UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MMATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ORLANDO FERREIRA DE MORAES JÚNIOR

O PRINCÍPIO DA CASA DE POMBOS E A CONTAGEM DUPLA

FORTALEZA
2014

ORLANDO FERREIRA DE MORAES JÚNIOR

O PRINCÍPIO DA CASA DE POMBOS E A CONTAGEM DUPLA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.
Orientador: Prof. José Robério Rogério.

FORTALEZA

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

M821p Moraes Júnior, Orlando Ferreira de
O princípio da casa de pombos e a contagem dupla / Orlando Ferreira de Moraes Júnior. – 2014.
55 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Robério Rogério.

1. Análise combinatória. 2. Raciocínio. 3. Indução (Lógica). I. Título.

CDD 511.6

ORLANDO FERREIRA DE MORAES JÚNIOR

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS E A CONTAGEM DUPLA

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 27 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Robério Rogério (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda
Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Aos meus pais, irmãos, esposa e filha.

E, principalmente a **Deus**.

AGRADECIMENTOS

A meu orientador Prof. José Robério Rogério que me deu oportunidade de aprender muito mais e por acreditar no potencial.

A todos os meus professores do ensino fundamental e médio, e em especial aos da escola estadual Presidente Humberto Castelo Branco, pois me incentivaram a acreditar que era possível chegar numa universidade pública.

Aos meus professores do Profmat que são extremamente competentes e, em especial ao Prof. Jonatan Floriano da Silva.

RESUMO

Em Combinatória, existem dois tipos de problemas: os de existência e os de contagem. No entanto, é assunto bastante fascinante e ao mesmo tempo desafiador, pois até mesmo os professores mais ágeis se confundem com determinados problemas. Com isso, em alguns casos usamos um pouco de intuição e lógica para resolvermos problemas diferenciados, e aí entra o Princípio da Casa de Pombos e a Contagem Dupla. Esses dois tópicos são extremamente úteis tanto na resolução de problemas, quanto na demonstração de certos teoremas, sejam na teoria dos números ou até mesmo na geometria. O Princípio da Casa de Pombos baseia-se no fato de que se temos n objetos para serem distribuídos em k gavetas, onde n é maior do que k, então pelo menos uma das gavetas abrigará no mínimo dois objetos. Este fato óbvio, que qualquer criança compreende, não deve ser subestimado, pois, como veremos no capítulo um, ele tem um grande poder para resolver problemas de existência. Já a Contagem Dupla baseia-se numa contagem de duas maneiras distintas de determinada situação e que resultem no mesmo resultado. Sendo assim, os dos dois conceitos apresentados tornam-se bastante óbvios, porém essencialmente úteis na compreensão lógica de matemática.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Contagem. Princípios fundamentais. Raciocínio Lógico. Indução intuitiva.

ABSTRACT

In combinatorics, there are two types of problems: the existence and the count. Is it quite fascinating and at the same time challenging, because even the teachers more agile overlap in certain problems. With that, in some cases we use a bit of intuition and logic to solve different problems, and then enters the pigeonhole principle and the Double Count. These two are extremely useful topical both in problem solving, as in the demonstration of certain theorems, are in number theory or even in geometry. The pigeonhole principle is based on the fact that if we have n objects to be distributed in k drawers, where n is greater than k, then at least one of the drawers will house at least two objects. This obvious fact, that any child understand, should not be underestimated, since, as we shall see in chapter one, he has a great power to solve problems of existence. The Double Count is based on a count of two distinct ways in a particular situation and that result in the same outcome. Thus, the two concepts presented become quite obvious, but essentially useful in understanding mathematical logic.

Keywords: Combinatorial Analysis. Count.Fundamental principles.LogicalReasoning. Intuitiveinduction.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O ensino de Análise Combinatória no ensino regular é bastante complexo, pois em determinadas situações são utilizadas “fórmulas” de uma forma tão exaustiva, onde a ideia principal de aprendizagem e assimilação do conteúdo é deixado um pouco de lado. A intuição matemática é tão importante para o pleno desenvolvimento do aluno, que em alguns tópicos, abordados em sala de aula são melhores compreendidos quando induzimos o aluno a pensar através de um raciocínio lógico obtendo alternativas que os auxiliem a resolver problemas.

Com isso, neste trabalho procuro apresentar um pouco sobre o Princípio da Casa de Pombos ou Princípio das Gavetas e A Contagem Dupla. Esses dois assuntos não aparecem formalmente nos livros didáticos da escola básica, mas deve-se estimulá-los em sala de aula para uma melhor concepção de Combinatória.

O Princípio da Casa de pombos foi utilizado pela primeira vez por G. LejeuneDirichlet em 1834 com o nome de *Schubfachprinzip* (Princípio das Gavetas). Descendente de família francesa, Dirichlet nasceu em 1805 na Alemanha, estudou na Universidade de Paris e ocupou cargos na Universidade de Breslau e na Universidade de Berlim. Em 1855, ele foi escolhido para ser sucessor de Gauss na Universidade de Göttingen. Dirichlet morreu em 1859 deixando importantes contribuições em diversas áreas da matemática com destaque para o estudo da Teoria dos Números.

No primeiro capítulo temos algumas definições do PCP, sendo:“*Se distribuirmos n + 1 pombos em n casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos”*a mais abordada nos materiais didáticos, artigos, orientações, entre outros. Alguns exemplos interessantes estão inseridos neste capítulo, de modo que ao resolvermos e compreendermos diversas situações problemas nos ajudam a assimilar melhor o assunto abordado. Este princípio poderá ser utilizado tanto como um *resultado matemático*, quanto como um *método de prova*.

No capítulo seguinte, extrai e inseri algumas adaptações do artigo dos autores
Márcia R.

Cerioli, Renata de Freitas e Petrucio Viana relacionado a aplicações do PCP nos
Teoremasde

Erdös-Szekeres sobre subsequências monotônicas, a prova do Lema de Dilworth sobre ordens parciais e a prova do Teorema de Ramsey sobre subgrafos monocromáticos.

Por fim, o último capítulo é dedicado à Contagem Dupla, que trata de um método de contagem utilizado para se chegar a um mesmo resultado pensando de maneiras diversas e até mesmo com o intermédio de áreas distintas da matemática.

Sendo assim, espero que a leitura deste texto seja bastante compreensívele que possa auxiliar de alguma forma, pessoas interessadas em conhecer sobre os conteúdos abordados por mim neste trabalho, assim como me foi útil diversos trabalhos apresentados por alunos da Universidade Federal do Ceará – UFC.

2 O PRINCÍPIO DA CASA DE POMBOS

Alguns problemas matemáticos sobre combinatória são resolvidos através do *princípio de Dirichlet*, bastante conhecido como o *princípio da casa de pombos* (PCP). Inicialmente, este capítulo apresenta a o Princípio da Casa de Pombos, e em seguida, com a apresentação de alguns problemas de diversos níveis de dificuldade, embasamos e consolidamos o conceito do PCP.É de fácil compreensão a sua ideia lógica, porém em determinadas situações ele requer um conhecimento bem apurado de algumas áreas importantes em Matemática, como por exemplo: Teoria dos Números e Geometria.

Exemplo: Em um conjunto com três pombos, existem pelo menos dois pombos do mesmo sexo.

Demonstração. Este enunciado é bastante óbvio, mas uma justificativa bem detalhada para ele pode ser a seguinte.

Primeiramente, observe que queremos mostrar a existência de um subconjunto de pombos, cujos elementos satisfazem à condição de serem do mesmo sexo.

Para isto, devemos considerar os três pombos, e dois conjuntos identificados por M(representando a casa de pombo macho) e por F(representando a casa de pombo fêmea). Vamos colocar cada pombo em apenas uma casa, de acordo com o seguinte critério: o pombo macho vai para casa M; e o pombo fêmea (no caso, pomba) vai para casa F. Vejamos as seguintes possibilidades:

- Três pombos na casa M;
- Dois pombos na casa M e um pombo na casa F;
- Um pombo na casa M e dois pombos na casa F;
- Três pombos na casa F.

Observamos, que em cada uma das possibilidades acima, temos que existe uma casa com pelo menos dois pombos do mesmo sexo.

A resolução deste problema aplica-se a ideia do PCP, onde esse princípio dá origem a um método importantíssimo que pode ser usado na prova de que certa configuração existe. Para tanto, alguns objetos são considerados como pombos, outros como casa de pombos, e os pombos são colocados nas casas de pombos. O PCP, simplesmente, garante que pelo menos uma das casas de pombos contém mais do que certo número de pombos. Esta casa de pombo, obtida pelo PCP, usualmente nos leva a configuração procurada.

2.1 Proposição: Princípio da casa dos pombos

Se distribuirmos n + 1 pombos em n casas, então alguma das casas contém dois ou mais pombos.

Demonstração. Se alocarmos um único pomboP_j, com $1 \leq j \leq n$, em cada casa C_j, sobrará um único pomboP_{n+1}, que deverá alocar-se em qualquer uma das n casas. Agora, suponhamos pelo contrário que em cada casa não existe mais do que um pombo, então ao somarmos todos os pombos contidos nas n casas não teremos mais do que n pombos, o que é um absurdo, pois por hipótese temos n + 1 pombos distribuídos em n casas.

Exemplo: Mostre que num grupo com 13 alunos, no mínimo dois alunos fazem aniversário no mesmo mês.

Solução. Inicialmente devemos identificar o que representa os pombos e as casas de pombos. Nesta situação têm-se:

- Pombos: alunos;
- Casas de pombos: os meses do ano;

Então, pelo PCP, para 13 pombos e 12 casas de pombos, temos que uma das casas deve conter pelo menos dois pombos. Ou seja, pelo menos dois desses alunos fazem aniversário do mesmo mês.

Exemplo: Uma urna contém bolas brancas, pretas e amarelas. Quantas bolas serão retiradas, no mínimo, para termos a certeza de retirarmos duas bolas da mesma cor?

Demonstração. Primeiramente, temos que nomear quem representa os pombos e as casas de pombos. Então:

- Pombos: bolas retiradas;
- Casas de pombos: cores branca, preta e amarela;

Logo, o PCP, garante que ao retirarmos 3 + 1 = 4 bolas da urna, que temos pelo menos duas bolas com a mesma cor. Ou seja, têm-se 4 pombos para distribuirmos entre as 3 casas de pombos existentes.

Exemplo: Prove que num conjunto com três números inteiros; existe pelo menos dois deles, cuja soma e diferença entre eles seja divisível por 2.

Prova. Seja o conjunto P $=\{x_1, x_2, x_3\}$, dos números inteiros; sabemos que $x_i = 2q_i + r_i$, onde $r_i \in \{0, 1\}$ e $i = 1, 2, 3$. Considerando P os pombos e r_i as casas de pombos. O PCP nos garante, que no mínimo dois dos elementos de P deixam o mesmo resto na divisão por dois.

Com isso, temos $r_k = r_j$ e $1 \leq j < k \leq 3$. Daí,

1º caso: $x_k - x_j$ é divisível por 2.

$$x_k - x_j = 2q_k + r_k - 2q_j - r_j$$

$$x_k - x_j = 2q_k - 2q_j$$

$$x_k - x_j = 2(q_k - q_j)$$

2º caso: $x_k + x_j$ é divisível por 2.

$$x_k + x_j = 2q_k + r_k + 2q_j + r_j$$

$$x_k + x_j = 2q_k + 2q_j + r_k + r_j$$

$$x_k + x_j = 2\left(q_k + q_j\right) + 2r_k$$

$$x_k + x_j = 2(q_k + q_j + r_k)$$

Exemplo: Prove que, dentre os números 5, 5^2, 5^3, ..., 5^{13}, pelo menos um deixa resto 1 quando dividido por 14.

Demonstração. Inicialmente, verificamos que 5^k e 14 são primos entre si, com k natural. Agora, com o auxílio do Princípio da casa de pombos, temos:

- Pombos: 5^0, 5, 5^2, 5^3, ..., 5^{13};
- Casa de pombos: o conjunto {1, 2, 3, 4, ...,13} dos possíveis restos das divisões de 5^k por 14;

Portanto, pelo PCP, temos que 5^n e 5^m deixam os mesmos restos na divisão por 14, pois temos 14 pombos e 13 casas de pombos. Tomando, $0 \leq n < m \leq 13$, tem-se:

$$5^m - 5^n = 14q$$

$$5^n(5^{m-n} - 1) = 14q$$

$$5^{m-n} - 1 = 14q'$$

$$5^{m-n} = 14q' + 1.$$

Com isso, concluímos que 5^{m-n} deixa resto 1 na divisão por 14; com $0 < m - n \leq 13$.

Exemplo: Generalize o problema anterior mostrando que, se *a* e *n* são naturais primos entre si, então pelo menos um dos números $a, a^2, \dots, a^{n-1}$ deixa resto 1 quando dividido por *n*.

Demonstração. Analogamente, faremos a prova com a utilização do PCP.

Ao inserirmos a^0 no rol dos números para dividi-los por *n* e em seguida observar os restos destas divisões. Temos;

Os números $a^0, a^1, a^2, \dots, a^{n-1}$ são considerados os pombos, e o conjunto

{1, 2, 3, 4, ..., n – 1} com elementos que representam os possíveis restos da divisão de a^k por n são considerados as casas de pombos, sabendo que a e n são primos entre si.

Portanto, pelo PCP, a^i e a^j $(0 \leq i < j \leq n - 1)$ deixam os mesmos restos quando dividimos por n, pois temos n pombos e n – 1 casas de pombos. Logo,

$$a^j - a^i = nq$$

$$a^i\left(a^{j-i} - 1\right) = nq$$

$$a^{j-i} - 1 = nq'$$

$$a^{j-i} = nq' + 1.$$

Com isso, concluímos que a^{j-i} deixa resto 1 ao dividirmos por *n*.

2.2 Proposição: Generalização do princípio da casa de pombos

Se distribuirmos nk + 1 pombos em n casas, então alguma das casas contém pelo menos k + 1 pombos.

Demonstração. A prova deste enunciado é similar à proposição 1.2. Supondo que em cada casa não existe mais do k pombos, então contando todos os pombos contidos nas n casas não teremos mais do que nk pombos, entrando em contradição com o proposto no enunciado onde temos nk + 1 pombos distribuídos em n casas. Ao tomarmos k = 1, temos a versão mais simples do PCP.

Há várias generalizações interessantes do princípio da casa de pombos. A proposição a seguir mostra a que é, provavelmente, a mais útil das proposições vistas até o momento; para o enunciado da mesma lembremos que, dado um real x, a parte inteira de x, denotada $\lfloor x \rfloor$, é o maior inteiro menor ou igual a x.

2.3 Proposição

Se distribuirmos m pombos em n casas de pombos, então alguma das casas contém pelo menos $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ + 1 pombos.

Demonstração. Suponha, por contradição, que distribuímos os m pombos nas n casas de pombos, mas nenhuma delas ficou com pelo menos $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ + 1 pombos. Então cada uma das n casas ficou com, no máximo, $\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ pombos. Portanto, todas as casas juntas contêm no máximo, $n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor$ pombos.

Mas, como

$$n\left\lfloor \frac{m-1}{n} \right\rfloor \leq n\left(\frac{m-1}{n}\right) = m - 1 < m,$$

temos uma contradição, uma vez que temos m pombos.

Exemplo: Prove que, num grupo de 50 pessoas, existem pelo menos cinco que nasceram num mesmo mês do ano.

Demonstração. Tomemos o número de pessoas do grupo como pombos e os doze meses do ano como as casas de pombos. A propriedade é a de por cada pessoa em uma única casa de pombo; ou seja, o mês de seu nascimento. O princípio da casa de pombos garante agora que ao menos uma casa conterá, pelo menos,

$\left\lfloor \frac{50-1}{12} \right\rfloor$ + 1 = 5 pessoas. Assim, ao menos cinco pessoas terão nascido num mesmo do ano.

Exemplo: Dados 8 números naturais distintos, sendo que nenhum deles é maior do que 15. Mostre, que pelo menos, três pares deles têm a mesma diferença positiva.

Demonstração. Seja $\{a_{1,}\ a_{2,}\ a_3,\ a_4,\ a_{5,}\ a_6,\ a_7,\ a_8\}$ o conjunto dos oito números naturais; tais que

$1 \leq a_i < a_j \leq 15$ e $1 \leq i < j \leq 8$. Deve-se mostrar que, existem ao menos três pares $(a_j - a_i)$. Então:

- Pombos: $(a_j - a_i)$;
- Casas de pombos: elementos do conjunto {1, 2, 3,...,14};

Como queremos formar pares utilizando $\{a_{1,}\ a_{2,}\ a_3,\ a_4,\ a_{5,}\ a_6,\ a_7,\ a_8\}$ com valores entre 1 e 15, e existem $\binom{8}{2}$= 28 possíveis pares. Logo temos 28 pombos para serem distribuídos em 14 casas de pombos. Com o auxílio do PCP, conseguimos garantir apenas que pelo menos dois dos pares de números têm a mesma diferença positiva. Com o intuito de obtermos o resultado desejado, note que, na casa 14 pode-se ter apenas o par {1,15}, já que o número 14 só poderáacontecer de uma única maneira; ou seja, 15 – 1 = 14. Assim, temos dois casos a serem verificados. Veja:

1º caso: Tanto o número 1 comoo 15, aparece no conjunto $\{a_{1,}\ a_{2,}\ a_3,\ a_4,\ a_{5,}\ a_6,\ a_7,\ a_8\}$. Neste caso, retirando o par {1, 15}, têm-se 27 pombos para serem distribuídos entre 13 casas de pombos. Assim, pelo menos três dos pares de números têm a mesma diferença positiva.

2º caso: Agora, apenas um dos números 1 e 15, aparece no conjunto$\{a_{1,}\ a_{2,}\ a_3,\ a_4,\ a_{5,}\ a_6,\ a_7,\ a_8\}$. Neste caso, a casa representada pela diferença 14 nunca será ocupada. Logo, o PCP garante que, se há 28 pombos para serem distribuídos entre 13 casas de pombos. Com isso, pelo menos três dos pares de números terá a mesma diferença positiva.

Portanto, analisando os dois casos, conclui-se que três pares $\{a_i, a_j\}$ têm a mesma diferença positiva, como queríamos demonstrar.

Exemplo: Prove que existem duas potências de 3 cuja diferença é divisível por 1997.

Demonstração. Primeiramente, temos {0, 1, 2, ..., 1996} como o conjuntos dos possíveis restos da divisão de um número inteiro por 1997. Considere $\{3^0, 3^1, 3^2, ..., 3^n\}$ como o conjunto que representa as potências de três, com expoente inteiro não negativo. Se tomarmos n = 1997, temos 1998 potências.

Portanto, o princípio da casa de pombos, garante que, duas dessas potências têm o mesmo resto quando divididos por 1997. Vejamos:

Sejam 3^i e 3^j essas potências, com $0 \leq i < j \leq 1997$; logo, $3^j - 3^i = 1997q$.

Exemplo: Um certo livreiro vende pelo menos um livro por dia. Sabendo que o livreiro vendeu 463 livros durante 305 dias consecutivos, mostre que em algum período de dias consecutivos o livreiro vendeu exatamente 144 livros.

Demonstração. A soma de livros vendidos do 1º ao último dia é 463. Considere S_n como a soma dos livros vendidos do 1º dia ao enésimo dia, com $1 \leq n \leq 305$. Temos que:

$S_1 \geq 1, S_2 \geq 2, S_3 \geq 3, ..., S_{305} = 463$.

Ou seja; $1 \leq S_1 < S_2 < S_3 < ... < S_{305} = 463$.

Note que, $S_5 - S_1$ é a quantidade de livros vendidos entre o 1º e o 5º dia. Considere agora,

$1 \leq i < j \leq 365$. Devemos mostrar que,existem i e j; tais que, $S_j - S_i = 144$. Essa diferença representa a quantidade de livros vendidos em (j – i) dias consecutivos.

Observe que a sequência abaixo é crescente, pois é vendido por dia pelo menos 1 livro.

$S_1 < S_2 < S_3 < ... < S_{305}$ (I);

e por conseguinte, $144 + S_1 < 144 + S_2 < 144 + S_3 < ... < 144 + S_{305}$ (II).

Então, das sequências (I) e (II), temos:

- 305 + 305 = 610 números;
- 463 + 144 = 607 valores possíveis.

Pelo princípio da casa de pombos, os números equivalem aos pombos e os possíveis valores às casas de pombos. Logo, S_j dasequência (I) e $S_i + 144$ da sequência (II), têm o mesmo valor.Com isso,

$S_j = S_i + 144$

$S_j - S_i = 144$.

Portanto, em algum período de dias consecutivos o livreiro vendeu exatamente 144 livros.

Exemplo: Numa cidade com n habitantes. Mostre que existem duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas.

Demonstração. Em primeiro lugar, qualquer um dos n habitantes conhece no mínimo 0 e no máximo n – 1 pessoas nessa cidade. Há dois casos a considerar:

1º caso: Cada pessoa conhece pelo menos outra pessoa na cidade.

- Pombos: os habitantes da cidade;
- Casa de pombos: as possíveis quantidades de conhecidos de cada habitante;

O princípio da casa de pombos, garante que, se têm n pombos para distribuir em n – 1 casas de pombos, pelo menos dois habitantes conhecem o mesmo número de pessoas na cidade.

2º caso: Existe pelo menos um habitante que vive solitário nessa cidade; ou seja, que não conhece nenhuma outra na cidade. Com isso, não existe a possibilidade de que todos os habitantes se conheçam.

Analogamente ao pensamento do caso anterior, temos que ninguém conhece todos na cidade, de modo que podemos dizer que, pelo menos dois habitantes têm o mesmo número de conhecidos nessa cidade.

Portanto, concluímos que, pelo menos duas pessoas, conhecem exatamente o mesmo número pessoas.

Exemplo: Mostre que se do conjunto {1, 2, 3, ..., 2n} retirarmos n + 1 números ao acaso, então existem dois em que um é múltiplo do outro.

Demonstração. Veja em primeiro lugar, que qualquer número inteiro a se escreve sob a forma$a = 2^k b$, onde k é um número inteiro não negativo e b um número ímpar.

Então, seja a qualquer número pertencente ao conjunto {1, 2, 3, ..., 2n}. Sabemos também, que a pode ser escrito na forma $a = 2^k b$e que b é um dos números ímpares

1, 3, 5, ..., 2n – 1. Aplicando o princípio da casa de pombos, temos:

- Pombos: os n + 1 números escolhidos ao acaso do conjunto {1, 2, 3, ..., 2n};
- Casas de pombos: possíveis valores para b, onde b ∈ {1, 3, 5, ..., 2n – 1};

Logo, têm-se n + 1 pombos para distribuirmos em n casas de pombos. Assim, ao escolhermos $n + 1$ números do conjunto {1, 2, 3, ..., 2n} ao acaso, teremos pelo menos dois deles com a mesma parte ímpar, por exemplo, $a_1 = 2^i b$ e$a_2 = 2^j b$ (sendo i ≠ j).

Suponha, sem perda de generalidade, que i <j. Então, $\frac{a_2}{a_1} = \frac{2^j b}{2^i b} = \frac{2^j}{2^i} = 2^{j-i}$, e como j – i >0, conclui-se que a_2é múltiplo de a_1.

Exemplo: Seja A um conjunto finito e não vazio de números naturais, com m elementos. Então existe um subconjunto B de A tal que m divide a soma dos elementos de B.

Demonstração. Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_m\}$. Observe que queremos provar a existência de um certo subconjunto $B = \{b_1, b_2, b_3, ..., b_n\}$ de A, com $n \leq m$, cuja soma dos elementos $b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ é um múltiplo de m. Para isto, vamos considerar as somas a seguir:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_m = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_m$$

Temos então dois casos a considerar. Veja:

1º caso: Se m divide uma das somas $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_i$, com $1 \leq i \leq m$, basta considerar o conjunto $B = \{a_1, a_2, a_3, ..., a_i\}$.

2º caso: Se nenhuma das somas $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_i$, com $1 \leq i \leq m$ é um múltiplo de m usaremos o princípio da casa de pombos para provar a afirmação do enunciado. Então,

- Pombos: são os elementos do conjunto $\{ S_1, S_2, S_3, ..., S_m\}$;
- Casa de pombos: são os elementos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., m – 1\}$ os quais são os possíveis restos da divisão de S_i por m;

Assim, pelo PCP, temos que duas das somas deixam o mesmo resto ao dividirmos por m, pois temos m pombos para distribuirmos entre m – 1 casas de pombos.

Sejam $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_i$ e $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_j$, com $i < j$, estas somas. Temos que

$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_i$ e $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_j$ deixam o mesmo resto na divisão por m.

Logo, se dois números a e b, com $a > b$ deixam o mesmo resto na divisão por m, então m divide a diferença entre a e b.

De fato, se $a = qm + r$ e $b = q'm + r$, com $q > q'$, então:

$$a – b = (qm + r) – (q'm + r) = qm – q'm = (q – q')m.$$

Assim, temos que m divide

$a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + ... + a_j = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_j) – (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_i)$.

Basta, então considerar o conjunto $B = \{a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3},...,a_j\}$.

Exemplo: Seja $A = (a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n+1})$ uma sequência de $2n + 1$ números inteiros, e

$(a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, ..., a_{i(2n+1)})$ uma permutação de A. Temos que o produto

$(a_{i1} – a_1)(a_{i2} – a_2)(a_{i3} – a_3)\cdot ...\cdot(a_{i(2n+1)} – a_{2n+1})$

é um número par.

Demonstração. Observe que o produto $(a_{i1} – a_1)(a_{i2} – a_2)(a_{i3} – a_3)\cdot ...\cdot(a_{i(2n+1)} – a_{2n+1})$ é par se, e somente se, existe um fator $a_{ij} – a_j$, com $1 \leq j \leq 2n + 1$, que é um número par. Entãoexiste um número j, com $1 \leq j \leq 2n + 1$, tal que os números a_{ij} e a_j são ambos pares ou ambos ímpares.

Usando o princípio da casa de pombos, considere:

- Pombos: são os elementos da sequênciaA $= (a_1, a_2, a_3, ..., a_{2n+1})$;
- Casa de pombos: uma casa é a palavra par e a outra a palavra ímpar;

Pelo PCP, existe uma casa com pelo menos $\left\lfloor \frac{2n+1-1}{2} \right\rfloor + 1 = n + 1$ pombos.

Sejam $b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}$ estes números. Temos que $b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}$ são todos pares ou todos ímpares.

Sejam, também, $c_1, c_2, c_3, ..., c_{n+1}$ os elementos que correspondem aos elementos $b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}$, de acordo com a permutação de A.

Observe que $\{b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}\} \cap \{ c_1, c_2, c_3, ..., c_{n+1}\} \neq \emptyset$. De fato, se fosse

$\{b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}\} \cap \{ c_1, c_2, c_3, ..., c_{n+1}\} = \emptyset$, então a união

$\{b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}\} \cup \{ c_1, c_2, c_3, ..., c_{n+1}\}$ teria $(n + 1) + (n + 1) = 2n + 2 > 2n + 1$ elementos, uma contradição.

Agora, seja $d \in \{b_1, b_2, b_3, ..., b_{n+1}\} \cap \{ c_1, c_2, c_3, ..., c_{n+1}\}$. Ou seja, $d = b_k = c_l$, onde

$1 \leq k, l \leq n + 1$.

Temos que, $c_l – b_l = b_k – b_l$ é par, pois b_k e b_l são ambos pares ou ambos ímpares.

Como $c_l – b_l$ é um fator de $(a_{i1} – a_1)(a_{i1} – a_2)(a_{i3} – a_3)\cdot ...\cdot(a_{i(2n+1)} – a_{2n+1})$, temos que este último produto é par.

Finalmente, também podemos enunciar o princípio da casa de pombos na linguagem das aplicações. De fato, sejam P e C conjuntos finitos e não vazios. Uma função de P em C relaciona elementos de P a elementos de C, de maneira que:

- Cada elemento de P está associado a algum elemento de C;
- Nenhum elemento de P está associado a mais do que um elemento de C.

Assim, f é uma função de P em C, quando cada elemento de P está associado a um único elemento de C por f. Funções são, usualmente, dadas por conjuntos de pares ordenados ou leis algébricas.

Dados os conjuntos P e C, escrevemos $f : P \to C$ para dizer que f é uma função de P em C. Além disso, dados $f : P \to C$, com $p \in P$ e $c \in C$, escrevemos $f(p) = c$ para dizer que c é o único elemento de C associado a p por f.

De acordo com a ideia de uma função. Sejam P e C conjuntos,$f : P \to C$ e $c \in C$. A imagem inversa de c por f é o conjunto de todos os elementos de P que associa a c, ou seja, é o conjunto $\{p \in P : f(p) = c\}$.

Dados $f : P \to C$ e $c \in C$, escrevemos $f^{-1}(c)$ para denotar a imagem inversa de c por f. Observe que $f^{-1}(c)$ é um subconjunto de P.

A ideia central na formulação do princípio da casa de pombos é a de que, se estabelecemos uma função de um conjunto C, mesmo que tenhamos feito uma distribuição equitativa dos elementos de P entre os elementos de C, há um elemento de C que é o correspondente de no mínimo, uma quantidade igual a divisão de $|P|$(o número de elementos P) por $|C|$ (o número de elementos de C).

Mais formalmente temos:

2.4 Proposição: Princípio da casa de pombos na linguagem das aplicações

Seja P um conjunto finito e não vazio (de pombos) e C um conjunto finito e não vazio (de casas de pombo). Se $f : P \to C$ é uma função (que coloca os pombos nas casas de pombos), então existe c em C (uma de pombo), tal que

$$f^{-1}(c) \;| \geq \frac{|P|}{|C|}$$

com isso a casa c têm, pelo menos $\frac{|P|}{|C|}$ pombos.

Demonstração. Sejam P e C dois conjuntos finitos com $|P|$ = m e $|C|$ = n, sendo m > n.

Seja $f : P \rightarrow C$ uma aplicação. Então, existe algum c $\in$ C, com $|f^{-1}(c)| \geq 2$. Podemos ainda enunciar uma desigualdade mais forte: existe algum c $\in$ C com,

$$|f^{-1}(c)| \geq \left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil.$$

De fato, de uma outra forma teríamos $|f^{-1}(c)| < \frac{m}{n}$ para todo c e, consequentemente, como $|P| = \bigcup_{c \in C} f^{-1}(c)$ e $f^{-1}(c) \cap f^{-1}(d) = \emptyset$, $\forall\, c, d \in C$ com $c \neq d$. Já que f é função,

m $= \sum_{c \in C} |f^{-1}(c)| <$ n$\cdot \frac{m}{n}$ = m, o que não pode acontecer.

Antes de mais nada, observe que:

- O princípio da casa de pombos garante que existe uma casa de pombo c que possui ao menos $\frac{|P|}{|C|}$ pombos, mas não mostra qual é a casa e nem quais são os pombos que estão nela.
- Usualmente, o PCP é enunciado com a restrição de que $|P| > |C|$, ou seja, de que existem mais pombos do que casas de pombo.

Embora, estes sejam os casos que interessam na maioria das vezes, esta restrição não é necessária. De fato, se temos menos pombos do que casas de pombos, ou seja, se

$|P| < |C|$, o PCP afirma que existe uma casa que possui pelo menos 1 $> \frac{|P|}{|C|} >$ 0 pombo e, portanto, está correto. Além disso, se temos tantos pombos quanto casas de pombos, ou seja, se $|P| = |C|$, o PCP também está correto, pois afirma que existe uma casa que possui pelo menos 1 $= \frac{|P|}{|C|}$ pombo.

Agora, resolveremos mais alguns exercícios interessantes. Nos exemplos mais diretos de aplicação, o princípio da casa de pombos da origem a um método de prova. Portanto:

1. Queremos provar a existência de uma certa configuração cuja existência não é fácil provar, à primeira vista.
2. Analisamos o problema de modo a determinar um certo conjunto de objetos m (pombos) e um outro conjunto de n (casas de pombos).
3. Determinamos o número m de pombos e o número de número n de casas de pombo.
4. Aplicamos o PCP e concluímos que existe uma casa de pombos C_i que possui ao menos $\frac{m}{n}$ pombos, sendo$1 \leq i \leq n$.
5. A partir da casa de pombos C_i, determinamos a configuração procurada.

Exemplo: São dadas *n* gavetas e um número inteiro positivo *m*. Colocamos a_1 objetos na 1ª gaveta, a_2 objetos na 2ª gaveta, e assim por diante até colocarmos a_n objetos na enésima gaveta. Se$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq m$, prove que ao menos uma das gavetas conterá, no mínimo *m* objetos. Em seguida, se$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} > m$, prove que ao menos uma das gavetas conterá

$m + 1$ objetos.

Demonstração. De um modo geral, o princípio da casa de pombos está bem evidente, segundo a proposição 1.9. No entanto, provaremos separadamente cada afirmação onde utilizaremos ideias semelhantes em suas resoluções.

Na primeira afirmação, e usando o PCP para afirmarmos que ao menos uma das gavetas contém, no mínimo *m* objetos. Então, provando por redução ao absurdo, suponhamos que cada uma das *n* gavetas contém, no máximo,$m - 1$ objetos. Então:

$$a_1 \leq m - 1$$
$$a_2 \leq m - 1$$
$$\vdots$$
$$a_n \leq m - 1$$

$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq n(m - 1)$$
$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq m - 1.$$

uma contradição, pois $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq m$.

Porém, usando o PCP de forma mais direta, tem-se:

- Pombos: $a_1 + a_2 + ... + a_n$representa o total de pombos;
- Casas de pombos: n é associado ao número de casas.

$$n\left\lfloor\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n - 1}{n}\right\rfloor + 1 \leq n\left(\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n - 1}{n}\right) + 1 = a_1 + a_2 + ... + a_n \leq n(m - 1)$$

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq m - 1.$$

o que novamente gera uma contração.

Portanto, pelo menos uma das gavetas conterá m objetos.

Agora, analisamos a segunda afirmação do enunciado. Sendo assim, e usando novamente o PCP, suponhamos que cada uma das n gavetas contém, no máximo, m objetos. Então:

$$a_1 \leq m$$
$$a_2 \leq m$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$a_n \leq m$$
$$a_1 + a_2 + ... + a_n \leq nm$$
$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \leq m.$$

uma contradição, pois $\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} > m$.

Logo, usando novamente o PCP de forma mais direta, tem-se:

- Pombos: $a_1 + a_2 + ... + a_n$representa o total de pombos;
- Casas de pombos: n é associado ao número de casas.

$$n\left\lfloor\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n-1}{n}\right\rfloor+1 \leq n\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n-1}{n}\right)+1 = a_1+a_2+\ldots+a_n \leq nm$$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \leq m.$$

o que gera uma contradição.

Portanto, pelo menos uma das gavetas conterá $m + 1$ objetos.

Exemplo: Dado um conjunto de 10 inteiros positivos, de 2 algarismos cada, prove que é sempre possível obtermos dois subconjuntos disjuntos e não vazios cuja soma dos elementos é a mesma.

Demonstração. Seja o conjunto X = {10, 11, 12, ..., 99}, cujos elementos são inteiros positivos de 2 algarismos cada. Considerando $Y \subseteq X$, tal que $|Y| = 10$, usando o PCP, temos:

- Pombos: o conjunto dos subconjuntos não vazios de Y;
- Casas de pombos: o conjunto dos resultados possíveis dos somatórios dos subconjuntos não vazios de Y;

Sabemos que, $2^{10} - 1 = 1023$ é o total de subconjuntos não vazios de Y, e por conseguinte, representa os pombos. Mas, não podemos determinar com precisão o número exato de casas de pombos. Porém, uma cota superior para esse número será o suficiente para os nossos propósitos.

Para calcular esta cota, observe que, como todos os 10 elementos de Y são maiores que 9 e menores que 100, temos que a maior soma possível é:

90 + 91 + 92 +93 + 94 +95 +96 + 97 + 98 + 99 = 945.

Logo, o número de casas de pombos é menor do que ou igual a 945.

Ou seja, pelo princípio da casa de pombos, existe uma casa *c* que possui, pelo menos $\left\lfloor\frac{1023-1}{945}\right\rfloor + 1 = 2$ pombos. Isto é, existem dois subconjuntos não vazios A e B de Y, tais que $\sum_{a \in A} a = \sum_{b \in B} b$.

Porém, não podemos garantir que A e B são disjuntos; ou seja, que $A \cap B = \emptyset$, mas a partir desses conjuntos, é fácil obter dois subconjuntos não vazios A’ e B’ de A e B respectivamente, e com todas as propriedades desejadas no enunciado.

Basta considerar A’ = A – (A ∩ B) e B’ = B – (A ∩ B).

Temos então que $A' \cap B' = \emptyset$ e $\sum_{a' \in A'} a' = \sum_{b' \in B'} b'$.

Existem alguns problemas matemáticos, onde utilizamos o PCP como um método de resolução ou de prova, bem interessantes que envolvem geometria. Vejamos a seguir algumas belas aplicações do PCP para constatar isto.

Exemplo: Seja *C* um conjunto formado por cinco pontos de coordenadas inteiras no plano. Prove que o ponto médio de algum dos segmentos com extremos em *C* têm também coordenadas inteiras.

Demonstração. O ponto médio de um segmento com extremos em A e B, têm coordenadas inteiras se, e somente se, as abscissas x_A e x_B são ambas pares ou ambas ímpares; o mesmo acontece com as ordenadas y_A e y_B.

Onde M (x_M, y_M) é o ponto médio, e:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{e} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Sejam P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 os cinco pontos de coordenadas inteiras no plano. Logo, temos as seguintes possibilidades para as paridades de suas coordenadas:

x	y
par	par
par	ímpar
ímpar	par
ímpar	ímpar

Com o auxílio do PCP, temos:

- Pombos: os pontos P_1, P_2, P_3, P_4 e P_5 no plano;
- Casas de pombos: as quatro possíveis paridades;
- Propriedade: associar cada ponto em uma das paridades possíveis.

Temos 5 pombos para distribuirmos entre 4 casas de pombos, onde o PCP garante que, pelo menos uma das casas contém dois pombos.

Portanto, dois dos pontos têm a mesma paridade, o que é necessário para verificarmos a veracidade da afirmação apresentada, pois o ponto médio de um dos segmentos em questão, têm coordenadas inteiras no plano.

Exemplo: Dados 55 pontos três a três não colineares no espaço com coordenadas inteiras. Prove que pelo menos um dos triângulos formado por três destes pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Demonstração. Primeiro, temos que o baricentro de um triângulo é o ponto cujas coordenadas são obtidas da seguinte maneira. Seja um triângulo ABC, cujosvértices são A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B) e C(x_C, y_C, z_C), então o baricentro G tem como coordenadas:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}$$

Ao todo temos 55 pontos no espaço com coordenadas(x_i, y_i, z_i), com 1 ≤ i ≤55.Com isso, temos a seguir os possíveis restos da divisão das coordenadas do ponto(x_i, y_i, z_i) por 3. Vejamos:

(0,0,0)	(1,1,1)	(2,2,2)
(0,0,1)	(1,1,0)	(2,2,0)
(0,0,2)	(1,1,2)	(2,2,1)
(0,1,0)	(1,0,1)	(2,0,2)
(0,2,0)	(1,0,2)	(2,1,2)
(0,1,1)	(1,0,0)	(2,0,0)
(0,2,2)	(1,2,2)	(2,1,1)
(0,1,2)	(1,0,2)	(2,0,1)
(0,2,1)	(1,2,0)	(2,1,0)

Com o auxílio do PCP, concluímos que pelo menos $\left\lfloor \frac{55-1}{27} \right\rfloor + 1 = 3$ dessas possíveis coordenadas de restos aparecem na divisão das coordenadas (x_i, y_i, z_i)por 3 de cada um dos 55 pontos. Porém, as coordenadas do baricentro de um triângulo qualquer no espaço serão inteiras se, e somente se;os restos da divisão de x_A, x_B e $x_C$por 3 forem todos iguais ou diferentes dois a dois. O mesmodeve acontecer com os restos da divisão de y_A, y_B e y_C por 3 e com os restos da divisão de z_A, z_B e z_C por 3.

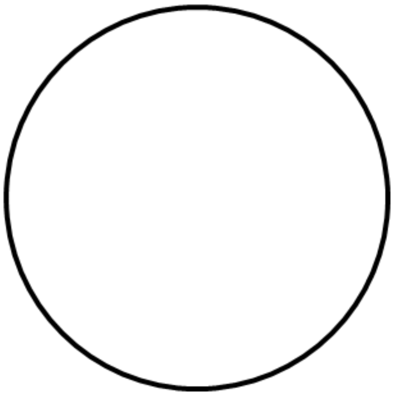
Portanto, pelo menos um dos triângulos formado por três destes 55pontos possui o baricentro com coordenadas inteiras.

Exemplo: Dado um conjunto de 25 pontos no plano tais que entre quaisquer 3 deles existe um par com distância menor que 1. Prove que existe um círculo de raio 1 que contém pelo menos 13 dos 25 pontos dados.

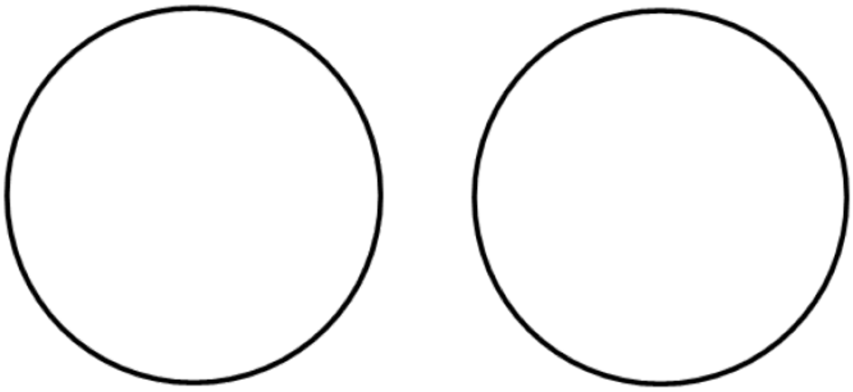
Demonstração. Observe que, sendo três pontos quaisquer num plano, onde existe um par com distância menor do que 1, implica que dois desses três estão num círculo de raio1, sendo por exemplo um deles o centro. Analisando de uma maneira mais apropriada, temos dois casos a observar. Vejamos:

1º caso: A distância entre dois pontos quaisquer dentre os 25 dados no plano é menor do que ou igual a 1.

Neste caso, os 25 pontos então num círculo de raio unitário, e centro em qualquer um dos pontos.



2º caso: Existem dois pontos P e Q, dentre os 25 dados, onde: $d(P,Q) > 1$.



C_1 C_2

A hipótese garante que os 25 pontos estão contidos nos dois círculos, ou seja, $|C_1 \cup C_2| = 25$.

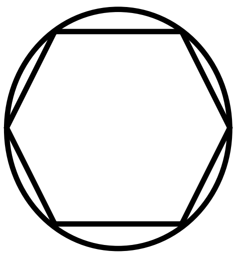
Pelo Princípio da casa de pombos, existem $\left\lfloor \frac{25-1}{2} \right\rfloor + 1 = 13$ pontos num dos círculos.

Exemplo: Um disco fechado de raio unitário contém sete pontos, cujas distâncias entre quaisquer dois deles é maior do que ou igual a um. Prove que o centro do disco é um destes pontos.

Demonstração. De um modo geral, devemos distribuir sete pontos num círculo unitário, observando que a distância entre dois pontos distintos não é menor do que 1. Com o auxílio do princípio da casa de pombos eda geometria euclidiana iremos provar esse enunciado.

Primeiro, se dividirmos o círculo unitário em sete setores circulares de mesma área e distribuirmos em cada uma delas um único ponto, teremos que pelo menos a distância entre dois dos pontos será menor do que 1. O que contradiz o enunciado.

Agora, ao dividirmos o círculo unitário em seis setores circulares de mesma área, e ao colocarmos um ponto em cada região com distância igual a 1, temos que estes pontos representam os vértices de um hexágono regular de raio unitário inscrito no círculo.

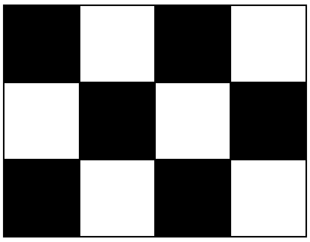


Analisando a figura, temos como única opção o centro do círculo para representar o sétimo ponto, pois somente ele tem distância maior do que ou igual a 1 para cada um dos seis vértices do hexágono regular.

Portanto, o centro do disco (ou círculo) é um dos sete pontos distribuídos num disco fechado de raio unitário, cujas distâncias entre quaisquer dois deles é maior do que ou igual a um.

Exemplo: Na região delimitada por um retângulo de largura quatro e altura três são marcados seis pontos. Prove que existe um par destes pontos cuja distância entre eles não é maior do que $\sqrt{5}$.

Demonstração. Inicialmente, dividimos o retângulo em 12 quadrados de lado unitário. Em seguida, pintamos cada quadrado do retângulo de maneira alternada e usando as cores preta e branca. Da seguinte maneira:



Com auxílio do PCP, temos:

- Pombos: os seis pontos distintos;
- Casa de pombos: os quadrados unitários;
- Propriedade: distribuir cada ponto num quadrado preto ou branco.

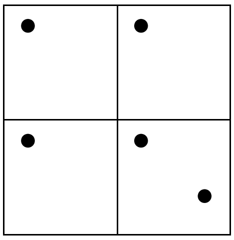
No entanto, temos seis pontos para distribuirmos entre 12 quadrados. Então:

1º caso: Se pelo menos dois pontos estão no mesmo quadrado a maior distância entre eles é no máximo $\sqrt{2}$, o que implica $\sqrt{2}<\sqrt{5}$.

Portanto, satisfaz a afirmação do enunciado.

2º caso: Se dois pontos estão em quadrados vizinhos, então estão num retângulo de lados 1 e 2, cuja diagonal é $\sqrt{5}$. Daí, temos que a maior distância entre eles é $\sqrt{5}$, e satisfazendo a afirmação dada no enunciado.

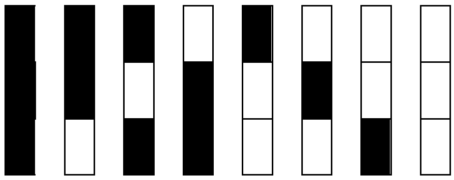
3º caso: Os pontos estão distribuídos todos em quadrados da mesma cor. Neste caso, conseguimos um quadrado de lado contendo cinco pontos.



Pelo Princípio da Casa de Pombos, dois destes pontos devem ficar em um quadrado de 1,5 e por conseguinte, temos que a distância máxima entre esses dois pontos é $\frac{3}{2}\sqrt{2} = \sqrt{4,5}$. Ou seja, também satisfaz a afirmação do enunciado.

Exemplo: Cada casa 1 x 1 de um tabuleiro 3 x 7 é pintada de branco ou preto. Prove que, independentemente da maneira pela qual pintemos as casas, sempre haverá quatro casas de uma mesma cor e que sejam as casas dos quatro cantos de um retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Demonstração. Cada coluna deste tabuleiro pode ser pintada de uma das seguintes formas:



1 2 3 4 5 6 7 8

Observe que se a pintura 1 for escolhida, bastaria uma coluna do tipo 2, 3, ou 4 para formar um retângulo. Com isso, nos restariam apenas mais quatro outras pinturas. Porém, temos sete colunas. Daí, pelo princípio da casa de pombos teríamos duas colunas iguais. O mesmo ocorre com a coluna do tipo 8.

Agora suponha que nenhuma das colunas seja do tipo 1 ou 8. Dessa forma, restaria apenas 6 tipos de pinturas. Assim, pelo princípio da casa de pombos, duas delas seriam iguais.

Portanto, independentemente da maneira pela qual pintemos as casas, sempre haverá quatro casas de uma mesma cor e que sejam as casas dos quatro cantos de um retângulo de lados paralelos aos lados do tabuleiro.

Exemplo: Trinta e três torres são postas em um tabuleiro 8 x 8. Prove que podemos escolher cinco delas sem que nenhuma ataque a outra.

Demonstração. Uma torre, movimenta-se horizontalmente e verticalmente num tabuleiro de forma 8 x 8, e pode deslocar-se de uma a sete casas. Em seguida, pintamos o tabuleiro utilizando oito cores, nas quais as numeramos de 1 a 8.

Pelo princípio da casa de pombos, temos:

- Pombos: 33 torres;
- Casa de pombos: as oito cores utilizadas na pintura de cada casa do tabuleiro;

O PCP garante, que pelo menos 5 torres estão em casas de mesma cor.

A figura a seguir, dá um exemplo de uma das maneiras de pintarmos o tabuleiro, onde é a mais útil para analisarmos se a afirmação do enunciado é realmente verdadeira.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	3	4	5	6	7	8	1
3	4	5	6	7	8	1	2
4	5	6	7	8	1	2	3
5	6	7	8	1	2	3	4
6	7	8	1	2	3	4	5
7	8	1	2	3	4	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7

Logo, essa figura esclarece que as torres posicionadasem casas de mesma cor não se atacam.

Portanto, podemos escolher cinco torres sem que nenhuma ataque a outra.

3 ALGUMAS APLICAÇÕES CLÁSSICAS DO PCP

O princípio da casa de pombos vai mais além que já foi visto até agora. Por isso, vejamos algumas aplicações clássicas do PCP.

Uma das razões pelas quais o PCP merece destaque é que ele é, usualmente, empregado como método de prova na justificativa de vários teoremas importantes.

A seguir, apresentamos três exemplos clássicos de aplicação do PCP na prova de teoremas. Apresentamos a prova do Teorema de Erdös-Szekeres sobre subsequências monotônicas, a prova do Lema de Dilworth sobre ordens parciais e a prova do Teorema de Ramsey sobre subgrafos monocromáticos.

3.1. O PCP e a prova do Teorema de Erdös-Szekeres

Para enunciar o teorema de Erdös-Szekeres, utilizamos os conceitos a seguir.
Seja s = $(x_1, ..., x_n)$ uma sequência de n números reais.

1. s é monotônica crescente se $x_1 < ... < x_n$.
2. s é monotônica decrescente se $x_1 > ... > x_n$.
3. s é monotônica se é monotônica crescente ou monotônica decrescente.
4. s' = $(y_1, ..., y_m)$ é uma subsequência de s se $m \leq n$ e, para todos y_i, y_j em s' tais que

   $i < j$, temos que existem x_k, x_l em s tais que $y_i = x_k$, $y_j = x_l$ e $k < l$.

3.1.1 Teorema Erdös-Szekeres

Se s = $(x_1, ..., x_n)$ é uma sequência de n números reais, então s contém uma subsequência monotônica com $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ termos.

Prova. Seja s = $(x_1, ..., x_n)$ uma sequência de números reais.

Suponhamos, para uma contradição, que toda sequência monotônica de s possui no máximo $\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$ termos.

Podemos então definir uma função

$$f : \{1, ... , n\} \rightarrow \{1, ... , \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1\} \times \{1, ... , \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1\}$$

tal que f (i) = (c_i, d_i), onde c_i é o tamanho da maior subsequência monotônica crescente iniciada em x_i e d_i é o tamanho da maior subsequência monotônica decrescente iniciada em x_i.

Para a aplicação do PCP, consideramos:

- Pombos: P = {1, ... , n};
- Casa de pombos: C = {1, ... , $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ – 1} x {1, ... , $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ – 1}.

Onde obtemos $|P|$ = n e $|C|$ = $(\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1)^2$. Pelo PCP temos que existe (c, d) $\in C$ tal que

$$|f^{-1}\ (c,d)| \geq \frac{|P|}{|C|} = \frac{n}{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor-1)^2} = \frac{n}{n-2\lfloor\sqrt{n}\rfloor+1} > 1.$$

Assim, existe dois termos x_j e x_k da sequência s tais que $c_j = c_k = c$ e $d_j = d_k = d$.

Temos duas possibilidades: $x_j<x_k$ e $x_j>x_k$.

- Se $x_j<x_k$, então a maior subsequência monotônica crescente iniciada em x_j possui ao menos um termo a mais do que a maior subsequência monotônica crescente iniciada em x_k. Ou seja, $c_j>c_k$, o que é uma contradição.
- Se $x_j>x_k$, então a maior subsequência monotônica decrescente iniciada em x_j possui ao menos um termo a mais do que a maior subsequência monotônica decrescente iniciada em x_k. Ou seja, $d_j>d_k$, o que também é uma contradição.

Assim, s contém uma subsequência monotônica com $\sqrt{n}$ termos.

3.2. O PCP e a prova do Lema de Dilworth

Para enunciar o Lema de Dilworth. Utilizamos os conceitos de ordem, cadeia e anticadeia.

Dizemos que $\leq$ é uma relação de ordem em um conjunto A se $\leq$ é uma relação binária em A que é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Onde temos que, $\leq$ é uma cadeia, se $\forall\, a, b\ \in A$, tem-se $a \leq b$ ou $b \leq a$.

Se, ao contrário todos os elementos de A são incomparáveis segundo $\leq$, isto é, dados a, b $\in A$, temos que a $\nleq$ b e b $\nleq$ a, dizemos que $\leq$ é uma anticadeia.

3.1.2 Lema Dilworth

Seja A um conjunto finito e $\leq$ uma relação de ordem em A. Se $|A| = n$, com $n \geq 2$, então existe um subconjunto $B \subseteq A$ tal que $|B| = \lfloor\sqrt{n}\rfloor$ e B é uma cadeia ou uma anticadeia.

Prova. Suponhamos que A não contém nenhuma cadeia de tamanho $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Para a aplicação do PCP, consideramos:

- Pombos: P = A;
- Casa de pombos: C = $\{1, \ldots, \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1\}$.

Temos que $|P| = n$ e $|C| = \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$. Então, podemos considerar a função $f : P \rightarrow C$ tal que $f(x) = m$, onde m é o tamanho da maior cadeia em A que tem x como último elemento. Pelo PCP existe, $c \in C$ tal que

$$|f^{-1}(c)| \geq \frac{|P|}{|C|} = \frac{n}{\sqrt{n}-1}.$$

Como $n \geq 2$, temos que $|f^{-1}(c)| \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. De fato, se $|f^{-1}(c)| \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$, teríamos

$$\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1 \geq |f^{-1}(c)| \geq \frac{n}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1},$$

donde $n - 2\lfloor\sqrt{n}\rfloor + 1 \geq n$, uma contradição. Logo, que $|f^{-1}(c)| > \lfloor\sqrt{n}\rfloor - 1$, isto é, $|f^{-1}(c)| \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$. Agora vamos mostrar que $B = f^{-1}(c)$ é uma anticadeia.

Suponhamos, para uma contradição, que existem $x, y \in B$ tais que $x \leq y$.

Então $f(x) < f(y)$, pois o que é uma contradição, já que $f(x) = f(y) = c$. Como $|f^{-1}(c)| \geq \lfloor\sqrt{n}\rfloor$, podemos tomar um subconjunto de $f^{-1}(c)$ com $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$ elementos. Este subconjunto é também uma anticadeia.

3.3. O PCP e a prova do Teorema de Ramsey

O Teorema de Ramsey trata de coloração de grafos.

Um grafo é um conjunto finito de vértices ligados por arestas, de modo que:

- Não haja laços, isto é, um vértice nunca está ligado a si mesmo por uma aresta;
- Não haja arestas múltiplas, isto é, um mesmo par de vértices está ligado por no máximo uma aresta.

Dado um grafo G, denotamos por $V(G)$ o conjunto de vértices de G e por $A(G)$ o conjunto de aresta G. As arestas de G são representadas por pares de vértices de G. Dizemos que um grafo G é completo se existe uma aresta entre cada par de vértices, isto é, para todos$u$, $v \in V(G)$, temos que $(u, v) \in A(G)$. Um grafo completo com n vértices é denominado K_n. Dizemos que um grafo H é subgrafo de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$.

Uma bicoloração de um grafo G é uma assinalação de cores às arestas de G com uma ou duas cores. Uma bicoloração pode ser vista como uma função

$$f : A(G) \to \{\text{verde, amarelo}\},$$

onde $A(G)$ é o conjunto das arestas de G.

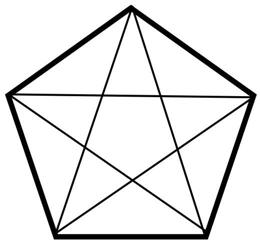
Um subgrafo$H$ de G é monocromático segundo uma bicoloraçãof se f é constante em A(H). Se H é monocromático, dizemos que H é verde ou amarelo.

Dados a, $b \in \mathbb{N}$ tais que a, $b \geq 2$, o número de Ramsey para a e b, denotado por $R(a, b)$, é o menor natural tal que, para qualquer bicoloraçãof de $K_{R(a,b)}$, temos um subgrafo K_a verde segundo f ou um subgrafo K_b amarelo segundo f.

Vejamos o caso em que $a = b = 3$. O número de Ramsey para estes valores é $R(3, 3) = 6$. Em geral, a prova de que $R(a, b) = n$ é feita em duas partes:

1. Prova-se que $R(a, b) \geq n$, exibindo uma bicoloração de K_{n-1} segundo a qual nenhum subgrafo K_a é verde e nenhum subgrafo K_b é amarelo;
2. Prova-se que $R(a, b) \leq n$, usando-se argumentos de contagem, como o PCP, por exemplo.

Figura 1: $R(3, 3) \geq 6$



3.3.1 Proposição *$R(3, 3) \geq 6$.*

Prova. A figura 1 apresenta uma bicoloração de K_5 segundo a qual nenhum subgrafo K_3 é verde e nenhum subgrafoK_3 é amarelo, isto é, nenhum subgrafoK_3 émonocromático.

Prova. Considere uma bicoloração para K_6. Seja v um vértice em K_6. Considere os conjuntos P = $V(K_6) \setminus \{v\}$ e C = {verde, amarelo}, e a função f : P → C tal que $f\,(u)$ é a cor da aresta que liga o vértice u ao vértice v. Temos $|P|$ = 5 e $|C|$ = 2. Logo, pelo PCP, temos que existe uma cor $c \in C$ tal que

$$|f^{-1}\,(c)| \geq \frac{|P|}{|C|} = \frac{5}{2},$$

ou seja, existem pelo menos 3 vértices de K_6 ligados a v por vértices da mesma cor c, digamos verde. Agora temos dois casos a considerar.

1º caso: Se estes 3 vértices estiverem ligados entre si por arestas amarelas, então temos um subgrafoK_3 amarelo.

2º caso: Caso contrário, ou seja, se existir uma aresta verde entre dois destes vértices, então estes dois vértices, juntamente com v, formam um subgrafoK_3 verde.

Em qualquer caso, temos que um subgrafoK_3 verde ou um subgrafo K_3 amarelo. Logo,

$$R(3, 3) \leq 6. \text{ Portanto } R(3, 3) = 6.$$

O Teorema de Ramsey afirma que, no caso geral, sempre existe um natural n tal que $R(a, b) \leq n$. em outras palavras, para todos $a, b \geq 2$, existe um valor mínimo$R(a, b)$.

4 CONTAGEM DUPLA

Assim como o princípio da casa de pombos, a contagem dupla à primeira vista parece algo simples, óbvio e sem muitos desafios interessantes em matemática. Porém, ao desenvolvermos a ideia de contagem dupla, veremos que ela é bastante útil em diversos problemas que envolvem a Análise Combinatória.

A ideia central é extremamente simples. Se calcularmos um certo número de configurações de duas maneiras distintas sem cometer erros, então os resultados devem coincidir, fato que pode gerar conclusões interessantes.

Vamos praticar algo que já fizemos várias vezes durante a nossa vida estudantil; como por exemplo, calcular de duas maneiras um problema e chegarmos ao mesmo resultado, em alguns casos no ensino fundamental chamávamos de “prova real”.

Vejamos alguns exemplos, nos quais mostramos como chegar ao mesmo resultado pensando ou partindo de duas ideias distintas, configurando assim uma contagem dupla.

Exemplo: Em um comitê, cada membro pertence a exatamente três subcomitês e cada subcomitê tem exatamente três membros. Prove que a quantidade de membros é igual à quantidade de subcomitês.

Demonstração. Suponha que n seja a quantidade de membros pertencentes ao comitê e ma quantidade de subcomitês existentes. Logo, como a quantidade de subcomitês que cada membro pertence é 3, temos $3n$ pares do tipo (membro, subcomitê). De outra maneira, temos que cada subcomitê possui três membros e isso nos dá $3m$ pares do tipo (membro, subcomitê).

Assim o total de pares em cada contagem é igual a, respectivamente $3n$ e $3m$. Logo,

$$3n = 3m$$
$$n = m.$$

Portanto, pensamos de duas maneiras distintas para chegarmos a conclusão de que o números de membros do comitê é igual o número de subcomitês.

Exemplo: Em um senado há 30 senadores, e cada dois deles são amigos ou inimigos. Sabe-se ainda que cada senador tem exatamente seis inimigos. Se cada três senadores formarem uma comissão, calcule o número de comissões tais que seus membros sejam dois a dois amigos ou dois a dois inimigos.

Demonstração. Denominados por x o número de comissões tais que seus membros sejam dois a dois amigos ou dois a dois inimigos e por y o restante das comissões que não assumem tal característica.

Começamos a resolver esse problema calculando o número total de comissões de três senadores. Contudo, no senado há 30 senadores e daí temos:

$$\binom{30}{3} = 4060 \text{ comissões},$$

donde concluímos que x + y = 4060.

Fixando um senador qualquer, vamos determinar o número de comissões que ele participa juntamente com outros dois senadores, nos quais esses dois membros da comissão são amigos ou inimigos. Como o senador escolhido tem seis inimigos e uma quantidade de vinte e três amigos no grupo dos membros do senado. Então, o número de comissões desse tipo que ele participa é:

$$1 \cdot \binom{6}{2} + 1 \cdot \binom{23}{2} = 268 \text{ comissões}.$$

Mas ainda existem outras comissões que o senador escolhido participa formada por um amigo e um inimigo. Logo, no senado há 30 senadores e ao somarmos todas as comissões do tipo acima que cada senador participa teremos o triplo de x, pois cada comissão tais que seus membros sejam dois a dois amigos ou dois a dois inimigos foi contada três vezes; adicionada a y, pois cada comissão que não assumem tal característica de x é contada uma única vez. Logo:

$$30 \cdot 268 = 3x + y$$

Resolvendo o sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas, temos:

$$\begin{cases} x + y = 4060 \\ 3x + y = 8040 \end{cases}$$

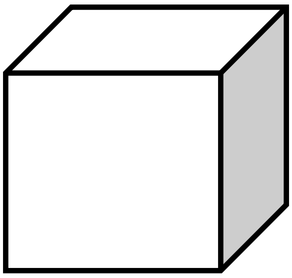
Portanto, o número de comissões tais que seus membros sejam dois a dois amigos ou dois a dois inimigos é 1990.

Exemplo: (Teorema de Euler). Um poliedro é um sólido delimitado por polígonos. Sejam V, A e F as quantidades de vértices, arestas e faces de um poliedro convexo. Prove que:

$$V - A + F = 2.$$

Demonstração. Tomemos um poliedro qualquer e o planificamos, obtendo uma figura em que todas faces estão contidas em uma das faces. A figura a seguir é um paralelepípedo, mas provaremos o Teorema de Euler utilizando um poliedro qualquer.

.



Calculemos de duas maneiras a soma S de todos os ângulos internos do poliedro planificado.

Sejam $n_1, n_2, \dots, n_F$ as quantidades de arestas/vértices em cada uma das faces, sendo n_1 a quantidade corresponde à face que delimita todas as outras. Então, lembrando que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é $(n - 2)\cdot 180^\circ$, somando por faces temos:

$$S = (n_2 - 2)\cdot 180^\circ + (n_3 - 2)\cdot 180^\circ + \dots + (n_F - 2)\cdot 180^\circ$$

$$S = (n_2 + n_3 + \dots + n_F)\cdot 180^\circ - 2(F - 1)\cdot 180^\circ$$

Contando por vértices, temos que cada um dos $V - n_1$ vértices no interior da face contribuem com 360° e os demais, com a soma dos ângulos internos da face externa, de modo que:

$S = (V - n_1) \cdot 360^\circ + (n_1 - 2) \cdot 180^\circ$

$S = (V - 1) \cdot 360^\circ - n_1 \cdot 180^\circ$

A contagem dupla de S nos dá a seguinte igualdade:

$(n_2 + n_3 + ... + n_F) \cdot 180^\circ - 2(F - 1) \cdot 180^\circ = (V - 1) \cdot 360^\circ - n_1 \cdot 180^\circ$

$2V - (n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F) + 2F = 4$

Enfim, notemos que a soma $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F$ pode ser interpretada como a quantidade de arestas. Como cada aresta pertence a exatamente duas faces, então cada aresta está contada duas vezes, de modo que $n_1 + n_2 + n_3 + ... + n_F = 2A$. Logo:

$2V - 2A + 2F = 4$

$V - A + F = 2$

Com isso, observamos devemos contar duas vezes algo que inter-relaciona as quantidades que desejamos que sejam iguais. Porém, nem sempre isso é muito óbvio.

Exemplo: Em um ano, no máximo quantos meses têm cinco domingos?

Demonstração. Uma semana tem sete dias, e um mês pode ter quatro ou cinco semanas. Sem considerarmos anos bissextos e nem em quais meses do ano temos 28, 30 ou 31 dias podemos fazer uma análise mais específica com relação ao número de domingos no períodode um ano. Com efeito, temos no máximo $52 \cdot 7 + 1 = 365$, que nos dá no máximo 53 domingos num ano, pois temos no máximo 52 semanas completas num ano. A partir daí, têm-se:

$12 \cdot 4 + 5 = 53$, onde 12 representa o total de meses num ano e 5 o número de meses que possuem cinco domingos cada.

Portanto, concluímos que pelo menos cincos meses quaisquer do ano possuem cinco domingos cada um.

Exemplo: Em um torneio de xadrez, cada participante joga com um dos outros. Uma vitória vale um ponto, um empate vale 0,5 ponto e uma derrota vale o ponto. Cada jogador ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Prove que a quantidade de participantes do torneio é um número quadrado perfeito.

Demonstração. Consideremos uma tabela, na qual colocamos os participantes separados por sexo nas linhas e nas colunas. Sendo *h* a quantidade de homens e *m* a quantidade de mulheres no torneio, inserimos as quantidades de pontos distribuídos da seguinte maneira:

	Homens	Mulheres
homens	$\binom{h}{2}$	x
mulheres	$hm - x$	$\binom{m}{2}$

Usamos a contagem dupla para obtermos duas equações. A partir da ideia de que cada jogador ganhou a mesma quantidade de pontos contra homens e contra mulheres. Então:

$$\begin{cases} \binom{h}{2} = x \\ hm - x = \binom{m}{2} \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema de duas equações, temos:

$$\binom{h}{2} + \binom{m}{2} = hm$$

$$h(h-1) + m(m-1) = 2hm$$

$$h^2 - h + m^2 - m - 2hm = 0$$

$$h^2 - 2hm + m^2 = h + m$$

$$(h-m)^2 = h + m.$$

Portanto, chegamos ao resultado desejado contando de duas maneiras, e em seguida usamos a aritmética para obtermos a conclusão final.

Exemplo: Duzentos estudantes participaram de uma competição de matemática. A prova tinha seis problemas. Sabe-se que cada problema foi resolvido por pelo menos 120 participantes. Prove que existem dois estudantes tais que cada problema foi resolvido por pelo menos um deles.

Demonstração. Uma estratégia mais prática para provarmos esse problema é supormos o contrário. Então, para cada par de estudantes existe um problema que nenhum deles conseguiu resolver. Vamos agora contar os problemas que não foram resolvidos por pares de estudantes.

Consideremos que uma tabela com seis linhas, indicando uma para cada problema; e duzentas colunas, atribuindo uma para cada estudante participante da competição. Colocamos 1 na linha *i* e coluna *j* se, e somente se, o aluno *j* não resolveu o problema *i*.

	Estudante 1	Estudante 2	Estudante 3	...	Estudante 200
Problema 1	0	1	1	...	1
Problema 2	1	0	1	...	0
Problema 3	1	1	0	...	1
Problema 4	0	0	1	...	0
Problema 5	0	1	0	...	0
Problema 6	1	0	1	...	0

Os problemas não resolvidos por pares de estudantes representam os pares de *uns* na mesma linha. Seja A o conjunto dos pares de *uns* na mesma linha. Logo:

Contando por linhas, temos que pelo menos 120 estudantes fizeram cada problema, e no máximo 80 não fizeram. Com isso cada linha tem no máximo $\binom{80}{2} = 3160$ pares. Assim,

$$|A| \leq 6 \cdot 3160 = 9480.$$

Agora, contando por colunas, observe que cada par de estudantes não resolveu pelo menos um problema, ou seja, $|A| \geq \binom{200}{2} = 19900$.

No entanto, $9480 \geq |A| \geq 19900$ é um absurdo.

Portanto, existem dois estudantes que juntos resolveram todos os seis problemas dessa competição.

Exemplo: Considere a tabela lx c com zeros e *uns*, sendo C_j a soma dos números na coluna *j*, *j* = 1, 2, ..., c. Suponha que exista *t* tal que, para cada par de linhas, existam exatamente *t* colunas que tenham 1 em ambas as linhas. Então:

$$t\binom{l}{2} = \sum_{j=1}^{c}\binom{C_j}{2}$$

Demonstração. Basta contar os pares de mesma coluna. Chamamos de *A* o conjunto de tais pares. Logo:

Contando por linhas, temos que cada par de linhas tem exatamente *t* pares de *uns* na mesma coluna. Porém, como existem $\binom{l}{2}$ pares de linhas, chegamos ao seguinte resultado:

$|A| = \binom{l}{2} \cdot t$.

Agora, contando por colunas, temos que na coluna *j* há C_j*uns* e, com isso existem $\binom{C_j}{2}$ pares de *uns* na mesma coluna. Fazendo um somatório das colunas, chegamos ao resultado a seguir: $|A| = \sum_{j=1}^{c}\binom{C_j}{2}$.

Finalmente, basta igualar os dois resultados encontrados para $|A|$.

Exemplo: Se n e k são inteiros tais que $0 \leq k \leq n$, então todo conjunto com n elementos possui exatamente $\binom{n}{k}$ subconjuntos com *k* elementos.

Onde, $\binom{n}{k} = \frac{n\cdot(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Demonstração. Primeiramente, basta considerar o caso $1 \leq k \leq n$, pois se $k = 0$ o subconjunto é vazio, o que não nos interessa.

Seja *A* um conjunto com n elementos, então vamos contar quantas sequências de k termos, formadas a partir dos elementos de *A* podemos formar. Utilizando o princípio multiplicativo obtemos:

$n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

De outro modo, permutando os elementos de cada subconjunto de k elementos de *A* obtemos$k!$sequências de k termos. No entanto, é fácil verificar que as sequências assim formadas são todas as que podemos formar e são todas distintas. Como $\binom{n}{k}$ representa o número de subconjuntos de k elementos de *A*, daí temos que existem exatamente $k!\binom{n}{k}$sequências.

Ao resolvermos o problema de duas maneiras distintas, temos que:

$$n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = k!\binom{n}{k}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1) \cdot (n-k)!}{k! \cdot (n-k)!}$$

$$\binom{n}{k} = C_k^n$$

Exemplos: Prove, por argumentos de contagem dupla, que, para todo inteiro positivo n, tem-se:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n.$$

Demonstração. Seja *A* um conjunto com n elementos, então vamos contar o número de subconjuntos de *A* de duas maneiras distintas; em seguida, igualaremos as duas soluções para verificarmos a veracidade do enunciado.

Por um lado, temos que um elemento qualquer do conjunto *A* pertence ou não a cada um dos subconjuntos; ou seja, há duas possibilidades para cada um dos n elementos de *A*. Com isso, usando o princípio multiplicativo, a quantidade de subconjuntos de *A* é a seguinte:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n\ fatores} = 2^n$$

De outro modo, como $\binom{n}{k}$ representa o número de subconjuntos de k elementos de *A*, e adicionando tais possibilidades quando k varia de 0 a n, logo obtemos a soma:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

Portanto, obtemos $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.

Exemplo: Prove que, para todo inteiro positivo n, tem-se:

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Demonstração. Inicialmente, considere um grupo com$2n$ pessoas, sendo n do sexo masculino e as demais do sexo feminino, e calculemos, de duas maneiras distintas, quantos são os modos de escolher exatamente n das $2n$ pessoas.

De um certo modo a resposta é óbvia, pois obtemos $\binom{2n}{n}$ maneiras distintas de escolhermos n pessoas. Por outro lado, podemos escolher k homens e $n-k$ mulheres de exatamente $\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}$ modos; e adicionando tais possibilidades quando k varia de 0 a n, logo obtemos a soma:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Daí, os dois resultados encontrados são iguais.

Portanto, a igualdade do enunciado realmente ocorre.

Exemplo: Prove a identidade de Vandermonde: para $m, n, p \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\sum_{k} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m+n}{p},$$

onde a soma do primeiro membro acima se estende a todos os valores inteiros e não negativos possíveis de k.

Demonstração. Usando uma ideia semelhante à utilizada no exemplo anterior, temos dois grupos disjuntos A e B, onde $|A| = m$ e$|B| = n$. Daí, vamos contar o número de subconjuntos com p elementos de $A \cup B$. E assim, utilizando a contagem dupla, chegaremos a conclusão da afirmação do enunciado.

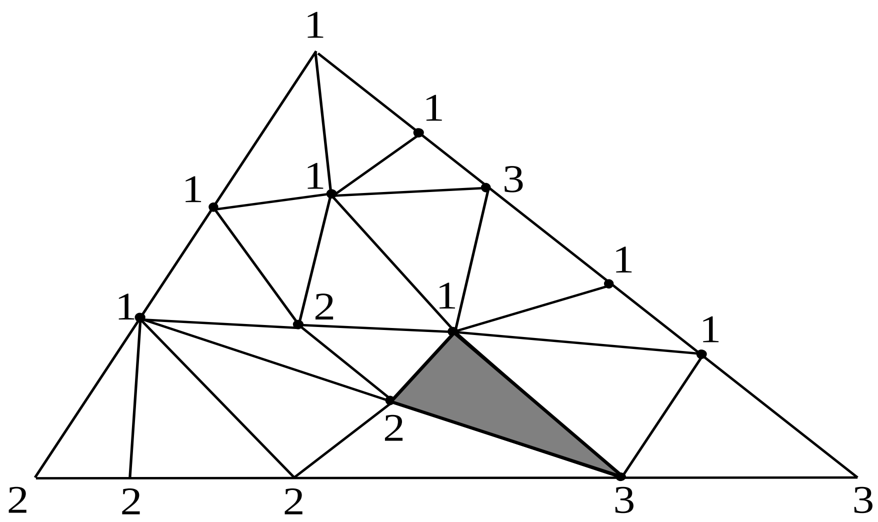
Primeiro, basta calcular $\binom{m+n}{p}$ para encontrarmos o total de subconjuntos de p elementos de $A \cup B$.

Por outro lado, podemos escolher k elementos de A e $p-k$ elementos de B de exatamente $\binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$ modos; e adicionando tais possibilidades quando k varia de 0 a p, logo obtemos a soma:

$$\sum_{k=0} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k} = \binom{m}{0}\binom{n}{p} + \binom{m}{1}\binom{n}{p-1} + \cdots + \binom{m}{p}\binom{n}{0}$$

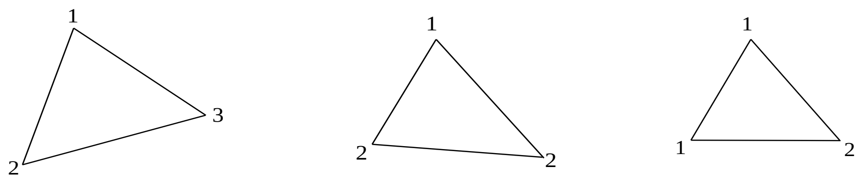
Portanto, igualando as duas soluções obtidas, chegamos a conclusão que a afirmação é verdadeira.

Exemplo: (Lema de Sperner). Dividimos um triângulo grande em triângulos menores de modo que quaisquer dois dentre os triângulos menores ou não têm ponto em comum, ou têm um vértice em comum ou tem um lado (completo) em comum. Os vértices dos triângulos são numerados: 1, 2, ou 3. A numeração é arbitrária, exceto que os vértices sobre os lados do triângulo maior oposto ao vértice i não podem receber o número i. Mostre que entre os triângulos menores existe um com os vértices 1, 2, 3.



Demonstração. Observando o modelo de divisão de um triângulo grande em triângulos menores usando o Lema de Sperner. Com o auxílio desta figura iremos mostrar que entre os triângulos menores existe um com os vértices 1, 2 e 3.

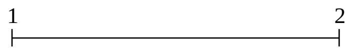
Contaremos o número de segmentos $\overline{12}$. Eles aparecem nos triângulos dos tipos a seguir:



Digamos que há x triângulos 123, y triângulos 122 e z triângulos 112. Observe que os segmentos $\overline{12}$ internos ao triângulo grande são contados duas vezes e os segmentos do ladodo triângulo grande, somente uma vez. Notemos também que os segmentos $\overline{12}$ aparecem duas vezes nos triângulos 122 e 112 e uma vez nos triângulos 123. Assim, a adição do dobro do número de segmentos interiores com o número de segmentos nos lados é igual ao total de segmentos, ou seja, $x + 2y + 2z$ = 2(segmentos interiores) + 1(segmentos nos lados).

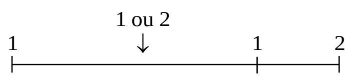
Vamos mostrar um enunciado mais forte: provaremos que x é ímpar e portanto não pode ser zero. Observando a equação acima, vemos que basta provarmos que o número de segmentos $\overline{12}$ sobre os lados do triângulo grande é ímpar.

Como não podemos ter pontos 1 no lado $\overline{23}$ muito menos pontos 2 no lado $\overline{13}$, todos os segmentos $\overline{12}$ estão sobre o lado $\overline{12}$ do triângulo grande. Provemos que o número de segmentos sobre o lado é ímpar. Para isso, vamos “colocar” vértices 1 ou 2 no lado $\overline{12}$. Assim, no começo, temos somente o lado $\overline{12}$:



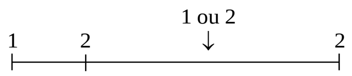
Na hora de colocar vértices, considere o menor segmento em cujo interior colocaremos o vértice. Podemos estar em uma das seguintes situações:

- Este segmento é do tipo $\overline{11}$:



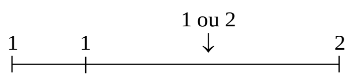
Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ não muda; se colocarmos 2, aumenta de 2. De qualquer forma, a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

- Este segmento é do tipo $\overline{22}$:



Se colocarmos 1, o número de segmentos $\overline{12}$ aumenta de 2; se colocarmos 2, não muda. De qualquer forma, a paridade do número de segmentos $\overline{12}$ não muda.

- Este segmento é do tipo $\overline{12}$:



Se colocarmos 1 ou 2, o número de segmentos $\overline{12}$ é invariante e é óbvio que a paridade desse número é invariante também.

Portanto a paridade do número desegmentos $\overline{12}$ é invariante. Inicialmente temos um segmento $\overline{12}$, temos que o número de segmentos $\overline{12}$ no lado do triângulo grande é sempre ímpar, o que justifica a nossa afirmação.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procurei enunciar e demonstrar o Princípio da casa de pombos de diversos modos, porque ao utilizarmos o PCP em sala de aula devemos primeiro identificar os limites e os conhecidos adquiridos anteriormente pelos alunados. Assim, no capítulo exemplifiqueie demonstrei o princípio em questão por meio de um lógica de distribuição dos pombos em casas de pombos, por meio de aplicações (ou funções) e até com a ideia de parte inteira de um número real. Utilizei exemplos com níveis de dificuldades crescentes, e outros nas áreas de geometria e teoria dos números.

A partir do segundo capítulo, transcrevi prova do Teorema de Erdös-Szekeres sobre subsequências monotônicas, a prova do Lema de Dilworth sobre ordens parciais e mostrei que o número de Ramsey $R(3, 3)$ é igual a6. Essas aplicações do PCP são extremamente interessantes e não podem faltar em qualquer trabalho relacionado a esse assunto. No caso desses teoremas e do lema apresentado no capítulo 2, o embasamento teórico apresentado no capítulo inicial foi de caráter imensurável para a perfeita compreensão dos mesmos.

Por fim, o capítulo 3 tratou sobre Contagem dupla que da mesma maneira que o princípio da casa de pombos, foienunciado e demonstrado através de alguns exemplos que vão dos mais óbvios alguns mais complexos. Todos os assuntos inseridos neste trabalho foram escritos com base em muito estudo e pesquisa, e principalmente na resolução de problemas.

REFERÊNCIAS

[1]Muniz Neto, Antônio Caminha. **Tópicos de Matemática Elementar**: **combinatória** – 1ª ed. --Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[2]Shine,Carlos Yuzo.**21 Aulas de Matemática Olímpica** - Coleção Olimpíadas deMatemática – 1ª ed. -- Rio de Janeiro: SBM, 2009.

[3]Oliveira, KrelrleyIrraciel Martins eFernández, Adán José Corcho.**Iniciação à Matemática: um curso com problemas e soluções** – 2ª ed. -- Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[4]Aigner, M. e Ziegler, G. **As provas estão n'O livro**– 2ª ed. – EditoraBlucher.

[5]Márcia R. Cerioli, Renata de Freitas e Petrucio Viana. **Artigo sobre o Princípio da Casa de Pombos**. - 3 de Abril de 2012

APÊNDICE A – PRIMEIRAS NOÇÕES DO PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Durante uma das aulas que ministro na E.E.I.E.F Rita de Cássia Brasileiro Pontes, localizada no município de Caucaia, para uma turma de alunos pré-selecionados no início do ano pelo corpo docente, e em especial pelos professores de Matemática. Realizo um projeto de OBMEP, onde dediquei uma aula para introduzir noções de combinatória para um pequeno grupo de alunos com o objetivo de estimulá-los a aprender uma matemática intuitiva e sem uso excessivo de fórmula, pois sabemos que a grande maioria dos livros didáticos do ensino médioabusam das fórmulas desnecessariamente, nos capítulos destinados à Análise Combinatória.

Nesta aula, preparei inicialmente o espaço físico. Organizei a sala de aula com três filas contendo três cadeiras cada, e em seguida recepcionei os alunos. Antes de distribuir uma lista de exercícios para esse grupo formado por 9 alunos, fiz a seguinte pergunta: De quantas maneiras diferentes podemos mapear esta sala?

Deixei que eles entrassem em debate entre si e ouvi diversas opiniões. No começo, não expus minha opinião, pois meu desejo era obter o máximo de concentração e interesse por parte deles.

Depois de um certo tempo eles fizeram um modelo no quadro lembrando uma tabela 3 x 3, e foram tentando exaustivamente até destacarem algumas das tais possibilidades de ocorrer a distribuição dos mesmos.

Antes de analisar juntamente com os alunos a resposta para a pergunta inicial, trabalhei o seguinte problema:

Eu tenho duas calças e três camisas. De quantos modos diferentes posso me vestir com essas roupas para vir à escola?

Comecei a responder usando uma árvore de possibilidades, e com base no resultado desenvolvi com eles os princípios aditivo e multiplicativo.

Voltamos ao problema inicial e indaguei-os se era mais fácil utilizar uma árvore de possibilidades ou os princípios conhecidos na aula. Rapidamente o grupo respondeu: os princípios. Daí, juntos resolvemos a questão e passamos a resolver a lista de exercícios a seguir:

1ª) Quantos números de três algarismos distintos podem ser formados com os algarismos 1, 2, 3, 4, 5 e 6?

2ª) Uma prova é composta de 8 questões do tipo verdadeiro (V) ou falso (F). De quantas maneiras distintas ela pode ser respondida?

3ª) A seleção brasileira de futebol irá disputar um torneio internacional com outras cinco seleções, no sistema "todos jogam contra todos uma única vez". Quais as possíveis sequências de resultados – vitória (V), empate (E) e derrota (D) – da equipe brasileira nesse torneio?

4ª)Considerando os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, responda:

a) Quantos números de três algarismos podemos formar?

b) Quantos números ímpares de três algarismos distintos podemos formar?

APÊNDICE B – PRIMEIRAS NOÇÕES DO PRINCÍPIO DA CASA DE POMBOS

Um assunto bastante interessante na matemática e que não encontrei em nenhum livro didático utilizado pelas principais redes públicas do país, é o Princípio da casa de pombos, também conhecido como o Princípio das gavetas. O objetivo da aula ministrada com alguns alunos de uma turma de OBMEP da escola na qual leciono é estimular o pensamento matemático e desenvolver na educação básica um interesse no campo do raciocínio lógico.

Com isso, iniciei a aula com uma situação problema onde utilizei bolas de isopor de mesmas formas e tamanho, e algumas garrafas pets cortadas ao meio. Pintei 10 bolas com a cor preta e em seguida pedi para que os alunos distribuíssem essas bolas em nove das garrafas pets, previamente cortadas ao meio e descartadas as partes superiores. Observei o trabalho tanto do grupo quanto individual, onde a turma estava bastante participativa. A todo instante eles tentavam relacionar a experiência do momento com o conteúdo aprendido na aula anterior, mas o meu desejo inicial era que eles notassem que em qualquer uma das possibilidades existentes para distribuirmos as dez bolas em nove recipientes, pelo menos um dos recipientes teria duas bolas. Depois de um longo bate-papo com o grupo chegamos à conclusão almejada por mim.

Daí, enunciei o princípio da casa de pombos da seguinte maneira: se temos n bolas e as distribuímos em $n - 1$ recipientes, temos pelo menos duas bolas num mesmo recipiente.

Devido ao potencial da turma ser ótimo, o grupo de alunos considerou o princípio bastante óbvio e sem muita utilidade para a avaliação da OBMEP. Fiquei muito animado com essa situação, e logo após inseri alguns problemas melhores elaborados e tentamos resolvê-los em sala.

Ao término dessa aula me senti satisfeitíssimo com o resultado obtido e principalmente esperançoso com os resultados que virão no decorrer do anocom as avaliações tanto da OBMEP quanto das realizadas com as turmas do último ano do ensino fundamental.