PAULO FERNANDO SILVA DOS REIS

O TEOREMA DE TALES POR MEIO DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ

SETEMBRO, 2014

PAULO FERNANDO SILVA DOS REIS

O TEOREMA DE TALES POR MEIO DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Orientador: Prof^a Liliana Angelina León Mescua

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO NORTE FLUMINENSE
DARCY RIBEIRO - UENF
CAMPOS DOS GOYTACAZES - RJ
SETEMBRO, 2014

PAULO FERNANDO SILVA DOS REIS

O TEOREMA DE TALES POR MEIO DE ATIVIDADES INVESTIGATIVAS

"Dissertação apresentada ao Centro de Ciências e Tecnologia da Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro, como parte das exigências para obtenção do título de Mestre em Matemática."

Aprovada em 22 de Setembro de 2014.

Comissão Examinadora:

Prof. Oscar Paz la Torre
D.Sc. - UENF

Prof. Paulo Sergio Dias da Silva
D.Sc. - UENF

Prof^{a}. Arilise Moraes de Almeida Lopes
D.Sc. - IF Fluminense

Prof^{a} Liliana Angelina León Mescua
D.Sc. - UENF
(ORIENTADOR)

Dedico esta dissertação a meus familiares e a todas as pessoas que contribuíram para o meu sucesso.

Agradecimentos

Aos meus amados pais, Paulo e Joseth, que sempre me incentivaram.

À minha filha, Ana Clara, e à minha esposa, Gizelda, pela compreensão com minha ausência consequente das muitas horas de estudos e pesquisa.

Aos colegas do Mestrado pelos momentos partilhados nesses dois anos, em especial aos colegas de viagem, Bruno, Jefferson e Luciano.

Aos ilustríssimos professores do programa de Mestrado pelos conhecimentos compartilhados e por se mostrarem tão solícitos quando requisitados.

A Geometria

A geometria se vê,
No contorno da peneira,
No formato da tv,
No gingado da capoeira,
Nas portas e nas janelas,
Na forma do pãozinho,
Nas tamancas e nas chinelas,
Na xícara do cafezinho,
Na fachada das casas,
Nas curvas do caminho,
Das borboletas, nas asas,
E também no meu cantinho,
Nos sólidos geométricos,
Das rochas a beira mar,
Ou nos cristais assimétricos,
Que não flutuam no ar.
A esfera que gira no espaço,
Em movimento de rotação,
Na translação está o passo,
Para a sua evolução.
E, então?
Chegamos à conclusão,
De a geometria estar,
Em todo e qualquer lugar,
Na beleza dos abrolhos,
Nas estrelas do mar,
Ou no formato dos olhos,
Que nos enchem de amor sem par,
Deus deu ao homem inteligência,
Para aprender a contar,
E evoluindo na ciência,
Sua vida melhorar,
Da geometria a importância,
Levou-o a compreender,
E diante das circunstâncias,
Seus cálculos desenvolver.

Ruth Nunes Dualibi

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar uma sequência didática para o ensino do Teorema de Tales para alunos do 9^o ano do Ensino Fundamental. Nesse intuito, além de apresentar a teoria envolvida no teorema, são propostas discussões, exemplos e atividades diversificadas que envolvem fatos cotidianos. Com foco a tornar a aprendizagem mais significativa, algumas das atividades foram desenvolvidas fora da sala de aula e no laboratório de Informática da escola, de modo que o aluno compreenda melhor a teoria proposta e que este teorema não seja apenas mais um daqueles vistos na escola, e sim um instrumento que possa aplicar no seu dia a dia.

Palavras-chaves: Geometria; Teorema de Tales; Semelhança; Ensino Fundamental.

Abstract

This paper aims to present an instructional sequence for teaching theorem of Thales for 9th graders os elementary school. To that end, in addition to presenting the theory involved in the theorem, are proposed discussions, exemples and diversified activities involving daily events. With focus to make if more meaningful, some of the activities were carried outside the classroom, so that students better understand the theory and proposed that this theorem is not just another one of those seen in school, but an instrument that can apply in their daily lives.

Key-words: Geometry; Theorem of Tales; Similarity; Elementary School.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Teorema de Tales em outros Países. 21
Figura 2 – Teorema de Tales no Círculo. 22
Figura 3 – Retas paralelas. 24
Figura 4 – Representação de retas paralelas em Mapa de bairro da cidade de Rio das Ostras. Fonte: Google Maps. 24
Figura 5 – O Teorema de Tales 2.2 (Segmentos Proporcionais) 25
Figura 6 – Demonstrando o Teorema 2.2. 26
Figura 7 – Terreno na forma de trapézio, exemplificando o Teorema 2.2. 27
Figura 8 – Aplicando o Teorema 2.2 no Exemplo 2.1. 28
Figura 9 – O Teorema de Tales 2.3 (No Triângulo). 29
Figura 10 – Demonstrando o Teorema 2.3 usando áreas. 29
Figura 11 – Demonstrando o Teorema 2.3 por contraposição 30
Figura 12 – Demonstrando o Teorema 2.3 usando proporções. 32
Figura 13 – O Teorema 2.4 (Bissetriz Interna). 32
Figura 14 – Demonstrando o Teorema 2.4. 33
Figura 15 – Exemplificando o Teorema 2.4. 34
Figura 16 – O Teorema 2.5. 34
Figura 17 – Demonstrando o Teorema 2.5. 35
Figura 18 – Exemplificando o Teorema 2.5 36
Figura 19 – Resumo dos alunos A22 e A30 40
Figura 20 – Resumo dos alunos A4 e A18. 40
Figura 21 – Resumo do aluno A12 e A33. 41
Figura 22 – Cálculo da altura da Pirâmide por meio de sua sombra. Fonte: (CENTURION; JAKUBOVIC, 2012) 44
Figura 23 – Fonte (JúNIOR; CASTRUCCI, 2009). 44
Figura 24 – Fonte (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009). 44
Figura 25 – Representação do cálculo da altura da pirâmide de Quéops. 45
Figura 26 – Atividade prática: Cálculo da altura do poste medindo a altura e sombra dos alunos. 47
Figura 27 – Cálculo da altura do poste medindo a sombra do mesmo. 48

Figura 28 – Demonstração entre a altura do poste e a sombra e a relação no triângulo isósceles. 49
Figura 29 – Cálculo da altura de um prédio, usando medição da sombra. Fonte: (CENTURION; JAKUBOVIC, 2012) 50
Figura 30 – Calculo da altura de uma árvore usando medição da sombra. 51
Figura 31 – Solução do problema 1 no caderno de A27. 53
Figura 32 – Soluções do problema 2 no quadro, pelos alunos. 54
Figura 33 – Soluções do problema 2 incorreto no caderno de A6. 55
Figura 34 – Proporções no feixe de retas paralelas. 56
Figura 35 – Aplicando o Teorema de Tales 2.2. 57
Figura 36 – Aplicando o teorema de Tales em atividade 1 de Proporção. Fonte: (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009). 59
Figura 37 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 1 de Proporção. Fonte: www.sprweb.com.br em 25 de julho de 2013. 59
Figura 38 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 3 de Proporção. Fonte: Vestibular da UFSM 60
Figura 39 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 4 através de feixe de retas paralelas. Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2001). 61
Figura 40 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 5 através de feixe de retas paralelas. Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2001). 62
Figura 41 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 6 através de feixe de retas paralelas. Fonte: (MORGADO; WAGNER; JORGE, 2002). 63
Figura 42 – Verificando o Teorema 2.1 no GeoGebra. 66
Figura 43 – Manipulações de pontos na circunferência com Geogebra. 67
Figura 44 – Atividade sobre o teorema 2.1 com o uso de folha de papel, copo, lápis e régua. 67
Figura 45 – Construção de segmento de reta na Atividade sobre o teorema 2.1 com o uso de régua. 68
Figura 46 – Verificando o Teorema 2.2 no GeoGebra. 69
Figura 47 – Verificando as Proporções do Teorema de Tales 2.2. 70
Figura 48 – Aplicação 1 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: Colégio Pedro II. 70
Figura 49 – Aplicação 2 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: Universidade Estadual de Londrina. 71
Figura 50 – Aplicação 3 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: CEFET-PR 71
Figura 51 – Aplicação 4 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: Colégio Pedro II 72

Figura 52 – Aplicação 5 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: UNIRIO 72
Figura 53 – Aplicação 6 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: (BIANCHINI, 2013). 73
Figura 54 – Aplicação 7 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009). 73
Figura 55 – Solução do problema de 4.2.2.1. 79
Figura 56 – Solução do problema de 4.2.2.2. 80
Figura 57 – Solução do problema de 4.2.2.4 81
Figura 58 – Solução do problema de 4.2.2.5. 82
Figura 59 – Solução do problema de 4.2.2.6. 83

Lista de tabelas

Tabela 1 – Acertos das duplas por questão 64
Tabela 2 – Parciais dos problemas 2 e 3. 64

Lista de abreviaturas e siglas

CEFET-PR	Centro Federal de Educação Tecnológica do Paraná
CPII	Colégio Pedro II
ENEM	Exame Nacional do Ensino Médio
LDB	Lei de Diretrizes e Bases da Educação
PCNs	Parâmetros Curriculares Nacionais
UEL	Universidade Estadual de Londrina
UFSM	Universidade Federal de Santa Maria
UNIRIO	Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Sumário

Introdução 15

1 RESENHA HISTÓRICA 17
1.1 Tales de Mileto 18

2 O TEOREMA DE TALES 20
2.1 O Teorema de Tales no Círculo 22
2.2 O Teorema de Tales de Segmentos Proporcionais 23
2.3 Teorema de Tales no Triângulo 28
2.4 Outras Variações do Teorema de Tales 32

3 ATIVIDADES APLICADAS EM SALA DE AULA 37
3.1 Atividade 1 - Investigando a Matemática 37
3.1.1 Descrição 38
3.1.2 Objetivos 38
3.1.3 Desenvolvimento da Atividade 38
3.1.4 Material Necessário 38
3.1.4.1 Culminância da Atividade 39
3.1.4.2 Diálogos 41
3.2 Atividade 2 - Medindo o Inacessível 42
3.2.1 Descrição 42
3.2.2 Objetivos 43
3.2.3 Desenvolvimento da Atividade 43
3.2.4 Material Necessário 46
3.2.4.1 Culminância da Atividade 46
3.2.4.2 Diálogos 48
3.3 Atividade 3 - Calculando Alturas Utilizando a Medição de Sombras 50
3.3.1 Descrição 50
3.3.1.1 Problema 1 50
3.3.1.2 Problema 2 51
3.3.2 Objetivos 52
3.3.3 Desenvolvimento da Atividade 52
3.3.3.1 Culminância da Atividade 52
3.3.3.2 Diálogos 54

3.4 Atividade 4 - Proporções do Teorema de Tales de Segmentos Proporcionais . . . 55
3.4.1 Descrição . . . 55
3.4.2 Objetivos . . . 56
3.4.3 Desenvolvimento da Atividade . . . 56
3.4.3.1 Culminância da Atividade . . . 57
3.4.3.2 Diálogos . . . 58
3.5 Atividade 5 - O Feixe de Paralelas e os Teoremas de Tales . . . 58
3.5.1 Descrição . . . 58
3.5.2 Objetivos . . . 63
3.5.3 Desenvolvimento da Atividade . . . 63

4 SUGESTÕES DE ATIVIDADES . . . 65
4.1 O Teorema de Tales no Círculo . . . 65
4.1.1 Atividade 1 - Verificando a Teoria com o GeoGebra . . . 65
4.1.2 Atividade 2 - Calculando o Diâmetro de um Círculo . . . 67
4.1.2.1 Material Necessário . . . 67
4.2 O Teorema de Tales para Segmentos Proporcionais . . . 68
4.2.1 Atividade 1 - Usando GeoGebra . . . 68
4.3 Problemas Contextualizados . . . 70

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . 74

Referências . . . 75

APÊNDICES 78

APÊNDICE A – SOLUÇÕES . . . 79

Introdução

A questão primordial não é o que sabemos, mas como sabemos.

Thales, (BOYER, 2012)

Quando se trata de ensino da Matemática é importante destacar suas inúmeras aplicações no cotidiano, porém sem deixar de ressaltar a riqueza do pensamento matemático bem como a necessidade de desenvolvê-lo para seu uso na própria Matemática, e também para auxiliar na compreensão das outras ciências. Estabelecer conclusões usando ideias lógico-dedutivas são habilidades indispensáveis a qualquer cidadão.

Apesar da importância incontestável dos conhecimentos matemáticos para construção do indivíduo e sua participação na sociedade em que vive, o estudo de Moreira e David (2004) mostra que os professores apresentam deficiências na forma de ensinar, pois embora estejam aptos a produzir respostas corretas, não possuem habilidades para validar suas respostas ou explicar conceitos. A mesma pesquisa, mostra a necessidade de uma metodologia que destaque a importância da justificação dos resultados encontrados na Matemática, pondo-se de acordo com o definido no Art. 32-III da Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB) (BRASIL, 1996).

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática Brasil (1998), no que se refere ao estudo do tema *Espaço e Forma* incluso nos conteúdos do 6^o ao 9^o ano, o ponto de partida é o manuseio e a análise de figuras, com o objetivo de criar conjecturas e identificar propriedades. Cita-se também a importância das verificações experimentais e das aplicações do teorema de Tales, como o cálculo de distâncias inacessíveis utilizando noções geométricas.

Cientes da importância de lecionar Matemática em turmas de 9^o ano decidimos escrever este trabalho, pois percebemos que o teorema de Tales no triângulo é um conteúdo que, apesar de sua importância histórica, não costuma ter um merecido destaque e atenção quando abordado em aula ou nos livros didáticos, (PEREIRA, 2014). Assim resolvemos dar um pouco mais de atenção ao conteúdo e utilizar a prática do teorema a nosso favor.

Sabendo ainda da importância histórica do Teorema de Tales e as potencialidades pedagógicas da História da Matemática abordadas por Santos (2013), direciono este trabalho para oferecer um ensino que privilegie métodos de investigação na resolução de problemas, de maneira a tornar nítida, aos alunos, a necessidade de legitimar suas respostas. Esta proposta possibilita desenvolver um processo de aprendizagem, buscando tornar o aluno apto a desenvolver a argumentação Matemática e a promoção do raciocínio em outras áreas do conhecimento.

Seguindo as recomendações de educadores da atualidade, como Kaleff (2008) e de outros trabalhos como o de Leite (2013) propomos nesta dissertação apresentar um material de apoio ao professor, referente ao ensino do teorema de Tales para alunos do 9^o ano do ensino fundamental, que os conduza a um aprendizado sólido, evitando uma simples memorização.

Com este intuito, serão propostas atividades por meio de situações-problema, que os ajude a aperfeiçoar seus conhecimentos geométricos, e os leve a perceber que existe aplicação prática no que se é estudado, assim como motivá-los a se aprofundar no estudo de outros assuntos relacionados à geometria.

Este trabalho está estruturado em cinco capítulos:

O Capítulo 1, intitulado de "Resenha Histórica", contém um breve relato da evolução da geometria nas antigas civilizações e sobre a influencia da matemática grega nos trabalhos de Tales de Mileto.

O Capítulo 2, apresenta um estudo completo de três dos teoremas atribuídos a Tales. Previamente, são desenvolvidos os conceitos geométricos necessários para abordá-los.

O Capítulo 3, contém cinco atividades, realizadas com os alunos do 9^o ano da Escola Municipal Professora Rosângela Duarte Faria, do Município de Rio das Ostras. Seguindo as diretrizes dos PCNs Brasil (1998), foram realizadas atividades de motivação, de caráter experimental fora da sala de aula e de cunho teórico. Porém, todas elas tinham como objetivo: mostrar a aplicabilidade da teoria estudada, despertando o interesse e a capacidade de investigação dos alunos.

O Capítulo 4, sugere atividades complementares, envolvendo os três enunciados do Teorema de Tales tratados no Capítulo 2. As atividades são problemas contextualizados selecionados de livros e provas de admissão. Há também propostas de uso do software Geogebra como ferramenta de apoio para mostrar aos alunos que todos os teoremas que foram apresentados a eles são válidos.

O Capítulo 5 inclui as considerações finais deste trabalho.

Capítulo 1

Resenha Histórica

> Estou certo de que nenhuma outra disciplina perde mais do que a Matemática quando dissociada de sua história.
>
> Glaisher, (BOYER, 2012)

Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática na história da humanidade, provavelmente as antigas civilizações usaram técnicas geométricas desde antes do alvorecer da história registrada.

Inicialmente, a geometria se originou da necessidade prática de medir a terra; a palavra "geometria" significa "medição da Terra". Certamente, para a medição de fronteiras e para construção de edifícios, os seres humanos precisaram ter algum mecanismo e instinto para calcular distâncias, ângulos e altura.

Com o desenvolvimento das civilizações, esses instintos foram aumentados por meio de observações e procedimentos adquiridos com a experiência, experimentação e intuição. Os babilônios eram certamente geômetras qualificados, e os egípcios desenvolveram uma rica e complexa matemática baseados em torno de agrimensura, embora, nenhum deles estivesse interessado em descobrir os axiomas e princípios que regem a geometria, pois seus objetivos eram mais práticos. Os matemáticos egípcios não tinham estrutura para a sua geometria, apenas um conjunto de regras e soluções destinadas a circunstâncias específicas, tais como o cálculo do volume de uma pirâmide truncada e o uso da tentativa e erro para se chegar a uma aproximação. Ambas culturas lançaram as bases para a geometria que influenciou os gregos.

No período entre 800 a.C e 800 d.C, a atividade intelectual das civilizações no Egito e Mesopotâmia estavam perdendo seu entusiasmo, e aos poucos sua liderança intelectual foi se deslocando para a beira do Mediterrâneo. Ambas culturas passariam suas informações para os gregos, que rapidamente assumiram a hegemonia cultural, não só na região mediterrânea, mas também nos principais vales fluviais.

A história grega pode ser contada a partir do século II a.C quando, invasores incultos oriundos do norte, conquistaram o mar. Não tinham tradição literária ou matemática, porém tinham um anseio em aprender. E não demoraram a aprimorar tudo o que lhes ensinaram e ao contrário dos egípcios, que usavam a geometria apenas para resolver seus problemas, os gregos, encontravam prazer na contemplação de relações ideais, e amavam a ciência como ciência (CAJORI, 2007).

O início da história da geometria grega não está clara, porque não há fontes originais de informação, apenas fontes secundárias escritas muitos anos após o período inicial. Segundo estes relatos, a partir do século VI a.C, surgiriam os nomes dos grandes matemáticos gregos: Tales, Pitágoras, Euclides e Arquimedes, aos quais são atribuídos um número grandioso de descobertas matemáticas. Com eles se inicia a construção e demonstração de teoremas via uma sequência de deduções rigorosas a partir de algumas suposições iniciais explicitamente enunciadas (axiomas). Esse processo, é o chamado *método postulacional*, que se tornou a verdadeira essência da matemática moderna (EVES, 2008).

1.1 Tales de Mileto

Tales de Mileto, é considerado o pai da geometria. Dedicou-se durante sua meia idade ao comércio, razão a qual o levou ao Egito. Passando alguns anos lá, estudou com sacerdotes egípcios as ciências matemáticas, físicas e astronômicas.

Na verdade o que se sabe sobre Tales de Mileto é muito pouco, pois ele não deixou registros de seus feitos. Uma história da geometria desse período foi escrita por Eudemo, aluno de Aristóteles, que também perdeu-se no tempo. Essa história era muito conhecida por Proclo, historiador e filósofo neoplatônico (410 - 485), que nos deixou muitas anotações em seus comentários sobre o primeiro livro de Euclides.

> ...primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empírico.
>
> Proclo, (BOYER, 2012)

O nascimento de Tales é datado com base no eclipse de 585 a.C, que segundo Heródoto foi previsto por Tales, provavelmente quando ele tinha 40 anos. E estima-se que ele morreu aos 78 anos. Muitas dúvidas existem sobre a veracidade da história de que Tales previu tal eclipse e deve ser considerada nada mais do que uma simples anedota, já que ele acreditava que o nosso planeta era um disco flutuando sobre o oceano.

Tales foi fundador da escola jônica e cabe a ele a honra de ter introduzido na Grécia o estudo da geometria. Durante sua meia idade dedicou-se ao comércio visitando assim o Egito, de onde absorveu o máximo que pôde dos conhecimentos matemáticos, e então aperfeiçoou seus conhecimentos geométricos aplicando-lhes a lógica dedutiva e as demonstrações. São atribuídos a Tales a prova de alguns dos teoremas mais importantes da geometria:

- Um círculo é dividido em duas partes iguais por seu diâmetro;
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais;
- Ângulos opostos pelo vértice são iguais;
- Se dois triângulos possuem, respectivamente, um lado e dois ângulos adjacentes a ele congruentes, então os triângulos são congruentes.
- Um ponto da circunferência forma com os extremos do diâmetro da mesma, segmentos perpendiculares;
- A hipotenusa de um triângulo retângulo é também o diâmetro da circunferência que circunscreve esse triângulo;
- Um feixe de retas paralelas determina em retas transversais segmentos proporcionais.
- Num triângulo quando traçada uma reta paralela a um dos lados que intersecte os outros dois lados, ficam determinados nesses lados segmentos proporcionais.

Todos esses resultados parecem simples e intuitivos e alguns deles já eram conhecidos pelas civilizações pré-helênicas. São, no entanto, atribuídos a Tales, assim como as tentativas de demonstrá-los. Ocorre, com Tales, uma mudança de perspectiva no sentido de organizar a geometria como estudo abstrato e dedutivo, (ROSS, 2014).

Conta-se que numa das visitas de Tales ao Egito, ele calculou, quando desafiado, a altura da pirâmide de Quéops utilizando seu conhecimento em semelhança de triângulos e o último teorema citado acima.

Os últimos teoremas citados são conhecidos aqui no Brasil, em livros didáticos de 9^o ano, como Teorema de Tales e sua consequência e é ensinado neste mesmo ano de escolaridade do ensino fundamental. Tal teorema e sua consequência são objetos de estudo deste trabalho.

Capítulo 2

O Teorema de Tales

Quando em geometria falamos do Teorema de Tales, devemos deixar claro a qual deles nos referimos. Na história, o Teorema Tales aparece de diferentes formas, há formulações que usam distâncias, outras medidas algébricas ou vetores, porém quase todas relacionadas a uma figura formada por duas secantes e linhas paralelas ou a uma figura relacionada a dois triângulos semelhantes. O livro VI dos *Elementos de Euclides* nos fornece a primeira citação na história destes teoremas.

Durante pesquisas bibliográficas, encontramos pelo menos três teoremas comumente denominados com o nome do matemático grego,

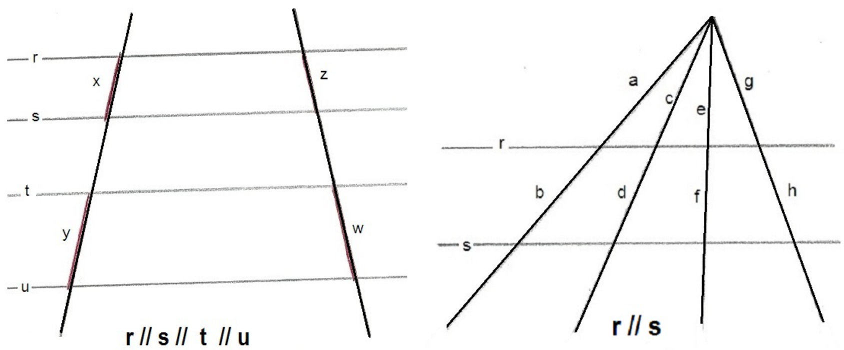
- O teorema de Tales sobre um triângulo retângulo que tem como hipotenusa o diâmetro de um círculo;
- O teorema de Tales sobre as proporções originadas pela intersecção de um feixe de retas paralelas.
- O teorema de Tales também sobre proporções, porém a proporção é formada entre os segmentos determinados nos lados de um triângulo.

O primeiro não muito conhecido aqui no Brasil com esse nome, relaciona a hipotenusa do triângulo retângulo com o diâmetro de uma semicircunferência que circunscreve esse triângulo. O segundo teorema refere-se ao teorema de Tales que está nos livros didáticos de 9^o ano aqui do Brasil de acordo com Almeida (2013), que estuda as retas paralelas cortadas por transversais. Enquanto o último teorema se refere aos segmentos formados quando num triângulo dois lados são intersectados por uma reta paralela ao terceiro lado do triângulo. O segundo e o terceiro teoremas são objetos de estudo desta dissertação, sendo muito similares e até se confundem ao serem aplicados, inclusive um pode ser considerado como consequência do outro.

A questão da proporcionalidade era de grande importância para os gregos, pois seu uso era comum na arquitetura e na agrimensura. Por conta disso, valoriza-se a ideia de que a primeira sistematização da geometria gira em torno da questão tratada por esses dois últimos teoremas. Segue abaixo algumas maneiras como são citados estes teoremas em outros países de acordo com (PATSOPOULOS; PATRONIS, 2006).

- *Na Itália:* Os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais;
- *Na Espanha:* Se cortarmos duas retas quaisquer por várias retas paralelas, os segmentos correspondentes determinados em ambas, são proporcionais;
- *Na Alemanha:* O teorema de Tales é conhecido como *teorema dos feixes de retas concorrentes* e enunciado: se um feixe de retas concorrentes é cortado por duas retas paralelas então a razão entre as medidas dos segmentos determinados por uma reta do feixe é igual a razão entre as medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre qualquer outra reta do feixe.

Observe que, apesar de na essência serem o mesmo teorema, há algumas diferenças nos enunciados descritos acima. Enquanto na Itália e Espanha o teorema cita um feixe de retas paralelas e duas retas transversas, na Alemanha cita-se apenas duas retas paralelas e um feixe de retas transversas. Apresenta-se na Figura 1, a forma como os dois casos podem ser descritos.



(a) Teorema de Tales na Itália e Espanha (b) Teorema de Tales na Alemanha

Figura 1 – Teorema de Tales em outros Países.

Nos casos acima teríamos, respectivamente, as razões

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w}$$

e

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$$

A seguir, estes dois teoremas serão enunciados e demonstrados, pois segundo Polya (1995) entre os dez mandamentos para professores de Matemática aprender a demonstrar é um deles.

2.1 O Teorema de Tales no Círculo

Segundo historiadores, matemáticos indianos e babilônicos conheciam este teorema, e Tales tomou conhecimento deste em uma de suas viagens para a Babilônia. O teorema é atribuído a Tales, porque segundo fontes antigas, ele foi o primeiro a prová-lo usando um de seus próprios resultados, que dizem que, os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais, e que a soma dos ângulos de um triângulo é igual a dois ângulos retos. Em alguns países como por exemplo a Alemanha, o nome Teorema de Tales é dado ao seguinte enunciado:

Teorema 2.1 *Um ângulo inscrito em um semicírculo é um ângulo reto. Heat (1981). Isto é, se $\overline{AC}$ é o diâmetro de uma circunferência e B é outro ponto da circunferência (diferente de A e C), então o ângulo $\widehat{ABC}$ é um ângulo reto.*

Demonstração 2.1 *Consideremos o $\triangle ABC$ como mostra a Figura 2*

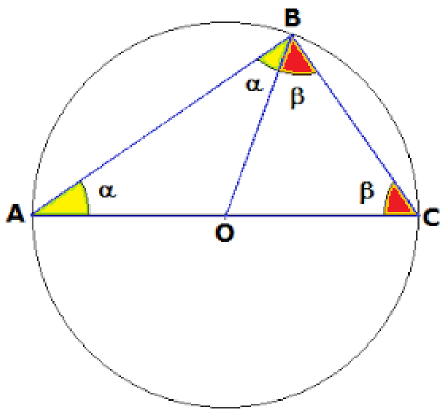


Figura 2 – Teorema de Tales no Círculo.

Desde que OA, OB e OC são raios do mesmo círculo, então $OA = OB = OC$. Logo, $\triangle OAB$ e $\triangle OBC$ são isósceles. Assim, os ângulos

$$\widehat{OAB} = \widehat{OBA} = \alpha \qquad \text{e} \qquad \widehat{OBC} = \widehat{OCB} = \beta.$$

Por outro lado, a soma dos ângulos internos de um triângulo somam 180^o, logo da Figura 2,

$$\alpha + (\alpha + \beta) + \beta = 180\,^\circ.$$

Que significa que:

$$2\alpha + 2\beta = 180\,^{\circ}$$

que é equivalente a

$$\alpha + \beta = 90\,^{\circ}.$$

O que mostra que o ângulo do vértice B tem $90\,^{\circ}$.

2.2 O Teorema de Tales de Segmentos Proporcionais

Segundo Bongiovanni (2007),

> A questão da proporcionalidade era de grande importância para os gregos, principalmente na arquitetura e agrimensura. Por isso, conjectura-se que a primeira sistematização da geometria pode ter sido em torno da proporcionalidade dos segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e outro de retas transversais. Essa questão por muitos séculos foi denominada de Teorema dos Segmentos Proporcionais.
>
> A primeira publicação de que se tem notícia e que substitui o nome de "Teorema dos Segmentos Proporcionais" pelo "Teorema de Tales" é o livro francês *Éléments de Géométrie* de Rouche e Comberousse (reedição de 1883).

Este teorema é um dos postulados mais básicos da geometria, pois serve como fundamentação dos conceitos geométricos tais como:

- Semelhança;
- Trigonometria, justificando as definições de seno, cosseno e tangente de um ângulo;
- Secções de um sólido por um plano paralelo à base;

assim como, faz parte dos conteúdos relacionados ao 9^{o} ano do Ensino Fundamental segundos as diretrizes dos PCNs (BRASIL, 1998).

Seguindo a linha de estudos de Crowley (1994) que cita o modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento em geometria identificando o nível de maturidade geométrica dos alunos e tem como ideia principal que esse alunos progridam de acordo com uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, a seguir veremos alguns conceitos necessários antes que os alunos tenham contato com teorema de Tales de segmentos proporcionais.

Definição 2.1 *(Retas Paralelas) Duas retas são paralelas (símbolo; //) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou são coplanares (são retas que estão no mesmo plano e podem ser paralelas, concorrentes ou coincidentes) e não têm nenhum ponto comum, observemos a Figura 3. (DOLCE; POMPEO, 2001)*

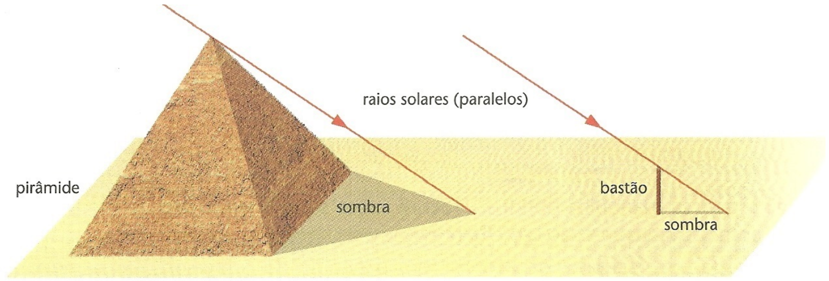


Figura 3 – Retas paralelas.

Vamos observar o mapa abaixo de parte do bairro Costazul em Rio das Ostras, RJ:

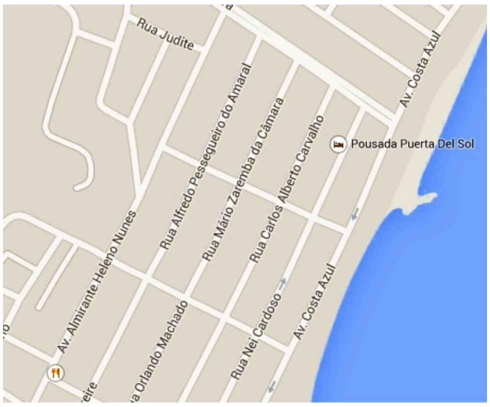


Figura 4 – Representação de retas paralelas em Mapa de bairro da cidade de Rio das Ostras. Fonte: Google Maps.

Na Figura 4 observemos que a avenida Almirante Heleno Nunes e a rua Alfredo Pessegueiro do Amaral são ruas que podem representar retas paralelas, pois não tem ponto em comum.

Definição 2.2 *(Razão) Razão entre dois números é o quociente entre eles.*

Como exemplo, a razão entre os números x e y pode ser representada por $x \div y$ ou por $\frac{x}{y}$, com $y \neq 0$. No nosso cotidiano usamos o conceito de razão quando queremos fazer comparações entre duas quantidades.

Suponha por exemplo que uma fábrica de lâmpadas produz mensalmente 8000 unidades e que destas 20 apresentam defeito de fabricação. Desta forma a razão entre o número de lâmpadas defeituosas e o total de lâmpadas produzidas nesse mês e de

$$\frac{20 \text{ lâmpadas defeituosas}}{8000 \text{ lâmpadas produzidas}} = \frac{1 \text{ lâmpadas defeituosas}}{400 \text{ lâmpadas produzidas}}$$

Outro bom exemplo de razão é o de mercadorias com embalagens de quantidades diferentes. Suponha que num supermercado há duas embalagens diferentes da mesma marca de sabão em pó. A embalagem com $2,5$ kg custa $R\$10,75$, logo a razão entre o valor cobrado e a massa da embalagem é $\dfrac{10,75}{2,5} = 4,3$ reais/kg, e a embalagem com $3,8$ kg custa $R\$17,10$, assim a razão entre o preço e massa é de $\dfrac{17,10}{3,8} = 4,5$ reais/kg. Desta forma verifica-se que a compra da embalagem de $2,5$ kg é mais econômica.

Definição 2.3 *(Proporção) Proporção é a igualdade de duas razões. Dadas as razões* $\dfrac{x}{y}$ *e* $\dfrac{z}{w}$*, com* y *e* w *diferentes de zero, então a igualdade* $\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{w}$ *é chamada proporção, onde* y *e* z *são chamados meios da proporção e* x *e* w *são conhecidos por extremos.*

Da igualdade anterior, tem-se uma propriedade conhecida como propriedade fundamental das proporções que diz que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

$$\frac{x}{y} = \frac{z}{w} \iff yz = xw$$

Como exemplo, suponha que certa receita de bolo necessite de 4 ovos para cada 500 g de farinha. Se quisermos fazer a mesma receita usando 16 ovos, precisaremos mudar a massa da farinha. Como a receita é a mesma, a razão entre o número de ovos e a quantidade de farinha deve também ser a mesma. Calculando a quantidade de farinha, temos que:

$$\frac{4 \text{ ovos}}{500 \text{ g de farinha}} = \frac{16 \text{ ovos}}{x \text{ g de farinha}}$$

Logo, $x = \dfrac{(16)(500)}{4} = 2000$ g de farinha

Teorema 2.2 *Se duas retas são transversais a um feixe de retas paralelas, então a razão entre dois segmentos quaisquer de uma delas é igual à razão entre os respectivos segmentos correspondentes na outra.*

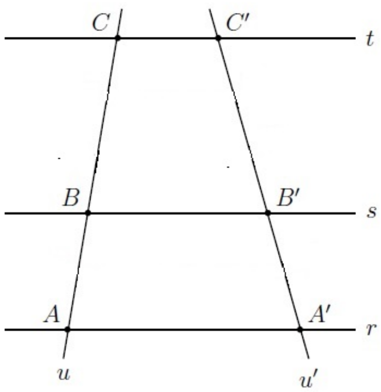


Figura 5 – O Teorema de Tales 2.2 (Segmentos Proporcionais)

Se r//s//t, conforme a Figura 5, tem-se que os segmentos CB, BA, $C'B'$ e $B'A'$ são, nesta ordem proporcionais, isto é,

$$\frac{CB}{BA} = \frac{C'B'}{B'A'}.$$

Demonstração 2.2 *Uma prova direta, Neto (2012) , que pode ser trabalhada no nível do Ensino Fundamental ou Médio, seria a prova incompleta dos pitagóricos que supõe que todos os segmentos são "comensuráveis" (dois segmentos AB e CD são comensuráveis se, existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que $AB = m.u$ e $CD = n.u$.*

Em outras palavras, nesta prova não será incluído o caso em que algum dos membros é um número irracional, pois teríamos que utilizar de conceitos de limite que é o conceito mais fundamental do Cálculo Diferencial e Integral e que não faz parte do objetivo desta dissertação.

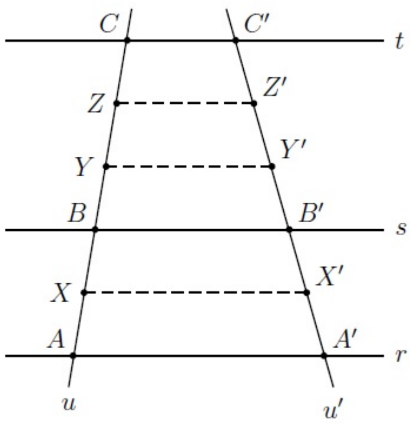


Figura 6 – Demonstrando o Teorema 2.2.

Na Figura 6 observando o trapézio $ABC'A'$, temos os seguintes casos:

• *Se $AB = BC$, pelo teorema da base média de um trapézio, teríamos que $A'B' = B'C'$. Assim*

$$\frac{AB}{BC} = 1 \Longrightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = 1.$$

• *Se $\frac{AB}{BC}$ é um número comensurável, digamos $\frac{2}{3}$, como exemplo. Dividamos então os segmentos AB e BC respectivamente em duas e três partes iguais, obtendo os pontos X, Y e Z em u, tais que*

$$X = XB = BY = YZ = ZC$$

Se traçarmos por X, Y e Z paralelas as retas r, s e t, as quais interceptam u' respectivamente em X', Y' e Z', então mais três aplicações do teorema da base média do trapézio *garantem que*

$$A'X' = X'B' = B'Y' = Y'Z' = Z'C'$$

e, daí,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3} \Longrightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{2}{3}$$

Prosseguindo esse raciocínio, suponha agora, que fosse $\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n}$, *com o* $m, n \in N$. *Então uma pequena modificação do argumento acima (dividindo inicialmente,* AB *e* BC *em* m *e em* n *partes iguais, respectivamente) garantiria que*

$$\frac{AB}{BC} = \frac{m}{n} \Longrightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{m}{n}$$

De outra forma, a relação

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

é valida sempre que o primeiro (ou o segundo) membro for racional.

Para exemplificar o Teorema 2.2 o seguinte problema foi retirado do livro Centurion e Jakubovic (2012):

Exemplo 2.1 *Valdemar tem um terreno na forma de um trapézio. Um riacho paralelo à estrada em que se situa divide o terreno em duas partes, como mostra a Figura 7. Ele já cercou quase todo o limite externo do terreno e só falta o trecho* x, *determine essa medida* x

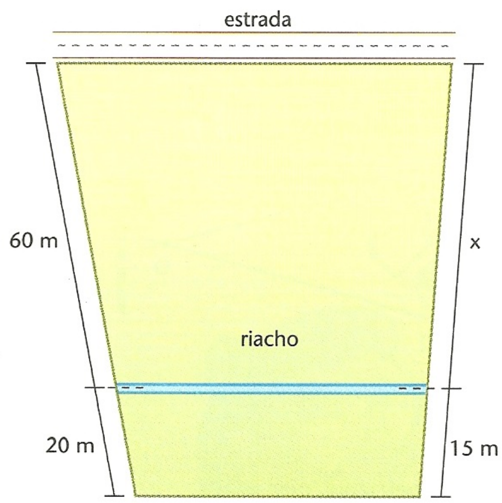


Figura 7 – Terreno na forma de trapézio, exemplificando o Teorema 2.2.

Da Figura 7 destacamos as retas suportes das bases do trapézio r e s, e a reta suporte do riacho t, tais que segundo o enunciado $r \parallel s \parallel t$. E também tem destaque as retas a e b transversas àquelas paralelas, onde estão determinados os segmentos de medidas $60m$, $20m$, x e $15m$.

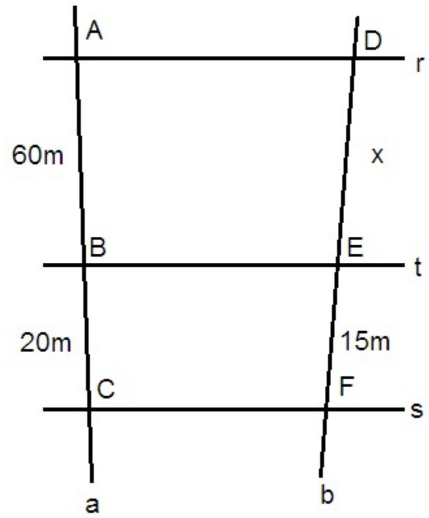


Figura 8 – Aplicando o Teorema 2.2 no Exemplo 2.1.

Pelo Teorema 2.2 e conforme o esquema feito na Figura 8, temos que

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

ou seja:

$$\frac{60}{20} = \frac{x}{15} \Longrightarrow 20x = 900 \Longrightarrow x = 45$$

Portanto, o trecho que falta para Valdemar cercar tem $45m$.

2.3 Teorema de Tales no Triângulo

Segundo a pesquisa de Almeida (2013) são muitos os livros didáticos do 9^o ano que citam este teorema como uma consequência do Teorema de Tales 2.2, e usam este para a resolução de exercícios contextualizados ou ligados a realidade. De fato, neste trabalho é destacado sua aplicabilidade, pois como a própria história conta, o próprio Tales fez uso deste teorema para medir a altura da pirâmide de Quéops.

Teorema 2.3 *(Teorema de Tales no Triângulo) Se uma reta é paralela a um lado de um triângulo de modo que intercepte os outros dois lados em pontos distintos, então esses dois lados são divididos na mesma razão (MOISE; DOWNS, 1971).*

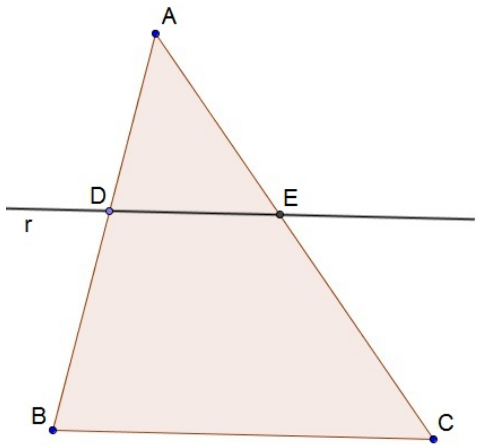


Figura 9 – O Teorema de Tales 2.3 (No Triângulo).

Em outras palavras, dado $\triangle ABC$ da Figura 9, de modo que uma reta paralela ao lado $\overline{BC}$ intercepta os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, respectivamente, nos pontos D e E, então

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}.$$

Demonstração 2.3 *A seguir três formas de provar o Teorema 2.3:*

Prova 1 (Usando Áreas): *Uma demonstração a nível elementar é usando método das áreas, (MOISE; DOWNS, 1971).*

De fato, construímos os segmentos $\overline{BE}$, $\overline{CD}$ e os segmentos $\overline{DM} \perp \overline{AC}$ e $\overline{EN} \perp \overline{AB}$, como na Figura 10.

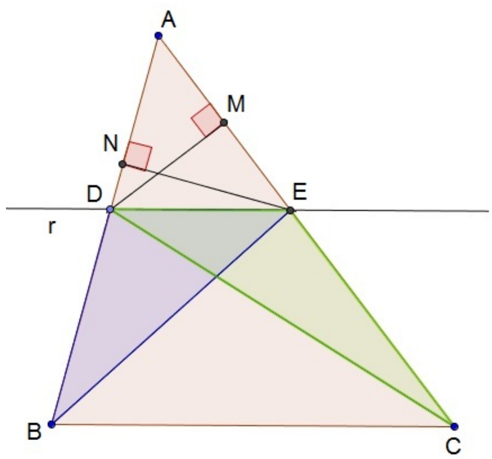


Figura 10 – Demonstrando o Teorema 2.3 usando áreas.

Considerando a área do triângulo como o semi-produto da base pela altura do mesmo, temos que

$$\frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DBE)} = \frac{\frac{AD \times EN}{2}}{\frac{DB \times EN}{2}} = \frac{AD}{DB} \tag{2.1}$$

e

$$\frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DCE)} = \frac{\frac{AE \times DM}{2}}{\frac{EC \times DM}{2}} = \frac{AE}{EC} \tag{2.2}$$

Porém, os triângulos $\triangle DBE$ e $\triangle DCE$ compartilham a mesma base $\overline{DE}$ e como $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ as alturas desses triângulos são iguais. Assim

$$\text{Área}(\triangle DBE) = \text{Área}(\triangle DCE)$$

Consequentemente, de 2.1 e 2.2 temos

$$\frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DBE)} = \frac{\text{Área}(\triangle ADE)}{\text{Área}(\triangle DCE)} \Longrightarrow \frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

Podemos observar que a demonstração acima contempla o caso em que os segmentos são incomensuráveis não necessitando do uso de fundamentos do cálculo diferencial e integral, como seria necessário na demonstração do teorema de Tales de segmentos proporcionais já vista nesta dissertação.

Prova 2 (Contraposição): *Outra demonstração muito interessante é feita por contraposição. Vamos observar a Figura 11 e provar que se $\overline{MN}$ não é paralelo a $\overline{BC}$, então as razões $\frac{AM}{MB}$ e $\frac{AP}{PC}$ não são iguais. O que seria equivalente a dizer que se $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC}$ então $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$.*

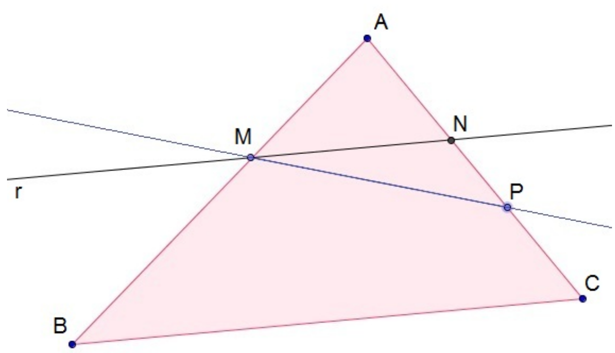


Figura 11 – Demonstrando o Teorema 2.3 por contraposição

Seja a reta r intersectando os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ no $\triangle ABC$ nos pontos M e N, respectivamente, tal que $\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC}$. Precisamos mostrar que $\overline{MP} \parallel \overline{BC}$.

Assumindo $\overline{MP} \nparallel \overline{BC}$. Então deve existir outra reta que passe por M de modo que passe por algum ponto N que pertence a $\overline{AC}$, de modo que esta reta seja paralela a BC. Então, seja $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$.

Se $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$, pelo teorema de Tales, temos que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC} \tag{2.3}$$

Mas ja foi dado que

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AP}{PC} \tag{2.4}$$

De (2.3) e (2.4) , temos que

$$\frac{AN}{NC} = \frac{AP}{PC} \tag{2.5}$$

Que adicionando convenientemente 1 a ambos os membros da igualdade, nos dá

$$\frac{AN}{NC} + \frac{NC}{NC} = \frac{AP}{PC} + \frac{PC}{PC}$$

Logo,

$$\frac{AN + NC}{NC} = \frac{AP + PC}{PC} \tag{2.6}$$

Consequentemente, substituindo (2.5) em (2.6) temos

$$NC = PC$$

Que só é possível se $N = P$, isto é, se $MN = MP$, logo se $\overline{MN}$ pertencer a reta r.

***Prova 3 (Proporções):** Esta é a primeira demonstração do teorema que aparece registrada três séculos após Tales, na proposição 2 do livro VI dos Elementos de Euclides (300 a.C) e se apoia na teoria das proporções de Eudoxo apresentada no livro V de Euclides. Esta forma de demonstrar faz uso do Teorema 2.2, e a que usualmente aparece nos livros didáticos de 9º ano.*

De fato, na Figura 12, traçaremos uma reta s paralela ao lado $\overline{BC}$ e consequentemente paralela a reta r, tal que $A \in s$. Observe a Figura 12 na próxima página:

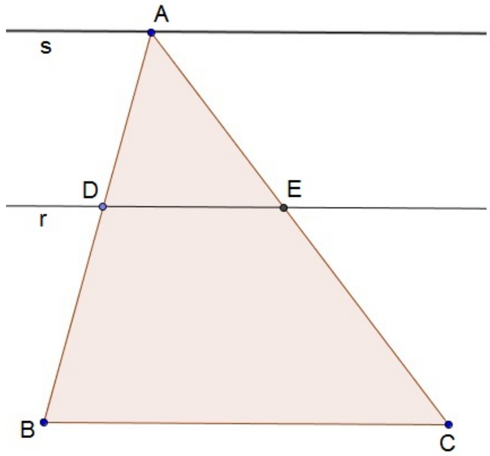


Figura 12 – Demonstrando o Teorema 2.3 usando proporções.

Desta forma pelo Teorema 2.2, temos que

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$$

2.4 Outras Variações do Teorema de Tales

Teorema 2.4 *(Teorema da Bissetriz Interna) A bissetriz interna de um triângulo, divide o lado oposto em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

Em outras palavras, no $\triangle ABC$ da Figura 13, se $\overline{AD}$ é bissetriz de $\widehat{BAC}$, então

$$\frac{BD}{AB} = \frac{CD}{AC}$$

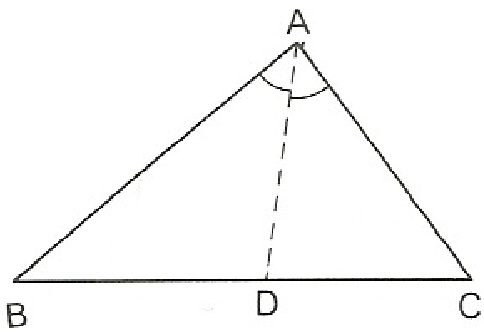


Figura 13 – O Teorema 2.4 (Bissetriz Interna).

Demonstração 2.4 *Como em Morgado, Wagner e Jorge (2002), consideraremos $\overline{AD}$ a bissetriz interna do ângulo $\hat{A}$. A seguir, prolonguemos o lado $\overline{AB}$ e tracemos $\overline{CE}$ paralela a $\overline{AD}$, conforme a Figura 14:*

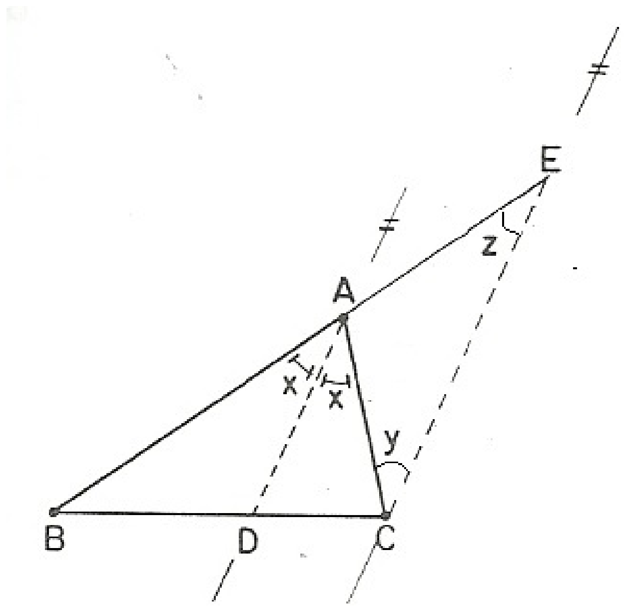


Figura 14 – Demonstrando o Teorema 2.4.

Então, temos:

$$\hat{x} = \hat{z}\text{(ângulos correspondentes)} \quad (2.7)$$

$$\hat{x} = \hat{y}\text{(ângulos alternos internos)} \quad (2.8)$$

Portanto, de 2.7 e 2.8 acarreta que $\hat{y} = \hat{z}$.

Como os ângulos $\widehat{AEC}$ e $\widehat{ACE}$ são congruentes, usando a própria descoberta de Tales, que diz que um triângulo isósceles possui os ângulos da base congruentes, temos que o $\triangle ACE$ é isósceles de base $\overline{CE}$, logo

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AE}$$

e como $AE = AC$, conclui-se que

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

A seguir exemplificamos o teorema anterior, com o problema retirado do livro (JÚNIOR; CASTRUCCI, 2009).

Exemplo 2.2 *Calcule o valor de x, sabendo que $\overline{BP}$ é bissetriz do ângulo $\hat{B}$ na Figura 15.*

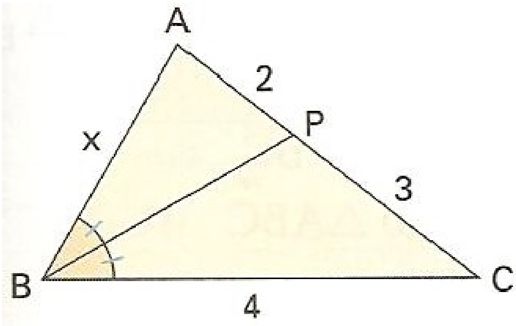


Figura 15 – Exemplificando o Teorema 2.4.

Se $\overline{BP}$ é bissetriz do ângulo $\hat{B}$, então pelo teorema da bissetriz interna, temos que os segmentos determinados por esta bissetriz no lado $\overline{AC}$ são proporcionais aos lados $\overline{BA}$ e $\overline{BC}$ do triângulo ABC. Assim:

$$\frac{CP}{BC} = \frac{AP}{AB} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{3}{4} = \frac{2}{x}$$

Logo, $x = \dfrac{8}{3}$

Teorema 2.5 *(Teorema da Bissetriz Externa) De acordo com Júnior e Castrucci (2009). Se a bissetriz de um ângulo externo de um triângulo intercepta a reta que contém o lado oposto, então ela divide este lado oposto externamente em segmentos proporcionais aos lados adjacentes.*

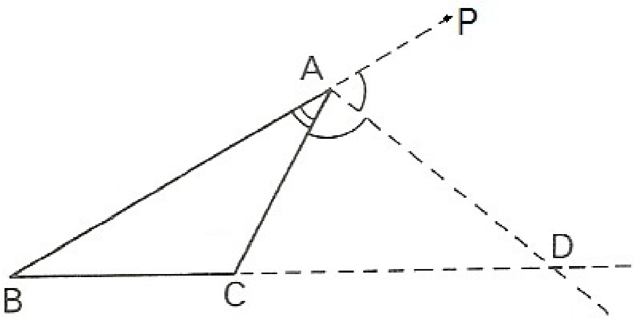


Figura 16 – O Teorema 2.5.

Em outras palavras, no $\triangle ABC$, se $\overline{AD}$ é bissetriz do ângulo $\widehat{CAP}$, então

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

Demonstração 2.5 *Segundo Morgado, Wagner e Jorge (2002), considerando a bissetriz do ângulo externo $\hat{A}$ e tracejando $\overline{CD}$ paralela a $\overline{AD}$, como mostra a Figura 17,*

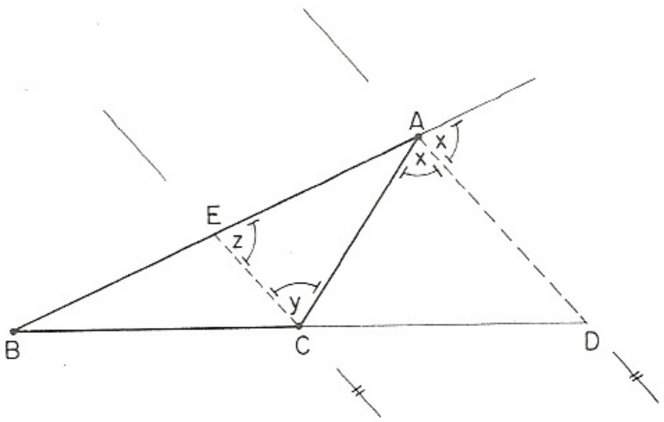


Figura 17 – Demonstrando o Teorema 2.5.

Consequentemente,

$$\hat{x} = \hat{z} \text{(ângulos correspondentes)} \tag{2.9}$$

$$\hat{x} = \hat{y} \text{(ângulos alternos internos)} \tag{2.10}$$

Assim, de 2.9 e 2.10 ocorre que $\hat{y} = \hat{z}$.

No $\triangle ACE$, Figura 17, tem desta forma os ângulos $\widehat{ACE}$ e $\widehat{AEC}$ congruentes. Desta forma utilizando novamente a descoberta de Tales, que um triângulo isósceles tem os ângulos da base congruentes, temos que o $\triangle ACE$ é isósceles, logo pelo teorema de Tales de segmentos proporcionais, temos que:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BD}{CD},$$

e como $AE = AC$, acarreta

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

Para exemplificar o teorema anterior foi retirado de Dolce e Pompeo (2001) o seguinte problema:

Exemplo 2.3 *Se $\overline{AP}$ é bissetriz do ângulo externo em A, determine x na Figura 18 da página seguinte.*

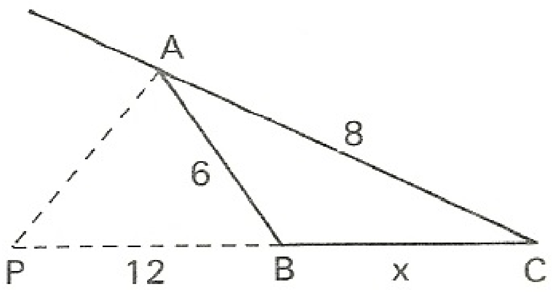


Figura 18 – Exemplificando o Teorema 2.5

Utilizando o Teorema 2.5 da bissetriz externa, temos que

$$\frac{AC}{AB} = \frac{PC}{PB} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{8}{6} = \frac{12+x}{12}$$

Logo, $x = 4$.

Capítulo 3

Atividades Aplicadas em Sala de Aula

Tendo em vista que o tratamento contextualizado do conhecimento é um auxílio que a escola tem para mudar o aluno de sua condição de ser passivo para ser ativo segundo Leite (2013), e ainda de acordo com Almeida (2013) notando alguma carência nos livros didáticos de 9^o ano quanto ao teorema de Tales de segmentos proporcionais e no triângulo, este capítulo contém as descrições das atividades aplicadas aos 35 alunos matriculados em uma das turmas do 9^o ano da Escola Municipal Professora Rosângela Duarte Faria, do Município de Rio das Ostras/RJ.

As atividades sobre o teorema de Tales 2.2 e 2.3 foram realizadas, num período de 3 semanas do mês de setembro de 2013, totalizando 16 tempos de aula de 50 minutos cada um. Veremos também registrados neste capítulo os objetivos das atividades e alguns diálogos.

Os alunos foram nomeados pela letra A, seguido de uma sequência de números de 1 a 35, representados por $A1$, $A2$, ... sucessivamente.

Os conteúdos pré requisitados aos teoremas de Tales 2.2 e 2.3, ou seja, retas paralelas, razão e proporção foram trabalhados anteriormente ao início das atividades descritas neste capítulo. As definições desses conceitos, relatados no capítulo 2, foram relembrados aos alunos e também foram aplicadas exercícios para melhor fixação das definições. Tais exercícios não estão relatados nesta dissertação.

3.1 Atividade 1 - Investigando a Matemática

Para entender que os mais diversos assuntos relacionados a Matemática foram desenvolvidos ao longo de muitos anos, foi realizada uma conversa sobre a história seguida de um debate. Desta forma fez-se entender que nem tudo relacionado a esta disciplina já estava previamente escrito, quebrando assim o pré conceito que tinham.

3.1.1 Descrição

Após análise histórica, os alunos relacionaram os assuntos mais interessantes que envolvem curiosidade e necessidade de aprendizagem para seu ano letivo. Foi sorteado temas em que deveriam pesquisar, estudar e apresentar para a classe.

3.1.2 Objetivos

- Causar a interação e participação dos alunos.
- Fazer com que eles tenham compreensão histórica dos conteúdos matemáticos pré-selecionados.
- Buscar neles o interesse por conhecer um pouco mais sobre a História da Matemática
- Reapresentar conteúdos matemáticos já conhecidos pelos alunos e apresentar outros conteúdos que são de uso cotidiano porém nunca foram vistos em sala de aula, como Lógica e Estimativas, mostrando a eles que é possível aprender Matemática por meio de sua história.

3.1.3 Desenvolvimento da Atividade

A atividade foi feita em grupos de dois alunos e os assuntos foram sorteados. Foi deixado que eles folheassem os livros livremente durante três tempos de aula, 2 horas e 30 minutos, e fizessem suas anotações, pois as duplas apresentariam na semana seguinte, na forma de seminário, o que foi entendido sobre o assunto. Sugeriu-se a eles que pesquisassem algo mais em casa para enriquecer o trabalho.

3.1.4 Material Necessário

Os alunos usaram os exemplares das coleções de livros paradidáticos:

1- “Vivendo a Matemática” da Editora Scipione, 2000 de Nílson José Machado, Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis.

- Lógica? É lógico!, (MACHADO, 2000a);
- Medindo Comprimentos, (MACHADO, 2000b);
- Os Poliedros de Platão e os Dedos da Mão, (MACHADO, 2000c);
- Polígonos, Centopeias e outros Bichos, (MACHADO, 2000d);
- Os Números na História da Civilização, (IMENES; LELLIS, 2000);
- Geometria dos Mosaicos, (LELLIS; IMENES, 2000);

e

2- “Atividades e Jogos com” da Editora Scipione, 1998 de Marion Smoothey com tradução de Antonio Carlos Brolezzi e Sérgio Quadros.

- Números, (SMOOTHEY, 1997i);
- Áreas e Volumes, (SMOOTHEY, 1997b);
- Quadriláteros, (SMOOTHEY, 1997j);
- Formas, (SMOOTHEY, 1997g);
- Razão e Proporção, (SMOOTHEY, 1997k);
- Ângulos, (SMOOTHEY, 1997a);
- Gráficos, (SMOOTHEY, 1997h);
- Escalas, (SMOOTHEY, 1997d);
- Círculos, (SMOOTHEY, 1997c);
- Estimativas, (SMOOTHEY, 1997f);
- Estatística, (SMOOTHEY, 1997e);
- Triângulos, (SMOOTHEY, 1997l).

Esses exemplares foram escolhidos pela excelente abordagem dos assuntos pedagógicos, usando uma linguagem fácil e levando o aluno a uma leitura cativante. E também foram de fácil obtenção, pois foram cedidos gentilmente pela Coordenadoria Pedagógica de Matemática da Casa de Educação de Rio das Ostras.

A ideia inicial era usar também as ferramentas de pesquisa da internet, porém como a escola é nova, inaugurada no mesmo ano que a realização da atividade com os alunos, tal recurso ainda não estava disponibilizado.

3.1.4.1 Culminância da Atividade

A proposta inicial era que os alunos fizessem uma apresentação expositiva do que havia sido entendido em cada um dos livros, porém os alunos relutaram muito em fazer tal apresentação, pois teriam que falar para toda a turma à frente do quadro como se fosse uma aula. Alguns tinham vergonha e outros pavor da ideia. Então foi resolvido o problema fazendo uma mesa redonda, onde cada grupo explanaria o que entendeu sobre o assunto estudado. Os alunos também entregaram um resumo por escrito sobre o livro lido.

A seguir alguns dos resumos apresentados pelos alunos:

Do Livro “Números” Smoothey (1997i), os alunos A22 e A30 apresentaram o seguinte resumo (Figura 19):

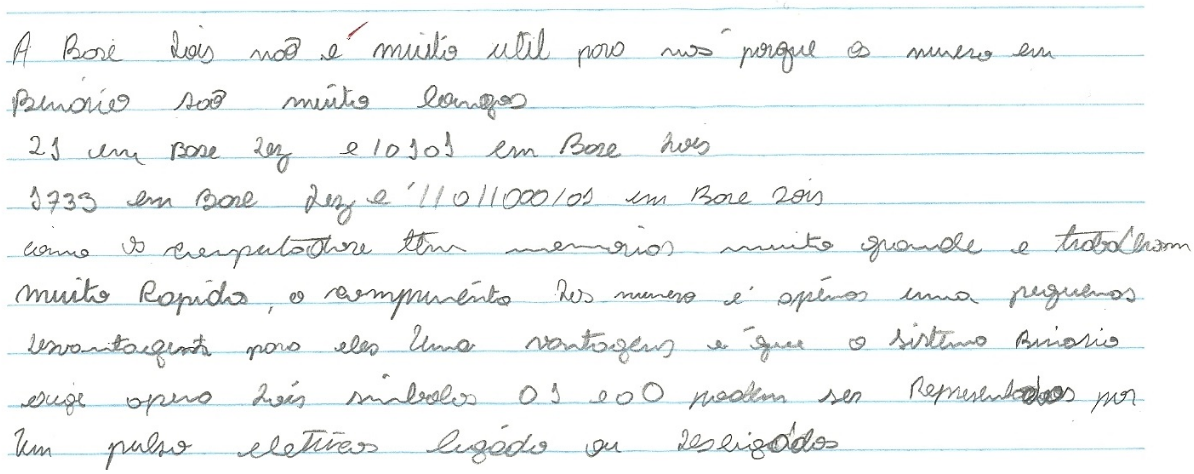

A Base dois não é muito útil para nós porque os numero em Binário são muito longos
21 em Base dez e 10101 em Base dois
1733 em Base dez e 11011000101 em Base dois
como os computadore tem memórias muito grande e trabalham muito Rapido, o comprimento dos numero é apenas uma pequenos desvantagens para eles Uma vantagem é que o sistema Binario exige apenas dois simbolos 0 1 e 0 0 podem ser Representados por um pulso eletrico ligado ou desligados

Figura 19 – Resumo dos alunos A22 e A30

Podemos notar pelo texto da Figura 19 que os alunos A22 e A30 conseguiram entender que os números binários não são convenientes para o uso cotidiano porém tem sua utilidade no âmbito computacional.

Do Livro “Áreas e Volumes” Smoothey (1997b) os alunos A4 e A18 apresentaram o seguinte resumo 20:

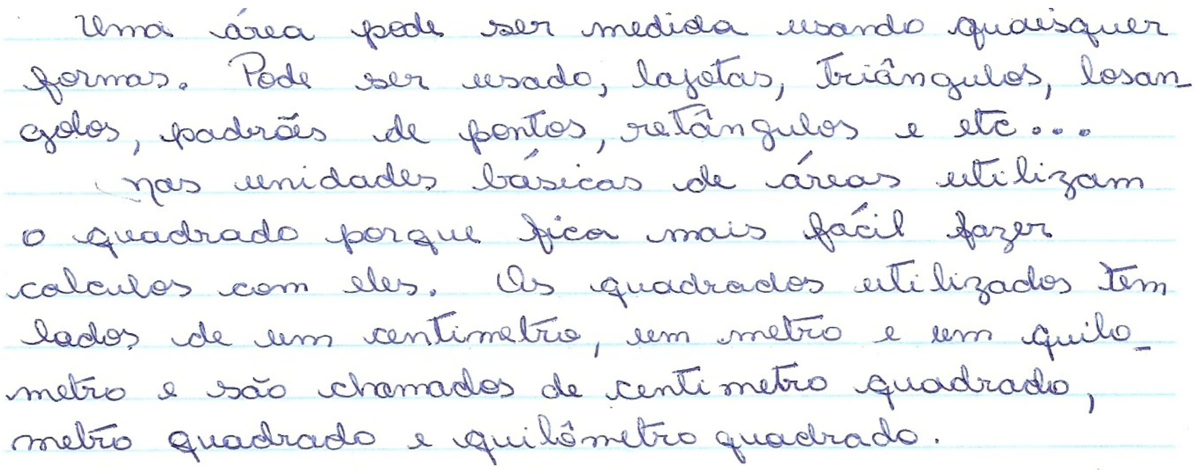

Uma área pode ser medida usando quaisquer formas. Pode ser usado, lajotas, triângulos, losangolos, padrões de pontos, retângulos e etc...
nas unidades básicas de áreas utilizam o quadrado porque fica mais fácil fazer calculos com eles. Os quadrados utilizados tem lados de um centimetro, um metro e um quilometro e são chamados de centimetro quadrado, metro quadrado e quilômetro quadrado.

Figura 20 – Resumo dos alunos A4 e A18.

Podemos perceber que os alunos A4 e A18 compreenderam o sentido que pode-se calcular áreas de figuras através das áreas de uma figura mais simples, o quadrado. E que se um quadrado tem lado medindo $1cm$, $1m$ ou $1km$ então ele tem área de $1cm^2$, $1m^2$ ou $1km^2$, respectivamente.

Do Livro “Os Números na História da Civilização” Imenes e Lellis (2000), os alunos A12 e A33 apresentaram o seguinte resumo 21:

No início as pessoas contavam usando os dedos, marcas na madeira ou pilhas de pedrinhas. Depois aprendemos a usar o poder dos números para entender e explorar primeiramente mares agora as galáxias.

Alguns dos antigos matemáticos pensavam que os números tinham propriedades mágicas. É certamente verdade que, quando entendemos os números, podemos fazer muitas coisas que não podíamos fazer antes.

Quando escrevemos os números, usamos um sinal, ou símbolo, no lugar do seu nome.

Os símbolos que usamos são chamados de arábicos porque foram utilizados pelos árabes muitos anos atrás. No entanto, a idéia dos símbolos originou-se na Índia. Os antigos símbolos hindus foram sendo gradativamente alterados ao longo dos anos; primeiramente pelos árabes e depois pelos europeus, até se transformarem nestes que usamos hoje.

Apenas no final do século XV é que os numerais arábicos passaram a ser largamente usados na Europa. O conhecimento deles foi trazido do oriente por mercadores, viajantes e soldados.

Figura 21 – Resumo do aluno A12 e A33.

Conseguimos observar que os alunos A12 e A33 compreenderam como foi desenvolvido o hábito de contar e utilizar símbolos representando quantidades. E que através dos tempos, estes símbolos chamados algarismos, foram sendo modificados.

3.1.4.2 Diálogos

Passados alguns minutos da entrega dos livros aos alunos, alguns deles se tornaram um pouco inquietos e ocorreram até algumas agressões verbais entre eles. Porém aconteceram outros diálogos bem produtivos como podemos ver abaixo:

- **A3:** Caramba não é que o que Paulo falou é verdade! A Matemática tem história. Olha essa parada aqui do xadrez! (A3 estava lendo o livro de Machado (2000c), então intervi.)

- **Paulo:** Realmente A3, a Matemática tem história, porém quanto ao que você leu sobre o jogo de xadrez, o livro refere-se a uma lenda, ou seja, é uma narração fictícia.
- **A12:** Isso mesmo, Paulo! No livro que estou lendo, está falando sobre a criação dos números. Como as pessoas que viviam nas cavernas faziam para contar, se não tinham números, telefone celular, tablet, nem nada.
- **A31:** O nosso livro tá falando sobre a historia das palavras também, professor. Como as palavras são montadas usando outras palavras de outras línguas. Nós vimos isso em Português!
- **A8:** Mas Paulo. Nós também vamos ter que aprender outras línguas para aprender mais de Matemática, como nosso livro falou (dela e de A31).
- **Paulo:** Explique-se melhor A8, pois apesar de ter lido todos os livros não consigo lembrar de tudo o que está escrito em cada um.
- **A8:** Tipo assim, Paulo. Estou com o livro de Machado (2000d) e aqui a professora da história diz que muita palavras são originadas do grego, latim, hindu e árabe. Nunca nem ouvi falar nessas línguas, professor. Latim e hindu!
- **Paulo:** Bem, A8 levantou uma questão, alguém sabe responder?
- **A21:** Paulo, latim é aquela língua que as vezes o Papa reza e faz suas orações, não é?
- **Paulo:** Muito bem lembrado A21, alguém quer acrescentar algo? (silêncio) Bem, realmente o Papa também fala latim. Latim é uma língua que foi falada em Roma entre os séculos III a.C e X d.C. Já o hindu é uma das línguas oficiais da Índia. A outra é o inglês. Com isso, vamos voltar ao que interessa que é nossa atividade.

3.2 Atividade 2 - Medindo o Inacessível

Esta é uma atividade prática na qual assim como Tales de Mileto, os alunos devem calcular a altura de um objeto inacessível usando a proporcionalidade entre os comprimentos das sombras e as alturas de objetos verticais ao solo. Nesta atividade o objeto inacessível foi um poste na própria escola, onde eles calcularam sua altura usando apenas lápis, papel, trena e calculadora.

3.2.1 Descrição

Como seus alunos podem medir a altura de um poste, ou de um prédio ou de uma árvore, ou qualquer objeto muito alto, utilizando apenas fita métrica, papel, lápis e uma calculadora? Lembrando que não é permitido subir no objeto para medi-lo.

3.2.2 Objetivos

- Apresentar a história do teorema de Tales no triângulo, e os feitos de Tales de Mileto.
- Apresentar na prática a importância dos conceitos de razão, proporção e semelhança.
- Instigar nos alunos a necessidade de calcular altura de objetos utilizando a projeção de sombras e a proporcionalidade.

3.2.3 Desenvolvimento da Atividade

A pergunta inicial da atividade é "Como medir objetos que não se alcança?". O debate foi fomentado nesse sentido, despertando assim nos alunos a curiosidade para obtenção de quaisquer respostas para a pergunta. Somente quando não houve opiniões satisfatórias dos alunos é que foi contado a eles a história de Tales e o desafio proposto a ele para medir a altura da pirâmide de Quéops.

O texto que se segue foi distribuído aos alunos é uma síntese da história de Tales de Mileto retirada de Eves (2008), Cajori (2007) e Boyer (2012), e foi escrito pelo autor dessa dissertação.

Teorema de Tales

Muitas foram as contribuições do grego Tales de Mileto. De acordo com a história, Tales começou sua vida como mercador, tornando-se rico o bastante para dedicar a parte final de sua vida ao estudo e a algumas viagens.

Tales viveu por volta de 624 a.C. e 556 a.C., foi estadista, conselheiro, homem de negócios, filósofo, engenheiro, matemático e astrônomo. Sua vida marca o inicio do desenvolvimento rigoroso da Geometria.

E numa de suas viagens ao Egito, despertou admiração ao calcular a altura de uma pirâmide por meio de sua sombra. Conta-se que ele foi abordado por escribas egípcios para que, em nome do Faraó, calculasse a altura da pirâmide de Quéops, construída por volta de 2550 a.C..

Segundo o historiador Plutarco (século I a.C.), para medir a altura da pirâmide de Quéops, Tales fincou, verticalmente, uma vara, de altura conhecida, na areia e mediu a sombra projetada. Depois mediu o comprimento da sombra da pirâmide, e concluiu que os comprimentos das sombras dos dois objetos e suas alturas eram sempre proporcionais.

Observe a figura que ilustra o que provavelmente Tales fez para calcular a altura da pirâmide.

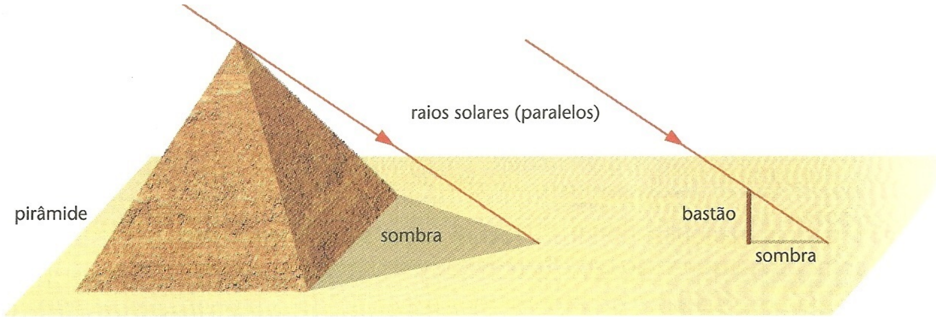


Figura 22 – Cálculo da altura da Pirâmide por meio de sua sombra. Fonte: (CENTURION; JAKUBOVIC, 2012)

> Porém Tales observou a necessidade de somar ao comprimento da sombra da pirâmide com metade de sua base, pois a pirâmide era muito extensa e escondia parte de sua sombra. Veja as próximas figuras.

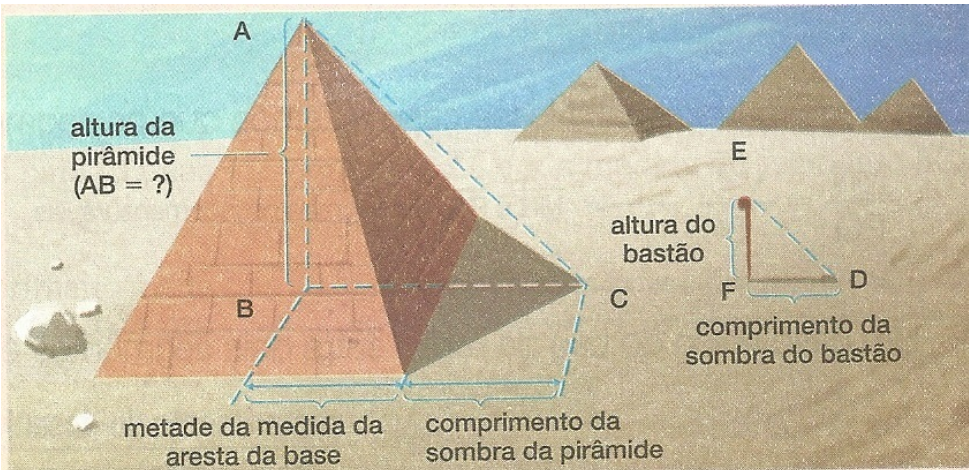


Figura 23 – Fonte (JúNIOR; CASTRUCCI, 2009).

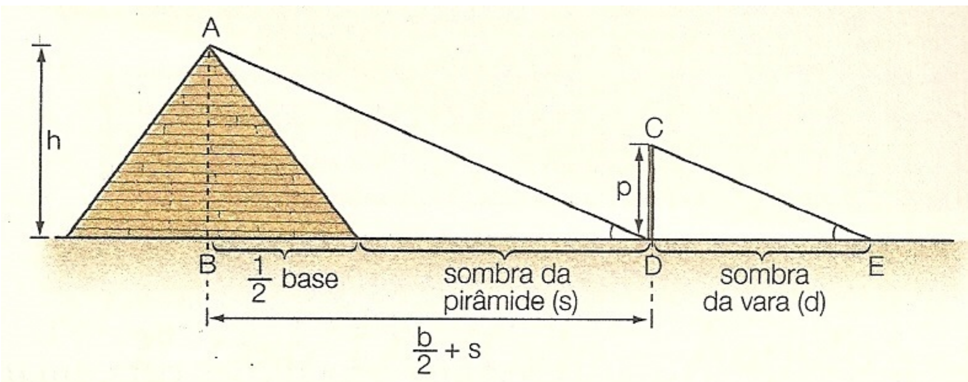


Figura 24 – Fonte (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009).

> Utilizando-se dos dados da Figura 24 e fazendo o uso do conhecimento de razão e proporção, Tales concluiu que: a altura da pirâmide (h) está para a metade da base da pirâmide ($\frac{b}{2}$) mais a medida da sombra da pirâmide (s), assim como a altura da vara (p) está para a sombra da vara (d).
>
> A altura encontrada por Tales corresponde, em nosso sistema de numeração a, aproximadamente, 140 metros - 6 metros a menos que o valor real na ocasião, que era de 146 metros. Devido ao desgaste, hoje a altura da pirâmide é de 137 metros. E foi desta forma que Tales resolveu o desafio proposto pelo Faraó.
>
> Autor desta dissertação

O texto foi lido pelos alunos, onde cada um lia uma parte. Como são muitos alunos na turma, teve-se que ler o texto por duas vezes para que todos lessem um pouco.

Após a leitura do texto, alguns alunos ainda ficaram com dúvidas, então foi explicada, no quadro (Figura 25), a estratégia desenvolvida por Tales para o cálculo da altura da pirâmide de Quéops.

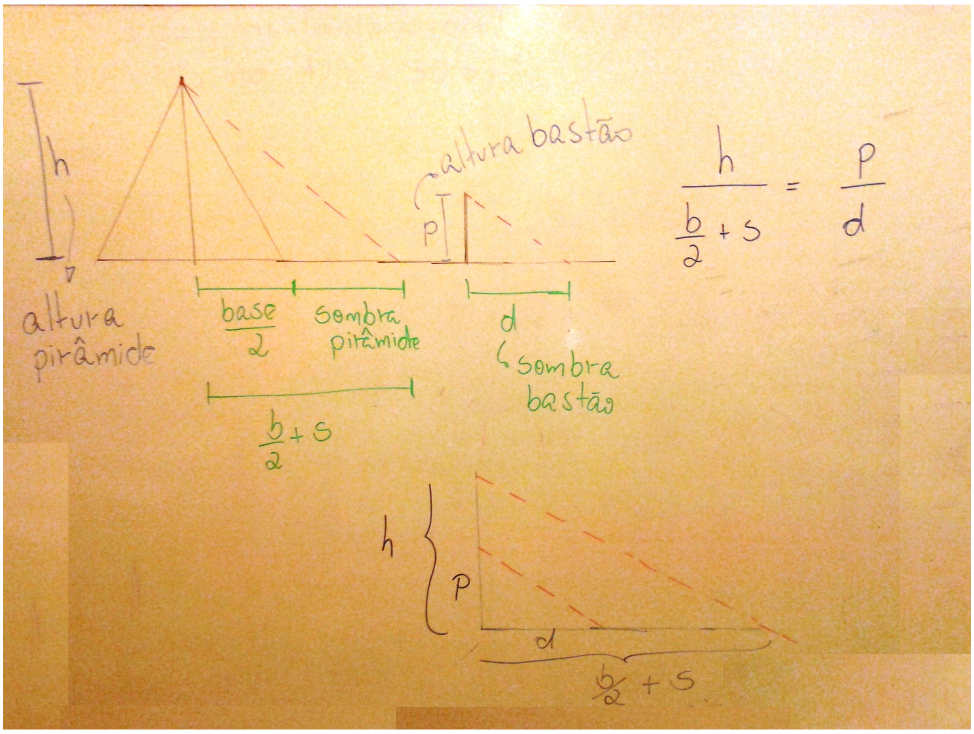


Figura 25 – Representação do cálculo da altura da pirâmide de Quéops.

Retornou-se

- **Paulo:** E então turma, alguém pode comentar a ideia que Tales teve para medir a pirâmide?
- **A30:** Paulo, e se Tales tivesse subido no topo da pirâmide e esticasse um barbante até sua base, medindo assim o tamanho do barbante?

- **Paulo:** Não seria possível assim, $A30$, pois a distância calculada não seria perpendicular ao solo, logo não seria a altura desejada. O segmento que caracteriza a altura deve ter um ângulo reto com o solo.
- **A11:** Professor, considerando que mesmo subindo na pirâmide e esticando um barbante até sua base ele não teria a altura da pirâmide, pois essa distância estaria inclinada. A ideia dele foi ótima.
- **A2:** Poderíamos então medir qualquer coisa alta usando o mesmo método, Paulo?
- **Paulo:** É aí que quero chegar $A2$.

Retorna-se então a pergunta inicial, ou seja, como eles fariam para calcular a altura de um prédio, árvore ou poste, utilizando o conceito de Tales. Obtendo assim um número grande de respostas satisfatórias, mostrando que eles haviam entendido a ideia proposta.

3.2.4 Material Necessário

Para a culminância da atividade foi necessária a utilização de:

- trena ou fita métrica
- lápis
- papel
- calculadora

3.2.4.1 Culminância da Atividade

A culminância se deu quando levamos os alunos para o pátio externo da escola onde existem alguns postes de luz, não muito altos, porém inalcançáveis sem o auxílio de uma escada. E então com as trenas que levamos, e ainda, lápis, papel e calculadora, poderíamos determinar, por si só, a altura de tais postes.

Para esta atividade, dividimos os alunos em trios, onde eles deveriam fazer adaptações na ideia de Tales, como:

- trocar o objeto a ser medido, isto é, a pirâmide pelo poste.
- trocar a vara por um dos integrantes do grupo.

Acordamos que eles desenvolvessem o conceito de Tales duas vezes, uma vez usando o aluno de menor estatura e na outra vez, usando o de maior. Então eles tiveram que:

- colocar os alunos, mais alto e mais baixo um de cada vez, ao lado do objeto a ser medido, no caso o poste.
- medir as alturas desses alunos.
- medir as sombras dos alunos e do poste.
- escrever as proporções e efetuar os cálculos correspondentes para determinarem a altura do poste.
- verificar que há uma pequena diferença entre as alturas encontradas nas duas proporções.
- registrar todas as informações de medição, cálculos e altura do poste obtida no caderno.

Nas figuras 26 e 27 pode-se ver a participação dos alunos nessa atividade.

(a) Medindo a altura dos alunos. (b) Medindo a sombra dos alunos.

Figura 26 – Atividade prática: Cálculo da altura do poste medindo a altura e sombra dos alunos.

Figura 27 – Cálculo da altura do poste medindo a sombra do mesmo.

3.2.4.2 Diálogos

Continuamos nossa conversa no pátio externo, questionando como faríamos para medir os postes de iluminação sem subir neles, usando apenas lápis, papel, fita métrica e calculadora. Neste momento os alunos ja sabiam que fariam uma aplicação do teorema de Tales, mesmo assim houveram alguns questionamentos e dúvidas inusitados.

- **A26:** Paulo, basta ligar para o setor de obras da Secretaria de Educação e perguntar.
- **Paulo:** Bem, A26. Poderíamos até fazer o que você falou, porém não teríamos utilizado apenas o material disponibilizado, além de esse não ser um meio matemático adequado a aula de hoje.
- **A31:** Professor, como você disse faremos uma aplicação do teorema de Tales, porque no texto, o Tales mediu a altura da pirâmide sem subir nela também.
- **Paulo:** Estamos começando bem. O que A31 disse é verdade, a maneira que estamos procurando tem tudo a ver com o texto. Mas como faremos?
- **A11:** Paulo, meu pai trabalha cortando árvores e um dia quando o acompanhei em seu trabalho, ele disse que para cortar árvores, é necessário saber a altura delas, para saber até onde vai cair. Ele tem um cabo de vassoura que o ajuda. Tem alguma coisa a ver com o tamanho da sombra ser igual ao tamanho do cabo. Ai! Não lembro o que ele faz depois.
- **Paulo:** Pelo que você está me contando A11, seu pai sabe muito bem utilizar de maneira muito simples o que estou ensinando a vocês. A31 e A11 estao de parabéns! A atividade que passei para vocês é um problema de sombras. Assim como Tales,

vamos calcular a altura do poste utilizando o tamanho das sombras do poste e de uma pessoa, a altura da pessoa e a altura desconhecida do poste. Então montaremos a proporção, altura desconhecida do poste está para altura da pessoa, assim como sombra do poste está para sombra da pessoa.

Pelos diálogos pode-se perceber que houve grande participação e interesse pelo assunto. E durante a execução da tarefa foi possível observar a interação entre os alunos e sua organização.

Houveram também dúvidas quanto a organização e leitura das proporções, como está registrado no diálogo abaixo.

- **A24:**Professor! Como monta as frações mesmo? Coloca a altura do poste em cima da altura da pessoa ou em cima da sombra da pessoa?
- **A5:**É mesmo Paulo! Qual coloca na parte de cima, as informções da pessoa ou da poste.

Tais dúvidas foram tiradas ali mesmo no pátio para cada trio e depois novamente explicado em sala de aula quando retornamos.

Durante a atividade houve um trio que se espantou com seus cálculos acreditando que estivessem errados, pois o tamanho do poste coincidiu com o tamanho da sombra do mesmo. Foi ótimo isso acontecer, pois quando voltamos para sala de aula pude explicar melhor porque o pai de A11 utiliza a medida da sombra igual a medida do cabo de vassoura, e aproveitei também a oportunidade para falar de triângulos isósceles, Figura 28.

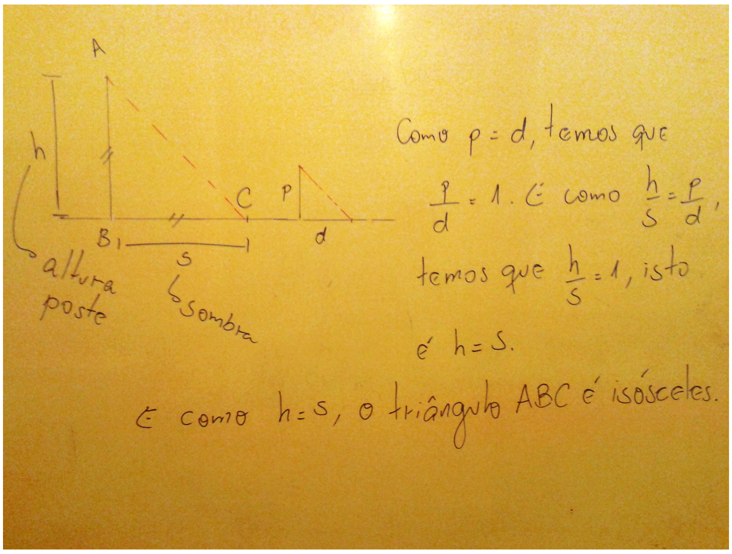


Figura 28 – Demonstração entre a altura do poste e a sombra e a relação no triângulo isósceles.

3.3 Atividade 3 - Calculando Alturas Utilizando a Medição de Sombras

Na presente atividade, desenvolvida em sala de aula, os alunos precisam resolver problemas que envolvem alturas de objetos inacessíveis assim como fizeram, na prática, na atividade 2.

3.3.1 Descrição

Nossos alunos agora medirão a altura de prédios e árvores tentando fazer uma analogia com o problema de Tales.

3.3.1.1 Problema 1

Observe a Figura 29 abaixo. Dela as medidas dadas são as seguintes:

- a altura da pessoa é de $1,50m$;
- o comprimento da sombra dessa pessoa é de $1,80m$;
- a sombra do prédio é de $12m$.

Figura 29 – Cálculo da altura de um prédio, usando medição da sombra. Fonte: (CENTURION; JAKUBOVIC, 2012)

Responda então: Com tais medidas é possível calcular a altura do prédio usando a ideia de Tales de Mileto? Pense bem na situação, se sua resposta for positiva, calcule a altura do prédio.

Solução Pelo que foi visto no teorema de Tales aplicado na atividade 2, podemos formar a seguinte proporção:

$$\frac{\text{medida da altura do prédio}}{\text{medida da altura da pessoa}} = \frac{\text{comprimento da sombra do prédio}}{\text{comprimento da sombra da pessoa}}$$

Denominando por x a altura do prédio, temos:

$$\frac{x}{1,50} = \frac{12}{1,80}$$

$$1,80x = 18$$

$$x = 10$$

Assim o prédio tem 10 m de altura.

3.3.1.2 Problema 2

Na Figura 30 abaixo, tem-se uma pessoa com $1,80m$ de altura cuja sombra mede $0,30m$ enquanto, no mesmo instante, a sombra de uma árvore mede $2m$. Vamos utilizar a ideia de Tales de Mileto para calcular a altura dessa árvore.

Figura 30 – Calculo da altura de uma árvore usando medição da sombra.

Solução Utilizando o mesmo principio que Tales no caso da pirâmide, podemos formar a seguinte proporção:

$$\frac{\text{medida da altura da árvore}}{\text{medida da altura da pessoa}} = \frac{\text{comprimento da sombra da árvore}}{\text{comprimento da sombra da pessoa}}$$

Sendo x a altura dessa árvore, fazemos:

$$\frac{x}{1,80} = \frac{2}{0,30}$$

$$0,30x = 3,60$$

$$x = 12$$

Sendo assim, a árvore tem $12m$ de altura.

3.3.2 Objetivos

- Aprimorar habilidades de leitura e interpretação de texto;
- Assegurar o conhecimento sobre razão e proporção;
- Calcular a altura dos objetos utilizando o que foi aprendido na atividade 2.

3.3.3 Desenvolvimento da Atividade

Usando os 30 minutos iniciais da aula, distribuimos os alunos em duplas. E relembramos o conceito que vimos sobre o teorema de Tales no triângulo. Enfatizamos o cálculo de um valor desconhecido numa proporção, lembrando que as frações são equivalentes e também a propriedade fundamental das proporções (Se a está para b, assim como c está para d, então $ad = bc$). Só então foram distribuídas as folhas com apenas o primeiro problema da atividade para cada aluno. Todos juntos lemos a atividade, e foi dado 5 minutos para que pensassem na tarefa. E depois outros 5 minutos foram concedidos para efetuarem seus cálculos.

Após terminarem o primeiro problema, foi entregue aos alunos, a folha com o segundo problema e dados então outros 5 minutos para que pensassem na situação.

3.3.3.1 Culminância da Atividade

Questionamos quanto a primeira pegunta do primeiro problema. Com as medidas sugeridas e usando o conceito de Tales é possível calcular a altura do prédio? Eles conseguiram fazer uma adaptação do problema da pirâmide para este novo problema. E conseguiram também lembrar do problema prático do poste feito na última atividade. Deixei montarem suas proporções e efetuarem os cálculos com a ajuda da calculadora para chegarem a altura pedida.

Podemos ver na Figura 31 a solução de um aluno referente ao primeiro problema.

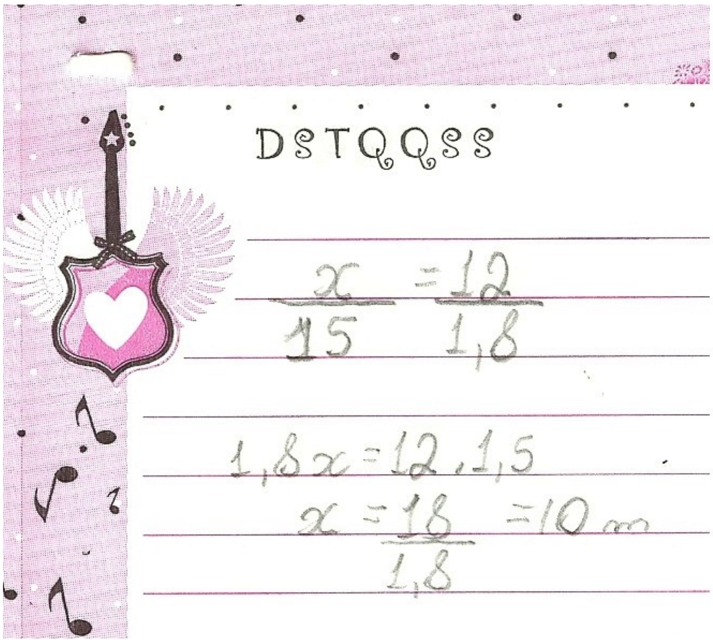


Figura 31 – Solução do problema 1 no caderno de A27.

Vencido o primeiro problema, foi entregue a folha com o segundo problema, que teve uma melhor interpretação dos alunos. Assim como na atividade anterior (Medindo o Inacessível) algumas duplas tiveram dificuldade na hora de montar a proporção do primeiro problema. Tal dificuldade já diminuiu ao fazerem o segundo problema.

Após todos terem terminados seus cálculos, foi pedido para que os alunos formassem grupos de acordo com suas soluções do problema 2, da seguinte maneira:

- Grupo 1 - formou a proporção:

$$\frac{\text{medida da altura da árvore}}{\text{medida da altura da pessoa}} = \frac{\text{comprimento da sombra da árvore}}{\text{comprimento da sombra da pessoa}}$$

- Grupo 2 - formou a proporção:

$$\frac{\text{medida da altura da pessoa}}{\text{medida da altura da árvore}} = \frac{\text{comprimento da sombra da pessoa}}{\text{comprimento da sombra da árvore}}$$

- Grupo 3 - formou a proporção:

$$\frac{\text{medida da altura da árvore}}{\text{comprimento da sombra da árvore}} = \frac{\text{medida da altura da pessoa}}{\text{comprimento da sombra da pessoa}}$$

- Grupo 4 - formou a proporção:

$$\frac{\text{comprimento da sombra da árvore}}{\text{medida da altura da árvore}} = \frac{\text{comprimento da sombra da pessoa}}{\text{medida da altura da pessoa}}$$

Não foram observadas soluções pertinentes ao grupo 4, assim a turma se dividiu em apenas três grupos. Cada grupo deveria escolher uma pessoa para ir ao quadro e escrever sua solução. Desta forma verificamos que as diversas soluções, incluindo a que seria formada pelo grupo 4, estavam corretas, pois todas as proporções formadas seriam equivalentes e chegavam a um mesmo resultado. Apresenta-se na Figura 32, as soluções referentes ao segundo problema no quadro.

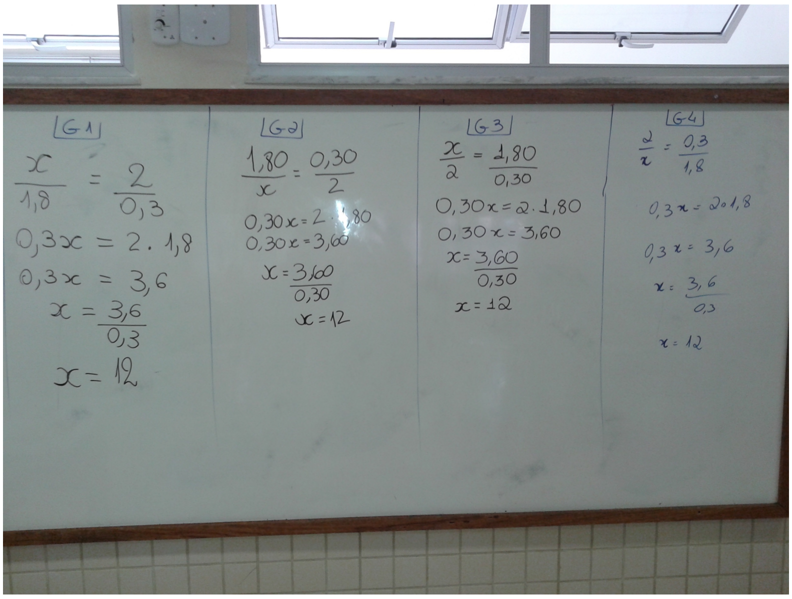


Figura 32 – Soluções do problema 2 no quadro, pelos alunos.

3.3.3.2 Diálogos

Algumas dúvidas recorrentes na atividade podem ser observadas nas falas abaixo:

- **A8:** Paulo, qual dos números fica em cima da fração? Os da árvore ou do prédio?
- **A20:** Paulo, não sei montar a proporção! Você não disse que a proporção tem quatro números, essa aqui só tem três.

As dúvidas foram esclarecidas de mesa em mesa. E depois foram comentados alguns erros muito comuns aos alunos. O erro mais cometido foi na montagem da proporção. Um exemplo é que ao invés do aluno montar a proporção $\dfrac{x}{1,80} = \dfrac{2}{0,30}$ ele montou $\dfrac{x}{1,80} = \dfrac{0,30}{2}$. Este erro pode ser visto na Figura 33 da próxima página.

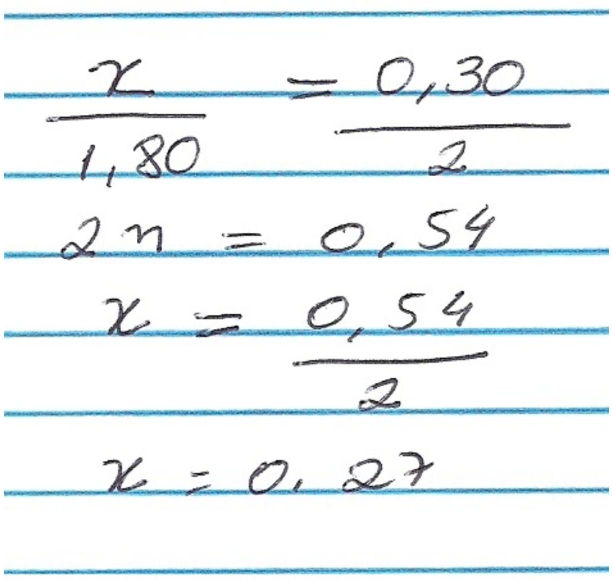


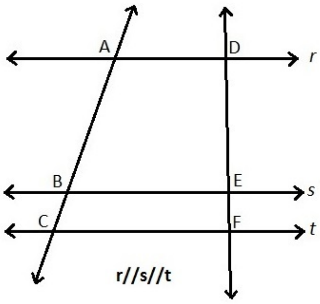
Figura 33 – Soluções do problema 2 incorreto no caderno de A6.

3.4 Atividade 4 - Proporções do Teorema de Tales de Segmentos Proporcionais

Na presente atividade, enunciando o teorema de Tales de segmentos proporcionais, os alunos terão que encontrar proporções válidas nos segmentos de reta determinados em retas intersectadas por um feixe de retas paralelas.

3.4.1 Descrição

Nesta atividade os alunos devem observar o feixe de retas paralelas da Figura 34, na próxima página, e tentar identificar quais as proporções que se tornam verdadeiras utilizando o teorema de Tales dos segmentos proporcionais. Desta forma os alunos precisam colocar um (V) nas proporções verdadeiras e um (F) nas proporções falsas. Justificando então as proporções consideradas falsas.



a( ) $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ b( ) $\frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$ c( ) $\frac{AB}{DE} = \frac{EF}{BC}$

d( ) $\frac{BC}{EF} = \frac{AB}{DE}$ e( ) $\frac{AC}{AB} = \frac{DF}{EF}$ f( ) $\frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$

Figura 34 – Proporções no feixe de retas paralelas.

Solução São verdadeiros os itens a, b, d e f. E conclui-se que são falsos os itens c e e.

3.4.2 Objetivos

- Percepção da ordem dos elementos da proporção;
- Identificar as diversas proporções que podem ser escritas justificadas pelo teorema de Tales;
- Identificar quando uma proporção não satisfaz o teorema de Tales dos segmentos proporcionais.

3.4.3 Desenvolvimento da Atividade

Apresentando a definição do teorema de Tales de segmentos proporcionais de acordo com Bianchini (2013), que diz que:

Um feixe de paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais.

Foi apresentada a forma clássica (Figura 35) com a qual o teorema de Tales aparece em alguns livros didáticos de 9^o ano como em Almeida (2013), isto é, se as retas r, s e t são paralelas, então

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$$

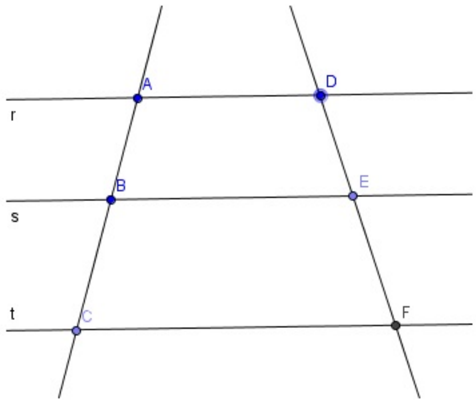


Figura 35 – Aplicando o Teorema de Tales 2.2.

A classe foi organizada em grupos de seis alunos, formados assim seis grupos. E foram distribuídos, a cada elemento dos grupos, uma folha com a descrição da atividade proposta na Figura 34. Os alunos tiveram 15 minutos para tirarem suas conclusões e após esse tempo, cada grupo deveria eleger um colega para defender suas respostas para toda a classe.

3.4.3.1 Culminância da Atividade

O ponto alto desta atividade foi o debate que ocorreu entre os alunos em seus grupos. E o relato dos alunos que defenderam suas respostas.

As defesas das respostas foram feitas por itens. Assim, o professor pergunta se o item a é verdadeiro ou falso e os representantes dos grupos falam suas respostas, e assim sucessivamente até chegarmos ao último item. Se houverem divergências de respostas, o professor faz a conciliação e mostra qual das respostas é a correta. E caso de todos os grupos deem resposta errada a algum item, então o professor também deve mostrar porque aquela resposta não é satisfatória à atividade.

As respostas seguem-se de acordo com os itens:

- a todos os grupos identificaram este item como verdadeiro;
- b quatro grupos identificaram como verdadeiro;
- c um grupo identificou este item sendo verdadeiro;
- d dois grupos identificaram este item como verdadeiro;
- e um grupo identificou esse como verdadeiro;
- f três grupos identificaram este sendo verdadeiro.

Percebemos um percentual muito grande de erros nos itens d e f. Com relação ao item d os alunos tiveram dificuldade em perceber que sua proporção era idêntica a razão do item a. Enquanto a maioria dos erros no item f ocorreram porque os alunos não reconheceram a proporcionalidade quando são somados os segmentos ($AB + BC = AC$ e $DE + EF = DF$).

3.4.3.2 Diálogos

Alguns diálogos interessantes foram notados durante o debate entre os integrantes dos grupos:

- **A6:** É claro que a letra a é verdadeira, é igualzinho o que está escrito no teorema de Tales.
- **A29:** Letra c é impossível $A4$, olha aí, a fração começa de uma reta e vai pra outra, e a outra fração começa da outra reta e vai pra uma. Paulo disse que tinha que existir um padrão na montagem da equação, aqui não tem.
- **A18:** $A10$, acho que a d é verdadeira, olha aqui as frações, e acompanhem pela figura. Vai do segmento de baixo da esquerda para a direita, depois pega tudo da esquerda e tudo da direita.

3.5 Atividade 5 - O Feixe de Paralelas e os Teoremas de Tales

Esta foi a atividade na qual os alunos deveriam praticar o que aprenderam sobre os teoremas de Tales de segmentos proporcionais e no triângulo. Nessa atividade foram utilizados além de problemas contextualizados, problemas não contextualizados sobre o teorema, apenas com as retas paralelas e as transversais. Tal atividade caracteriza-se como um teste, pois foi uma das avaliações bimestrais, assim valia nota (3,0 pontos).

Desta forma, esta atividade não teve uma culminância propriamente dita, a culminância seria a entrega da avaliação ao professor. E também, por motivos óbvios, já que se tratava de uma avaliação, não houveram diálogos nesta atividade.

3.5.1 Descrição

Os discentes devem resolver os seguintes problemas, sempre utilizando um dos teoremas de Tales:

Problema 1 Dois postes perpendiculares ao solo estão a uma distância de $4m$ um do outro, e um fio bem esticado de $5m$ liga seus topos. Prolongando esse fio até prendê-lo no solo, são utilizados mais $4m$ de fio. Observe a Figura 36, (JúNIOR; CASTRUCCI, 2009).

Determine a distância entre o ponto onde o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo a ele.

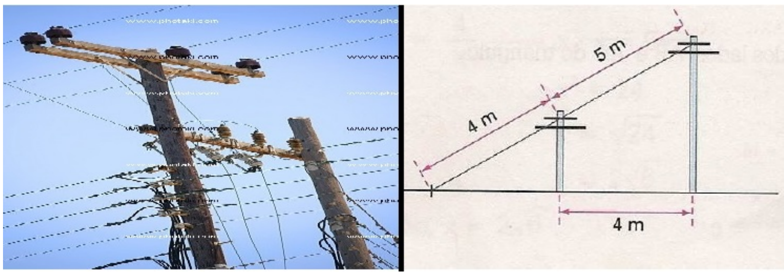


Figura 36 – Aplicando o teorema de Tales em atividade 1 de Proporção. Fonte: (JúNIOR; CASTRUCCI, 2009).

Solução: Observemos que se os postes são perpendiculares ao solo, são paralelos entre si. Denominando por x a distância pedida, isto é, o ponto onde o fio foi preso ao solo e o poste mais próximo, utilizando o teorema de Tales no triâgulo montamos a seguinte proporção:

$$\frac{5}{4} = \frac{4}{x}$$

$$5x = 16$$

$$x = 3,2$$

Assim a distância pedida é de $3,2m$.

Problema 2 (Enem - adaptado) A sombra de uma pessoa que mede $1,80m$ de altura mede $60cm$. No mesmo instante, a seu lado, a sombra projetada de um poste mede $2,00m$. Se mais tarde, a sombra do poste diminuiu $50cm$, quanto a sombra da pessoa passou a medir?

Solução Observe os esquema na Figura 37.

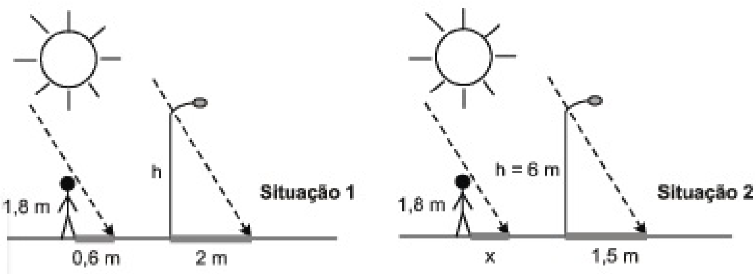


Figura 37 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 1 de Proporção. Fonte: www.sprweb.com.br em 25 de julho de 2013.

Na situação 1 da Figura 37, chamando de h a altura do poste, montamos a proporção

$$\frac{1,8}{0,6} = \frac{h}{2}$$

$$0,6h = 3,6$$

$$h = 6$$

Logo, o poste tem $6m$.

E já sabendo a altura do poste, utilizamos a situação 2, na mesma Figura 37, e montamos a seguinte proporção

$$\frac{1,8}{6} = \frac{x}{1,5}$$

$$6x = 2,7$$

$$x = 0,45$$

Assim a sombra da pessoa passo a medir $0,45m$ ou $45cm$.

Problema 3 (UFSM) A crise energética tem levado as médias e grandes empresas a buscarem alternativas na geração de energia elétrica para manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi a de construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observando a Figura 38 e admitindo que as linhas retas r, s e t sejam paralelas, vamos calcular quanto mede esta barreira.

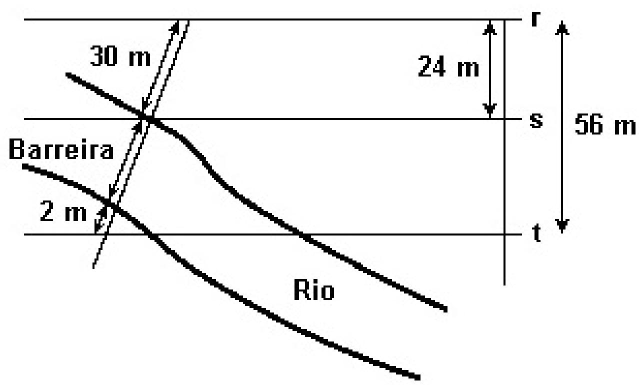


Figura 38 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 3 de Proporção. Fonte: Vestibular da UFSM

Solução: Já que as retas r, s e t são paralelas (Figura 38), podemos aplicar o teorema de Tales de segmentos proporcionais na figura. Se chamarmos de x a medida da barreira, temos a proporção

$$\frac{30}{30+x+2} = \frac{24}{56}$$

$$\frac{30}{32+x} = \frac{24}{56}$$

$$768 + 24x = 1680$$

$$24x = 1680 - 768$$

$$24x = 912$$

$$x = 38$$

Concluímos que a barreira mede $38m$.

Problema 4 Nas figuras 39, 40 e 41 as retas r, s e t paralelas, vamos determinar o valor de x em cada caso:

- 1

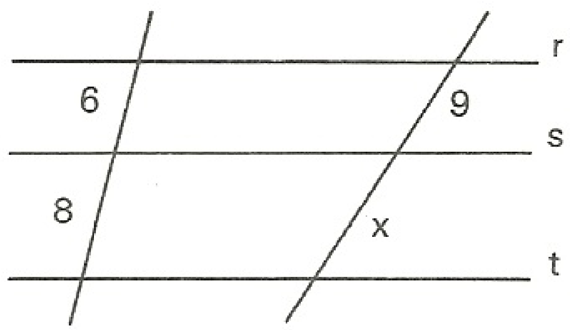


Figura 39 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 4 através de feixe de retas paralelas. Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2001).

Solução: De acordo com o teorema de Tales de segmentos proporcionais e de acordo com a Figura 39, podemos montar a proporção

$$\frac{6}{8} = \frac{9}{x}$$

$$6x = 72$$

$$x = 12$$

- 2

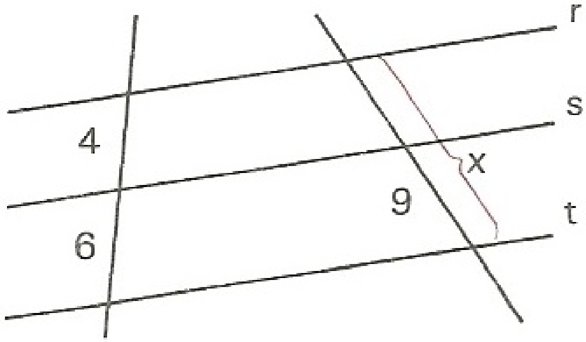


Figura 40 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 5 através de feixe de retas paralelas. Fonte: (DOLCE; POMPEO, 2001).

Solução: Usando o teorema de Tales e a Figura 40, temos a proporção

$$\frac{4+6}{6} = \frac{x}{9}$$

$$\frac{10}{6} = \frac{x}{9}$$

$$6x = 90$$

$$x = 15$$

- 3

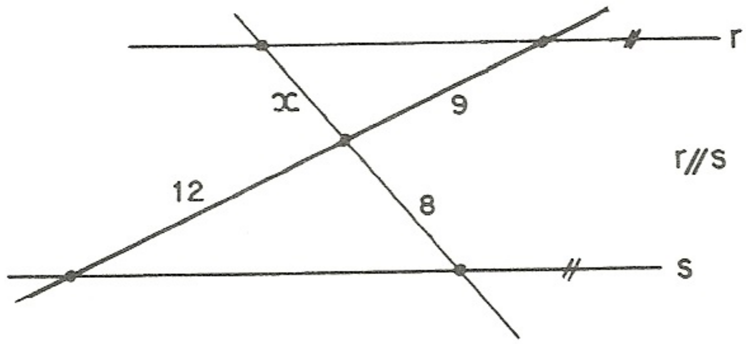


Figura 41 – Aplicando o Teorema de Tales em atividade 6 através de feixe de retas paralelas. Fonte: (MORGADO; WAGNER; JORGE, 2002).

Solução: Aplicando o teorema de Tales na Figura 41, podemos escrever a proporção

$$\frac{x}{8} = \frac{9}{12}$$

$$12x = 72$$

$$x = 6$$

3.5.2 Objetivos

- Avaliar os conhecimentos adquiridos durante as outras atividades;
- Resolver situações problema de acordo com o teorema de Tales;
- Desafiar os discentes diante de problemas novos, como o problema 3 e o problema 4 item 3.

3.5.3 Desenvolvimento da Atividade

A classe foi dividida em duplas, onde cada dupla recebeu a folha com os problemas e outra folha em branco para rascunhos. Tiveram 2 tempos de aula, 1 hora e 40 minutos, para resolverem as questões e entregar a ao professor.

Foi percebido o nervosismo de alguns alunos durante a avaliação. Até mesmo aqueles que se interessaram e participaram mais das outras atividades se mostram estressados quando se deparam com a avaliação.

No dia da atividade (avaliação) 32 alunos compareceram, tendo assim 3 faltosos, o que acabou ajudando na aplicação da atividade em duplas. Assim foram formadas 16 duplas. O aproveitamento por questão segue na tabela 1.

Problema	**Número de Acertos**	**Número de Erros**	**Total**
1	13	3	16
2	4	12	16
3	7	9	16
4.1	14	2	16
4.2	10	6	16
4.3	9	7	16

Tabela 1 – Acertos das duplas por questão

Foram contados na tabela acima como incorretas as respostas parcialmente incorretas, totalmente incorretas ou deixadas sem resposta nos problemas 2 e 3. Segue abaixo a tabela 2 discriminando esses itens:

Problema	**Parcialmente Correto**	**Incorreto**	**Sem resposta**	**Total**
2	5	6	1	12
3	2	4	3	9

Tabela 2 – Parciais dos problemas 2 e 3.

O elevado número de erros na questão 3 ocorreu, pois muitos alunos montaram de forma equivocada as seguintes proporções $\frac{30}{30+x} = \frac{24}{56}$ ou $\frac{30}{30+2x} = \frac{24}{56}$. Isto é, desconsideraram os 2 metros junto à barreira ou erroneamente fizeram $30+x+2 = 30+2x$. Enquanto a maioria dos erros da questão 4.3 foram referentes a montagem da proporção, pois montaram de erradamente a proporção $\frac{x}{12} = \frac{9}{8}$.

Capítulo 4

Sugestões de Atividades

O presente capítulo aponta algumas atividades complementares que podem ser realizadas no laboratório de informática e em sala de aula. A atividade sugerida no laboratório de informática refere-se ao uso do software GeoGebra como ferramenta para os alunos se convencerem da veracidade do teorema de Tales no círculo e o teorema de Tales de segmentos proporcionais. Enquanto as atividades sugeridas para sala de aula, são atividades contextualizadas sobre os teoremas de Tales tratados nesta dissertação.

4.1 O Teorema de Tales no Círculo

É apresentada nesta seção duas atividades sobre o Teorema 2.1 (Tales no círculo). A primeira envolve o uso do GeoGebra no laboratório de informática, onde exibe-se aos alunos esse teorema. A segunda atividade, mais simples, pode substituir a primeira atividade caso os alunos não tenham contato com o laboratório de informática.

4.1.1 Atividade 1 - Verificando a Teoria com o GeoGebra

Lembrando o enunciado do Teorema 2.1, foi possível permitir ao aluno validar sua aprendizagem, manipulando os pontos geradores da circunferência assim como o ponto que pertence a circunferência, mas não pertence ao diâmetro dela, notando assim que neste último vértice a medida do ângulo permanece sempre a mesma, isto é, 90°.

O software mostra que o ângulo $\widehat{CDB}$ mede 90°. Observe a construção da Figura 42, na próxima página.

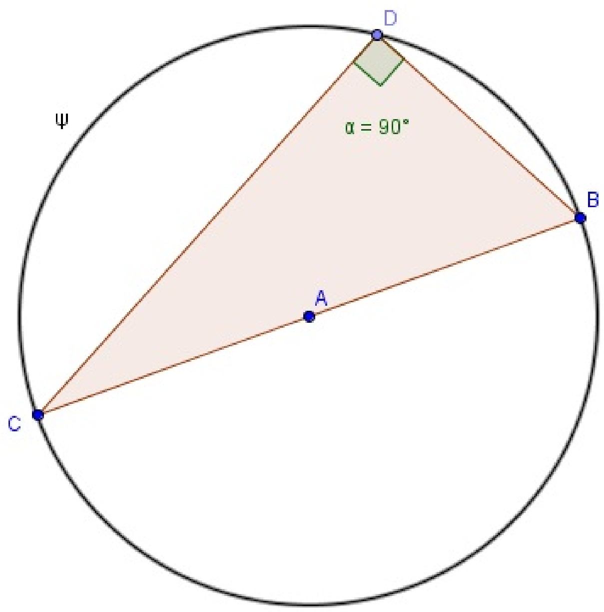


Figura 42 – Verificando o Teorema 2.1 no GeoGebra.

Para a construção no Geogebra da atividade foram feitos os passos seguintes:

1. Marca-se dois pontos A e B distintos;
2. Constrói-se o círculo Ψ usando a ferramenta *Círculo dados Centro e Um de seus Pontos*;
3. Usa-se a ferramenta *Reflexão em Relação a um Ponto*, construindo o ponto C que é a reflexão do ponto B em relação ao ponto A. Desta forma tem-se que as semirretas $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AB}$ são opostas e sendo A o centro da circunferência, acarreta que $\overline{BC}$ é o diâmetro da mesma;
4. Marca-se então um ponto D sobre Ψ distinto de B e C;
5. Usando a ferramenta *Ângulo*, mede-se o ângulo $\widehat{CDB}$.

Ao manipular os pontos da circunferência, pode-se perceber que o ângulo no vértice D permanece reto, como pode ser observado em algumas manipulações da Figura 43, na próxima página:

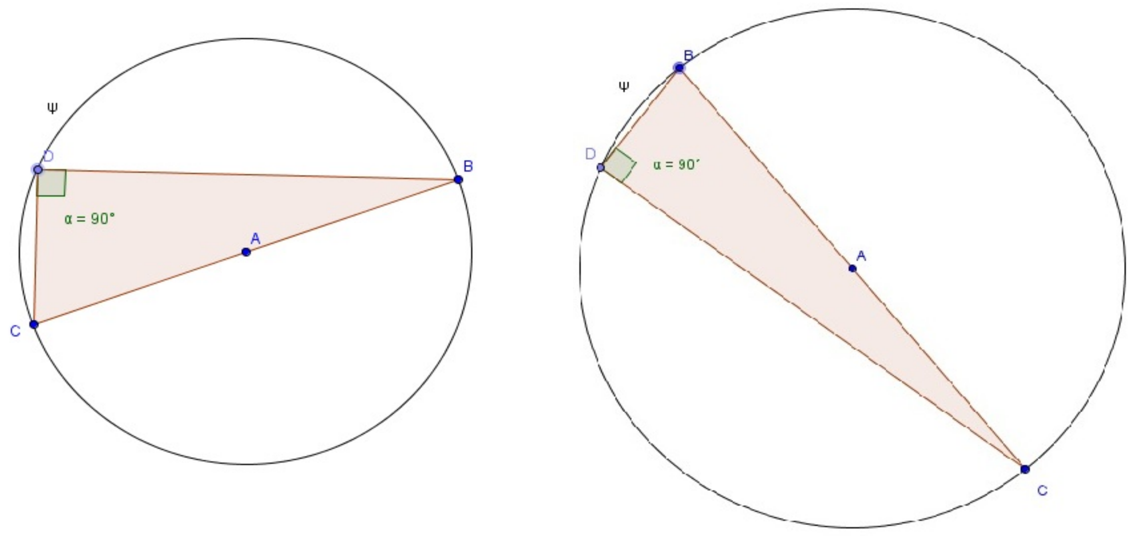


Figura 43 – Manipulações de pontos na circunferência com Geogebra.

4.1.2 Atividade 2 - Calculando o Diâmetro de um Círculo

A presente atividade trata de como medir o diâmetro de um copo.

4.1.2.1 Material Necessário

- uma folha de papel sulfite;
- um lápis;
- um copo;
- uma régua.

Iniciando a atividade coloca-se um canto da folha de papel na borda do copo (Figura 44).

Figura 44 – Atividade sobre o teorema 2.1 com o uso de folha de papel, copo, lápis e régua.

Em seguida, com o copo sobre a folha, são marcados os pontos onde a borda do copo, que é circular, intersecta os lados adjacentes a esse canto, que é um ângulo reto. Veja a Figura 45

Com o auxílio da régua, é construído um segmento de reta que tem por extremos os dois pontos marcados. Esse segmento é o diâmetro do copo, então basta medi-lo usando a mesma régua. Veja a Figura 45

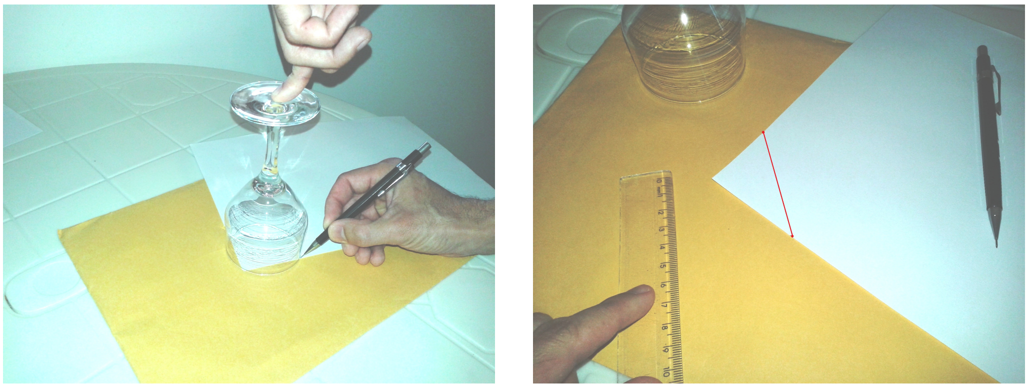


Figura 45 – Construção de segmento de reta na Atividade sobre o teorema 2.1 com o uso de régua.

4.2 O Teorema de Tales para Segmentos Proporcionais

4.2.1 Atividade 1 - Usando GeoGebra

A ideia dessa atividade é propor uma maneira de o aluno visualizar o teorema de Tales 2.2. Isto é, se um feixe de retas paralelas é cortado por retas transversais, ficam determinados nessas transversais segmentos proporcionais.

Inicialmente no Geogebra, são construídos os pontos A e B e então traçamos a reta r passando por esses pontos. Em algum ponto de r é marcado o ponto C exterior ao segmento AB, e fora de r, constrói-se o ponto D. Traça-se a reta a que passa por A e D. E então com o recurso de reta paralela, são traçadas duas retas paralelas à reta a, reta b que passa por B e a reta c que passa por C. É Marcado um ponto E em b e construída a reta s passando por D e E. Finalizando a construção, marca-se o ponto F de interseção entre as retas c e s, assim como na Figura 46, na próxima página.

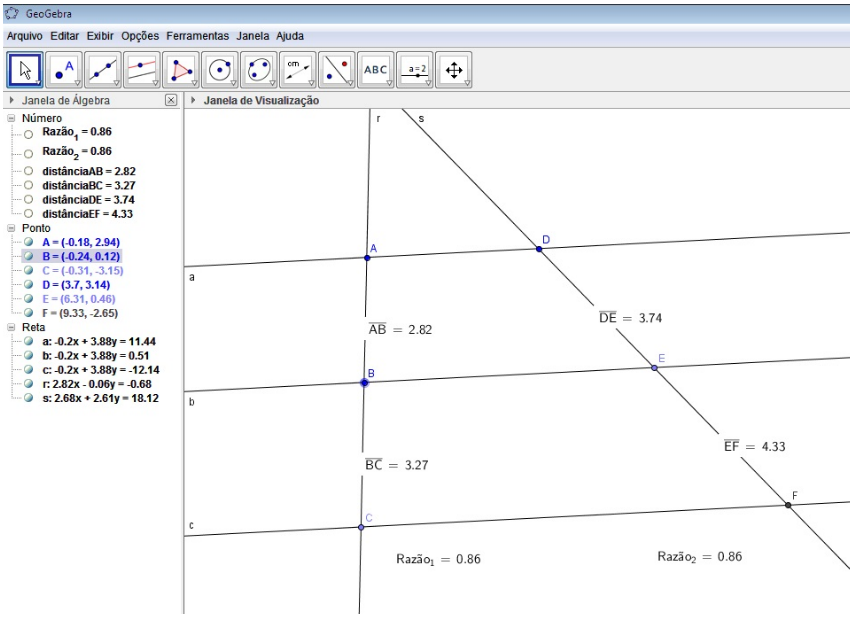


Figura 46 – Verificando o Teorema 2.2 no GeoGebra.

Utilizando o recurso distância, é verificada as medidas dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ e $\overline{EF}$.

Posteriormente, digita-se na caixa de entrada os comandos AB/BC e DE/EF, consegue-se realizar que as razões

$$\text{Razão}_1 = \frac{AB}{BC}$$

e

$$\text{Razão}_2 = \frac{DE}{EF}$$

são iguais.

Manipulando-se os objetos geométricos envolvidos na construção verifica-se que as razões não se alteram. Tal manipulação é de grande importância para o entendimento dos alunos a cerca do Teorema de Tales de segmentos proporcionais, vejamos na Figura 47, na proxima página, algumas dessas manipulações.

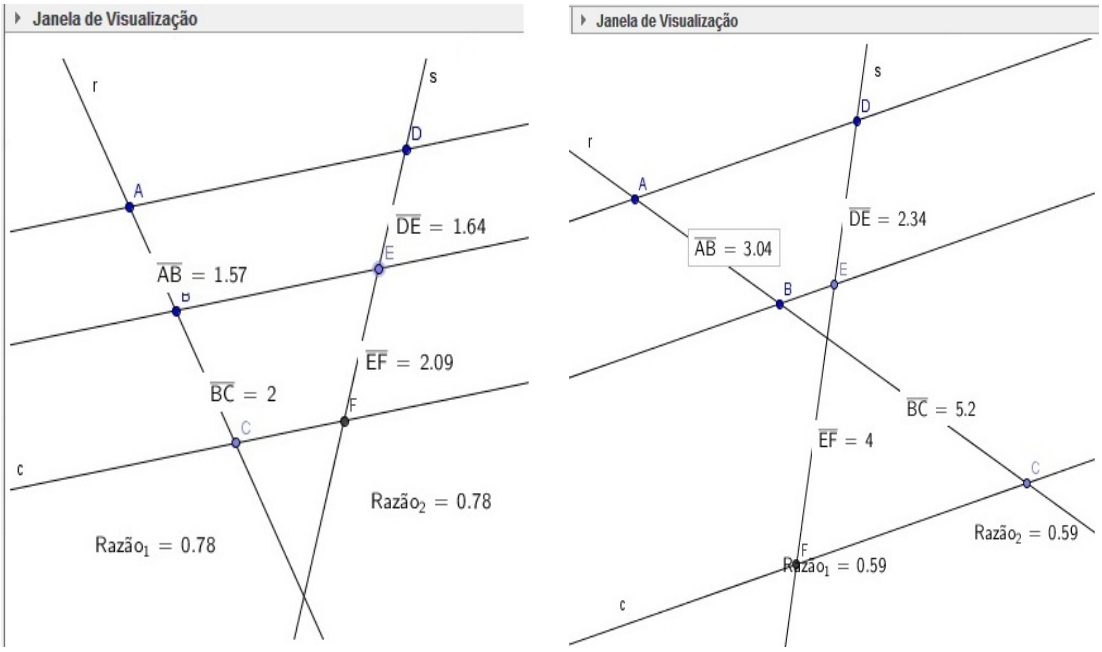


Figura 47 – Verificando as Proporções do Teorema de Tales 2.2.

4.3 Problemas Contextualizados

Na presente seção são apresentados mais alguns exercícios selecionados, sobre o Teorema de Tales para segmentos proporcionais e do triângulo, afim de que o conhecimento adquirido seja melhor fixado. As soluções desses problemas encontram-se no anexo deste trabalho.

Problema 1 (CPII - adaptado) As ruas Amor, Bondade e Caridade são paralelas e as avenidas Paz e Felicidade são transversais a essas ruas.

Arthur mora na esquina da Rua Amor com a Avenida Paz indicada na Figura 48 pelo ponto A. Para ir à videolocadora situada na esquina da Rua Caridade com a Avenida Paz, indicada pelo ponto B, quantos metros Arthur percorre?

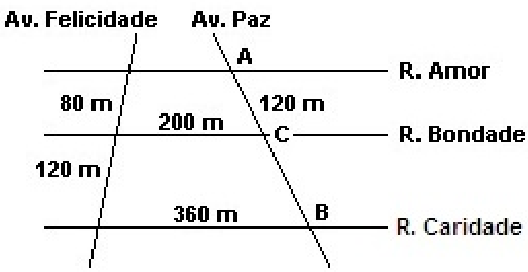


Figura 48 – Aplicação 1 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: Colégio Pedro II.

Problema 2 (UEL - adaptado) O gráfico da Figura 49 mostra a atividade de café, em milhões de toneladas, em certo município do estado do Paraná.

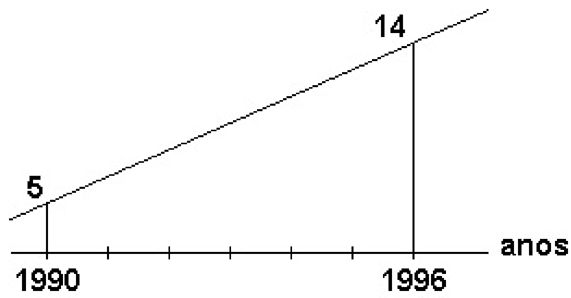


Figura 49 – Aplicação 2 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: Universidade Estadual de Londrina.

De acordo como gráfico, qual foi a produção de café, nesse município, no ano de 1994, em milhões de toneladas?

Problema 3 (CEFET-PR) O jardineiro Sr. Artur fez um canteiro triangular composto por folhagens e flores onde as divisões são todas paralelas à base AB do triângulo ABC, conforme Figura 50.

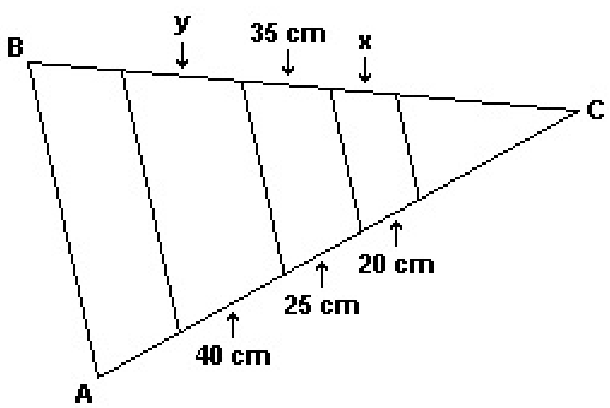


Figura 50 – Aplicação 3 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: CEFET-PR

Sendo assim, vamos determinar as medidas x e y dos canteiros de flores.

Problema 4 (CPII - adaptado) Para melhorar a qualidade do solo, aumentando a produtividade do milho e da soja, em uma fazenda é feito o rodízio entre essas culturas e a área destinada ao pasto. Com essa finalidade, a área produtiva da fazenda foi dividida em três partes conforme Figura 51.

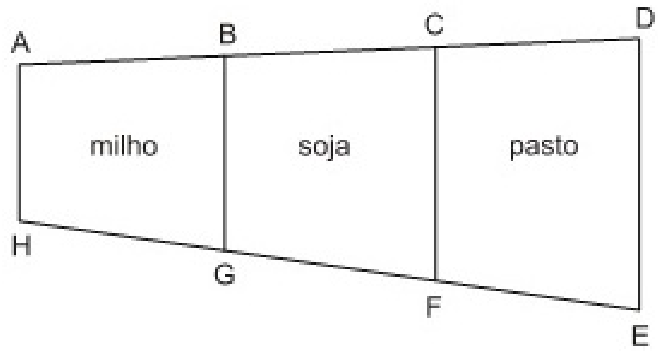


Figura 51 – Aplicação 4 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: Colégio Pedro II

Considere que

- os pontos A, B, C e D estão alinhados;
- os pontos H, G, F e E estão alinhados;
- os segmentos $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ e $\overline{DE}$ são, dois a dois, paralelos entre si;
- $AB = 500m$, $BC = 600m$, $CD = 700m$ e $HE = 1980m$.

Nessas condições, vamos calcular a medida do segmento $\overline{GF}$ em metros.

Problema 5 (UNIRIO - adaptado)

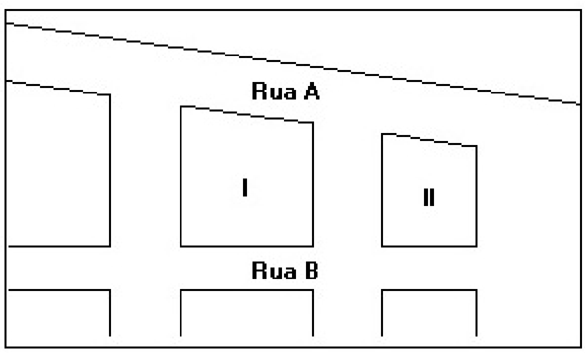


Figura 52 – Aplicação 5 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: UNIRIO

Na Figura 52, as frentes da rua A para os quarteirões I e II medem, respectivamente, $250m$ e $200m$, e a frente do quarteirão I para a rua B mede $40m$ a mais do que a frente do quarteirão II para a mesma rua. Sendo assim, determine em metros, a medida da frente do menor dos dois quarteirões para a rua B.

Problema 6 (BIANCHINI, 2013) Para calcular o comprimento de uma ponte a ser construída, um engenheiro elaborou o esquema da Figura 53 em que o segmento $\overline{CE}$ representa a ponte. Sabendo que $\overline{DE}//\overline{BC}$. Calcule o comprimento que deverá ter essa ponte.

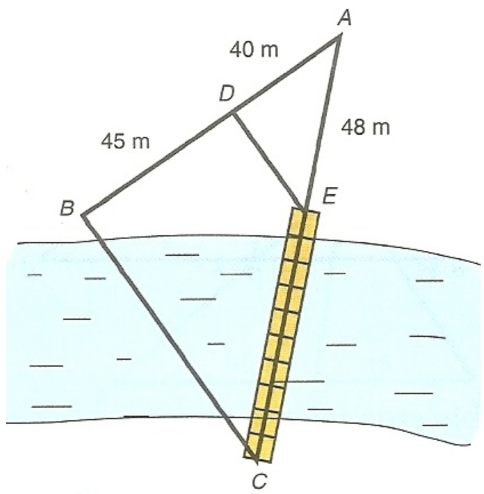


Figura 53 – Aplicação 6 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: (BIANCHINI, 2013).

Problema 7 (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009) A Figura 54 indica três lotes de terreno com frentes para a rua A e para a rua B. As divisas dos lotes são perpendiculares à rua A. As frentes dos lotes 1, 2 e 3 para a rua A medem, respectivamente, $15m$, $20m$ e $25m$. A frente do lote 2 para a rua B mede $28m$. Qual é medida da frente para a rua B dos lotes 1 e 3?

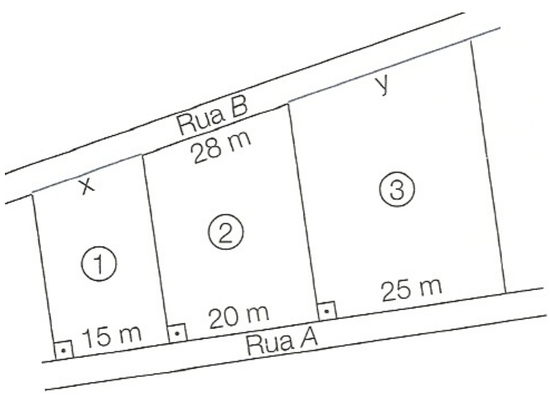


Figura 54 – Aplicação 7 contextualizada do Teorema de Tales para segmentos proporcionais. Fonte: (IEZZI; DOLCE; MACHADO, 2009).

Capítulo 5

Considerações Finais

O objetivo maior desse trabalho foi torná-lo um material de apoio para professores que irão ensinar o teorema de Tales de segmentos proporcionais 2.2 e no triângulo 2.3 a turmas de Ensino Fundamental. Particularmente o teorema de Tales 2.2 é tido como um alicerce para o aprendizado de outros conteúdos geométricos como a semelhança de triângulos, a trigonometria e as secções de um sólido por planos paralelos à base.

No presente trabalho foram citados os diversos enunciados atribuídos a Tales de Mileto. Também houve espaço para demonstrações desses teoremas, assim como exemplos de suas aplicações. Mencionou-se também atividades realizadas com os alunos do 9° ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Rosângela Duarte Faria, no município de Rio das Ostras/RJ. Sugeriu-se outras atividades a serem realizadas com os educandos deste ano de escolaridade.

Nessa turma de 9^{o} ano, pode-se afirmar que quando o professor promove ações de ensino e aprendizagem com seus alunos por meio de problemas, necessita de estimular nele o gosto pela leitura. Pois somente pelo hábito da leitura o aluno conseguirá colocar-se como sujeito do problema e assim criar mecanismos para resolvê-lo. A leitura ainda tornará tais alunos mais criativos e encorajados a outras descobertas, o que no panorama moderno é importante em qualquer ramo de conhecimento.

O estudo feito com esses alunos sugere um método de introduzir o teorema de Tales e até mesmo outros tópicos matemáticos que promova a curiosidade dos discentes. Não pode-se considerar tal método como uma receita final, porém pôde-se perceber que a medida que os alunos se envolviam com as atividades, tornaram-se aos poucos questionadores e assumiram gradualmente autonomia nas aulas de Matemática. Consolidou-se também que após o trabalho desenvolvido, eles se tornaram indivíduos mais interessados e compromissados com seu rendimento escolar.

Referências

ALMEIDA, N. A. D. de. *Uma Análise da Apresentação do Teorema de Tales em Livros Didáticos do Nono Ano do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal Fluminense, RJ Brasil, 2013. Citado 4 vezes nas páginas 20, 28, 37 e 56.

BIANCHINI, E. *Matemática, 9^o Ano*. SP Brasil: Moderna, 2013. Citado 3 vezes nas páginas 9, 56 e 73.

BONGIOVANNI, V. *O Teorema de Tales: Uma ligação entre o geométrico e o numérico*. REVEMAT, UFSC, 2007. Accesado em 25/07/2014. Disponível em: <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/12993/12094>. Citado na página 23.

BOYER, C. B. *História da Matemática*. 3. ed. SP. Brazil: Edgard Blucher Ltda, 2012. Trad. Helena Castro. Citado 4 vezes nas páginas 15, 17, 18 e 43.

BRASIL. *Ministério da Educação*. LDB - 9394, 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/ldb.pdf>. Citado na página 15.

BRASIL. *Ministério da Educação*. PCNs, 1998. Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 16 e 23.

CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. RJ Brasil: Ciência Moderna, 2007. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.

CENTURION, M.; JAKUBOVIC, J. *Matemática:Teoria e Contexto (9º Ano)*. 1. ed. SP. Brasil: Saraiva, 2012. Citado 5 vezes nas páginas 8, 9, 27, 44 e 50.

CROWLEY, M. L. *O Modelo Van Hiele de Desenvolvimento do Pensamento Geométrico*. SP Brasil: Lindquist, M. M. and Shulte, 1994. Trad Hygino H Domingues. Citado na página 23.

DOLCE, O.; POMPEO, J. N. *Fundamentos da Matemática Elementar - Geometria Plana*. SP Brasil: Atual, 2001. Vol 9. Citado 5 vezes nas páginas 9, 23, 35, 61 e 62.

EVES, H. *Introdução a História da Matemática*. SP Brasil: Unicamp, 2008. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 43.

HEAT, S. T. *A History of Greek Mathematics*. USA: Dover Publications Inc., 1981. Vol 1. Citado na página 22.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. *Matemática e Realidade, 9^o Ano*. 6. ed. SP Brasil: Saraiva, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 8, 10, 44 e 73.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. Os números na história da civilização. In: *Vivendo a Matemática*. SP Brasil: Scipione, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 41.

JúNIOR, J. R. G.; CASTRUCCI, B. *A Conquista da Matemática*. 1. ed. SP Brasil: FTD, 2009. Vol 9. Citado 7 vezes nas páginas 8, 9, 33, 34, 44, 58 e 59.

KALEFF, A. M. *Novas Tecnologias no Ensino da Matemática*. Brasil: Universidade Aberta do Brasil, 2008. Citado na página 16.

LEITE, R. S. *O Ensino de Parte da Geometria do Ensino Fundamental: Análise de Dificuldades e Sugestão de Sequencia Didática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal do Espirito Santo, ES Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 37.

LELLIS, M.; IMENES, L. M. Geometria dos mosaicos. In: *Coleção Vivendo a Matemática*. SP Brasil: Scipione, 2000. Citado na página 38.

MACHADO, N. J. Lógica? É lógico! In: *Coleção Vivendo a Matemática*. SP Brasil: Scipione, 2000. Citado na página 38.

MACHADO, N. J. Medindo comprimentos. In: *Coleção Vivendo a Matemática*. SP Brasil: Scipione, 2000. Citado na página 38.

MACHADO, N. J. Os poliedros de platão e os dedos da mão. In: *Coleção Vivendo a Matemática*. SP Brasil: Scipione, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 41.

MACHADO, N. J. Polígonos, centopéias e outros bichos. In: *Coleção Vivendo a Matemática*. SP Brasil: Scipione, 2000. Citado 2 vezes nas páginas 38 e 42.

MOISE, E.; DOWNS, F. *Geometria Moderna*. SP. Brasil: Edgard Blucher Ltda, 1971. Vol 1. Trad. Renate G. Watanabe. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 29.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M. A formação matemática na licenciatura e três questões sobre números. In: *VIII Encontro Nacional de Educação Matemática*. Universidade Federal de Pernambuco: [s.n.], 2004. Citado na página 15.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; JORGE, M. *Geometria II*. RJ Brasil: FC & Z Livros, 2002. Citado 4 vezes nas páginas 9, 32, 34 e 63.

NETO, A. C. M. *Tópicos de Matemática Elementar - Geometria Euclidiana Plana*. Rio de Janeiro, Brasil: SBM, 2012. Citado na página 26.

PATSOPOULOS, D.; PATRONIS, T. The theorem of thales: A study of the naming of theorems in school geometry textbooks. *The International Journal for the History of Mathematics Education*, v. 1, n. 1, p. 57–68, 2006. Citado na página 21.

PEREIRA, A. ao R. *Teorema de Tales: Análise de sua Apresentação nos Livros Didáticos e Proposição de Atividades*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, Brasil, 2014. Citado na página 15.

POLYA, G. *A Arte de Resolver Problemas: Um Novo Aspecto do Método Matemático*. 2. ed. RJ. Brasil: Editora Interciência, 1995. Trad. Heitor Lisboa de Araujo. Citado na página 22.

ROSS, W. T. *Great ideas and Gems of Mathematics: Thales*. USA, 2014. Acessado em 25/07/2014. Disponível em: <http://natureofmathematics.wordpress.com/lecture-notes/thales/>. Citado na página 19.

SANTOS, M. N. *Teorema de Tales com Atividades Investigatórias e História da Matemática*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Ouro Preto, MG Brasil, 2013. Citado na página 15.

SMOOTHEY, M. Ângulos. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Áreas e volumes. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

SMOOTHEY, M. Círculos. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Antonio Carlos Brolezzi. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Escalas. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Estatística. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Estimativas. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Formas. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Antonio Carlos Brolezzi. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Gráficos. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Números. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado 2 vezes nas páginas 39 e 40.

SMOOTHEY, M. Quadriláteros. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Antonio Carlos Brolezzi. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Razão e proporção. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Antonio Carlos Brolezzi. Citado na página 39.

SMOOTHEY, M. Triângulos. In: *Atividades e Jogos com*. SP Brasil: Scipione, 1997. Trad Sergio Quadros. Citado na página 39.

Apêndices

APÊNDICE A

Soluções

O presente anexo tem por finalidade expor as soluções do problemas sugeridos na seção $4.2.2$.

Problema 1

Solução Já que as ruas Amor, Bondade e Caridade são paralelas e tem-se como transversais as avenidas Felicidade e Paz, pode-se aplicar o teorema de Tales de segmentos proporcionais. Identificando por x o segmento BC conforme a Figura 55,

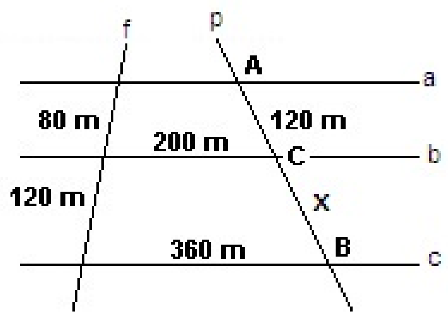


Figura 55 – Solução do problema de 4.2.2.1.

podemos montar e resolver a proporção:

$$\frac{80}{120} = \frac{120}{x},$$

$$80x = 14400$$

$$x = 180$$

Assim, a distância percorrida por Arthur é a soma das medidas dos segmentos AC e CB, ou seja, $120 + 180 = 300$ metros.

Problema 2

Solução Fazendo uma pequena mudança de escala na Figura 49, é obtido o esquema da Figura 56:

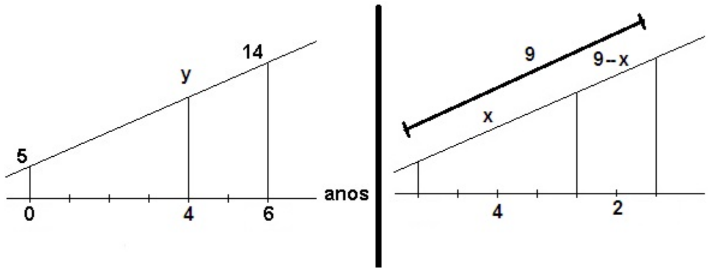


Figura 56 – Solução do problema de 4.2.2.2.

Observando os esquemas da Figura 56, necessita-se encontrar o valor y que é igual a $5+x$ segundo os esquemas. Tem-se ainda que os segmentos verticais são paralelos entre si, daí aplicando o teorema de Tales de segmentos proporcionais, é possível escrever e resolver a proporção.

$$\frac{x}{9} = \frac{4}{6}$$

$$6x = 36$$

$$x = 6$$

Desta forma, em 1994 a produção de café será de $5+6 = 11$ milhões de toneladas.

Problema 3

SoluçãoObservando a Figura 50 dada no problema, e utilizando o teorema de Tales de segmentos proporcionais, pode-se montar e resolver duas proporções a fim de obter as medidas x e y dos canteiros. Vejamos:

$$\frac{x}{35} = \frac{20}{25}$$

$$25x = 700$$

$$x = 28$$

e

$$\frac{35}{y} = \frac{25}{40}$$

$$25y = 1400$$

$$y = 56$$

Assim, a medida de x é de $28m$ e a medida de y é de $56m$.

Problema 4

SoluçãoSegundo as informações do problema e identificando por x o segmento $\overline{GF}$ pedido, pode-se construir a Figura 57:

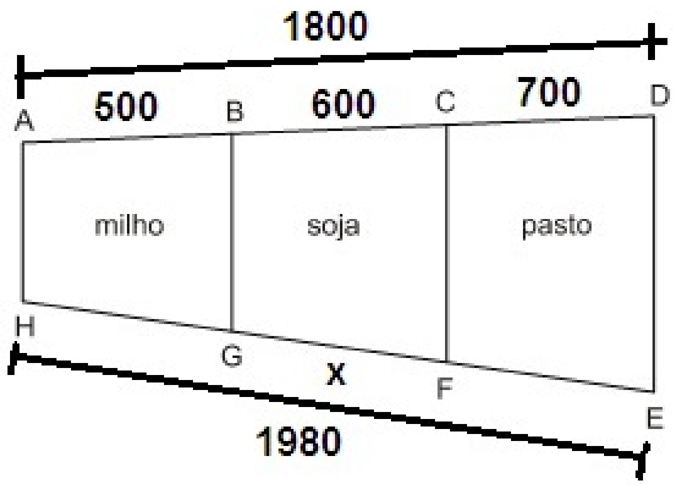


Figura 57 – Solução do problema de 4.2.2.4

Conforme os dados da questão $\overline{AH} \parallel \overline{BG} \parallel \overline{CF} \parallel \overline{DE}$, desta forma, pelo teorema de Tales de segmentos proporcionais, monta-se a proporção:

$$\frac{1800}{600} = \frac{1980}{x}$$

$$1800x = 1188000$$

$$x = 660$$

Logo, o segmento $\overline{GF}$ mede $660m$.

Problema 5

Solução A partir da Figura 52 e dos dados do problema, tem-se que as ruas verticais são paralelas entre si, veja a Figura 58.

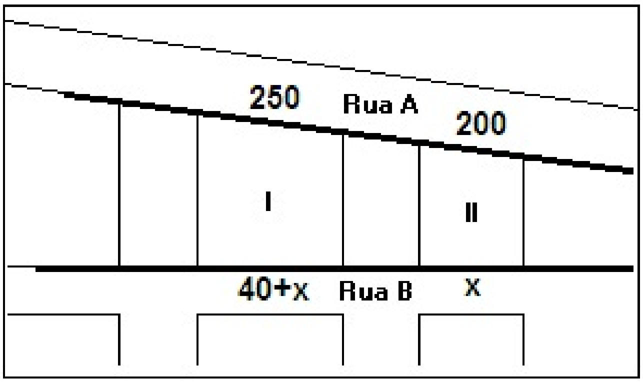


Figura 58 – Solução do problema de 4.2.2.5.

Identificando a frente do quarteirão II por x, a frente para o quarteirão I é deve ser identificada por $x + 40$, já que é $40m$ maior que o primeiro. Então, aplicando o teorema de Tales de segmentos proporcionais, é montada a proporção:

$$\frac{200}{250} = \frac{x}{x + 40}$$

$$250x = 200x + 8000$$

$$250x - 200x = 8000$$

$$50x = 8000$$

$$x = 160$$

Já que o problema quer a medida do menor dos dois quarteirões para a rua B, essa medida é o valor de x, isto é, $160m$.

Problema 6

Solução Pelos dados do problema é possível identificar a medida da ponte por x e desenhar o esquema da Figura 59.

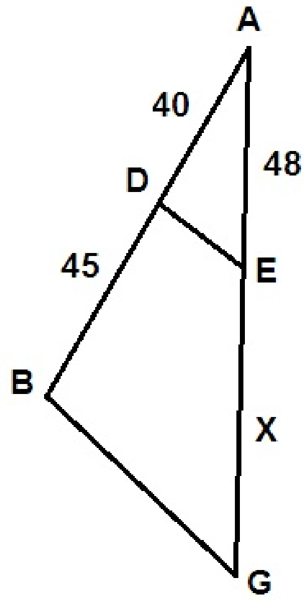


Figura 59 – Solução do problema de 4.2.2.6.

Como o problema afirma que os segmentos $\overline{DE}$ e $\overline{BG}$ são paralelos, aplica-se o teorema de Tales no triângulo da Figura 59, e resolve-se a proporção

$$\frac{40}{45} = \frac{48}{x}$$

$$40x = 2160$$

$$x = 54$$

Então, o comprimento da ponte é de $54m$.

Problema 7

Solução Sabendo que as divisas dos lotes da Figura 54 são perpendiculares à rua A, tem-se que essas divisas são paralelas entre si. Desta forma aplicando o teorema de Tales de segmentos proporcionais e montando as seguintes proporções

$$\frac{x}{28} = \frac{15}{20}$$

$$20x = 420$$

$$x = 21$$

e

$$\frac{28}{y} = \frac{20}{25}$$

$$20y = 700$$

$$y = 35$$

chega-se a conclução que as medidas das frentes do lotes (1) e (3) para a rua B são, respectivamente, $x = 21m$ e $y = 35m$.