar que existe a divisibilidade do determinante de uma matriz por um número K e que este também é divisor dos números formados pelos elementos da linha dessa matriz.

2 A evolução histórica do conceito de determinante

Neste capítulo será apresentada a evolução histórica do conceito de determinante. Para mais detalhes sobre o assunto sugerimos [2] e [5].

Segundo [2] e [5] o início das matrizes e determinantes remontam ao século II a.C, embora alguns vestígios desse assunto foram encontrados no século VI a.C. Somente no final do século XVII que as ideias reapareceram e se desenvolveram até os dias atuais de forma mais clara. Não é de se estranhar que o início de matrizes e determinantes esteja intimamente relacionado com o estudo dos sistemas lineares. Os babilônios estudaram problemas que levam a resolução de um sistema linear de duas equações e duas variáveis, sendo que alguns destes problemas estão preservados em tábuas de argila até os dias atuais. Os chineses, entre II a.C e I a.C, chegaram muito mais perto do estudo das matrizes que os babilônios. Na verdade, é mais justo dizer que o texto "Nove Capítulos da Arte Matemática", escrito durante a dinastia Han, dá o primeiro exemplo conhecido de matrizes. Um problema contido neste texto está descrito abaixo:

"Existem três tipos de milho, dos quais três feixes é do primeiro tipo, dois do segundo, e um do terceiro fazem 39 medidas. Dois do primeiro, três do segundo e um do terceiro fazem 34 medidas. E um do primeiro, dois do segundo e três do terceiro fazem 26 medidas. Quantas medidas de milho estão contidos em um pacote de cada tipo?"

O autor deste problema faz algo bastante notável. Ele define os coeficientes de três equações lineares a três incógnitas com uma tabela abaixo:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 26 & 34 & 39 \end{matrix}$$

Em notação moderna, temos que x, y e z denotariam os três tipos de milhos e poderíamos escrever o problema assim:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 \\ 34 \\ 26 \end{bmatrix}$$

A única diferença desses dois métodos é que nós, atualmente, escrevemos as equações lineares como as linhas da matriz em vez de colunas. Girolamo Cardano, em Ars Magna (1545), dá uma regra para a solução de um sistema de duas equações lineares que ele chama de "*Regulamentação de Modo*". Esta regra dá o que é essencialmente a regra de Cramer para resolver sistemas lineares de ordem 2. Muitos resultados da teoria padrão de matrizes elementares apareceram pela primeira vez muito antes das matrizes serem objetos de investigação matemática.

A ideia de um determinante apareceu no Japão e na Europa quase simultâneamente, embora o matemático Seki no Japão publicou suas ideias antes. Em (1683), Seki Kowa escreveu "Método de Resolver os Problemas Dissimulados" que contém métodos matriciais escritos como tabelas exatamente do jeito que os métodos chineses acima foram construídos. Sem ter qualquer palavra que corresponda a "determinante" Seki ainda introduziu determinantes e deu métodos gerais para o seu cálculo com base em exemplos. Usando seus "determinantes" Seki foi capaz de encontrar os determinantes de ordem 2, 3, 4 e 5 e aplicou-os na resolução de equações, mas não em sistemas de equações lineares.

Extraordinariamente, a primeira aparição de um determinante na Europa apareceu exatamente em (1693) com uma carta de Leibniz enviada ao marquês de L'Hôpital, onde Leibniz escreveu que ocasionalmente usava números indicando linhas e colunas numa coleção de equações simultâneas:

$$\begin{cases} 10 + 11x + 12y = 0 \\ 20 + 21x + 22y = 0 \\ 30 + 31x + 32y = 0 \end{cases}$$

modernamente escreveríamos isso como

$$\begin{cases} a_1 + b_1x + c_1y = 0 \\ a_2 + b_2x + c_2y = 0 \\ a_3 + b_3x + c_3y = 0 \end{cases}$$

que equivale a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Essa antecipação dos determinantes por Leibniz só foi publicada em 1850 e foi descoberta mais de meio século depois. Leibniz estava convencido de que uma boa notação matemática era a chave para o progresso desse estudo. Em seus manuscritos inéditos, encontram-se mais de cinquenta maneiras diferentes de notação de sistemas que ele trabalhou durante muitos anos.

Leibniz provou vários resultados sobre resultantes (que era o modo como ele os chamava), incluindo o que é essencialmente a regra de Cramer. A bem conhecida regra de Cramer, publicada em 1750 por Gabriel Cramer (1704 - 1752) provavelmente era conhecida por Maclaurin desde 1729, quando ele estava escrevendo uma álgebra a título de comentário da *Arithmetica Universalis* de Newton. O *treatise of Algebra* de Maclaurin foi publicado em 1748, dois anos depois da morte do autor, e nele a regra para resolver equações simultâneas por determinantes aparecia, dois anos antes de surgir na *introduction à Analyse des Lignes Courbes Algebriques* de Cramer. Ele também sabia que um determinante pode ser expandido usando qualquer linha ou coluna, o que é agora chamado de método de Laplace. Segundo Cramer, a solução para y no sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

é dada como

$$y = \frac{af - dc}{ae - db}$$

e a solução para z, no sistema

$$\begin{cases} ax + by + cz = m \\ dx + ey + fz = n \\ gx + hy + kz = p \end{cases}$$

é expressa como

$$z = \frac{aep - ahn + dhm - dbp + gbn - gem}{aek - ahf + dhc - dbk + gbf - gec}.$$

Em 1773 o matemático italiano Joseph Louis Lagrange (1736 - 1813) se ocupa de um tratamento postulacional do assunto, muito afastado de critérios de aplicabilidade prática em relação aos determinantes. A beleza da obra de Lagrange é evidente não para o engenheiro, mas para o matemático mais puro; mesmo nas partes mais elementares de sua obra há uma qualidade estética impressionante. É primariamente a ele que devemos as formas compactas como

$$\frac{1}{2!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{e} \quad \frac{1}{3!}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

para o cálculo da área de um triângulo e para o volume de um tetraedro, respectivamente, resultados estes que apareceram no artigo *Solutions analytiques de quelques problèmes sur les pyramides triangulaires*, publicado em 1775.

Trabalhos sobre determinantes começaram a surgir regularmente após esse período. Em 1764, Bézout apresentou os determinantes de Vandermonde. Em 1772, Laplace afirmou que os métodos introduzidos por Cramer e Bézout eram impraticáveis e, em um artigo onde ele estudou as órbitas dos planetas interiores, ele discutiu a solução de um sistema de equações lineares, sem realmente calculá-lo, usando determinantes. Surpreendentemente Laplace usou a palavra "resultante" para o que hoje chamamos de determinante, o que é curioso, pois essa era a mesma palavra dada por Leibniz. Deste modo, Laplace deve ter tido conhecimento dos trabalhos de Leibniz sobre esse assunto.

Só no século XIX é que um desenvolvimento continuado teve lugar, iniciado em grande parte, ao menos no continente europeu, por Augustin Louis Cauchy (1789 - 1857) e Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851). Esse é um dos poucos ramos em que o papel de Gauss foi pequeno, embora fosse da terminologia de Gauss em um contexto um pouco diferente que Cauchy tirou o nome "determinante". Esse foi o termo introduzido pela primeira vez por Gauss em *Disquisitiones Arithmeticae* (1801) ao discutir formas quadráticas. Ele usou o termo porque o determinante determina as propriedades da forma quadrática. No entanto, o conceito não é o mesmo que a de nosso determinante. Foi Cauchy que usou "determinante" em seu sentido moderno. Ele usou o termo "determinante" para o que ele descrevia como uma classe de funções simétricas alternadas como $a_1b_2 - b_1a_2$. O seu trabalho é o mais completo dos primeiros trabalhos sobre determinantes. Ele reprovou os trabalhos anteriores e deu novos resultados sobre esse assunto. Seria possível dar uma boa justificação para dizer que a história definitiva dos determinantes começou em 1812, quando Cauchy leu perante o instituto uma longa memória onde o teorema da multiplicação de determinantes é provado pela primeira vez, embora, na mesma reunião do Instituto da França, Binet também apresentou um artigo que continha uma prova do teorema da multiplicação, mas foi menos satisfatória do que aquela dada por Cauchy.

O nome de Jacobi está ligado a determinantes dessa forma não porque ele fosse o primeiro a usá-los, mas porque ele era um construtor de algoritimos que tinha entusiasmo especial pelas possibilidades inerentes à notação de determinantes. Somente em 1829 Jacobi usou pela primeira vez os determinantes que levam seu nome. Jacobi ainda publicou três tratados sobre determinantes em 1841. Estes foram importantes, pois foi a primeira vez que a definição do determinante foi feita de forma algorítmica e as entradas no determinante não foram especificadas. Estes três trabalhos de Jacobi fizeram com que a ideia de determinante fosse amplamente conhecida.

Foi Arthur Cayley (1821-1895), um brilhante estudante de Cambrigde que ganhou a maior parte dos prêmios de matemática e que desde cedo contribuiu com artigos no *Cambridge Mathematical Journal*. Cayley era primariamente um algebrista, não um especialista em geometria. Cayley, em 1841, publicou a primeira contribuição inglesa para a teoria dos determinantes. Neste trabalho ele usou duas linhas verticais de ambos os lados da matriz para denotar o determinante, uma notação que tornou-se padrão até os dias atuais. Em 1843 Cayley iniciara a geometria ordinária do espaço n-dimensional, usando determinantes como instrumento essencial. Nessa notação, usando coordenadas homogêneas, as equações da reta e do plano, respectivamente, podem ser escritas como:

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ x_1 & y_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & t_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{e} \quad \begin{vmatrix} x & y & z & t \\ x_1 & y_1 & z_1 & t_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & t_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & t_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Atualmente os conceitos de matrizes e determinantes estão bem definidos e possuem grandes aplicações na física, tanto quanto na mecânica quântica e em várias teorias matemáticas que envolvem sistemas lineares.

3 Matrizes

Neste capítulo serão apresentados conceitos básicos relativos a matrizes. Estes aparecem, não apenas porque simplificam o problema, mas também porque fornecem novos métodos de resolução de problemas. Em particular, neste trabalho serão abordados apenas os pré-requisitos necessários aos próximos capítulos. As demonstrações das propriedades omitidas podem ser encontradas em [1] e [4].

Definição 1: *Chamamos de matriz uma tabela de elementos dispostos em linhas e colunas. Os elementos de uma matriz podem ser números reais, complexos, funções e ainda outras matrizes. Representaremos uma matriz de m linhas e n colunas por:*

$$A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{m\times n}$$

Usaremos sempre letras maiúsculas para denotar matrizes e quando quisermos especificar sua ordem, escreveremos $A_{m\times n}$, onde m representará o número de linhas da matriz e n o número de colunas.

Definição 2: *Chamamos de matriz quadrada a toda matriz cujo número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, m é igual a n.*

Exemplo 1. *A matriz* $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 8 & -2 & -4 \\ -6 & -8 & 0 \end{bmatrix}$ *é uma matriz quadrada de ordem 3.*

Definição 3: *Chamamos de matriz diagonal a toda matriz quadrada ($m = n$), onde os elementos que não estão na diagonal principal são todos nulos.*

Exemplo 2. *A matriz* $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ *é uma matriz diagonal de ordem 3.*

Definição 4: *Chamamos de matriz identidade a toda matriz diagonal onde os elementos de sua diagonal principal, são todos iguais a 1.*

Exemplo 3. *A matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é uma matriz identidade de ordem 3.*

Definição 5: *Dada uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, *define-se a matriz transposta de A denotada por* A^T *como a matriz* $A^T = [a_{ij}]^T_{n\times m}$, *onde* $a^T_{ij} = a_{ji}$, $i = 1, \ldots, n$, *e* $j = 1, \ldots, m$.

Exemplo 4. *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 10 & 5 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *temos sua transposta* $A^T = \begin{bmatrix} 3 & 10 & -2 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Definição 6: *A soma de duas matrizes* $A = [a_{ij}]$ *e* $B = [b_{ij}]$, *de ordem* $m \times n$, *é uma matriz* $C = [c_{ij}]_{m\times n}$ *tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Exemplo 5. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix}$

A diferença $A - B$ de duas matrizes de ordem $m \times n$ é uma matriz C,de mesma ordem, tal que $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Definição 7: *Propriedades da adição de matrizes:*

I) $A + (B + C) = (A + B) + C$

II) $A + O = O + A = A$

III) $-A+A=A-A=O$

IV) $A+B=B+A$

Definição 8: *Se λ é um escalar, a multiplicação de uma matriz $A=[a_{ij}]$ por λ é uma matriz $B=[b_{ij}]$ tal que $b_{ij}=\lambda a_{ij}$.*

Exemplo 6. $5\times\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ 3 & -5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times4 & 5\times(-2) & 5\times1\\ 5\times3 & 5\times(-5) & 5\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20 & -10 & 5\\ 15 & -25 & 0\end{bmatrix}$

Definição 9: *Propriedades da multiplicação de uma matriz por um escalar:*

I) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

II) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

III) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

IV) $1A=A$

Definição 10: *Dada uma matriz quadrada A de ordem n, chamamos de inversa de A a uma matriz B tal que $A\cdot B=B\cdot A=I_n$, onde I_n é a matriz identidade de ordem n. Escreveremos A^{-1} para a inversa de A.*

Exemplo 7. *Seja* $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$. *Então* $A^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}$, *pois* $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=$ $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$.

Observações:

1) Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem, ambas inversíveis, então $A\cdot B$ é inversível e $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

2) Se A é uma matriz quadrada e existe uma matriz B tal que $BA=I$, então A é inversível, ou seja A^{-1} existe e, além disso, $B=A^{-1}$.

4 Determinantes

Neste capítulo é apresentado o conceito de determinantes necessário para o desenvolvimento do trabalho e para mais detalhes sobre o assunto, as referências [1], [4], e [8] são indicadas.

4.1 Classe de uma permutação

De acordo com [4] e [8], uma permutação das letras a, b e c do nosso alfabeto é a própria ordem

$$a \quad b \quad c.$$

Definição 11: *Seja* $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ *o conjunto de inteiros de* 1 *a* n*, ordenados de maneira ascendente. A reordenação* $j_1 j_2 \ldots j_n$ *dos elementos de* S *é chamada de permutação de* S*. Podemos considerar uma permutação de* S *como sendo uma função bijetora de* S *em si mesmo.*

Podemos colocar qualquer um dos n elementos de S na primeira posição, qualquer um dos $n-1$ elementos remanescentes na segunda posição, qualquer um dos $n-2$ elementos remanescentes na terceira posição, e assim até a $n-ésima$ posição, que pode ser preenchida pelo último elemento. Dessa maneira, há $n\,(n-1)\,(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$ permutações de S. Representamos o conjunto de todas as permutações de S por S_n. Diz-se que dois elementos de uma permutação formam uma inversão se estão em ordem inversa à da permutação principal. Assim, na permutação dada acb, os elementos c e b formam uma inversão. Daí, uma permutação é de classe par ou de classe ímpar, conforme apresente um número par ou ímpar de inversões. Portanto, acb é de classe ímpar, pois possui apenas uma inversão. Se uma permutação é de classe par atribuiremos a ela o sinal de $+$ e se ela for de classe ímpar o sinal de $-$.

Exemplo 8. *S_1 tem apenas uma permutação, logo é par pois não há inversões.*

Exemplo 9. *Na permutação de 4321 em S_4, 4 precede 3, 4 precede 1, 4 precede 2, 3 precede 1 e 3 precede 2 e 2 precede 1. Dessa maneira, o número de inversões nessa permutação é 6, que é par.*

4.2 Tabelas de permutações

4.2.1 Tabela referente às permutações dos números 1 e 2

O total de permutações dos números 1 e 2 é $P_2 = 2! = 2$. Logo, podemos formar a Tabela 1.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
12	12	0	par	+
12	21	1	ímpar	−

Tabela 1: Permutações dos números 1 e 2.

4.2.2 Tabela referente às permutações dos números 1, 2 e 3

O total de permutações dos números 1, 2 e 3 é $P_3 = 3! = 6$. Logo, podemos formar a Tabela 2.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
123	123	0	par	$+$
123	132	1	ímpar	$-$
123	312	2	par	$+$
123	213	1	ímpar	$-$
123	231	2	par	$+$
123	321	3	ímpar	$-$

Tabela 2: Permutações dos números 1, 2 e 3.

4.2.3 Determinante de uma matriz

Chama-se determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices dos elementos da diagonal principal da matriz, fixados os primeiros, e fazendo-se preceder os produtos do sinal $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar. De maneira formal, temos

Definição 12: *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Define-se o determinante de A por*

$$\det(A) = \sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

em que o somatório envolve todas as permutações $j_1 j_2 \dots j_n$ do conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. O sinal de $a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$ é $+$ ou $-$ conforme a permutação $j_1 j_2 \dots j_n$ é par ou ímpar.

Exemplo 10. *Se A é a matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$, teremos somente a permutação principal. Assim,* $\det(A) = a_{11}$.

Exemplo 11. *Se A é a matriz de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos duas permutações* *em $S_2 : j_1$ e j_2, sendo que a primeira é par e a segunda é ímpar, conforme a Tabela 1. Assim, vamos proceder da seguinte forma:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1 e 2 conforme Tabela 1.

$$a_1 \quad a_2 \qquad\qquad a_1 \quad a_2$$

2º) Colocar nas duas expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 12 e 21, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$a_{11} \quad a_{22} \qquad\qquad a_{12} \quad a_{21}$$

3º) Fazer preceder cada um dos dois produtos assim formados dos sinais $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 1.

$$+a_{11} \quad a_{22} \qquad\qquad -a_{12} \quad a_{21}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Exemplo 12. *Se A é a matriz de ordem 3, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, temos seis permutações em $S_3 : j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$, com seus respectivos sinais, conforme a Tabela 2. Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, temos:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1, 2 e 3 conforme Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 \\ a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 & a_1 \; a_2 \; a_3 \end{array}$$

2º) Colocar, nas seis expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 123, 132, 312, 213, 231 e 321, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} \; a_{22} \; a_{33} & a_{11} \; a_{23} \; a_{32} & a_{13} \; a_{21} \; a_{32} \\ a_{12} \; a_{21} \; a_{33} & a_{12} \; a_{23} \; a_{31} & a_{13} \; a_{22} \; a_{31} \end{array}$$

3º) Fazer preceder cada um dos seis produtos assim formados dos sinais $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} +a_{11} \; a_{22} \; a_{33} & -a_{11} \; a_{23} \; a_{32} & +a_{13} \; a_{21} \; a_{32} \\ -a_{12} \; a_{21} \; a_{33} & +a_{12} \; a_{23} \; a_{31} & -a_{13} \; a_{22} \; a_{31} \end{array}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

que pode ser escrita como

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

4.3 Determinante da matriz inversa

4.3.1 Cofator

Em [1], o cofator ou complemento algébrico do termo a_{ij} é definido como o número Δ_{ij} (que é o determinante da submatriz A_{ij}, obtida de A, quando retiramos a i-ésima linha e a j-ésima coluna, afetado pelo sinal $(-1)^{i+j}$), que de maneira formal é escrito como:

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, \det(A_{ij}).$$

Exemplo 13. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. *Seu cofator* Δ_{12} *é:*

$$\Delta_{12} = (-1)^{1+2} \,.\, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)\,(4-2) = -2.$$

4.3.2 Matriz cofatora

Dada uma matriz A, em que cada cofator Δ_{ij} dos elementos a_{ij} da matriz, é dado por $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \,.\, \det(A_{ij})$. Com esses cofatores formamos uma nova matriz $\bar{A}$, denominada matriz cofatora de A.

Exemplo 14. *Dada* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{bmatrix}$, *temos:*

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -19 \\ \Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19 \cdots \end{aligned}$$

Então, a matriz cofatora é

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -19 & 19 & -19 \\ -5 & 10 & -11 \\ 4 & -8 & 5 \end{bmatrix}.$$

4.3.3 Matriz adjunta

Dada uma matriz quadrada A, chamaremos de matriz adjunta de A à transposta da matriz dos cofatores de A, que escreveremos como $adjA = \bar{A}^T$. Do exemplo anterior, temos

$$adjA = \begin{bmatrix} -19 & -5 & 4 \\ 19 & 10 & -8 \\ -19 & -11 & 5 \end{bmatrix}.$$

Suponhamos agora que $A_{n\times n}$ tenha inversa, isto é, existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = I_n$. Usando o determinante, temos

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1.$$

Desse produto concluímos que se A tem inversa,

i) $\det A \neq 0$;

ii) $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$.

Ou seja, $\det A \neq 0$ é uma condição necessária para que A tenha uma inversa. Em [1], p.73 tem-se que $A \cdot \bar{A}^T = (\det A) \cdot I$. Se $\det A \neq 0$, então $A \cdot \frac{1}{\det A} \cdot \bar{A}^T = I$ e como a inversa é única, então $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot adjA$. Logo, podemos enunciar o teorema:

Teorema 1: *Uma matriz quadrada A admite uma inversa se, e somente se,* $\det A \neq 0$.

Esse teorema fornece um método de calcular a inversa de uma matriz. Consideremos a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det A = 24 - 22 = 2 \neq 0$ e, portanto, existe a inversa de A. Vamos calcular sua inversa pela relação $A^{-1} = \frac{1}{\det A}(adjA)$.

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & -11 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } adjA = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix}$$

então,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,(adjA) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -11 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -\frac{11}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Definição 13: *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, cujo determinante é nulo, é chamada de matriz singular.*

Exemplo 15. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, *temos* $\det(A) = 0$. *Logo, A é singular.*

Definição 14: *Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$, cujo determinante é diferente de zero, é chamada de matriz não-singular ou regular.*

Exemplo 16. *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, *temos* $\det(A) = -20$. *Logo, A é não singular.*

5 A representação decimal dos números inteiros

Neste capítulo, conceitos de aritmética serão relembrados e as proprosições não demonstradas são encontradas em [3] ou [7].

5.1 Um breve histórico

Em [3] vemos que o sistema universalmente utilizado pelas pessoas da época para representar os números naturais é o sistema decimal posicional. Este sistema de numeração, que é uma variante do sistema sexagesimal utilizado pelos babilônios no século XVII a.C, foi desenvolvido na China e na India. Existem documentos do século VI comprovando a utilização desse sistema. Posteriormente, foi se espalhando pelo Oriente Médio, por meio das caravanas, tendo encontrado grande aceitação entre os povos árabes. A introdução do sistema decimal na Europa foi tardia por causa dos preconceitos da idade média. Por exemplo, num documento do século XIII, os banqueiros de Florença condenavam o seu uso.

Ainda em [3] verifica-se que o sistema começou a ter maior difusão na Europa a partir do século XIII, quando foi publicado o livro *Liber Abacci*, de Fibonacci. Vários séculos se passaram para que, finalmente, esse sistema fosse adotado sem restrições pelos europeus. Há outros sistemas de numeração em uso, como notadamente o sistema binário ou em base 2, que são usados em computação. Uma característica comum a esses sistemas de numeração é o fato de serem todos sistemas posicionais com base constante.

5.2 Divisão euclidiana

Euclides de Alexandria foi um famoso matemático grego que viveu aproximadamente no século III a.C. O processo da divisão euclidiana, ou também chamado de

Algoritmo de Euclides, é um processo que é ensinado, não de maneira formal, nas primeiras séries iniciais na escola.

Proprosição 1: *Se m e n são números naturais e se $n \neq 0$, então existem números naturais q e r, determinados de modo único, tais que*

$$m = qn + r, \text{ com } r < n.$$

Demonstração: Se $m < n$, basta tomar $q = 0$ e $r = m$. Portanto, é necessário apenas considerar o caso $n \leq m$. Sendo $n \leq m$, existe um número q_1 tal que

$$q_1 n \leq m \text{ (por exemplo, } q_1 = 1)$$

seja

$$r_1 = m - q_1 n$$

então

$$m = q_1 n + r_1.$$

Se $r_1 < n$, tomamos $r = r_1$ e $q = q_1$ e a proposição está demonstrada. Se $n \leq r_1$, escolhemos q_2 tal que

$$q_2 n \leq r_1$$

e chamamos a diferença $r_1 - q_2 n$ de r_2. Temos

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 - q_2 n \\ r_2 &= (m - q_1 n) - q_2 n \\ r_2 &= m - (q_1 + q_2)\, n \\ m &= (q_1 + q_2)\, n + r_2 \end{aligned}$$

Se $r_2 < n$, tomamos $r = r_2$ e $q = q_1 + q_2$ e a demonstração está terminada. Se $n \leq r_2$, escolhemos q_3 tal que

$$q_3 n \leq r_2$$

e repetimos todo o processo. Após p passos, vamos obter

$$\begin{aligned}
r_p &= r_{p-1} - q_p n \\
r_p &= m - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{p-1})\, n - q_p n \\
r_p &= m - (q_1 + q_2 + \ldots + q_{p-1} + q_p)\, n \\
m &= (q_1 + q_2 + \ldots + q_{p-1} + q_p)\, n + r_p
\end{aligned}$$

Como

$$r_1 > r_2 > r_3 > \ldots,$$

para algum valor de p, teremos $r_p < n$. Para este valor de p, tomando

$$r = r_p \text{ e } q = q_1 + q_3 + \ldots + q_p,$$

assim,

$$m = qn + r, \text{ com } r < n.$$

Os números q e r tais que

$$m = qn + r, \text{ com } r < n,$$

são chamados, respectivamente, *quociente* e *resto* da divisão euclidiana de m por n.

Exemplo 17. *Determinar o quociente e o resto da divisão de 21 por 4.*

Solução: Inicialmente escolhemos q_1 tal que

$$q_1 \times 4 < 21$$

por exemplo, $q_1 = 2$. Em seguida, escolhemos q_2 tal que

$$q_2 \times 4 \leq 21 - 2 \times 4 = 13$$

por exemplo, $q_2 = 1$. Continuando, escolhemos q_3 tal que

$$q_3 \times 4 \leq 13 - 1 \times 4 = 9$$

por exemplo $q_3 = 2$. Como não existe nenhum número natural q_4 tal que

$$q_4 \times 4 \leq 9 - 2 \times 4 = 1$$

o processo termina e temos

$$q = q_1 + q_2 + q_3 = 2 + 1 + 2 = 5 \text{ e } r = 21 - 5 \times 4 = 1.$$

5.3 Base

Nesta seção o conceito de base é introduzido e para tal, iniciaremos com a

Definição 15: *Se*

$$m = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0,$$

sendo $a_n < b$, $a_{n-1} < b$, $\ldots$, $a_1 < b$ e $a_0 < b$, dizemos que

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b^1 + a_0 b^0$$

é a representação de m na base b e escrevemos

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$$

Observe que, como $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ representam algarismos entre 0 e $b-1$, podemos representar qualquer número natural m na base b, isto é, na forma

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0)_b$$

usando apenas os símbolos

$$0, 1, 2, \ldots, b-1.$$

Exemplo 18. *Escreva o número 1027 na base 5.*

Solução: Usando a divisão euclidiana, temos

$$\begin{aligned}
1027 &= 5 \times 205 + 2 \\
205 &= 5 \times 41 + 0 \\
41 &= 5 \times 8 + 1 \\
8 &= 5 \times 1 + 3
\end{aligned}$$

efetuando-se as devidas substituições, podemos escrever

$$1027 = 1 \times 5^4 + 3 \times 5^3 + 1 \times 5^2 + 0 \times 5 + 2 \times 5^0.$$

Portanto,

$$1027 = (13102)_5 \,.$$

5.4 Sistema de numeração decimal

O sistema é chamado decimal por serem dez os algarismos usados em sua represenação. No sistema decimal, todo número é representado por uma sequência formada pelos algarismos $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ acrescidos do símbolo 0 (*zero*), que representa a ausência de algarismo. O sistema também é chamado posicional, pois cada algarismo, além do seu valor intrínseco, possui um peso que lhe é atribuído em função da posição que ele ocupa no número.

Exemplo 19. *O número 12019, na base 10, é a representação de*

$$1 \times 10^4 + 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 9 \times 10^0.$$

Teorema 2: *Dados a, $b \in \mathbb{N}$ com $b > 1$, existem números naturais $c_0, c_1, \ldots, c_n$ menores do que b, univocamente determinados, tais que $a = c_0 + c_1 b + c_2 b^2 + \ldots + c_n b^n$.*

Demonstração: Vamos demonstrar o teorema usando indução sobre a. Se $a = 0$, ou se $a = 1$, basta tomar $n = 0$ e $c_0 = a$. Supondo o resultado válido para todo natural menor do que a, vamos prová-lo para a. Pela divisão euclidiana, existem q e r únicos tais que

$$a = bq + r, \text{ com } r < b.$$

Como $q < a$, pela hipótese de indução, segue-se que existem números naturais n' e $d_0, d_1, \ldots, d_{n'}$, com $d_j < b$, para todo j, tais que

$$q = d_0 + d_1 b + \ldots + d_{n'} b^{n'}.$$

Levando em conta as igualdades acima, temos que

$$a = bq + r = b\left(d_0 + d_1 b + \ldots + d_{n'} b^{n'}\right) + r,$$

donde o resultado segue-se pondo $c_0 = r$, $n = n' + 1$ e $c_j = d_{j-1}$ para $j = 1, \ldots, n$. A representação dada no teorema acima é chamada de expansão relativa à base b. Quando $b = 10$, essa expansão é chamada *expansão decimal* e quando $b = 2$, ela toma o nome de *expansão binária* e assim sucessivamente.

6 Divisibilidade do determinante de uma matriz

Vamos tomar $\mathbb{Z}$ como o conjunto dos números inteiros, $\mathbb{N}$ como o conjunto dos números naturais e $M_n(\mathbb{Z})$ como o conjunto das matrizes de ordem n com elementos inteiros. Denotaremos o determinante da matriz A por $\det(A)$.

Um número com dois algarismos ab, é escrito na base 10 como $a \cdot 10^1 + b \cdot 10^0$, com três algarismos abc, temos $a \cdot (10^2) + b \cdot (10^1) + c \cdot (10^0)$. Generalizando, temos um número

$$a_1a_2a_3 \ldots a_n = a_1 \cdot \left(10^{n-1}\right) + a_2 \cdot \left(10^{n-2}\right) + \ldots + a_n \cdot \left(10^0\right)$$

onde $0 \leq a_i \leq 9$, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, n$ e $a_1 \neq 0$.

Exemplo 20. *Dada uma matriz* $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$*, usando os elementos que formam as linhas de A temos,* $72 = 7 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$ *e* $18 = 1 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$.

6.1 A divisibilidade do determinante de ordem 2

Iniciamos a seção com a seguinte proposição

Proposição 2: *Sejam* $e, f \in \mathbb{N}$ *números de dois dígitos, onde* $e = 10a + b$, $f = 10c + d$ *e* $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. *Se* K *é um inteiro positivo que divide* e, f *simultâneamente, então* K *divide* $\det(A)$.

Demonstração: As duas equações $10a + b = e$ e $10c + d = f$, correspondem ao sistema

$$\begin{cases} 10a + b = e \\ 10c + d = f \end{cases}.$$

Multiplicando, as equações desse sistema por $(-c)$ e (a), respectivamente, obtêm-se

$$\begin{cases} -10ac - bc = -ec \\ 10ac + ad = af \end{cases}.$$

Somando as duas equações, tem-se

$$ad - bc = af - ec.$$

Chamando $e = Kr$ e $f = Kg$, onde $r, g \in \mathbb{Z}$, obtêm-se,

$$\begin{aligned} ad - bc &= a\,(Kg) - c\,(Kr) \\ ad - bc &= K\,(ag - cr) \end{aligned}$$

Logo, $K \mid (ad - bc)$, ou seja, $K \mid \det(A)$.

Exemplo 21. *Os números* 72 *e* 18 *são divisíveis por* 3. *A matriz* $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$, *tem* $\det(A) = 7 \cdot 8 - 1 \cdot 2 = 54$, *que também é divisível por 3.*

Exemplo 22. *Os números* 16 *e* 36 *são divisíveis por* 4. *A matriz* $B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, *tem* $\det(B) = 1 \cdot 6 - 3 \cdot 6 = -12$, *que também é divisível por* 4.

Nestes exemplos, vemos que se dois números inteiros positivos a_1a_2 e b_1b_2 de dois dígitos são múltiplos de um inteiro positivo K, então o determinante da matriz A, cujos elementos formam os números inteiros positivos a_1a_2 e b_1b_2, também é divisível por K. Note que mesmo quando $\det(A) = 0$, K também divide o $\det(A)$.

6.2 A divisibilidade do determinante de ordem 3

Agora vamos olhar em particular o caso do determinante de uma matriz quadrada de ordem 3.

Proposição 3: *Sejam* $m = 100a + 10b + c$, $n = 100d + 10e + f$ *e* $p = 100g + 10h + i$, *números inteiros positivos e* $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$. *Se* K *é um inteiro positivo que divide* m, n *e* p *simultâneamente, então* K *divide* $\det(A)$.

Demonstração: Tomando as equações $m = 100a + 10b + c$, $n = 100d + 10e + f$ e $p = 100g + 10h + i$, conseguimos formar o sistema

$$\begin{cases} 100a + 10b + c = m \\ 100d + 10e + f = n \\ 100g + 10h + i = p \end{cases}$$

se $a = d = g = 0$, então $\det(A) = 0$, que é divisível por K.

Daqui, podemos assumir que um dos valores a, d ou g não é zero. Sem perda de generalidade, supondo que $d \neq 0$ e multiplicando a 1º equação do sistema acima por (d), a 2º equação por $(-a)$ e somando essas duas equações, temos

$$100ad + 10bd + cd - 100ad - 10ae - af = md - an$$

$$10(bd - ae) + (cd - af) = md - an \qquad \text{(Eq. A)}$$

De modo análogo, multiplicando a 2º equação por (g) e a 3º equação por $(-d)$ e somando essas equações, temos

$$100dg + 10eg + fg - 100dg - 10dh - id = ng - dp$$

$$10(eg - dh) + (fg - id) = ng - dp \qquad \text{(Eq. B)}$$

Ainda multiplicando a Eq. A por $[-(ge - dh)]$ e a Eq. B por $[(bd - ea)]$, obtemos

$$-10(bd - ae)(ge - dh) - (cd - af)(ge - dh) = -(md - an)(ge - dh) \qquad \text{(Eq. C)}$$

e

$$10\,(ge-dh)\,(bd-ae)+(fg-id)\,(bd-ea)=(ng-dp)\,(bd-ea) \qquad \text{(Eq. D)}$$

e somando as Eqs. C e D temos:

$$(fg-id)\,(bd-ea)-(cd-af)\,(ge-dh)=(ng-dp)\,(bd-ea)-(md-an)\,(ge-dh)$$

simplificando o primeiro membro da equação resultante, temos

$$d\,(aei-afh+bfg-bdi+cdh-ceg)$$

enquanto que no segundo membro, temos

$$d\,(dhm-egm-ahn+bdp-bgn-aep)$$

como $d \neq 0$, podemos dividir ambos os membros por d e obter

$$aei-afh+bfg-bdi+cdh-ceg=dhm-egm-ahn+bdp-bgn-aep.$$

O primeiro membro dessa igualdade é o $\det(A)$. Como m, n e p são divisíveis por K e cada uma das parcelas do segundo membro da equação também é divisível por K, concluimos que K divide $\det(A)$. É importante perceber que, embora nosso método funcione, isto pode ser trabalhoso quando a matriz dada for de ordem superior a 3. Isto exige uma abordagem diferente.

6.3 A divisibilidade do determinante de ordem n

Aqui generalizamos o resultado para o determinante de uma matriz de ordem n, com o

Teorema 3: *Seja* $A=[a_{ij}]\in M_n(\mathbb{Z})$ *e um número inteiro* K*, não nulo. Tomando* $b=\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{bmatrix}^T$*, onde* $b_i=a_{i1}10^{n-1}+a_{i2}10^{n-2}+\ldots+a_{in}10^0$*. Se* $b_1,b_2,\ldots,b_n$ *são todos divisíveis por* K*, então* $\det(A)$ *também é divisível por* K*.*

Demonstração: Seja dada uma matriz $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{Z})$. Note que se A é singular, então $\det(A) = 0$, que é divisível por K. Assumiremos que A é não singular. Supondo A não singular e $z = \begin{bmatrix} 10^{n-1} & 10^{n-2} & \dots & 10^0 \end{bmatrix}^T$, então temos $A \cdot z = b$. Temos que para cada $i = 1, 2, \dots, n$, $b_i = Kr$ para algum $r_i \in \mathbb{Z}$. Tomando $r = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \dots & r_n \end{bmatrix}^T$, então $b = Kr$. Agora, como já sabemos que $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot adjA$, segue-se que

$$z = A^{-1}b = \frac{1}{\det(A)} \cdot adjA \cdot b = \frac{1}{\det(A)} \cdot adjA \cdot Kr$$

logo,

$$\det(A) \cdot z = adjA \cdot K \cdot r$$

$$\frac{\det(A)}{K} \cdot z = adjA \cdot r$$

como $adjA \in M_n(\mathbb{Z})$, então $\frac{\det(A)}{K} \in \mathbb{Z}$. Assim, concluímos que $K \mid \det(A)$.

7 Considerações finais

Acreditamos que, com este enfoque dado à correlação entre os conhecimentos de matrizes, determinantes e permutações, é possível desenvolver conceitos talvez menos usuais, mas acessíveis aos estudantes do ensino médio. Uma das motivações para o desenvolvimento deste trabalho, foi justamente a possibilidade de apresentar aos alunos do ensino médio essa correlação. Durante o exercício da docência, percebe-se que muitos livros didáticos usados no ensino médio não mostram a conexão entre permutações e determinantes e nem a possibilidade da divisibilidade do determinante de uma matriz ser um resultado passível de estudo. A falta dessa correlação dá aos alunos a falsa impressão de que a matemática é um conjunto de regras prontas. Diante disto, o estudante atua como um mero expectador e é estimulado a seguir métodos tradicionais de memorização e repetição, sem associar de forma adequada suas próprias ideias e o que lhe foi apresentado. Esperamos que as ideias aqui apresentadas possam tornar-se material útil de leitura, que estimule o desenvolvimento de um senso crítico nos estudantes e desperte nos professores um interesse em incorporar os conceitos aqui desenvolvidos em sua prática de ensino, tanto em sala de aula, quanto no direcionamento extra-classe, em estímulo à descoberta, para estudantes interessados e curiosos.

Referências

[1] Boldrini, J.L. e outros, *Álgebra Linear*; 3º edição; Editora Harbra Ltda, São Paulo, 1986.

[2] Boyer, Carl B., *Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula*; v.6, Editora Atual Ltda, São Paulo, 1993.

[3] Hefez, Abramo, *Elementos de Aritmética*; 2º edição, Rio de Janeiro, SBM, 2011.

[4] Kolman, Bernard; Hill, David R., *Álgebra Linear com Aplicações*; 9º edição, Editora LTC, Rio de Janeiro, 2013.

[5] Muir, Thomas., *The Theory of Determinants*; Dover Publications, INC, New York, 1960.

[6] Pant, Sujan; Merino, Dennis I.; *Divisibility of the Determinant of a Class of Matrices with Integer Entries*; Problem Department, Pi Mu Epsilon Journal, 12 No.8 (2008) 494-496.

[7] Silva, Valdir Vilmar da.,*Números: Construção e Propriedades*; Goiânia, Editora UFG, 2005.

[8] Steinbruch, Alfredo; Winterle, Paulo, *Álgebra Linear*; 2º edição; Pearson Makron Books, São Paulo, 1987.