

Oswaldo Joaquim de Campos

CUBAGEM DE ÁRVORES

Dissertação submetida ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática para a obtenção do Grau de Mestre em Matemática com área de concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT).
Orientador: Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves

Florianópolis

2014

Ficha de identificação da obra elaborada pelo autor,
através do Programa de Geração Automática da Biblioteca Universitária da UFSC.

Campos, Oswaldo Joaquim de
Cubagem de Árvores / Oswaldo Joaquim de Campos ;
orientadora, Maria Inez Cardoso Gonçalves - Florianópolis,
SC, 2014.
87 p.

Dissertação (mestrado profissional) - Universidade
Federal de Santa Catarina, Centro de Ciências Físicas e
Matemáticas. Programa de Pós-Graduação em Matemática.

Inclui referências

1. Matemática. 2. Métodos de Cubagem de Árvores. 3.
Volumetria. 4. Diâmetro e Altura de Árvores. 5. Noções de
Dendrometria. I. Cardoso Gonçalves, Maria Inez. II.
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-
Graduação em Matemática. III. Título.

Oswaldo Joaquim de Campos

CUBAGEM DE ÁRVORES

Esta Dissertação foi julgada aprovada para a obtenção do Título de “Mestre em Matemática com área de concentração PROFMAT-UFSC associado ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)”, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática.

Florianópolis, 28 de Março 2014.

Prof. Dr. Celso Melchiades Dória
Coordenador do Curso

Banca Examinadora:

Prof. Dra. Maria Inez Cardoso Gonçalves
Orientador

Prof. Dr. Fábio Antonio Dorini

Prof. Dr. Danilo Royer

Prof. Dr. Gilles Gonçalves de Castro

Dedico este trabalho à minha família, em especial ao meu pai Oswaldo (in memoriam) e à minha mãe Maria, que sempre acreditaram e torceram por mim, esforçando-se incansavelmente para oferecer aos seus filhos amor, educação e ética.

AGRADECIMENTOS

A Deus pela minha vida e todas as bênçãos que tenho recebido.

A minha orientadora Maria Inez Cardoso Gonçalves pela orientação e pelo exemplo como profissional e ser humano.

Ao meu cunhado Engenheiro Florestal Wolney Cesar Felipe pelas sugestões e contribuições a essa monografia.

Ao professor e doutor Júlio Eduardo Arce do Departamento de Engenharia Florestal da UFPR pelas sugestões e contribuições a essa monografia.

Aos autores que fazem parte da referência bibliográfica pelas contribuições valiosas a essa monografia.

Aos professores que ministraram as aulas durante esses dois anos de mestrado.

Aos colegas do mestrado, em especial Bruno Alberto Peruchi e sua esposa Sueli Maria Coelho Peruchi pelo acolhimento e hospedagem em sua moradia.

RESUMO

Esta monografia é o resultado de um estudo sobre a Cubagem Rigorosa, também conhecida como *Cubagem de Árvores*. Veremos inicialmente as unidades de medidas e os conceitos matemáticos envolvidos no texto. Em seguida a importância da Dendrometria com os tipos de medidas a serem realizados nas árvores. É também apresentado o diâmetro e altura, medidas importantes na mensuração florestal. Na sequência, o eixo principal desse trabalho, a determinação do volume de um tronco de árvore, usando métodos de cubagem tais como Smalian, Huber e Newton. Por fim, um plano de aula que direciona a aplicação do método de Smalian com os alunos em uma atividade no campo.

Palavras-chave: Cubagem Rigorosa, Cubagem de Árvores, Unidades de Medidas, Conceitos Matemáticos, Dendrometria, Diâmetro, Altura, Volume, Smalian, Huber, Newton.

ABSTRACT

This monograph is the result of a study about rigorous cubing, also known as *Tree Cubing*. Initially, we will see measurement units and the mathematics concepts used in this dissertation. Next, we will talk about the importance of Dendrometry and the principal types of measures made in the trees. Subsequently, we present the main axis of this work, the volume determination of a tree trunk, using methods of cubic weight such as Smalian, Huber and Newton. Finally, a lesson plan that directs the application of the Smalian method with the students in a field activity.

Keywords: Rigorous Cubing, Tree Cubing, Measure Units, Mathematical Concepts, Dendrometry, Diameter, Height, Volume, Smalian, Huber, Newton.

LISTA DE FIGURAS

| | | |
|-----------|--|----|
| Figura 1 | a)Folhosa b)Conífera..... | 24 |
| Figura 2 | Árvore com Sapopemas..... | 24 |
| Figura 3 | Revolução da Região sob o Gráfico da Função..... | 25 |
| Figura 4 | Diâmetro e Circunferência de uma Árvore Típica..... | 35 |
| Figura 5 | PMD em Situações Práticas..... | 37 |
| Figura 6 | Medição de Diâmetro com a Suta..... | 38 |
| Figura 7 | Fita Diamétrica..... | 39 |
| Figura 8 | (a)maneira correta (b) maneira incorreta..... | 39 |
| Figura 9 | Secção Transversal de um Tronco de Árvore..... | 40 |
| Figura 10 | Perímetros Iguais – Áreas Diferentes..... | 41 |
| Figura 11 | Alturas das Árvores e Classificações do Comprimento.. | 43 |
| Figura 12 | Vara Telescópica..... | 44 |
| Figura 13 | Esquema de Medição da Altura - Terreno Plano..... | 46 |
| Figura 14 | Esquema de Medição da Altura - Terreno em Aclive ... | 46 |
| Figura 15 | Esquema de Medição da Altura - Terreno em declive... | 47 |
| Figura 16 | a) Nível de Aney b) Haga c) Blume-Leiss d) Suunto | 48 |
| Figura 17 | Medição da Altura - Hipsômetro de Christen..... | 50 |
| Figura 18 | Graduação na Reentrância do Hipsômetro de Christen . | 50 |
| Figura 19 | Erro por Excesso da Altura em Árvore Inclinada..... | 52 |
| Figura 20 | Medição da Altura de uma Árvore Inclinada..... | 52 |
| Figura 21 | Efeito da Inclinação do Terreno na Distância Operador-Árvore..... | 53 |
| Figura 22 | a) Erro Gerado pela Forma da Copa b) Erro Gerado pela Vegetação Densa..... | 55 |
| Figura 23 | Sólidos de Revolução..... | 58 |
| Figura 24 | Sólidos de Revolução com a Variação do Parâmetro r .. | 60 |
| Figura 25 | Formas Geométricas Associadas ao Tronco de uma Árvore..... | 62 |
| Figura 26 | Troncos do Parabolóide e Neilóide..... | 62 |
| Figura 27 | Esquema Genérico para Cubagem de uma Árvore por Smalian..... | 68 |
| Figura 28 | Esquema Genérico para Cubagem de uma Árvore por Huber..... | 69 |

| | |
|---|----|
| Figura 29 Esquema Genérico para Cubagem de uma Árvore por Newton | 70 |
| Figura 30 Esquema para Cubagem por Smalian | 73 |
| Figura 31 Esquema para Cubagem por Huber | 74 |
| Figura 32 Esquema para Cubagem por Newton | 75 |
| Figura 33 Xilômetro | 78 |

LISTA DE TABELAS

| | | |
|-----------|---|----|
| Tabela 1 | Perímetros e Áreas | 26 |
| Tabela 2 | Volumes | 27 |
| Tabela 3 | Grandeza | 28 |
| Tabela 4 | Conversão de Unidades | 29 |
| Tabela 5 | Circunferência – Diâmetro – Altura – Área – Volume .. | 33 |
| Tabela 6 | Ponto de Medição do DAP | 38 |
| Tabela 7 | Comparação das Médias | 42 |
| Tabela 8 | Obtenção da Altura pelo Hipsômetro | 48 |
| Tabela 9 | Exemplo | 55 |
| Tabela 10 | Volume dos Sólidos Padrões | 61 |
| Tabela 11 | Volume do Tronco dos Sólidos Padrões | 66 |
| Tabela 12 | Dados para Cubagem por Smalian | 72 |
| Tabela 13 | Dados para Cubagem por Huber | 74 |
| Tabela 14 | Dados para Cubagem por Newton | 76 |

SUMÁRIO

| | |
|--|----|
| Introdução | 21 |
| 1 CONCEITOS BÁSICOS | 23 |
| 1.1 GLOSSÁRIO | 23 |
| 1.2 CONCEITOS MATEMÁTICOS BÁSICOS | 24 |
| 1.2.1 Aplicações da Integral - Volumes de Sólido de Re- volução | 24 |
| 1.2.2 Médias | 25 |
| 1.2.3 Áreas, Perímetros e Volumes | 26 |
| 1.3 UNIDADES DE MEDIDAS | 27 |
| 2 DENDROMETRIA | 31 |
| 2.1 TIPOS DE MEDIDAS | 31 |
| 2.1.1 Medidas Diretas | 32 |
| 2.1.2 Medidas Indiretas | 32 |
| 2.1.3 Medidas Estimadas | 32 |
| 2.2 ERROS DE MEDIÇÃO | 32 |
| 2.3 PADRONIZAÇÃO DE SÍMBOLOS FLORESTAIS | 33 |
| 3 DIÂMETRO E ALTURA | 35 |
| 3.1 DIÂMETRO DAS ÁRVORES | 35 |
| 3.1.1 Diâmetro à Altura do Peito | 35 |
| 3.1.2 Importância do DAP | 36 |
| 3.1.3 Ponto de Medição | 37 |
| 3.1.4 Instrumentos de Medição de Diâmetros | 38 |
| 3.1.5 Diâmetro e Secções Transversais | 40 |
| 3.1.6 Efeito da Forma do Tronco na Medição do Diâmetro | 40 |
| 3.2 ALTURA DAS ÁRVORES | 42 |
| 3.2.1 Tipos de Alturas | 43 |
| 3.2.2 Medição de Alturas | 44 |
| 3.2.3 Instrumentos para Medições Indiretas de Alturas .. | 45 |
| 3.2.3.1 Hipsômetros – Princípio Trigonométrico | 45 |
| 3.2.3.2 Hipsômetros – Princípio Geométrico | 49 |
| 3.2.4 Erros na Medição da Altura | 51 |
| 3.2.4.1 Erros pela Inclinação da Árvore | 51 |
| 3.2.4.2 Erros pela Inclinação do Terreno | 53 |
| 3.2.4.3 Erros pela Forma da Copa e Vegetação na Base | 54 |
| 3.2.5 Exemplos | 55 |
| 4 VOLUMETRIA | 57 |
| 4.1 VOLUME DAS ÁRVORES | 57 |

| | | |
|-------|--|----|
| 4.2 | ESTUDO MATEMÁTICO DAS FORMAS DOS TRONCOS | 58 |
| 4.3 | VOLUME DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO | 59 |
| 4.4 | VOLUME DOS TRONCOS DOS SÓLIDOS DE REVOLU- ÇÃO | 61 |
| 4.5 | CUBAGEM DE UMA ÁRVORE (CUBAGEM RIGOROSA) | 67 |
| 4.5.1 | Cubagem por Smalian | 67 |
| 4.5.2 | Cubagem por Huber | 68 |
| 4.5.3 | Cubagem por Newton | 69 |
| 4.5.4 | Recomendações sobre os Métodos de Cubagem | 71 |
| 4.5.5 | Aplicação Prática dos Métodos de Cubagem | 72 |
| 4.5.6 | Deslocamento de Água | 77 |
| 4.6 | CONCLUSÕES SOBRE OS MÉTODOS DE CUBAGEM ... | 78 |
| 5 | APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO | 81 |
| | Conclusão | 85 |
| | REFERÊNCIAS | 87 |

INTRODUÇÃO

Ao se vender um determinada quantidade de árvores para ser comercializada, qual seria o parâmetro para se estipular o preço dessas árvores? A resposta é o volume delas. O volume de madeira plantada é uma informação essencial e saber quantificá-lo da forma mais precisa possível foi objeto de pesquisa ao longo dos anos por pesquisadores da área florestal. O método mais simples de estimativa e quantificação de madeira é a Cubagem Rigorosa, popularmente conhecida como *Cubagem de Árvores*.

O presente texto tem como finalidade expor alguns métodos de Cubagem de Árvores que visam medir principalmente o volume de troncos e toras. Serão apresentadas as principais fórmulas de cubagem mais usadas, todas denominadas pelos nomes de seus proponentes: *Smalian*, *Huber* e *Newton*. Tais fórmulas, que são definidas a partir dos sólidos de revolução conhecidos como *Protótipos Dendrométricos*, utilizam medidas de diâmetros ao longo de diversas posições do tronco.

Este trabalho, intitulado com *Cubagem de Árvores* reúne informações de vários autores (ver referência bibliográfica) da área florestal que se dedicaram ao tema e que tem como objetivo esclarecer a mensuração de diâmetro e altura, culminando na mensuração do volume.

Finalmente, é apresentado um Plano de Aula que tem como meta colocar os alunos do ensino médio no campo para a Cubagem de uma Árvore.

1 CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo, apresentamos um glossário que esclarecerá termos técnicos relacionados a área florestal, alguns conceitos matemáticos básicos envolvidos no transcórre deste trabalho e as unidades do sistema métrico decimal com a conversão para o sistema inglês.

1.1 GLOSSÁRIO

Área Basal: É a soma das áreas transversais de árvores individuais a 1,30 metros do solo, numa parcela ou num hectare. É dada em m^2 por unidade de área, mais comumente em m^2/ha .

Coníferas: Constituem uma ordem de plantas gimnospermas, as quais se caracterizam por apresentar sementes descobertas e flores pouco vistosas, pois carecem de pétalas. Apresentam folhas aciculadas (forma de agulhas). Normalmente de tronco reto com formatos em geral piramidal ou alongada, com algumas espécies de aspecto umbelado (semelhante a um guarda-sol). Típicas de climas temperados e frios. Veja a Figura 1.b

Copa: É a parte superior da árvore ou de outra planta lenhosa, formada por ramificações e folhagens.

Folhosas: Constituem uma ordem de plantas angiospermas, as quais se caracterizam pelas folhas latifoliadas (largas e grandes), frutos com sementes envolvidas por uma casca e flores muitas vezes vistosas. Veja a Figura 1.a

Fuste: É a parte principal do tronco de uma árvore, aquela situada entre o solo e as principais ramificações. Em suma, é a parte mais visível do tronco de uma árvore.

Inventário Florestal: Consiste no uso de fundamentos de amostragem para determinação ou estimativa de características florestais. Tem como finalidade conhecer o estoque presente da floresta e identificar o potencial da floresta, base para os estudos de crescimento e produção. O inventário pode ser contínuo, que é a ferramenta básica que o Engenheiro Florestal dispõe para conhecer as mudanças que ocorrem na floresta oriundas de perturbações naturais e humanas. Conhecendo essas mudanças, é possível planejar a utilização da floresta, sem causar prejuízos ao ecossistema florestal.

Sapopemas: Sapopema é uma palavra originada do tupi *Sau'pema*, que significa raiz chata. São extensões achatadas (tabulares) da parte su-

perior das raízes superficiais, que funcionam como estruturas de sustentação das árvores. Veja a Figura 2.

Figura 1: a)Folhosa b)Conífera

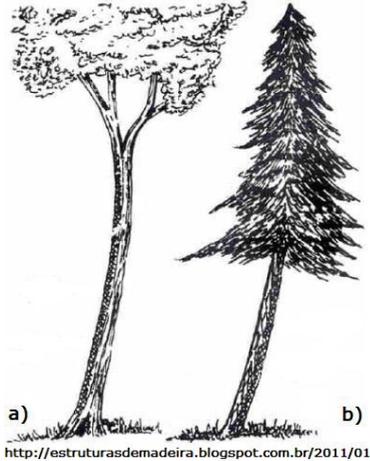


Figura 2: Árvore com Sapopemas



1.2 CONCEITOS MATEMÁTICOS BÁSICOS

1.2.1 Aplicações da Integral - Volumes de Sólido de Revolução

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$. Consideramos o sólido de revolução obtido pela rotação da região limitada pelo eixo Ox e pelo gráfico de f em torno do eixo Ox (Figura 3).

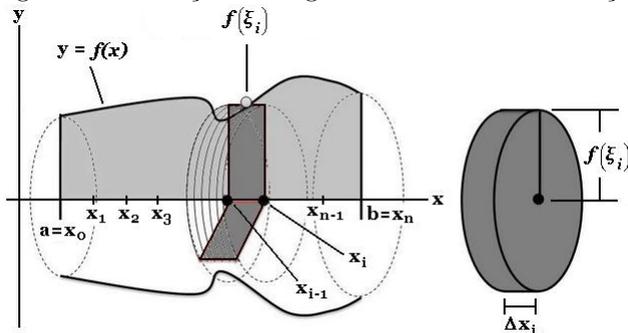
Considere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e, para cada subintervalo da partição, escolha um ponto $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. O volume do cilindro de raio $f(\xi_i)$ e altura $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ é dado por:

$$\Delta V_i = \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i.$$

A soma desses volumes,

$$\sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i$$

Figura 3: Revolução da Região sob o Gráfico da Função



é uma soma de *Riemann* e, na medida em que tomamos partições mais e mais finas, os cilindros empilhados formam um sólido que se parece cada vez mais com o sólido de revolução original. Como a função f é contínua, a função $g(x) = \pi [f(x)]^2$ também é contínua. Podemos então estabelecer a definição a seguir:

Definição 1. O volume V do sólido obtido pela revolução da região sob o gráfico da função contínua, não negativa, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ em torno do eixo Ox é

$$V = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi [f(\xi_i)]^2 \Delta x_i = \int_a^b \pi [f(x)]^2 dx.$$

1.2.2 Médias

Uma média de uma lista de números é um valor que pode substituir todos os elementos da lista sem alterar uma certa característica da lista. Se essa característica é a soma dos elementos da lista, obtemos a mais simples de todas as médias, a média aritmética. A média aritmética (simples) da lista de n números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é um valor positivo \bar{x} tal que $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x} = n\bar{x}$. Portanto, temos a seguinte definição:

Definição 2. A *média aritmética* da lista de n números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é definida por

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} .$$

Se a característica a ser considerada for o produto dos elementos da lista, obteremos a média geométrica. A média geométrica (simples) dos n números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é um valor positivo g tal que $x_1 \cdot x_2 \dots x_n = g \cdot g \dots g = g^n$. Portanto, temos a seguinte definição:

Definição 3. A *média geométrica* da lista de n números reais positivos x_1, x_2, \dots, x_n é definida por

$$g = G(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \dots x_n}.$$

Vamos provar que para dois números positivos x_1 e x_2 , a média aritmética ($\bar{x} = M_a$) e a média geométrica ($g = M_g$) satisfazem $M_a \geq M_g$. De fato!

$$M_a - M_g = \frac{x_1 + x_2}{2} - \sqrt{x_1 \cdot x_2} = \frac{x_1 + x_2 - 2\sqrt{x_1 \cdot x_2}}{2} = \frac{(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2}{2} \geq 0$$

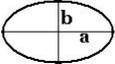
$$\implies M_a - M_g \geq 0.$$

Logo, $M_a \geq M_g$.

1.2.3 Áreas, Perímetros e Volumes

Apresentamos aqui a fórmulas de perímetros e áreas de figuras planas, assim como, fórmulas de volume de sólidos, que irão aparecer no transcórre desse texto.

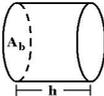
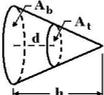
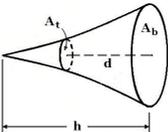
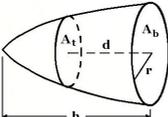
Tabela 1: Perímetros e Áreas

| Legenda | | |
|-----------------------|---|---|
| a = semi eixo maior | C = comprimento | r = raio |
| b = semi eixo menor | D = diâmetro | A = área |
| Figura Plana | Diagrama | Fórmula |
| Círculo |  | $A = \frac{\pi D^2}{4}$ $C = 2\pi r = \pi D$ |
| Elipse |  | $A = \pi ab$ $C \approx \pi \left[3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right]$ |

Na Tabela 1, sobre a fórmula do perímetro da elipse, o famoso

matemático indiano **Srinivasa Ramanujan** descobriu esta aproximação mais precisa. Na tabela 2, sobre o sólido geométrico Neilóide, o qual não é exposto em um curso de graduação de matemática, será apresentado na *seção 4.2*.

Tabela 2: Volumes

| Legenda | | |
|--------------------------------------|--|--|
| h = altura | A_b = área da base | A_t = área de uma seção superior |
| r = raio | v = volume | d = distância da base até a seção intermediária |
| Sólido | Diagrama | Fórmula |
| Cilindro |  | $v = A_b h$ |
| Cone |  | $v = \frac{A_b h}{3}$ $v = \frac{d}{3} (A_b + \sqrt{A_b A_t} + A_t)$ |
| Neilóide Tronco Neilóide |  | $v = \frac{A_b h}{4}$ $v = \frac{d}{4} (A_b + \sqrt[3]{(A_b)^2 A_t} + \sqrt[3]{A_b (A_t)^2} + A_t)$ |
| Parabolóide Tronco Parabolóide |  | $v = \frac{A_b h}{2}$ $v = \frac{d}{2} (A_b + A_t)$ |

1.3 UNIDADES DE MEDIDAS

Um grande número de unidades de medidas foi criado e desenvolvido ao longo da história da humanidade. Hoje em dia, o sistema de medidas está reduzido basicamente a dois: o *sistema métrico*, usado na maioria dos países e o *sistema inglês*, usado em alguns países de língua inglesa. No Brasil, usamos o sistema métrico encorpado pelo Sistema Internacional de Unidades - SI, adotado desde 1962. Todas as medidas realizadas devem ser expressas dentro desse sistema, evitando

assim, questionamentos legais com relação a contratos de prestação de serviços e de compra e venda de madeira.

As principais grandezas físicas medidas ou estimadas com suas respectivas unidades de medida e simbologia apresentamos na Tabela 3 abaixo:

Tabela 3: Grandeza

| Grandeza | Unidade de Medida | Símbolo |
|------------------|------------------------------|----------|
| Comprimento | Metro | m |
| Área | Metro quadrado | m^2 |
| | Hectare | ha |
| Volume | Metro Cúbico | m^3 |
| Massa | Quilograma | kg |
| | Tonelada | t |
| Ângulo Plano | Graus | $^\circ$ |
| Massa Específica | Quilograma por metro cúbico | kg/m^3 |
| | Gramas por centímetro cúbico | g/cm^3 |

Mas em algumas situações, as medidas necessitam ser convertidas em outras, visto que:

- o sistema inglês é o sistema básico de mensuração florestal nos Estados Unidos e em outros centros, onde a ciência florestal é bem desenvolvida.
- alguns instrumentos fornecem estimativas no sistema inglês (polegadas, pés, etc).

Para isto, devemos utilizar fatores de conversão de unidades de medida do sistema métrico decimal e sistema inglês. Eis alguns exemplos colocados na Tabela 4 abaixo:

Tabela 4: Conversão de Unidades

| Sistema Inglês | Sistema Métrico |
|---|--------------------------------|
| Unidades de Comprimento | |
| 1 Polegada (inch, in) | 2,54 <i>cm</i> |
| 1 Pé (foot, ft) | 30,48 <i>cm</i> |
| 1 Jarda (yard, yd) | 91,44 <i>cm</i> |
| 1 Milha (mile, mi) | 1609,3 <i>m</i> |
| Unidades de Área | |
| 1 Milha Quadrada (square mile, <i>mi</i> ²) | 258999,7 <i>m</i> ² |
| 1 Acre (ac) | 4046,87 <i>m</i> ² |
| 1 Jarda Quadrada (square yard, <i>yd</i> ²) | 0,836131 <i>m</i> ² |
| 1 Hectare (ha) | 10000 <i>m</i> ² |
| Unidades de Volume | |
| 1 Polegada Cúbica (cubic inch, <i>in</i> ³) | 16,3871 <i>cm</i> ³ |
| 1 Pé Cúbico (cubic foot, <i>ft</i> ³) | 28317 <i>cm</i> ³ |
| 1 Galão (gal) | 3785,43 <i>cm</i> ³ |
| Unidades de Massa ou Peso | |
| 1 Onça (ounce, oz) | 28,34953 <i>g</i> |
| 1 libra (pound, lb) | 453,592 <i>g</i> |

2 DENDROMETRIA

Desde a utilização da madeira na construção de casas, artefatos, móveis e objetos, que o uso de métodos de quantificação da madeira vem sendo adotados para auxiliar na compra e venda. Quando haviam florestas em abundância, compradores e vendedores não exigiam que as medidas das quantidades de madeiras comercializadas fossem rigorosas. A crescente escassez de madeira provenientes de florestas em áreas nativas, trouxe como consequência a elevação do valor da madeira e seus produtos, e assim tanto vendedores como compradores almejavam conhecer, com suficiente precisão, aquilo que vendiam ou compravam. Assim sendo, no setor florestal, foram, e ainda continuam sendo, desenvolvidas e aperfeiçoadas técnicas e métodos de medição e avaliação de produtos e subprodutos madeireiros, tendo em vista as exigências de objetivos comerciais. Dentro desse contexto, enquadra-se a *DENDROMETRIA* (*DENDRON* do Grego, que significa *árvore* e *METRIA* do Latim, que significa *medida*), ao qual é uma ramo da ciência florestal que trata de medidas e/ou estimativas de árvores e florestas, de seus produtos e de suas dinâmicas de crescimento.

Numa definição mais ampla, pode-se afirmar que a Dendrometria se encarrega:

- do estudo da forma e das relações dendométricas a nível de árvore e do povoamento florestal;
- da determinação da idade, crescimento e produção da árvore e da floresta;
- da determinação das dimensões, volume e peso de árvores em pé ou derrubadas.

A seguir, apresentamos os tipos de medidas a serem realizadas nas árvores, os erros de medição divididos em categorias e a padronização de símbolos florestais na mensuração florestal.

2.1 TIPOS DE MEDIDAS

Há três fatores que determinam a escolha das medidas a serem realizadas nas árvores:

- a facilidade e a velocidade que as medidas podem ser realizadas;

- a exatidão com que podem ser feitas;
- correlação entre as medidas e as características às quais se desejam uma estimativa.

Dentro deste contexto, as medidas podem assim ser consideradas:

2.1.1 Medidas Diretas

São medidas ao alcance direto do operador, tomadas diretamente sobre a árvore. Como exemplo, temos as medições de diâmetros de árvores em pé ou derrubadas, os comprimentos das toras, a espessura da casca, as alturas das árvores abatidas, entre outras.

2.1.2 Medidas Indiretas

São medidas feitas sem que haja contato direto do operador com o objeto medido. Como exemplo, temos medidas de altura e volume das árvores em pé.

2.1.3 Medidas Estimadas

São medidas feitas em parte da população ou de povoamento florestais. São baseadas em métodos estatísticos e é bastante utilizada pelo fato de ser econômica e de se ganhar tempo, pois são tomadas em áreas amostrais e extrapoladas para o conjunto total através de curvas, equações, tabelas, etc. Quando bem planejada, oferece resultados bastante precisos.

2.2 ERROS DE MEDIÇÃO

Os erros de medição de uma grandeza podem ser minimizados. Eles são divididos nas seguintes categorias:

► Erros Sistemáticos

São causados por defeitos no instrumento de medição ou inabilidade do operador em manusear o instrumento.

► Erros de Estimativa

São erros provenientes de amostragens. Na prática florestal, não se deve fornecer um valor médio exato, mas sim um intervalo limitado que, com um nível de significância determinado, contém o valor real.

► Erros Acidentais

São os erros cometidos por engano ou descuido do operador ou do registrador da informação.

► Erros Compensantes

São causados por arredondamento, não dependendo do instrumento nem do operador.

2.3 PADRONIZAÇÃO DE SÍMBOLOS FLORESTAIS

Na literatura florestal, a diversificação de símbolos foi fator de grande confusão nos meios técnicos. Em 1959, a União Internacional das Organizações de Pesquisa Florestal (IUFRO - International Union of Forestry Research) publicou uma recomendação para a padronização de símbolos na mensuração florestal.

Na Tabela 5 colocamos os principais símbolos usados no presente texto referentes a circunferência, diâmetro, altura, área transversal, área basal (Ver Seção 1.1 - Glossário) e volume.

Tabela 5: Circunferência – Diâmetro – Altura – Área – Volume

| Símbolos | Significado |
|-----------|---|
| c | Circunferência da árvore medida a 1,30 m do solo |
| d | Diâmetro da árvore medida a 1,30 m do solo |
| $d_{0,7}$ | Diâmetro tomado a 70% da altura total da árvore |
| h | Altura total árvore, da base ao ápice |
| g | Área transversal ou seccional (perpendicular ao eixo da árvore) medida a 1,30 m do solo |
| G | Área Basal a 1,30 m do solo |
| v | Volume total da árvore |

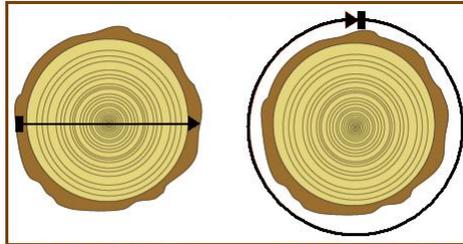
3 DIÂMETRO E ALTURA

Neste capítulo, apresentamos o diâmetro e a altura, medidas importantes na mensuração florestal. Faremos também uma breve apresentação dos instrumentos utilizados para efetuar tais medidas.

3.1 DIÂMETRO DAS ÁRVORES

Dentre as variáveis mensuráveis em uma árvore e no povoamento florestal, o diâmetro é a mais importante e por extensão, a circunferência (Ver Figura 4). É feita sobre a porção lenhosa das árvores, isto é, tronco principal de uma árvore em pé, seus galhos, ou porções cortadas. Desta medida, podemos calcular a área de secção transversal e o volume de uma árvore. Em geral, nas medições florestais, o diâmetro e circunferências são expressos em *cm*.

Figura 4: Diâmetro e Circunferência de uma Árvore Típica



<http://www.whrc.org/resources/fieldguides/carbon/>

3.1.1 Diâmetro à Altura do Peito

Até o início do século XX as medições de diâmetro eram tomadas em diferentes alturas próximas da base. Com o passar dos anos a medição do diâmetro de árvores em pé passou a ser feita como referência a 1,30 m a partir do nível do solo. O diâmetro medido a esta altura é denominado por *DAP* (Diâmetro à Altura do Peito), simbolizado por *d*. Além de *DAP*, podemos ter *CAP*, que significa Circunferência à Altura do Peito e simbolizado por *c*.

A adoção desta altura para se medir o *DAP*, que é largamente difundida na atividade florestal, tem basicamente as seguintes razões:

- é uma forma de padronização, não dependendo da altura do operador;
- nessa altura o tronco da maioria das árvores está livre de **sapopemas** (Ver Seção 1.1 - Glossário);
- a altura do peito é uma posição que facilita o trabalho e manuseio dos instrumentos de medição.

3.1.2 Importância do DAP

A seguir listamos algumas razões que fazem com que o *DAP* ou *CAP* sejam considerados como as medidas mais importantes de se tomar em uma árvore:

- são medidas mais acessíveis de se obter em uma árvore
- são variáveis envolvidas no cálculo, por exemplo, de área transversal g .

Considerando que a secção transversal do fuste (Ver Seção 1.1 - Glossário) se aproxime da forma circular, sabemos que

$$c = 2\pi r = \pi d \quad \implies \quad r = \frac{c}{2\pi} = \frac{d}{2}.$$

Logo, em termos da área transversal g , segue que

$$g = \pi r^2 = \frac{c^2}{4\pi} = \frac{\pi d^2}{4}.$$

Caso o raio r ou circunferência c ou diâmetro d estejam em centímetros, para obter a área transversal g em metros quadrados, as fórmulas da área podem ser reescritas como

$$g = \frac{\pi r^2}{10000} = \frac{c^2}{40000\pi} = \frac{\pi d^2}{40000}.$$

- O grau de ocupação do terreno florestal (densidade do povoamento) é expresso como área basal (G) por hectare de um povo-

amento, ao qual é determinada pela somatória das área transversais de todas as árvores existentes nesse hectare, ou seja

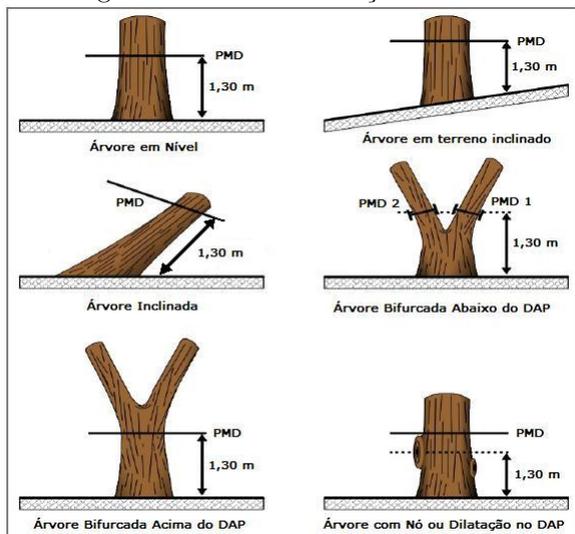
$$G = \sum_{i=1}^n g_i.$$

Os diâmetros também podem ser medidos em posições diferentes, como por exemplo o diâmetro tomado a 70% da altura total da árvore ($d_{0,7}$). Isto depende da necessidade do trabalho ou estudo a ser feito.

3.1.3 Ponto de Medição

Nem sempre é possível medir o diâmetro à altura do peito (*DAP*) em seu ponto convencional. Na Figura 5, mostramos algumas situações práticas encontradas em uma floresta, bem como os respectivos Ponto de Medição do Diâmetro (PMD).

Figura 5: PMD em Situações Práticas



Fonte: SCTP - Curitiba - Banco de Dados - 2009

As árvores com nó ou dilatação como mostra a Figura 5 e ainda árvores com sapopema ou raízes aéreas, tem seu PMD 30 *cm* acima do término dessas anomalias.

O ponto de medição do *DAP* varia em alguns países. Veja a Tabela 6:

Tabela 6: Ponto de Medição do DAP

| País | Altura da Medição (m) |
|-------------------------------------|-----------------------|
| Países que adotam o sistema métrico | 1,30 |
| Estados Unidos | 1,35 |
| Japão | 1,25 |
| Reino Unido | 1,29 |

3.1.4 Instrumentos de Medição de Diâmetros

Os instrumentos usados para a determinação do diâmetro das árvores são vários, alguns para árvores em pé e outros para árvores derrubadas. A escolha de qual usar depende da praticidade, custo e a finalidade do trabalho de medição. Mencionaremos aqui basicamente a suta e a fita diamétrica.

- **SUTA**

Este instrumento consiste de uma régua graduada (as digitais possuem um visor) com dois braços perpendiculares à ela e paralelos entre si, sendo um braço fixo e o outro móvel que desliza sobre a régua graduada. Feitas de aço ou liga de alumínio, são indicadas para diâmetros abaixo de 60 *cm* (graduação da suta em centímetros com os submúltiplos em milímetros), visto que sutas grandes são pesadas para manuseio. Na Figura 6 mostramos como se procede a medição do diâmetro com uma suta digital.

Figura 6: Medição de Diâmetro com a Suta



Para minimizar os erros de medição com este instrumento, ela

deve estar sem defeito, braços paralelos entre si, braços e régua posicionados em único plano, e por fim a régua e os braços devem tocar o ponto de medição do diâmetro.

• FITA DE DIÂMETRO

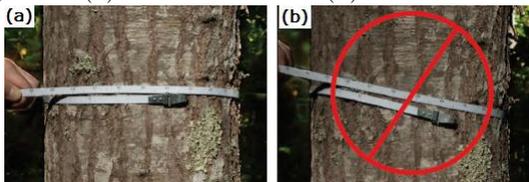
Este instrumento consiste de um tipo de trena feita de aço ou nylon ao qual contém duas escalas de medida, uma em cada face da fita. Uma escala possui graduação em centímetros (com submúltiplos em milímetros) para medir circunferência. A outra escala com graduação em unidades de diâmetro possibilita a leitura direta do diâmetro em centímetros. Algumas fitas diamétricas possuem um gancho em uma extremidade que pode ser fixado no tronco para manter a fita firme no lugar, enquanto as medições estão sendo feitas. A conversão de circunferência para diâmetro e vice-versa baseia-se na relação $C = \pi d$, considerando $\pi \approx 3,1416$. Veja a Figura 7.

Figura 7: Fita Diamétrica



Na Figura 8 mostramos a maneira correta e incorreta de medir o diâmetro de uma árvore.

Figura 8: (a) maneira correta (b) maneira incorreta



<http://www.whrc.org/resources/fieldguides/carbon/>

3.1.5 Diâmetro e Secções Transversais

Anomalias nas secções transversais de um tronco de uma árvore ocorrem devido a fatores externos, tais como condições do terreno, temperatura, umidade, insolação, ventos, espaçamento ou a fatores internos tais como a predisposição genética de espécie. As secções transversais se apresentam de várias formas. Veja um exemplo na Figura 9.

Figura 9: Secção Transversal de um Tronco de Árvore



Se a secção transversal de um tronco se aproximar de um círculo, procedemos quanto à medição do diâmetro da seguinte forma:

- com a suta, basta tomar o diâmetro com uma medida;
- com a fita diamétrica, basta tomar a circunferência com uma medida.

Se a secção transversal for irregular,

- com a suta, basta tomar duas medidas do diâmetro em posições perpendiculares entre si e daí, o diâmetro registrado é obtido da média aritmética destas;
- com a fita diamétrica, basta tomar a circunferência com uma medida.

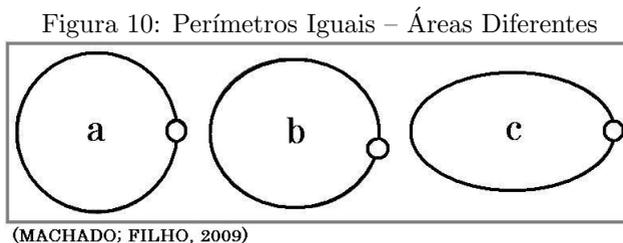
3.1.6 Efeito da Forma do Tronco na Medição do Diâmetro

O principal objetivo na medição do diâmetro do tronco é determinar a área da secção transversal correspondente ao ponto medido.

Quando a secção transversal de um tronco de uma árvore se aproxima da forma circular, obteremos com facilidade a área transversal, bastando para isso medir seu diâmetro ou circunferência.

Agora se a secção transversal é irregular, as medidas tomadas com a fita diamétrica possuem um erro para mais, afetando consequentemente a área transversal.

É conhecido na matemática que para um mesmo perímetro, a seção circular é a que possui maior área (Ver Desigualdade Isoperimétrica no endereço http://matematicauniversitaria.ime.usp.br/Conteudo/n15/n15_Artigo02.pdf, Jan. 2014). Por exemplo, as Figuras 10a–b–c possuem exatamente o mesmo perímetro. Foram construídas amarrando as extremidades de um fio com mesmo comprimento (MACHADO; FILHO, 2009).



Das três formas, a de maior área é a mostrada na Figura 10a e a de menor na Figura 10c. Quanto mais alongada for a forma geométrica de figuras com mesmo perímetro, menor será sua área (MACHADO; FILHO, 2009).

A fita diamétrica é usada normalmente para medir circunferências. Isto significa medir perímetros de seções transversais e expressá-los em termos de diâmetro. Como na maioria dos troncos as seções transversais são irregulares (excêntricas), assume-se que a área contida dentro desse perímetro é a máxima possível, quando na maior partes dos casos não é (MACHADO; FILHO, 2009).

Usando a suta para medir seções excêntricas, também não obtemos diâmetro e áreas transversais exatas.

Já sabemos que para seções transversais irregulares, quando se usa a suta, é usual tomar o diâmetro da árvore como a média aritmética do menor e maior diâmetro. Mas há autores que defendem que deva ser a média geométrica desses dois diâmetros tomados.

Veja um exemplo comparativo, considerando que a secção transversal se aproxime de uma elipse.

Suponha que $d_1 = 30 \text{ cm}$ (diâmetro maior) e $d_2 = 24 \text{ cm}$ (diâmetro menor).

Fazendo o cálculo da área seccional elíptica do tronco, segue que

$$g_e = \pi r_1 r_2 = \frac{\pi d_1 d_2}{4} = \frac{3,1416 \cdot 30 \cdot 24}{4} = 565,488 \text{ cm}^2$$

Observando a Tabela 7 vemos como as médias aritméticas e geométricas influenciaram nos resultados,

Tabela 7: Comparação das Médias

| Instrumento (Suta) | Diâmetro (cm) | Área Transversal Circular (cm^2) |
|--------------------|-------------------|--------------------------------------|
| Média Aritmética | 27 | 572,556 |
| Média Geométrica | 26,8 | 564,106 |

e assim concluí-se que com a média geométrica tivemos uma aproximação melhor da área transversal elíptica (Ver Subseção 1.2.2 - Médias). Note que, como mencionado acima, a área transversal obtida via média aritmética é maior do que a área transversal elíptica (real).

Observe que para medições que são repetidas ao longo do tempo, como por exemplo a verificação do crescimento das árvores, recomenda-se medir circunferências em vez de diâmetros, pois estas independem da posição do operador em volta da árvore.

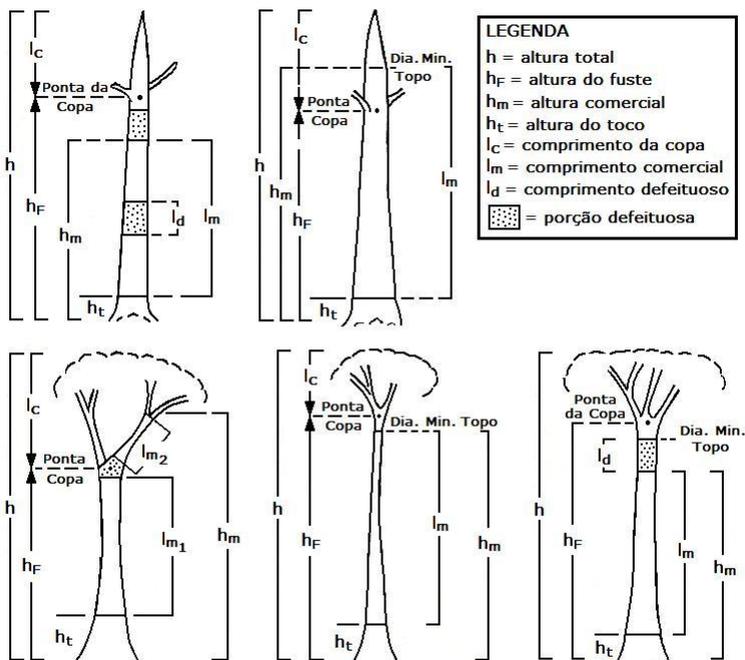
3.2 ALTURA DAS ÁRVORES

A altura de uma árvore ou porção dela é a distância linear ao longo de seu eixo principal entre o nível do solo até o ápice ou até outro ponto referencial. Obtida por medição ou estimação, é uma característica importante em mensuração florestal. Através dela pode-se conhecer o comportamento de uma espécie em um local ao longo do tempo, qualidade de uma região para a produção de madeira e também é essencial para a determinação do volume.

3.2.1 Tipos de Alturas

Das plantas produtoras de madeiras, temos as árvores de florestas do tipo Coníferas ou Folhosas (Ver Seção 1.1 - Glossário). As coníferas normalmente apresentam fustes bem definidos, com isso fica mais fácil identificar os tipos de alturas. De acordo com a Figura 11, eis as seguintes definições de altura utilizadas em mensuração florestal:

Figura 11: Alturas das Árvores e Classificações do Comprimento



(HUSCH *et al.* (1982) - Forest Mensuration - 3 ed. - Página 31)

a) *Altura total*: é a distância ao longo do eixo do tronco da árvore entre o solo e a extremidade superior da copa (Ver Seção 1.1 - Glossário). Como é difícil visualizar o ápice de uma árvore em florestas densas ou determinar o limite superior de árvores com grandes copas, há inventários florestais (Ver Seção 1.1 - Glossário) em que esta medida não é feita.

b) *Altura do fuste*: é a distância ao longo do eixo do tronco da árvore entre o solo e a base da copa.

c) *Altura comercial*: é a distância ao longo do eixo do tronco da árvore

entre o solo e a posição terminal superior da última parte utilizável do tronco da árvore. Esta posição terminal superior é tomada em um diâmetro mínimo utilizável ou em um ponto onde há bifurcação, forma irregular, defeito, tortuosidade e galhos de grande porte. O diâmetro mínimo superior irá variar com a utilização pretendida da madeira e com as condições de mercado.

d) *Altura do toco:* é a distância entre o solo e a posição da base no tronco principal, onde a árvore é cortada. Esta altura varia de zero a quatro metros, dependendo do maquinário que se usa para o corte e de árvores que venham a ter sapopemas.

e) *Comprimento da Copa:* é a distância do eixo do tronco da árvore entre a ponta da copa e o ápice da árvore.

f) *Comprimento comercial:* é a distância ao longo do eixo do tronco da árvore entre a parte superior do toco e a posição terminal da última parte utilizável do tronco.

g) *Comprimento defeituoso:* é a soma das porções do comprimento comercializável que não podem ser utilizados por causa de defeitos.

h) *Comprimento comercial líquido:* é igual ao comprimento comercializável menos o comprimento defeituoso.

3.2.2 Medição de Alturas

Aqui faz-se o uso do que foi colocada na Seção 2.1 sobre medidas diretas e indiretas para a medição de altura de árvores.

As medidas diretas podem ser aplicadas em árvores abatidas ou em árvores em pé. Para árvores abatidas podemos por exemplo usar a trena para medir o comprimento total ou parcial. Para árvores em pé, em áreas florestais jovens ou que não possuam árvores muito altas, podemos por exemplo usar uma vara telescópica retrátil com um alcance total de 50 *pés* (15,24 *m*). A leitura direta é feita ao nível dos olhos com graduações no sistema inglês e métrico. Veja a Figura 12.

Figura 12: Vara Telescópica



Já o método indireto para medição de altura, ao longo dos anos tem sido o mais usado, principalmente em trabalhos de inventário florestal contínuo. A maioria das medidas de altura de árvores altas

são tomadas indiretamente com instrumentos chamados de hipsômetros (hipsô do grego, *hypo*, que significa altura).

Hoje em dia, há uma grande quantidade de instrumentos que medem altura. Mas para que um desses aparelhos seja considerado ideal ele deve reunir as seguintes características:

- baixo custo;
- durabilidade;
- grande precisão;
- manuseio simples.

3.2.3 Instrumentos para Medições Indiretas de Alturas

Como comenta-se acima, tais instrumentos para medições indiretas de alturas são denominados de Hipsômetros. A seguir, apresentamos os dois princípios que regem a construção dos hipsômetros, que são Princípio Trigonométrico e Princípio Geométrico.

3.2.3.1 Hipsômetros – Princípio Trigonométrico

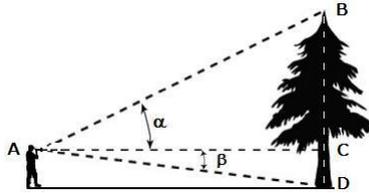
São instrumentos com graduação baseados nas relações trigonométricas (tangente) de triângulos retângulos e com a finalidade de medir indiretamente altura de árvores em pé, transformando automaticamente ângulos (medidos em graus) em distâncias (medidas em metros). O procedimento para obter esta medida é o seguinte: Com o instrumento, o operador tem um linha de visão horizontal perpendicular ao eixo do tronco da árvore (essa distância horizontal do operador ao centro do eixo do tronco tem que ser conhecida e fixa). Mantendo essa distância fixa, ele faz uma visada para o ápice da árvore (se essa for a altura superior desejada) e outra para a base da árvore (se essa for altura inferior desejada). Estas duas visadas formarão dois ângulos com a linha de visão horizontal. Com esses dois ângulos o instrumento fornece duas leituras de distância. Para obter a altura desejada devemos somar ou subtrair essa duas leituras, dependendo do desnível de altura do terreno que se encontra o operador (com o instrumento) e a árvore.

Mostraremos a seguir como tal princípio rege a graduação dos hipsômetros trigonométricos. Apresentaremos três situações de incli-

nação do terreno. Considere nas três situações, que a distância AC representa a distância horizontal (l) da visão do olho do operador (ponto A) até o centro do eixo vertical da árvore (ponto C), e que a distância BD representa a altura total da árvore (h).

► Terreno Plano

Figura 13: Esquema de Medição da Altura - Terreno Plano



Com base na Figura 13, do triângulo retângulo ABC, obtemos

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{AC} \implies \operatorname{tg} \alpha = \frac{BC}{l} \implies BC = l \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Do triângulo retângulo ACD, obtemos

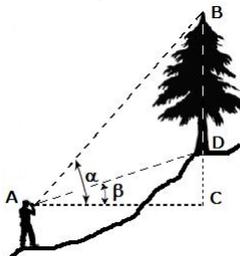
$$\operatorname{tg} \beta = \frac{CD}{AC} \implies \operatorname{tg} \beta = \frac{CD}{l} \implies CD = l \cdot \operatorname{tg} \beta.$$

Assim, a altura total (h) da árvore é dada por

$$h = BD = BC + CD = l \cdot \operatorname{tg} \alpha + l \cdot \operatorname{tg} \beta = l(\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta).$$

► Terreno em Aclive

Figura 14: Esquema de Medição da Altura - Terreno em Aclive



Com base na Figura 14, do triângulo retângulo ABC, obtemos

$$BC = l. \operatorname{tg} \alpha.$$

Do triângulo retângulo ACD, obtemos

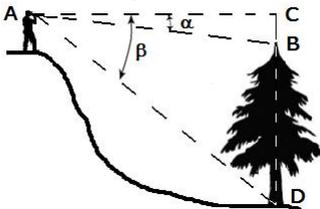
$$CD = l. \operatorname{tg} \beta.$$

Assim, a altura total (h) da árvore é dada por

$$h = BD = BC - CD = l. \operatorname{tg} \alpha - l. \operatorname{tg} \beta = l(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta).$$

► Terreno em Declive

Figura 15: Esquema de Medição da Altura - Terreno em declive



Com base na Figura 15, aplicando raciocínio análogo ao caso anterior, temos que

$$BC = l. \operatorname{tg} \alpha,$$

$$CD = l. \operatorname{tg} \beta.$$

Logo,

$$h = BD = CD - BC = l. \operatorname{tg} \beta - l. \operatorname{tg} \alpha = l(\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \alpha).$$

Note que em um hipsômetro trigonométrico, a leitura com visada para cima é positiva e a com visada para baixo é negativa. A Tabela 8 mostra um resumo de como se proceder para obter a altura.

Aliás, qualquer instrumento que forneça a leitura de ângulos verticais, serve também para a medição de altura de árvores, como por exemplo os clinômetros (clino do grego, *klinein*, que significa curvar ou inclinar).

Entre os hipsômetros tradicionais baseados no princípio trigonométrico, temos *Nível de Abney* (clinômetro), *Haga*, *Blume-Leiss* e *Suunto* (clinômetro). Veja na Figura 16 esses instrumentos.

Tabela 8: Obtenção da Altura pelo Hipsômetro

| Terreno | Leitura Superior Ápice (l_s) | Leitura Inferior Base (l_i) | Altura |
|------------|-------------------------------------|------------------------------------|-------------|
| em nível | + | - | $l_s + l_i$ |
| em aclive | + | + | $l_s - l_i$ |
| em declive | - | - | $l_i - l_s$ |

Figura 16: a) Nível de Aney b) Haga c) Blume-Leiss d) Suunto



Alguns hipsômetros apresentam escalas graduadas em porcentagem. A escala percentual é baseada numa unidade angular representada pela razão de 1 unidade na vertical para 100 unidades na horizontal. Por exemplo, uma arco percentual de 25% significa um desnível de 25 metros entre dois pontos distanciados entre si em 100 metros.

Assim tem-se que para qualquer ângulo vertical φ ,

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\text{percent}\varphi}{100}$$

onde $\text{percent}\varphi$ é o arco percentual.

Logo, quando se utiliza o arco percentual, a altura é, conforme os esquemas das Figuras 13–15, determinada respectivamente por:

$$h = \frac{l}{100}(\text{percent}\alpha + \text{percent}\beta),$$

$$h = \frac{l}{100}(\text{percent}\alpha - \text{percent}\beta),$$

e

$$h = \frac{l}{100}(\text{percent}\beta - \text{percent}\alpha).$$

3.2.3.2 Hipsômetros – Princípio Geométrico

São instrumentos baseados nas relações entre triângulos semelhantes. São mais baratos comparados aos hipsômetros trigonométricos, visto que tem uma construção mais simples. Requer cuidado em seu uso, pois o operador tem que fazer uma linha de visada da base e do topo ao mesmo tempo. Como consequência, em florestas densas e altas, há um grau de dificuldade para encontrar um ponto de observação para a medição. É necessário ter mãos firmes para evitar erros grosseiros. A seguir, apresentamos um dos modelos de hipsômetro que se baseiam no princípio geométrico.

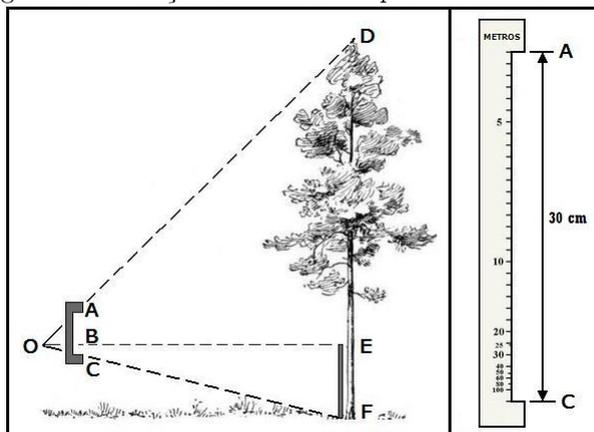
► Hipsômetro de Christen

Consiste de uma régua ao qual apresenta uma reentrância que contém uma graduação de 30 centímetros de comprimento (dependendo da altura da árvore tal comprimento pode mudar). Veja a Figura 17. Junto a esse instrumento vem acompanhada uma baliza (segmento EF na Figura 17) que auxilia na medição, com comprimento de 3 metros

(podem ser encontradas com outros comprimentos).

Para efetuar a medição da altura procede-se da seguinte forma: enquanto um auxiliar encosta a baliza no fuste da árvore, o operador com o hipsômetro deve ficar a uma distância tal que a linha de visão da base e do ápice da árvore fiquem enquadrados entre a reentrância do instrumento. Feito o enquadramento, em uma posição estática do aparelho e cabeça, o operador lança uma linha de vista para o topo da baliza. Esta linha de vista cortará a graduação do hipsômetro, fornecendo assim a altura da árvore.

Figura 17: Medição da Altura - Hipsômetro de Christen



Com base na Figura 17, como os triângulos ODF e OAC são semelhantes, obtemos a seguinte proporção:

$$\frac{DF}{AC} = \frac{EF}{BC}$$

Note que a altura da baliza (EF) e o comprimento da reentrância (AC) são valores conhecidos e fixos. Logo, com um valor dado da graduação na reentrância (BC), marcamos o valor correspondente da altura da árvore ($DF = h$). Veja na Figura 18 a graduação na reentrância.

Figura 18: Graduação na Reentrância do Hipsômetro de Christen



Por exemplo, se $EF = 3 \text{ m}$, $AC = 0,3 \text{ m}$ e $BC = 0,18 \text{ m}$ então

com a proporção acima temos $DF = h = 5 \text{ m}$. Existem tabelas com valores BC e $DF = h$ para diferentes valores de EF e AC .

As vantagens do Hipsômetro de Christen são:

- dispensa a distância do operador à árvore;
- com uma leitura obtemos a altura da árvore;
- o desnível do terreno não afeta na medida da altura.

E as desvantagens são:

- baixa precisão em árvores muito altas, devido ao adensamento da sua graduação;
- dificuldade no enquadramento da árvore em florestas densas;
- manter mãos, cabeça e instrumento em uma posição estática no ato da medição.

3.2.4 Erros na Medição da Altura

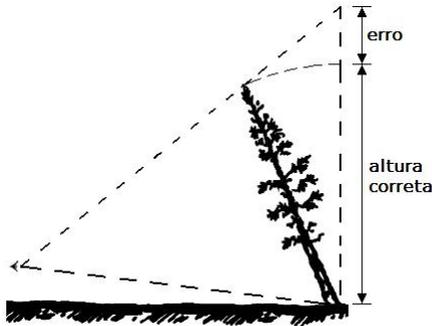
Existem algumas situações onde a qualidade da medição da altura é comprometida devido a problemas de campo. Não há como negar que, instrumento com defeito, operador despreparado, visualização incorreta do ápice e base de uma árvore, inclinação do terreno, inclinação da árvore, forma da árvore e outras mais, sejam fatores que geram erros na medição da altura de árvores. Dessas fontes de erros, algumas serão discutidas a seguir pela sua grandeza e frequência com que aparecem.

3.2.4.1 Erros pela Inclinação da Árvore

Árvores que se desviam da posição vertical em relação ao terreno podem gerar erros na medição de suas alturas. Se a inclinação da árvore for para o lado do operador, tem sua altura superestimada, cometendo-se erros por excesso. Se a inclinação for para direção oposta do operador, sua altura será subestimada, cometendo-se erros por falta. Veja a Figura 19 com sua altura superestimada.

Para minimizar o erro, os instrumentos baseados no princípio geométrico são os mais indicados, principalmente se colocarmos em uma posição paralela à inclinação do eixo da árvore.

Figura 19: Erro por Excesso da Altura em Árvore Inclinada



Outra situação para eliminar o erro é se o operador se posicionar equidistante da base e da projeção do ápice da árvore no solo, e com a inclinação da árvore ficando à sua direita ou à sua esquerda. Sob essas condições, com base na Figura 20 e aplicando o *Teorema de Pitágoras* no triângulo retângulo BPD , a altura da árvore seria assim obtida por

$$BD^2 = BP^2 + PD^2,$$

onde BD é a altura correta da árvore, BP é a altura do ápice da árvore até a sua projeção ortogonal no solo (medida com vara telescópica ou hipsômetro trigonométrico), e PD é a distância da projeção ortogonal do ápice da árvore no solo até a base da árvore.

Figura 20: Medição da Altura de uma Árvore Inclinada



Outra forma para determinar a altura correta é obter o valor do

ângulo ϕ e assim pela Figura 20, temos

$$\sec \phi = \frac{BD}{BP}.$$

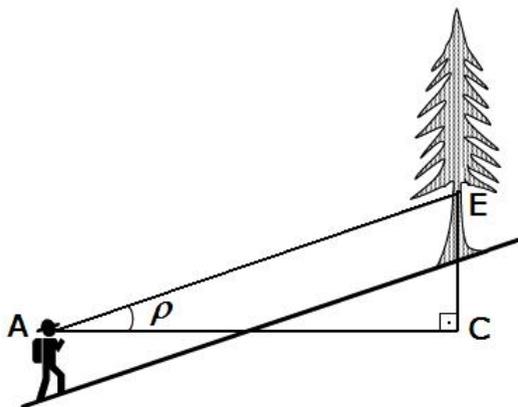
Aí, segue que

$$BD = BP \cdot \sec \phi \implies BD = BP \sqrt{\left(\frac{\text{percent}\phi}{100}\right)^2 + 1}.$$

3.2.4.2 Erros pela Inclinação do Terreno

A medição da altura de uma árvore com hipsômetros trigonométricos ou geométricos que requerem duas leituras, devem ser sempre corrigidas em terrenos inclinados. Na Figura 21 verificamos que a distância sobre o terreno ($AE = l'$) é maior do que a distância da visão do olho do operador até o centro do eixo vertical da árvore ($AC = l$).

Figura 21: Efeito da Inclinação do Terreno na Distância Operador-Árvore



Conseqüentemente, a altura determinada nessa situação será superior comparada a altura dessa mesma árvore em terreno plano. Portanto, para a obter a altura mais próxima da correta, com base na Figura 21, procedemos da seguinte forma:

$$\cos \rho = \frac{AC}{AE} \implies AC = AE \cdot \cos \rho \implies l = l' \cdot \cos \rho.$$

Portanto, a altura apresentada nos esquemas das Figuras 13–15, ajustada agora com a inclinação do terreno, fica assim determinada respectivamente por:

$$h = \frac{l' \cdot \cos \rho}{100} (\text{percent}\alpha + \text{percent}\beta),$$

$$h = \frac{l' \cdot \cos \rho}{100} (\text{percent}\alpha - \text{percent}\beta)$$

e

$$h = \frac{l' \cdot \cos \rho}{100} (\text{percent}\beta - \text{percent}\alpha).$$

Em geral, a correção da inclinação do terreno é feita para declividade a partir de 10% ou inclinação a partir de 6°, visto que esses valores seriam o nível de tolerância para que a altura teria erro mínimo, podendo tal erro ser desprezado.

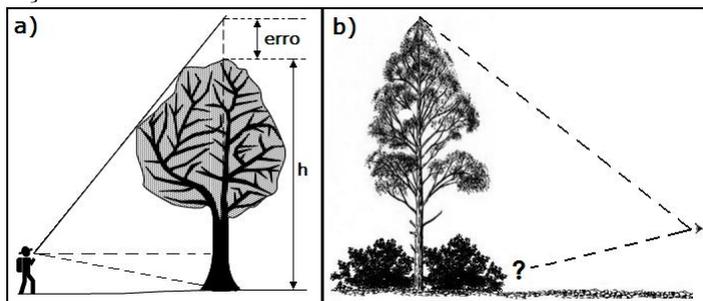
3.2.4.3 Erros pela Forma da Copa e Vegetação na Base

Em florestas densas, a visualização do ápice da copa pode ser obstruída pelas copas das demais árvores, sendo comum o operador se aproximar mais da árvore com o propósito de visualizá-la. Mas, o excesso de proximidade também gera um outro problema de visualização, onde os ramos laterais (principalmente nas folhosas) são confundidos com os ramos mais altos. Na Figura 22a, verifica-se que devido a forma da copa, ocorre uma superestimativa da altura. Por estas razões, na maioria dos trabalhos de inventário florestal em matas nativas, não se mede altura total e sim a altura até a primeira bifurcação, ou até o primeiro galho de porte.

Já vegetações densas que impedem a visualização da base da árvore (Figura 22b), normalmente nas medições abre-se um caminho em linha reta até a base com ferramenta adequada. Outra maneira seria usar uma referência no tronco a uma altura conhecida (por exemplo o DAP) e assim acrescentar esta altura na medição, ou seja:

$$h = \text{leitura 1} \pm \text{leitura 2} + \text{altura referencial.}$$

Figura 22: a) Erro Gerado pela Forma da Copa b) Erro Gerado pela Vegetação Densa



3.2.5 Exemplos

Sejam os dados referentes à estimação das alturas de 4 árvores, utilizando-se hipsômetros com leituras diretas em metros, em porcentagem e em graus. Ver Tabela 9 (SOARES; NETO; SOUZA, 2011).

Tabela 9: Exemplo

| Árvore | Distância | Declividade | | Leitura | |
|--------|-----------|-------------|-------------|----------|----------|
| | | Grau | Porcentagem | Superior | Inferior |
| 1 | 15 m | 3 | - | +14 m | -2 m |
| 2 | 20 m | - | 10 | +25 m | +6 m |
| 3 | 30 m | 16 | - | +60% | +10% |
| 4 | 20 m | - | 25 | +38° | +8° |

Com base no apresentado até agora sobre o cálculo da altura de uma árvore, temos:

► Árvore 1

$$h = 14 + 2 = 16 \text{ m.}$$

► Árvore 2

$$h = 25 - 6 = 19 \text{ m.}$$

► Árvore 3

Como a inclinação do terreno é de $16^\circ (> 6^\circ)$, então

$$l = 30. \cos 16^\circ = 28,84 \text{ m.}$$

Logo,

$$h = \frac{28,84}{100} \cdot (60 - 10) = 14,42 \text{ m.}$$

► **Árvore 4**

Como a declividade do terreno é de 25% ($> 10\%$), então

$$\rho = \arctan\left(\frac{25}{100}\right) = 14,03^\circ \implies l = 20. \cos 14,03^\circ = 19,40 \text{ m.}$$

Logo,

$$h = 19,40. (\operatorname{tg} 38^\circ - \operatorname{tg} 8^\circ) = 12,43 \text{ m.}$$

4 VOLUMETRIA

Estimar o volume das árvores é uma das principais finalidades dos levantamentos florestais quando se tem povoamentos florestais destinados para fins comerciais. Logo, neste capítulo, apresentamos o volume como informação mais importante na mensuração florestal, os protótipos dendrométricos e suas equações. A seguir, apresentamos a cubagem rigorosa de árvores e os principais métodos de cubagem. Na sequência colocamos exemplos práticos de tais métodos e finalizamos com as comparações e conclusões sobre os métodos de cubagem, tendo o método de deslocamento de água como referencial para testar a acuracidade dos métodos de cubagem.

4.1 VOLUME DAS ÁRVORES

O volume consiste em uma das informações de maior importância para o conhecimento do potencial florestal disponível em uma região. Para isso não é necessário determinar o volume de madeira de todas as árvores de um povoamento, por menor que ele seja. Geralmente faz-se esse tipo de medição em uma amostra da população. O volume individual fornece um ponto de partida para a avaliação do conteúdo lenhoso dos povoamentos florestais.

A estrutura física principal de uma árvore é composta de quatro partes: raiz, toco, fuste e copa. A parte comercial essencial é o fuste, mas com a escassez e controle da exploração de árvores, as outras porções ganharam importância, com destaque para a copa. É muito comum que cada parte da árvore seja destinada a um fim de acordo com suas dimensões. A parte de maior diâmetro é destinado a laminação e serrarias, a de diâmetro intermediário é destinado a fibras (MDF), fabricação de celulose e papel, e por fim a parte superior da árvore e galhos para produção de energia.

Sendo a árvore um sólido irregular, seu volume pode ser feito por deslocamento de água, graficamente, peso ou cubagem rigorosa. Vamos abordar aqui a Cubagem Rigorosa, também conhecida como *Cubagem de uma Árvore*. Normalmente, em florestas plantadas, a cubagem é feita abatendo-se a árvore e tomando-se a medição de vários diâmetros ao longo do fuste.

Abordaremos também o método do Deslocamento de água, onde falaremos sobre o *Xilômetro*.

4.2 ESTUDO MATEMÁTICO DAS FORMAS DOS TRONCOS

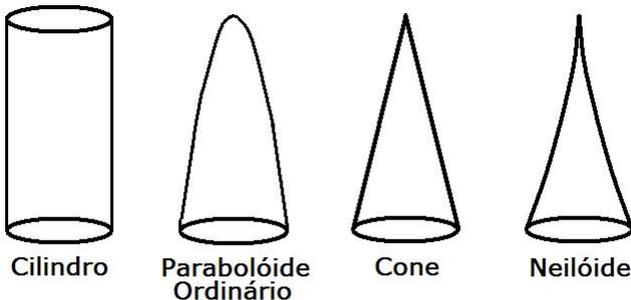
Há vários fatores que influenciam nas formas dos troncos, tais como: meio ambiente, espécie, idade, aspectos genéticos, etc. Logo, as árvores crescem com as mais diferentes formas.

Temos então árvores que possuem formas irregulares tais como espécies de cerrados, que são tortuosas e de difícil comparação com uma forma geométrica. A determinação do volume dessas árvores só pode ser feita por imersão em água (deslocamento de água) das toras ou seccionamento do tronco em pequenas partes.

Agora, há árvores que possuem formas regulares com uma susceptibilidade a assemelhar mais a uma forma geométrica. Como exemplo temos as coníferas, as quais possuem tronco principal relativamente longo, onde sua extremidade superior é mais delgada. Os estudos sobre a forma dos troncos praticamente todos se direcionaram para esse tipos de árvores. Esses estudos procuraram analisar a Cubagem de Árvores com ferramentas matemáticas, comparando sólidos geométricos de revolução com as formas naturais das árvores com o intuito de determinar seu volume. Tais sólidos que se ajustam com a forma do tronco ou parte dele, são denominados de *Protótipos Dendrométricos* ou Sólidos Padrões.

Os sólidos padrões que mais se ajustam com a forma do tronco ou parte dele são: Cilindro, Parabolóide Ordinário ou Quadrático, Cone e Neilóide (Figura 23).

Figura 23: Sólidos de Revolução



De uma maneira geral, recorreu-se a uma família de curvas que representa-se o perfil longitudinal da árvore (ou parte dela). Equações de Curvas, que se rotacionados ao longo do suposto eixo retilíneo da árvore gerariam os protótipos dendrométricos. Para tais curvas, deve-

mos procurar então uma função que represente a variação do raio da secção transversal dos sólidos geométricos em função da altura a partir da base do sólido. Assim, a equação geral dessa família de curvas é dado por (BATISTA, 2001):

$$y = \frac{d_b}{2 \cdot h^r} (h - x)^r. \quad (4.1)$$

em que:

y é o raio da secção transversal;

x é a altura da secção transversal ($0 \leq x \leq h$);

d_b é o diâmetro da base (valores fixo);

h é a altura total da árvore (valores fixo);

r é o índice que caracteriza a forma da curva.

De acordo com a equação 4.1, quando $r = 0$ temos

$$y = \frac{d_b}{2 \cdot h^0} (h - x)^0 = \frac{d_b}{2}.$$

ao qual define uma linha reta paralela ao eixo Ox , e sua revolução em torno desse eixo, gera um cilindro.

Se $r = 1$ temos

$$y = \frac{d_b}{2 \cdot h^1} (h - x)^1 = \frac{d_b}{2} \left(1 - \frac{x}{h}\right)$$

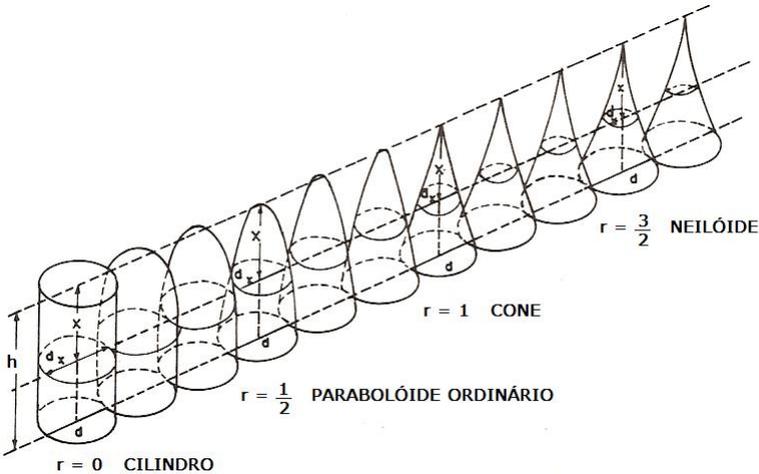
definindo uma linha reta inclinada e que rotacionando em relação ao eixo Ox , gera um cone.

Logo, de acordo com o valor assumido pelo índice r , varia o formato do tipo de curva e por consequência também varia o sólido obtido pela rotação em torno do eixo Ox , conforme exemplificado na Figura 24 (STERBA, 1986).

4.3 VOLUME DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Embora as secções de um tronco não sejam círculos perfeitos, para determinar o volume do sólido do revolução que mais se ajustaria ao tronco, consideraremos a secção circular.

Seja $f : [0, h] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $y = f(x)$ dada pela função 4.1, tal que $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [0, h]$. O volume v do sólido obtido pela revolução da região sob o gráfico da função contínua em torno do eixo Ox é

Figura 24: Sólidos de Revolução com a Variação do Parâmetro r 

$$\begin{aligned}
 v &= \int_0^h \pi [f(x)]^2 dx \\
 &= \int_0^h \pi \left[\frac{d_b}{2 \cdot h^r} (h - x)^r \right]^2 dx \\
 &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot h^{2r}} \int_0^h (h - x)^{2r} dx \\
 &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot h^{2r}} \left[-\frac{(h - x)^{2r+1}}{2r + 1} \right]_0^h \\
 &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot h^{2r}} \left[-\frac{(h - h)^{2r+1} - (h - 0)^{2r+1}}{2r + 1} \right] \\
 &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot h^{2r}} \cdot \frac{h^{2r+1}}{2r + 1} \\
 &= \left(\frac{1}{2r + 1} \right) \cdot \left(\frac{\pi \cdot (d_b)^2 \cdot h}{4} \right)
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Da última igualdade obtida em 4.3, a expressão $\frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4}$ é igual a área transversal na base da seção (g_b). Logo, o volume da árvore

inteira semelhante a qualquer sólido de revolução em função do índice r , o qual define o sólido, é dado por:

$$v = \left(\frac{1}{2r + 1} \right) (g_b)h \quad (4.4)$$

Utilizando a equação 4.4 acima em função do índice r , colocamos na Tabela 10 as fórmulas para o cálculo do volume dos 4 sólidos geométricos de revolução expostos na Figura 23.

Tabela 10: Volume dos Sólidos Padrões

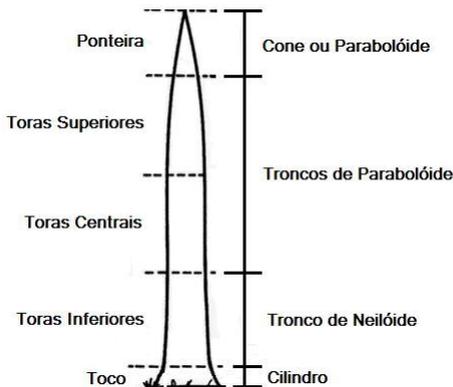
| Sólido de Revolução | Índice | Equação de Volume |
|---------------------|-------------------|-----------------------|
| Cilindro | $r = 0$ | $v = g_b h$ |
| Parabolóide | $r = \frac{1}{2}$ | $v = \frac{g_b h}{2}$ |
| Cone | $r = 1$ | $v = \frac{g_b h}{3}$ |
| Neilóide | $r = \frac{3}{2}$ | $v = \frac{g_b h}{4}$ |

4.4 VOLUME DOS TRONCOS DOS SÓLIDOS DE REVOLUÇÃO

Se os troncos das árvores se ajustassem com qualquer um dos 4 Protótipos Dendrométricos, a determinação do volume seria imediato. Entretanto, na prática, a identificação de um único sólido geométrico

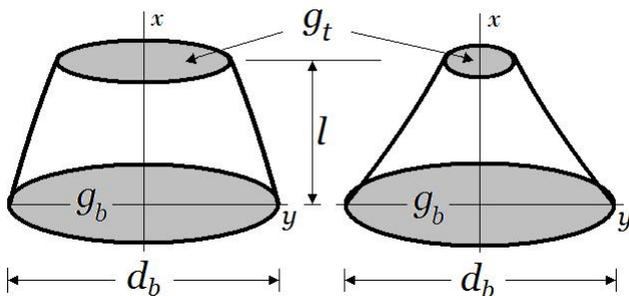
que pudesse representar um tronco de uma árvore é uma tarefa bem complicada. Logo, considerar que porções do tronco (toras) da árvore podem ser constituídos por vários sólidos geométricos truncados é algo mais consistente e razoável. Aliás, vários autores consideram que o tronco de qualquer árvore seja formado por vários sólidos geométricos. (HUSCH; MILLER; BEERS, 1982) sugeriu que o tronco fosse representado da base para o topo como apresentado na Figura 25.

Figura 25: Formas Geométricas Associadas ao Tronco de uma Árvore



Vamos então determinar o volume dos troncos do Parabolóide e Neilóide. Antes, vamos fazer algumas considerações. Observando a Figura 26, definimos que:

Figura 26: Troncos do Parabolóide e Neilóide



d_b - diâmetro na base da seção;

d_t - diâmetro no topo da seção;

g_b - área transversal na base da seção;
 g_t - área transversal no topo da seção;
 l - comprimento da seção;
 y - raio da seção transversal;
 x - altura da seção transversal ($0 \leq x \leq l$).

Seguindo então para determinar o volume desse dois sólidos, mudando o limite superior da integral 4.2 para o comprimento l , temos que

$$\begin{aligned}
 v &= \int_0^l \pi \left[\frac{d_b}{2.h^r} (h-x)^r \right]^2 dx \\
 &= \frac{\pi.(d_b)^2}{4.h^{2r}} \int_0^l (h-x)^{2r} dx \\
 &= \frac{\pi.(d_b)^2}{4.h^{2r}} \left[-\frac{(h-x)^{2r+1}}{2r+1} \right]_0^l \\
 &= \frac{\pi.(d_b)^2}{4.h^{2r}} \left[-\frac{(h-l)^{2r+1} - (h-0)^{2r+1}}{2r+1} \right] \\
 &= \frac{\pi.(d_b)^2}{4.h^{2r}} \left[\frac{h^{2r+1} - (h-l)^{2r+1}}{2r+1} \right] \tag{4.5}
 \end{aligned}$$

Da equação 4.1, isolando a variável x , temos então que

$$y = \frac{d_b}{2.h^r} (h-x)^r \implies x = h \left[1 - \left(\frac{2y}{d_b} \right)^{\frac{1}{r}} \right].$$

Quando a altura da seção transversal atingir o topo do tronco, teremos $x = l$ e $2y = d_t$. Substituindo na equação acima, segue que

$$l = h \left[1 - \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{1}{r}} \right]. \tag{4.6}$$

► **Tronco do Parabolóide** $\left(r = \frac{1}{2} \right)$

Substituindo $r = \frac{1}{2}$ na equação 4.6 temos

$$l = h \left[1 - \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^2 \right]. \quad (4.7)$$

Da mesma forma na equação 4.5 e daí desenvolvendo-a, vemos que

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot h} \left[\frac{h^2 - (h - l)^2}{2} \right] \\ &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot 2} \left[\frac{h^2 - h^2 + 2hl - l^2}{h} \right] \\ &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2 \cdot l}{4 \cdot 2} \left[\frac{2h - l}{h} \right]. \end{aligned}$$

Substituindo a expressão de l da equação 4.7 nesta última igualdade acima, chegaremos a fórmula do volume do Tronco do Parabolóide, ou seja,

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2 \cdot l}{4 \cdot 2 \cdot h} \left[2h - h \left(1 - \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^2 \right) \right] \\ &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2 \cdot l}{4 \cdot 2 \cdot h} \left[2h - h + h \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^2 \right] \\ &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2 \cdot l}{4 \cdot 2} \left[1 + \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^2 \right] \\ &= \frac{l}{2} \left[\frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4} + \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4} \cdot \frac{(d_t)^2}{(d_b)^2} \right] \\ &= \frac{l}{2} \left[\frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4} + \frac{\pi \cdot (d_t)^2}{4} \right] \\ &= \frac{l}{2} (g_b + g_t). \end{aligned}$$

► **Tronco da Neilóide** $\left(r = \frac{3}{2} \right)$

Substituindo $r = \frac{3}{2}$ na equação 4.6 temos

$$l = h \left[1 - \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{2}{3}} \right]. \quad (4.8)$$

Da mesma forma na equação 4.5 e daí desenvolvendo-a, vemos que

$$\begin{aligned} v &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot h^3} \left[\frac{h^4 - (h-l)^4}{4} \right] \\ &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2}{4 \cdot h^3 \cdot 4} [h^4 - (h^4 - 4h^3l + 6h^2l^2 - 4hl^3 + l^4)] \\ &= \frac{\pi \cdot (d_b)^2 \cdot l}{4 \cdot h^3 \cdot 4} [4h^3 - 6h^2l + 4hl^2 - l^3]. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nesta última igualdade, desenvolvendo a expressão *entre colchetes* com a substituição da expressão de l da equação 4.8, temos

$$4h^3 - 6h^2 \left[h \left(1 - \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right] + 4h \left[h \left(1 - \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right]^2 - \left[h \left(1 - \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \right]^3.$$

Chamando $\left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{2}{3}}$ de w , e substituindo na expressão acima, segue que

$$\begin{aligned} &4h^3 - 6h^2[h(1-w)] + 4h[h(1-w)]^2 - [h(1-w)]^3 = \\ &= h^3[4 - 6(1-w) + 4(1-2w+w^2) - (1-3w+3w^2-w^3)] = h^3[1+w+w^2+w^3]. \end{aligned}$$

Substituindo w por $\left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{2}{3}}$, vemos que

$$h^3 \left[1 + \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{d_t}{d_b} \right)^2 \right].$$

Como na equação 4.9 desenvolvemos a expressão que estava *entre colchetes* e chegamos a expressão que está acima, concluímos então que a fórmula do volume do Tronco da Neilóide é dado por,

$$\begin{aligned}
v &= \frac{\pi.(d_b)^2.l}{4.h^3.4}.h^3 \left[1 + \left(\frac{d_t}{d_b}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{d_t}{d_b}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{d_t}{d_b}\right)^2 \right] \\
&= \frac{l}{4} \left\{ \frac{\pi.(d_b)^2}{4} + \left[\frac{\pi^3.[(d_b)^2]^3.(d_t)^2}{4^3.(d_b)^2} \right]^{\frac{1}{3}} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\pi^3.[(d_b)^2]^3.(d_t)^4}{4^3.(d_b)^4} \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{\pi.(d_t)^2}{4} \right\} \\
&= \frac{l}{4} \left\{ \frac{\pi.(d_b)^2}{4} + \left[\left(\frac{\pi(d_b)^2}{4}\right)^2 \cdot \frac{\pi(d_t)^2}{4} \right]^{\frac{1}{3}} \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{\pi(d_b)^2}{4} \cdot \left(\frac{\pi(d_t)^2}{4}\right)^2 \right]^{\frac{1}{3}} + \frac{\pi.(d_t)^2}{4} \right\} \\
&= \frac{l}{4} (g_b + \sqrt[3]{(g_b)^2 g_t} + \sqrt[3]{g_b (g_t)^2} + g_t).
\end{aligned}$$

Finalizamos esta seção com a Tabela 11, expondo as fórmulas de volume dos troncos dos 3 Protótipos Dendrométricos (A demonstração da fórmula do volume do tronco do cone pode ser encontrada por exemplo na coleção *Fundamentos de Matemática Elementar, volume 10, Atual Editora*).

Tabela 11: Volume do Tronco dos Sólidos Padrões

| Sólido de Revolução | Índice | Equação de Volume |
|-----------------------|-------------------|---|
| Tronco do Parabolóide | $r = \frac{1}{2}$ | $v = \frac{l}{2} (g_b + g_t)$ |
| Tronco do Cone | $r = 1$ | $v = \frac{l}{3} (g_b + \sqrt{g_b g_t} + g_t)$ |
| Tronco da Neilóide | $r = \frac{3}{2}$ | $v = \frac{l}{4} (g_b + \sqrt[3]{(g_b)^2 g_t} + \sqrt[3]{g_b (g_t)^2} + g_t)$ |

4.5 CUBAGEM DE UMA ÁRVORE (CUBAGEM RIGOROSA)

A cubagem de árvores implica na divisão do tronco da árvore em n seções (toras), com a medição de diâmetros (ou circunferências) sucessivos ao longo do tronco em alturas pré-estabelecidas. Com os diâmetros e o comprimento das toras, determina-se os volumes das várias seções (toras) usando os métodos (fórmulas) de cubagem. O volume do tronco é obtido pelo somatório dos volumes das seções (toras), e quanto menor for o comprimento de cada seção, tanto mais próximo será o volume calculado do volume verdadeiro. O termo seções não implica no corte do tronco em partes, mas apenas a marcação ao longo do tronco das posições de medição. Os métodos de cubagem rigorosa são divididos em métodos *Absolutos* e *Relativos*. Os métodos absolutos são aqueles em que o comprimento da seção (tora) não tem vínculo com o comprimento total da árvore. Nos métodos relativos, o comprimento da seção (tora) representa um percentual do comprimento total da árvore. Abordaremos aqui os métodos de cubagem absolutos, aos quais são: Smalian, Huber e Newton.

4.5.1 Cubagem por Smalian

Este método aplica a fórmula do Tronco do Parabolóide Ordinário (tabela 11) para o cálculo do volume das seções (toras) intermediárias, isto é,

$$v_i = \left(\frac{g_i + g_{i+1}}{2} \right) l_i$$

em que:

v_i é o volume da i -ésima tora

g_i é a área transversal na base da i -ésima tora

g_{i+1} é a área transversal no topo da i -ésima tora

l_i é o comprimento da i -ésima tora.

O volume total da árvore será dado por:

$$v = v_t + \sum_{i=1}^{n-1} v_i + v_p.$$

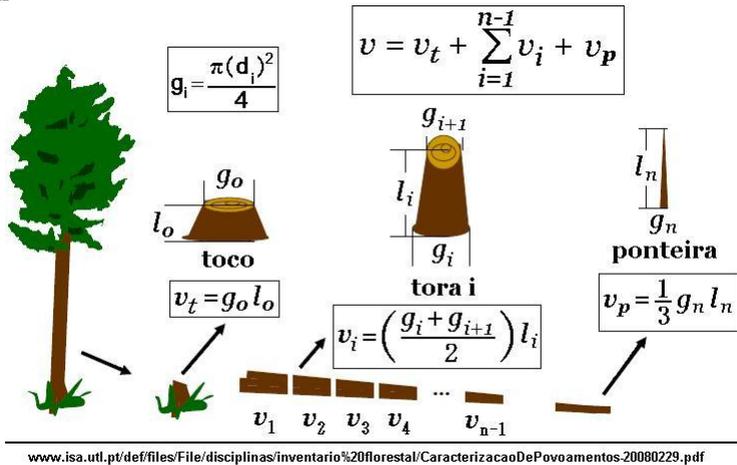
onde,

$v_t = g_0 \cdot l_0$ (volume do toco que é considerado um cilindro)

$v_p = \frac{g_n \cdot l_n}{3}$ (volume da ponteira que é considerado um cone).

A Figura 27 mostra a ilustração do esquema genérico para a cubagem de uma árvore inteira por Smalian.

Figura 27: Esquema Genérico para Cubagem de uma Árvore por Smalian



4.5.2 Cubagem por Huber

Este método também aplica a fórmula do Tronco do Parabolóide Ordinário para o cálculo do volume das seções (toras) intermediárias, mas se baseia em uma única medida tomada no meio de cada seção (tora), ou seja,

$$v_i = g_{m_i} \cdot l_i$$

em que:

v_i é o volume da i -ésima tora

g_{m_i} é a área transversal no meio da i -ésima tora

l_i é o comprimento da i -ésima tora.

O volume total da árvore será dado por:

$$v = v_t + \sum_{i=1}^{n-1} v_i + v_p.$$

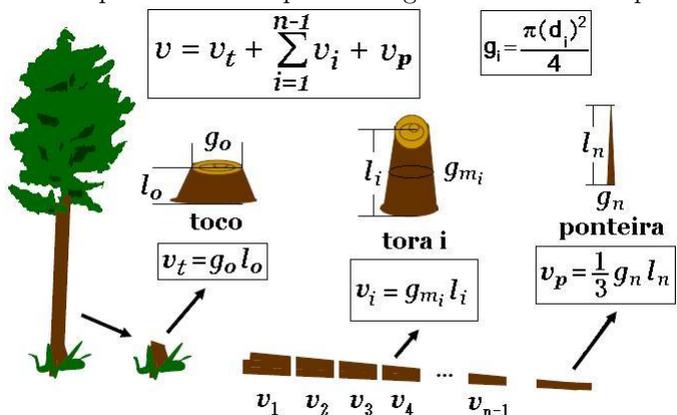
onde,

$v_t = g_0 \cdot l_0$ (volume do toco que é considerado um cilindro)

$v_p = \frac{g_n \cdot l_n}{3}$ (volume da ponteira que é considerado um cone).

A Figura 28 mostra a ilustração do esquema genérico para a cubagem de uma árvore inteira por Huber.

Figura 28: Esquema Genérico para Cubagem de uma Árvore por Huber



www.isa.utl.pt/def/files/File/disciplinas/inventario%20florestal/CaracterizacaoDePovoamento.20080229.pdf

4.5.3 Cubagem por Newton

Este método faz uso de uma média ponderada das áreas transversais da base, meio e topo da tora, sendo uma boa aproximação para o Tronco do Parabolóide, Tronco do Cone ou Tronco do Neilóide. A fórmula para o cálculo do volume das seções (toras) intermediárias é dada por:

$$v_i = \left(\frac{g_i + 4.g_{m_i} + g_{i+1}}{6} \right) l_i$$

em que,

v_i é o volume da i -ésima tora
 g_i é a área transversal na base da i -ésima tora
 g_{m_i} é a área transversal no meio da i -ésima tora
 g_{i+1} é a área transversal no topo da i -ésima tora
 l_i é o comprimento da i -ésima tora.

O volume total da árvore será dado por:

$$v = v_t + \sum_{i=1}^{n-1} v_i + v_p.$$

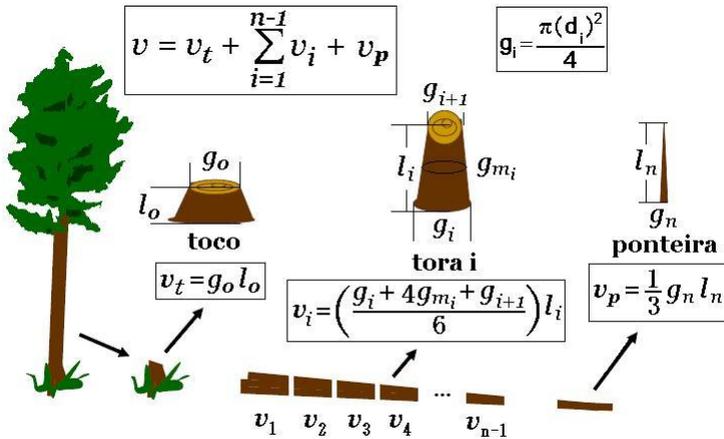
onde,

$v_t = g_0 \cdot l_0$ (volume do toco que é considerado um cilindro)

$v_p = \frac{g_n \cdot l_n}{3}$ (volume da ponteira que é considerado um cone).

A Figura 29 mostra a ilustração do esquema genérico para a cubagem de uma árvore inteira por Newton.

Figura 29: Esquema Genérico para Cubagem de uma Árvore por Newton



4.5.4 Recomendações sobre os Métodos de Cubagem

- Independentemente do método que se aplique, deve mensurar sempre o *DAP* e a *altura total*;
- É importante ressaltar que o volume da madeira em toras ou em árvores em pé deve ser indicado se foi determinado *com casca* ou *sem casca*, pois em muitas espécies a porcentagem de casca é bastante significativa;
- A deteminação e o conhecimento do volume de casca e toco são importantes quando estes despertam interesse comercial, cuja avaliação quantitativa de estoques florestais, direciona essas matérias-primas para diferentes usos tornando-as rentáveis e agregando valores visando um produto final;
- Em geral as medições diamétricas são efetuadas a partir do nível do solo nas posições

{0.10 m, 0.30 m, 1.30 m, 2.30 m, 3.30 m, 4.30 m, 5.30 m, ...}

{0.10 m, 0.30 m, 1.30 m, 3.30 m, 5.30 m, 7.30 m, 9.30 m, ...}

{0.30 m, 1.30 m, 2.30 m, 3.30 m, 4.30 m, 5.30 m, 6.30 m, ...}

{0.30 m, 1.30 m, 3.30 m, 5.30 m, 7.30 m, 9.30 m, 11.30 m, ...}.

Essas distâncias podem ser alteradas em função da forma e da rigorosidade do processo de cubagem. (SCOLFORO; THIERSCH, 2004) recomendam que as seções devem iniciar-se o mais próximo possível do solo. Normalmente em torno de 0.05 m para *Pinus sp* e *Eucalyptus sp*.

{0.05 m, 0.07 m, 1.30 m, 2.30 m, 3.30 m, 4.30 m, 5.30 m, 6.30 m, ...}

{0.05 m, 0.07 m, 1.30 m, 3.30 m, 5.30 m, 7.30 m, 9.30 m, 11.30m, ...}.

Para *Eucalyptus grandis* pela dificuldade de rebrota deixar toco entre 5 e 10 cm de altura. Em florestas nativas o mais próximo possível do solo, no caso do cerrado 10 cm, em florestas de grande porte 20 cm;

- O uso de fitas métricas ou diamétricas é totalmente inviabilizado

para árvores derrubadas quando os troncos já tem grandes dimensões.

4.5.5 Aplicação Prática dos Métodos de Cubagem

Esta aplicação prática dos métodos absolutos de Smalian, Huber e Newton está descrito em (MACHADO; FILHO, 2009).

Aqui faremos o cálculo do volume do tronco de uma árvore com casca e sem o toco. O diâmetro com casca ($d_{c/c}$) é fornecido em *centímetros*, logo a fórmula usada para determinar a área transversal da tora com casca ($g_{c/c}$) em *metros quadrados* é

$$g = \frac{\pi d^2}{40000}.$$

Para os métodos absolutos, considerou-se a primeira seção com $1,2\text{ m}$ de comprimento (l_1) e as demais com $2,0\text{ m}$, deixando-se um toco de 10 cm de altura (ponto médio de corte). A árvore utilizada no exemplo tinha um *DAP* com casca de $22,3\text{ cm}$ e altura total de $15,9\text{ m}$.

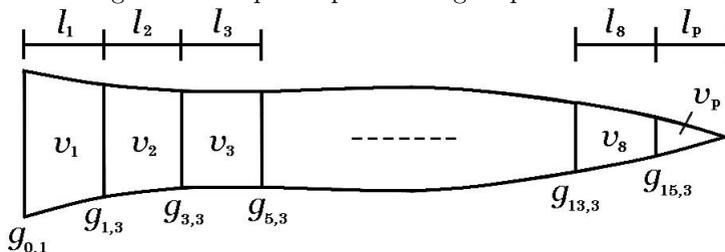
► Cálculo do Volume por Smalian

Observe a Tabela 12 e a Figura 30:

Tabela 12: Dados para Cubagem por Smalian

| Campo | | Empresa |
|--------|---------------|----------------|
| $h(m)$ | $d_{c/c}(cm)$ | $g_{c/c}(m^2)$ |
| 0,1 | 27,7 | 0,0603 |
| 1,3 | 22,3 | 0,0391 |
| 3,3 | 20,3 | 0,0324 |
| 5,3 | 18,8 | 0,0278 |
| 7,3 | 17,5 | 0,0241 |
| 9,3 | 14,3 | 0,0161 |
| 11,3 | 9,5 | 0,0071 |
| 13,3 | 6,0 | 0,0028 |
| 15,3 | 1,2 | 0,0001 |

Figura 30: Esquema para Cubagem por Smalian



Efetuada o cálculo das toras com casca por Smalian, temos:

$$v_1 = \left(\frac{g_{0,1} + g_{1,3}}{2} \right) \cdot l_1 = \left(\frac{0,0603 + 0,0391}{2} \right) \cdot 1,2 = 0,0596 \text{ m}^3$$

$$v_2 = \left(\frac{g_{1,3} + g_{3,3}}{2} \right) \cdot l_2 = \left(\frac{0,0391 + 0,0324}{2} \right) \cdot 2 = 0,0715 \text{ m}^3$$

Aplicando a fórmula para as demais seis toras (tora 3 a 8), segue que:

$$\begin{array}{ll} v_3 = 0,0602 \text{ m}^3 & v_6 = 0,0232 \text{ m}^3 \\ v_4 = 0,0519 \text{ m}^3 & v_7 = 0,0099 \text{ m}^3 \\ v_5 = 0,0402 \text{ m}^3 & v_8 = 0,0029 \text{ m}^3 \end{array}$$

Determinando o volume da ponteira, isto é:

$$v_p = \frac{g_{15,3} \cdot l_p}{3} = \frac{0,0001 \cdot 0,6}{3} = 0,00002 \text{ m}^3.$$

Portanto, o volume total com casca dessa árvore pelo método de Smalian é:

$$v_{c/c} = \sum_{i=1}^8 v_i + v_p = 0,31942 \text{ m}^3.$$

► Cálculo do Volume por Huber

Observe a Tabela 13 e a Figura 31:

Efetuada o cálculo das toras com casca por Huber, temos:

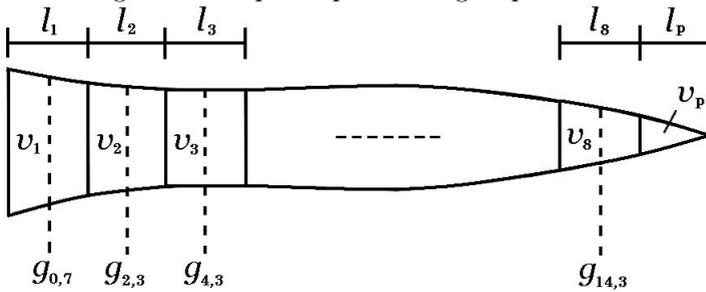
$$v_1 = g_{0,7} \cdot l_1 = 0,0483 \cdot 1,2 = 0,0580 \text{ m}^3$$

$$v_2 = g_{2,3} \cdot l_2 = 0,0337 \cdot 2 = 0,0674 \text{ m}^3$$

Tabela 13: Dados para Cubagem por Huber

| Campo | | Empresa |
|--------|---------------|----------------|
| $h(m)$ | $d_{c/c}(cm)$ | $g_{c/c}(m^2)$ |
| 0,7 | 24,8 | 0,0483 |
| 2,3 | 20,7 | 0,0337 |
| 4,3 | 19,4 | 0,0296 |
| 6,3 | 18,1 | 0,0257 |
| 8,3 | 17,0 | 0,0227 |
| 10,3 | 11,5 | 0,0104 |
| 12,3 | 7,6 | 0,0045 |
| 14,3 | 4,5 | 0,0016 |
| 15,3 | 1,2 | 0,0001 |

Figura 31: Esquema para Cubagem por Huber



Aplicando a fórmula para as demais seis toras (tora 3 a 8), segue que:

$$\begin{array}{ll} v_3 = 0,0592 \text{ m}^3 & v_6 = 0,0208 \text{ m}^3 \\ v_4 = 0,0514 \text{ m}^3 & v_7 = 0,0090 \text{ m}^3 \\ v_5 = 0,0454 \text{ m}^3 & v_8 = 0,0032 \text{ m}^3 \end{array}$$

Determinando o volume da ponteira, isto é:

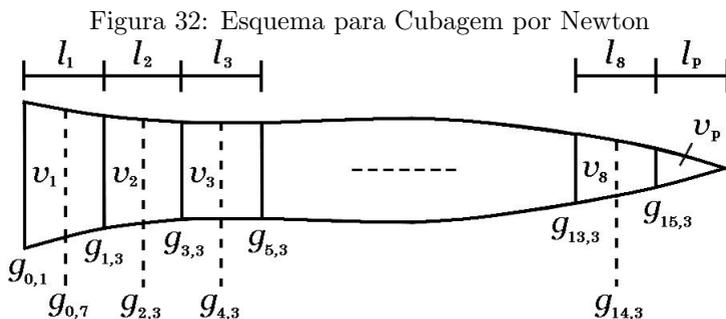
$$v_p = \frac{g_{15,3} \cdot l_p}{3} = \frac{0,0001 \cdot 0,6}{3} = 0,00002 \text{ m}^3.$$

Portanto, o volume total com casca dessa árvore pelo método de Huber é:

$$v_{c/c} = \sum_{i=1}^8 v_i + v_p = 0,31442 \text{ m}^3.$$

► Cálculo do Volume por Newton

Observe a Tabela 14 e a Figura 32:



Efetuando o cálculo das toras com casca por Newton, temos que:

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{g_{0,1} + 4 \cdot g_{0,7} + g_{1,3}}{6} \right) \cdot l_1 \\ &= \left(\frac{0,0603 + 4 \cdot 0,0483 + 0,0391}{6} \right) \cdot 1,2 \\ &= 0,0585 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Tabela 14: Dados para Cubagem por Newton

| Campo | | Empresa |
|--------|---------------|----------------|
| $h(m)$ | $d_{c/c}(cm)$ | $g_{c/c}(m^2)$ |
| 0,1 | 27,7 | 0,0603 |
| 0,7 | 24,8 | 0,0483 |
| 1,3 | 22,3 | 0,0391 |
| 2,3 | 20,7 | 0,0337 |
| 3,3 | 20,3 | 0,0324 |
| 4,3 | 19,4 | 0,0296 |
| 5,3 | 18,8 | 0,0278 |
| 6,3 | 18,1 | 0,0257 |
| 7,3 | 17,5 | 0,0241 |
| 8,3 | 17,0 | 0,0227 |
| 9,3 | 14,3 | 0,0161 |
| 10,3 | 11,5 | 0,0104 |
| 11,3 | 9,5 | 0,0071 |
| 12,3 | 7,6 | 0,0045 |
| 13,3 | 6,0 | 0,0028 |
| 14,3 | 4,5 | 0,0016 |
| 15,3 | 1,2 | 0,0001 |

$$\begin{aligned}
 v_2 &= \left(\frac{g_{1,3} + 4.g_{2,3} + g_{3,3}}{6} \right) .l_2 \\
 &= \left(\frac{0,0391 + 4.0,0337 + 0,0324}{6} \right) .2,0 \\
 &= 0,0688 \text{ m}^3
 \end{aligned}$$

Aplicando a fórmula para as demais seis toras (tora 3 a 8), segue que:

$$\begin{array}{ll}
 v_3 = 0,0595 \text{ m}^3 & v_6 = 0,0216 \text{ m}^3 \\
 v_4 = 0,0516 \text{ m}^3 & v_7 = 0,0093 \text{ m}^3 \\
 v_5 = 0,0437 \text{ m}^3 & v_8 = 0,0031 \text{ m}^3
 \end{array}$$

Determinando o volume da ponteira, isto é:

$$v_p = \frac{g_{15,3} . l_p}{3} = \frac{0,0001.0,6}{3} = 0,00002 \text{ m}^3.$$

Portanto, o volume total com casca dessa árvore pelo método de Newton é:

$$v_{c/c} = \sum_{i=1}^8 v_i + v_p = 0,31612 \text{ m}^3.$$

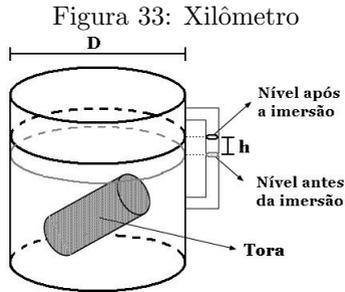
4.5.6 Deslocamento de Água

O volume de um sólido mesmo que irregular e qualquer que seja sua configuração pode ser determinado pelo deslocamento de água. Este método consiste em mergulhar a tora num recipiente com água e medir o volume de água deslocado, fornecendo assim o volume da tora. O recipiente com água no vocabulário florestal é conhecido como *Xilômetro*.

► Xilômetro

O xilômetro deve ser utilizado preferencialmente em toras menores e em pequena escala operacional, tendo em vista o gasto excessivo de tempo para a realização das operações de manuseio das toras. Em florestas de cerrado ou na caatinga que apresentam fustes tortuosos e retorcidos é indicado o xilômetro, pois o emprego de métodos analíticos é trabalhoso e com resultados pouco eficientes. (LOETSCH; F.ZÖHRER; HALLER., 1973) menciona que o método mais acurado para obter o volume real é o xilômetro, ao qual é adotado como referencial para testar

a acuracidade de outros métodos. O xilômetro consiste de um tambor metálico cilíndrico com graduações laterais diretas ou com colocação de um tubo externamente que contém a graduação. Veja a Figura 33.



Determinar o volume real por este método elimina duas fontes de erros típicas dos métodos analíticos:

- independe da forma do tronco;
- não requer as medidas de diâmetros e comprimentos, logo os erros na medição dessas variáveis são eliminadas.

Por outro lado, este método terá erro quando:

- a água penetra na tora;
- a tora não está totalmente submersa;
- a água estiver turva, significando mudança em sua densidade;
- houver acúmulo de sedimentos no fundo do xilômetro.

4.6 CONCLUSÕES SOBRE OS MÉTODOS DE CUBAGEM

Muitas pesquisas foram e continuam sendo feitas em relação aos métodos de cubagem. Colocaremos aqui várias conclusões e comparações relacionadas a esses três métodos de cubagem e xilômetro. Vale lembrar que os métodos absolutos de Smalian, Huber e Newton têm sido largamente empregados por profissionais florestais de todas as partes do planeta, devido as facilidades de usos que os mesmos apresentam.

- (HUSCH; MILLER; BEERS, 1982) menciona que a fórmula de Newton é exata para todos os troncos dos sólidos geométricos (parabolóide, neilóide e cone). As fórmulas de Smalian e Huber são exatas somente quando o sólido é um tronco de parabolóide. Os autores exemplificam que se as linhas de superfície de uma seção da árvore são mais convexas do que o tronco de parabolóide, a fórmula de Huber superestimarão o volume enquanto que a fórmula de Smalian subestimarão o volume. Mas se as linhas de superfície de uma seção da árvore são menos convexas do que o tronco de parabolóide (o que ocorre frequentemente), a fórmula de Smalian superestimarão o volume enquanto que a fórmula de Huber subestimarão o volume. Os autores ainda citam que, caso não se admita grandes erros na cubagem, não se deve usar a fórmula de Smalian para comprimentos de seções de toras maiores que 1,20 m e que para seções de comprimentos de 2,40 m ou 4,80 m as fórmulas de Newton e Huber fornecem os melhores resultados. Em geral a fórmula de Newton apresenta melhores resultados para qualquer parte da árvore, exceto para a parte basal com excessiva deformação. Para essa parte, a fórmula de Huber dará melhor resultado. A fórmula do parabolóide ou do cone são adequados para determinar o volume da ponta da árvore (ponteira), e a do cilindro é normalmente empregada para calcular o volume do toco, embora sua forma se aproxime mais do tronco da neilóide.
- (MACHADO; NADOLNY, 1991) utilizaram seções com comprimentos de 1, 2, 3, 4 e 6 m e determinaram os volumes de árvores de *Pinus Elliotti* pelas fórmulas de Smalian, Huber e Newton, comparando-as com os volumes obtidos pelo Xilômetro e concluíram:
 - a) Huber e Newton foram os melhores para calcular o volume total;
 - b) Huber foi a melhor para a parte inferior da árvore para todos os comprimentos de seções testados, seguido por Newton;
 - c) Na base, em que a forma tende ao neilóide e no topo, em que tende à parábola cúbica ou cone, as fórmulas consideradas, deixaram a desejar quanto à eficiência. Já na porção intermediária que se assemelha a um sólido parabólico, os métodos foram eficientes, comprovando-se a forma mais regular dessa parte do tronco;
 - d) Não houve diferença significativa entre os comprimentos testados, exceto quando se empregou a fórmula de Smalian com

4 e 6 *m*.

- (BIGING, 1988) menciona que o erro total na determinação do volume pode ser advindo de medições nos diâmetros (ou comprimentos) e (ou) das fórmulas matemáticas empregada. Ao analisar os erros específicos de cada um, esse autor concluiu que erros de até um décimo de polegada na medição de diâmetros e de um décimo de pés na medição da altura, alteraram o volume entre 1 a 4% e que o erro total variou de 2 a 7%, dependendo do método, do comprimento da seção e da severidade dos erros de medições.
- No Brasil, a fórmula de Smalian é a mais usada nos levantamentos florestais aplicada a seções curtas (menores do que 1, 20 *m*), mais pela praticidade de emprego do que por questões de acuracidade.

5 APLICAÇÃO NO ENSINO MÉDIO

Apresentamos aqui um Plano de Aula a qual envolve uma aplicação de geometria espacial, especificamente sobre volumes. O tema abordado será cubagem de árvores. Este plano de aula será executado em 2015, quando a *Empresa Brochmann Polis* (Curitibanos – Santa Catarina) estiver fazendo o inventário florestal de algumas Fazendas neste mesmo Estado e que contém como tipo de árvore o *Pinus*. A cubagem será feita em uma árvore e será conduzida pelo engenheiro florestal *Wolney César Felipe*. Os alunos do *Colégio São Bento* (Criciúma – Santa Catarina) visitarão uma Fazenda (campo) próxima a Empresa. As aulas ocorrerão em três momentos: em sala de aula (Criciúma), no campo (Fazenda próxima a Curitibanos) e na empresa (Curitibanos).

PLANO DE AULA

Título

Cubagem de uma Árvore.

Nível de Ensino

Médio.

Ano

Terceiro.

Componente Curricular

Matemática.

Duração

15 aulas (40 minutos cada).

Modalidade de Ensino

Presencial.

Objetivo

As presentes aulas têm como intuito dar ao aluno noções básicas de Cubagem de uma Árvore utilizando-se do Método de Smalian para determinar o volume do tronco da árvore e comparar com o método de deslocamento de água (Xilômetro).

Recursos Didáticos

Suta, Vara Telescópica, Fita Diamétrica, Motosserra, Xilômetro, Calculadoras, Canetas e Papéis.

Procedimentos Didáticos

- Explicação em sala de aula dos conceitos matemáticos envolvidos na cubagem de uma árvore;
- Explicação em sala de aula dos métodos para fazer a cubagem de uma árvore;
- Explicação em sala de aula dos procedimentos para a cubagem de uma árvore;
- Explicação em sala de aula do método de deslocamento de água;
- Condução dos Alunos, Professor, Engenheiro Florestal e Madeireiro ao campo;
- Escolha de uma árvore em que o solo onde os alunos se encontram esteja no mesmo nível de elevação da árvore que desejaubar;
- Fazer a medição do DAP (Diâmetro da Altura do Peito – 1,30 metros) e da altura da árvore;
- Fazer o corte da árvore com a motosserra;
- Retirar os galhos do tronco com a motosserra;
- Após a cubagem do tronco da árvore, cortar o tronco em toras;
- Deslocamento para a fábrica para determinar o volume das toras com o Xilômetro.

Metodologia

1º Momento – em sala de aula

- Explicar sobre do que se trata a cubagem de uma árvore;
- Explicar porque a cubagem tem um papel importante na atividades florestais;
- Expor quais conceitos geométricos são envolvidos;
- Explicar os métodos de cubagem mais usados (Smalian, Huber e Newton) e retificar que o método de Smalian é o mais usado pela facilidade de sua aplicação;
- Explicar o método do deslocamento de água com o uso do Xilômetro.

2º Momento – no campo

- Explicação pelo Engenheiro Florestal de como usar a suta e como obter sua leitura;
- Solicitar aos alunos que façam a medição do DAP (com casca) com

a suta e que todos anotem o valor obtido;

- Explicação pelo Engenheiro Florestal de como usar a vara telescópica e como obter sua leitura;
- Solicitar aos alunos que façam a medição da Altura Total da árvore com a vara telescópica e que todos anotem o valor obtido;
- Pedir aos alunos que todos façam o cálculo da área transversal com a medida do DAP;
- Explicar aos alunos que a somatória de todas as áreas transversais de todas as árvores por hectare nos fornece o grau de ocupação do terreno florestal;
- Corte feito pelo madeireiro da árvore e retirada de todos os galhos do tronco principal;
- Solicitar aos alunos que façam uma tabela com uma coluna para as alturas absoluta estipulada pelo Engenheiro Florestal e outra coluna com os diâmetros tomados respectivamente a cada altura tomada;
- Solicitar aos alunos que façam as marcações das alturas absolutas estipulada com a fita diamétrica no tronco da árvore, e que todos anotem os valores dessas alturas;
- Solicitar aos alunos que façam as medições dos diâmetros cruzados (com casca) em cada altura absoluta estipulada com a suta e que após feita a média aritmética desses diâmetros cruzados em cada altura, todos anotem os valores desses diâmetros;
- Orientar os alunos para que dividam o tronco desde a base até o topo em seções, e que apliquem para cada seção a fórmula de Smalian, com exceção da ponteira;
- Solicitar aos alunos que façam a soma dos volumes de cada seção, com exceção da ponteira;
- Orientar os alunos para que apliquem a fórmula do volume do cone para a ponteira;
- Pedir aos alunos que determinem então o volume total do tronco da árvore;
- Corte feito pelo madeireiro do tronco em toras nas alturas marcadas;
- Deslocamento de todos e das toras para a fábrica.

3º Momento – na fábrica

- Explicação pelo Engenheiro Florestal de como funciona o Xilômetro e como se faz a leitura do volume;
- Colocação de cada tora dentro do Xilômetro;
- Solicitar aos alunos que façam a leitura do volume de cada tora e anotem os resultados;

- Pedir aos alunos que determinem então o volume total do tronco da árvore;
 - Solicitar aos alunos que façam a comparação do volume obtido por Smalian e pelo Xilômetro;
 - Perguntar aos alunos se houve diferença nos resultados dos volume obtidos nos dois métodos;
 - Explicar aos alunos que o Xilômetro fornece o volume exato da árvore, mas o seu uso é complicado, pois requer os deslocamento de todas as toras para a fábrica, e isso é muito trabalhoso e gera custos;
 - Explicar aos alunos que em inventários florestais, para se determinar o volume de uma floresta, esta é feita por amostragem;
 - Explicar também aos alunos que ao se vender as toras, a Empresa que compra paga o preço baseado no volume determinado no inventário feito pela Empresa que vende as toras. Se tal Empresa desconfie que haja erros grosseiros no volume determinado no inventário, caso ela tenha o Xilômetro e use para determinar o volume exato, concluindo que há diferença consistentes, ela tem o direito de ser reembolsado por esta diferença pela Empresa que vendeu as toras.
-

CONCLUSÃO

Após a realização deste trabalho, que procurou expor os principais métodos de Cubagem de Árvore, verificamos que os métodos de Smalian, Huber e Newton são métodos que visam determinar o volume de uma árvore. Volume este que é uma informação essencial no direcionamento racional e sustentável dos recursos disponíveis nas florestas.

Apresentamos a justificativa de diversos autores, que através de pesquisas fundamentadas, fazem as comparações entre tais métodos.

Este trabalho intitulado por *Cubagem de Árvores* reuniu informações de vários autores (ver referência bibliográfica) que se dedicaram ao tema e que teve como objetivo esclarecer a mensuração de diâmetro e altura, culminando na mensuração do volume.

Tudo que aqui foi colocado teve como idéia revelar que diversos conceitos matemáticos servem de suporte para a construção da ciência florestal. Afirmar que muitos desses conceitos são vistos ainda no ensino básico e que é possível ingressar o aluno em atividades práticas que visam aplicar os conhecimentos adquiridos em sala de aula.

Na parte final deste trabalho, foi colocado como Aplicação no Ensino Médio, a execução de um Plano de Aula, que tem como meta colocar os alunos no campo para a Cubagem de uma Árvore.

REFERÊNCIAS

- BATISTA, J. Mensuração de Árvores - Uma introdução à dendrometria. 2001.
- BIGING, G. Estimating the accuracy of volume equations using taper equations of the stem profile. *Canadian Journal of Forest Research*, Ed. Edgard Blücher, v. 18, p. 1002–1007, 1988.
- HUSCH, B.; MILLER, C.; BEERS, T. *Forest Mensuration*. 3. ed. New York: John Wiley & Sons, 1982. 402 p.
- LOETSCH, F.; F.ZÖHRER; HALLER., K. *Forest Inventory*. München: BLV. Verlagsgesellschaft, 1973. 469 p.
- MACHADO, S.; FILHO, A. *Dendrometria*. 2. ed. Curitiba: Unicentro, 2009. 316 p.
- MACHADO, S.; NADOLNY, M. Comparação de métodos de cubagem de Árvores e de diversos comprimentos de seção. In: *Anais do III Congresso Florestal e do Meio Ambiente do Paraná*. v. 1. APEF. Curitiba. 1991 p. 89–104.
- SCOLFORO, J.; THIERSCH, C. *Biometria Florestal: Medição, Volumetria e Gravimetria*. Lavras: UFLA\FAEPE, 2004. 285 p.
- SOARES, C.; NETO, F. P.; SOUZA, A. de. *Dendrometria e Inventário Florestal*. 2. ed. Viçosa: UFV, 2011. 272 p.
- STERBA, H. *Holzmeßlehre*. Wien: Univ. für Bodenkultur, 1986. 169 p.