Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Modelos de Urnas e Loterias

Paulo Roberto de Oliveira

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

Identificação do material bibliográfico: **Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional**

Identificação do Trabalho

Autor (a):	Paulo Roberto de Oliveira				
E-mail:	pauloihs@hotmail.com				
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [ ]Sim [x] Não					
Vínculo empregatício do autor	Secretaria Municipal de Educação de Inhumas / Secretaria Estadual de Educação de Goiás				
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior	Sigla:	Capes		
País:	Brasil	UF:	DF	CNPJ:	00889834/0001-08
Título:	Modelos de Urnas e Loterias				
Palavras-chave:	Distribuição de Probabilidade, Modelo de Urna, Probabilidade, Loteria				
Título em outra língua:	Models of Urns and Lotteries				
Palavras-chave em outra língua:	Probability Distribuition, Urn Model, Probability, Lottery				
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico				
Data defesa: (dd/mm/aaaa)	26/09/2014				
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT				
Orientador (a):	Valdivino Vargas Júnior				
E-mail:	vvjunior@ufg.br				
Co-orientador(a):*	-				
E-mail:	-				

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Paulo Roberto de Oliveira
Assinatura do (a) autor (a)

Data: 07 / 11 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Paulo Roberto de Oliveira

Modelos de Urnas e Loterias

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior

Goiânia

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

	Oliveira, Paulo Roberto de.
O48d	Modelos de urnas e loterias [manuscrito] / Paulo Roberto de Oliveira. - 2014.
	107 f.
	Orientador: Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior.
	Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
	Bibliografia.
	1. Probabilidade (matemática) – Estudo e ensino 2. Loterias 3. Modelo de urna 4. Jogos de probabilidade (matemática) I. Título.
	CDU: 519.2

Paulo Roberto de Oliveira

Modelos de Urnas e Loterias

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 26 de setembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Valdivino Vargas Júnior
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. André Krindges
Membro/DM/ICET/UFMT

Prof. Dr. Luis Rodrigo Fernandes Baumann
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Paulo Roberto de Oliveira graduou-se em Matemática pela Universidade Federal de Goiás no período de 2004-2007 desenvolvendo a tese de monografia **Educação Matemática: O Ensino-aprendizagem de Elementos de Geometria para Alunos do Ensino Fundamental** e possui mestrado em Matemática pelo programa de Mestrado Profissional em Matemática, na Universidade Federal de Goiás, durante o qual foi bolsista da CAPES.

Dedico este trabalho a minha mãe que sempre me apoiou nos estudos e sempre foi exemplo de superação das dificuldades encontradas.
Dedico ainda ao amigo Izaias que muito colaborou me dando forças nos momentos de dificuldades, tanto na composição teórica quanto escrita do presente trabalho.

Agradecimentos

Meus agradecimentos aos familiares que me ajudaram dando suporte para que fosse possível dedicar-me aos estudos, sobretudo nesses últimos anos, ao cursar o Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT.

Também lanço agradecimentos à UFG e ao professor orientador Valdivino Vargas Júnior, a primeira pela oportunidade dada aos seus alunos de cursarem um mestrado de qualidade e ao segundo pela orientação valiosa que permitiu a realização deste trabalho final.

Agradeço ainda, a CAPES pelo suporte financeiro dado a todos nós bolsistas , sem a qual a realização de todo o curso teria sido mais árdua.

Resumo

Muitos jogam mensalmente, outros semanalmente, em jogos de loterias desconhecendo a aleatoriedade dos seus resultados, acreditando na sorte ou em estratégias que lhes são vendidas em livros sobre jogos.

A presente monografia tem como objetivo mostrar alguns conceitos da Probabilidade e Estatística não explorados no Ensino Médio e também situações do dia a dia que contenham conceitos matemáticos sobre Probabilidade mais acessíveis a este nível de ensino, mostrando um pouco de teorias matemáticas aplicadas na prática de jogos.

Serão conceitos aqui discutidos: algumas distribuições de probabilidade, sua esperança e variância, além de jogos de loterias e seus cálculos de probabilidade.

As distribuições de probabilidade serão enunciadas e calculadas em situações criadas a partir de modelos de urnas com duas cores de bolas, tendo sempre o verde como a cor cuja extração será considerada sucesso e, o vermelho, cuja extração será considerada insucesso. Ora serão feitas extrações com reposições das bolas e ora serão feitas extrações sem a reposição das mesmas. Também, há o caso em que serão adicionadas novas bolas de ambas as cores ou uma cor apenas.

Palavras-chave

Distribuição de Probabilidade, Modelo de Urna, Probabilidade, Loteria.

Abstract

Many monthly, others weekly play in lottery games ignoring the randomness of the results, believing in luck or strategies that are sold to them in books about games.

This monograph aims to show some concepts of probability and statistics unexplored in high school and also day to day situations that contain mathematical concepts of probability more accessible to this level of education showing some mathematical theories applied in practice games.

Concepts will be discussed here: some probability distributions, their hope and variance, as well as lottery games and their probability calculations.

Probability distributions will be calculated and listed in situations created from models of urns with two colors of balls, always having green as the color whose extraction will be considered successful and the red, whose extraction will be considered a failure. Now extractions with replacement balls will be made and sometimes extractions will be done without replacing them. Also, there is the case where new balls are added to both colors or one color.

Keywords

Probability Distribution, Urn Model, Probability, Lottery.

Lista de Figuras

1 Parábola de $f(p)$ 111
2 Gráfico de p_2 111
3 Cartela da Mega-Sena 111

Sumário

1 Introdução **16**

2 Pressupostos Teóricos **17**

2.1 Noções de Probabilidade 17

2.1.1 Definições básicas 17

2.1.2 Operações entre Eventos 18

2.1.3 Probabilidade 19

2.2 Conceitos básicos de contagem 23

2.2.1 Princípio fundamental da contagem 23

2.2.2 Combinações 24

2.3 Variáveis Aleatórias 26

2.3.1 Esperança Matemática 28

2.3.2 Variância 29

3 Modelos de urnas **36**

3.1 Modelo com reposição - Distribuição Binomial 37

3.2 Modelo sem reposição - Distribuição Hipergeométrica 41

3.3 Primeiro modelo com reposição e acréscimo de bolas 46

3.4 Segundo modelo com reposição e acréscimo de bolas 51

3.5 Modelo com reposição - Distribuição Geométrica 58

3.6 Modelo com reposição - Distribuição de Pascal 63

3.7 Terceiro modelo sem reposição 68

4 Probabilidades das Loterias **70**

4.1 Mega-Sena 70

4.2 Dupla Sena 71

4.3 Quina 71

4.4 Lotomania 72

4.5 Lotofácil 72

4.6 Cálculo das Probabilidades 72

4.6.1 Mega-sena 73

4.6.2 Dupla Sena 74

4.6.3 Quina 75

4.6.4 Lotomania 77

4.6.5 Lotofácil 77

5 Propostas para o ensino médio - Probabilidade de maneira interdisciplinar e curiosa 79

5.1 Introdução - Quando a intuição falha 80

5.2 Proposta 1 - Cálculos com probabilidades em urnas 81

5.3 Proposta 2 - Mega-Sena 91

5.3.1 Introdução a alguns conceitos 91

5.3.2 A situação problema 93

5.4 Proposta 3 - Lançando-se à sorte: Probabilidade no Ensino Médio . . . 94

5.5 Expectativas e observações 96

6 Considerações finais 105

1 Introdução

O conceito de **distribuição de probabilidade** tem importância fundamental no curso de estatística e o seu estudo, com todas as suas ideias principais, leva um considerável período de tempo para ser explanada em sala de aula.

Uma distribuição de probabilidade estabelece a forma como os valores de uma **variável aleatória** se distribuem no **espaço amostral** do conjunto considerado num dado problema. Segundo Carlos A. B. Dantas, "A distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X, definida em um espaço amostral S, é uma tabela que associa a cada valor de X a sua probabilidade". Embora a distribuição de probabilidades seja dividida em quatro grupos - distribuições discretas, distribuições contínuas, distribuições singulares e distribuições mistas, com destaque nos cursos de estatística, na maioria dos cursos de graduação, para as duas primeiras - o presente trabalho se concentra no estudo de modelos de distribuição discretas de probabilidade.

Consideramos modelos com uma única variável aleatória, a variável X, que nesse texto indica o número de bolas verdes retiradas num experimento com um determinado número de extrações de bolas em urnas contendo bolas verdes e bolas vermelhas. Alguns experimentos apresentados recaem em modelos matemáticos clássicos, como a distribuição binomial e a hipergeométrica, outros geram modelos interessantes, porém, não tão conhecidos.

O fato de X ser uma variável aleatória significa que o resultado do experimento não pode ser determinado de início, mas podemos atribuir probabilidade considerando os parâmetros envolvidos nos cálculos de probabilidades. Alguns modelos de distribuição de probabilidade possuem distribuição que segue regularidades gerando expressões matemáticas simples e com poucas dificuldades em obtê-las, outras contudo, merecem mais atenção na variação de X e consequentemente na obtenção do modelo matemático que traduz seus resultados.

Para caracterizarmos as distribuições de probabilidade, fazemos uso de medidas de tendência central e dispersão que são de grande importância e indicam aspectos relevantes sobre o conjunto dos valores dessas distribuições. Algumas medidas comuns são a esperança matemática, o desvio padrão e a variância.

Neste material abordaremos os conceitos de variável aleatória, distribuição de probabilidades e processos para cálculo da esperança e variância de uma distribuição de probabilidades. Apresentaremos, também, alguns cálculos de probabilidades de ganho em jogos de loterias, atividade essa, que pode ser trabalhada com alunos de ensino médio que dominem os conceitos elementares de probabilidade e combinatória.

Apesar da matriz curricular goiana (e até mesmo a de outros estados) trazer pouco a respeito dos princípios da contagem e da probabilidade para a sala de aula, este trabalho traz, além de conceitos de nível superior e alguns outros de nível básico, propostas de trabalho para alunos do ensino médio cuja sua aplicação esbarra em questões relativas à formação inicial e contínua dos professores, sendo que muitos destes, concluíram o ensino superior sem ter obtido uma base sólida para trabalhar as teorias das probabilidades. Assim, esse trabalho poderá ser um apoio para professores que queiram implementar, em suas aulas, atividades que sirvam de ponte entre a probabilidade e demais conteúdos do currículo, fazendo uso da interdisciplinaridade de conteúdos dentro da própria matemática, além de prover a probabilidade como conteúdo de destaque dentro do currículo ao extrapolar os conceitos básicos propostos.

2 Pressupostos Teóricos

Nesta seção, serão abordados alguns conceitos teóricos usados no desenvolvimento das atividades a serem trabalhadas com alunos do Ensino Médio propostas no capítulo 5.

2.1 Noções de Probabilidade

Nesta seção, serão apresentados alguns elementos dos experimentos probabilísticos, operações e propriedades.

2.1.1 Definições básicas

A noção mais básica para a formalização da Teoria da Probabilidade é a de **experiência aleatória** que é o processo de observar um resultado de um dado acontecimento aleatório.

Dantas define experimento aleatório como "experimentos que ao serem repetidos nas mesmas condições não produzem o mesmo resultado".

Nesse experimento, obtemos um resultado dentre um conjunto de resultados possíveis previamente definidos, sendo esse conjunto de resultados possíveis chamado de

espaço amostral do experimento aleatório, representado por Ω.

Considere a seguinte experiência aleatória: "Pergunta-se a uma pessoa que encontrada ao acaso na rua, num determinado dia, ao sair de casa, qual o seu signo". O espaço amostral com a possível resposta dada é o conjunto formado pelos 12 signos zodiacais:

$$\Omega = \{\textit{Áries, Touro, Gêmeos, Câncer, Leão, Virgem, Libra, Escorpião, Sagitário,} \\ \textit{Capricórnio, Aquário, Peixes}\}.$$

Se, no experimento aleatório, o resultado abranger quaisquer resultados com características desejáveis, dizemos que esses resultados com as tais características formam o conjunto **evento**. No experimento acima, acerca dos signos, podemos assim definir: o evento A seria *encontrar uma pessoa com signo cuja primeira letra é A*, isto é, $A = \{$*Áries, Aquário*$\}$, e que B seria o evento *encontrar uma pessoa cujo signo possui 5 letras*, isto é, $B = \{$*Áries, Touro, Câncer, Libra*$\}$.

2.1.2 Operações entre Eventos

Sejam as definições de operações entre eventos dadas abaixo:

Definição 1. *A reunião de n eventos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *é o evento que ocorre se pelo menos um deles ocorre, e escrevemos assim a operação:* $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$.

Definição 2. *A interseção de n eventos* $A_1, A_2, ..., A_n$ *é o evento que ocorre se todos eles ocorrem, e escrevemos assim a operação:* $A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$.

Definição 3. *O complementar de um evento* A *é o evento que ocorre se* A *não ocorre, e escrevemos assim a operação:* A^c.

Definição 4. *A diferença entre dois eventos* A *e* B *é o evento que ocorre se somente* A *ocorre e* B *não ocorre, e escrevemos assim a operação:* $A|B$ *ou* $A \cap B^c$.

Exemplo 1. *Considere um experimento com espaço amostral* $\Omega = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ *e os eventos* $A = \{5, 6, 8, 9\}$, $B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ *e* $C = \{7, 8, 9\}$. *Temos os seguintes resultados obtidos a partir de operações entre* A, B *e* C

- $A \cup B = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 8\}$;

- $A \cap B = \{5\}$;

- $A^c = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 7\}$;

- $C \backslash (A \cup B) = \{7\}$.

Essas operações gozam de algumas propriedades, que serão enunciadas, mas não demonstradas por não ser esse o foco desse trabalho.

Lema 1. *Sejam A, B e C eventos do espaço amostral de um experimento aleatório, temos:*

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cap C)$;

2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap (B \cup C)$;

3. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

4. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

As demonstrações dos itens 3 e 4 encontrar-la-emos em Ross (2010), página 43. A demonstração do item 1 são encontrada no livro da *Coleção Shaum: Probabilidade e estatística* de Murray R. Spigel, página 19, exercício 1.8. A demonstração do item 2 é análoga à demonstração do item 1 e por isso o livro deixa como exercício.

2.1.3 Probabilidade

A probabilidade é um número que expressa e "quantifica" a possibilidade da ocorrência dos resultados de um determinado fenômeno. Uma moeda honesta, por exemplo, tem duas faces, "cara" e "coroa", e uma delas cairá voltada para cima. No lançamento dessa moeda, temos que a probabilidade de que ela caia com a face "cara" voltada para cima é de $\frac{1}{2}$ e a probabilidade de que ela caia com a face "coroa" para cima também é $\frac{1}{2}$, isto é, temos uma possibilidade para o total de duas possibilidades. Portanto, as duas faces têm chances iguais de ficarem voltadas para cima.

Dois resultados são ditos equiprováveis, se eles possuem a mesma chance de ocorrer, como no exemplo das moedas. Um espaço amostral é dito equiprovável, se todos os seus pontos amostrais forem equiprováveis. É o que ocorre no lançamento de um dado, em que cada face tem probabilidade $\frac{1}{6}$. Em palavras, todas as seis faces têm igual chance de ser obtida no lançamento.

Veja a definição clássica de probabilidade dada a seguir:

Definição 5. *Seja um espaço amostral Ω com N resultados possíveis (chamados eventos simples), todos equiprováveis. Seja ainda A um desses eventos com um total de m eventos simples. Então, a probabilidade de A, denotada $P(A)$, é definida por*

$$P(A) = \frac{m}{N}.$$

Como $N \geq m$, segue que a $0 \leq P(A) \leq 1$ para todo evento A que seja subconjunto do espaço amostral Ω e sendo 1 se, e somente se A for o próprio espaço amostral.

Mas, na maioria das situações práticas, o espaço amostral não possui eventos simples equiprováveis, tornando impraticável o uso da definição clássica de probabilidade para o problema dado. Dessa forma, calculamos as probabilidades como a frequência relativa de um evento.

Definição 6. *[Definição Frequentista de Probabilidade] Seja A um evento aleatório relativo a um experimento aleatório. Suponhamos que este experimento é repetido n vezes nas mesmas condições. A probabilidade de A pode ser definida como*

$$P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(A)}{n} = \lim_{n\to\infty} f_{n,A}$$

denominada frequência relativa de A nas n repetições do experimento, onde $n(A)$ representa o número de repetições que o evento A associado a esse experimento ocorre após n repetições do experimento aleatório.

Observação: Intuitivamente, isso significa que se n é grande, $P(A) \simeq \dfrac{n(A)}{n}$.

A definição frequentista de probabilidade goza de propriedades enunciadas no lema a seguir, mas antes, é dada a definição de *classe de eventos.*

Definição 7. *Uma classe de eventos aleatórios é o conjunto formado por eventos (ou subconjuntos) do espaço amostral que satisfazem:*

1. $\Omega \in \mathcal{F}$, $\phi \in \mathcal{F}$;
2. $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$;
3. $A_n \in \mathcal{F}$ *para* $n = 1, 2, 3, ...,$ *então* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

Lema 2. *A frequência relativa* $f_{n,A} = \dfrac{n(A)}{n}$ *definida na classe dos eventos do espaço amostral Ω satisfaz as seguintes condições:*

1. *Para todo evento A, $0 \leq f_{n,A} \leq 1$;*

2. *Se A e B são dois eventos de Ω mutuamente exclusivos, temos: $f_{n,A\cup B} = f_{n,A} + f_{n,B}$;*

3. *$f_{n,\Omega} = 1$.*

As demonstrações do lema, dado acima, são encontradas em Dantas (2008), página 27.

Em Lebensztayn (2012), o autor traz uma outra definição para o conceito de probabilidade, dada por Kolmogorov em 1933 conhecida como *Definição Axiomática de Probabilidade.*

Definição 8. *Uma probabilidade é uma função P a valores reais definida em uma classe $\mathcal{F}$ de eventos de um espaço amostral Ω , que satisfaz as seguintes condições:*

1. *$0 \leq P(A) \leq 1$, $\forall A \in \mathcal{F}$;*

2. *$P(\Omega) = 1$*

3. *Aditividade enumerável: para qualquer sequência A_1, A_2, ... $\in \mathcal{F}$ de dois eventos dois a dois disjuntos,*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

A tripla (Ω, $\mathcal{F}$, P) é chamada um espaço de probabilidade.

Um espaço amostral é dito enumerável se a quantidade de seus possíveis valores possam ser contados (enumerados). Para o caso em que o espaço amostral é enumerável, podemos escrever Ω como $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \cdots\}$ e sendo A um evento do conjunto das classes das partes de Ω, então

$$P(A) = \sum_{i:\omega_i \in A} p(\omega_i)$$

em que $p(\omega_i)$ representa a probabilidade do evento simples, $p(\omega_i) \geq 0$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} p(\omega_i) = 1$.

Definição 9. *Sejam A e B eventos de Ω, espaço amostral. A e B são ditos independentes se, e somente se $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.*

Definição 10. *Dois eventos aleatórios A e B em $\mathcal{F}$ são ditos mutuamente exclusivos se $A \cap B = \phi$*

Algumas propriedades das Probabilidades

Lema 3. *Se os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ são mutuamente exclusivos, então*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Para ver a demonstração do Lema acima veja Dantas (2008), página 39.

Definição 11. *Sejam os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ do espaço amostral, então*

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k^c\right).$$

Para ver a demonstração do Lema acima veja Dantas, página 41.

Definição 12. *Sejam A e B dois eventos de um espaço amostral e suponha que $P(A) > 0$, então a probabilidade condicional de B dado que A ocorreu é definida por*

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Obsrvação: Da expressão acima tiramos outra expressão:

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B|A).$$

Lema 4. *Sejam os eventos $A_1, A_2, \cdots, A_n$ do espaço amostral onde está definida a probabilidade $P(A_i)$, então*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}).$$

Para ver a demonstração do Lema acima veja Dantas, página 46.

Definição 13. *Uma partição de um espaço amostral* Ω *é uma coleção de eventos* $B_i \in \mathcal{F}$, $i \in I$ *(onde* I *é um conjunto de índices) satisfazendo*

1. *i)* $B_i \cup B_j \neq \phi$ *para* $i \neq j$*;*

2. *ii)* $\bigcup\limits_{i \in I} B_i = \Omega$*;*

3. *iii)* $P(B_i) > 0$.

Lema 5. *Seja* $B_1, B_2, \ldots, B_n$ *uma partição do espaço amostral* Ω*,* A *um evento e* P *uma probabilidade definida nos eventos do espaço amostral* Ω*, então temos*

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(A|B_k)P(B_k).$$

Esse é o conhecido Teorema das Probabilidades Totais. Para ver a sua demonstração veja Dantas (2008), página 47.

A próxima seção trata de conceitos básicos do Ensino Médio que serão amplamente aplicados nos cálculos que seguirão nas próximas seções.

2.2 Conceitos básicos de contagem

2.2.1 Princípio fundamental da contagem

Considere um evento que ocorre em n etapas independentes e sucessivas. Imagine que a primeira etapa possa ocorrer de m_1 maneiras distintas. Realizada a primeira etapa, a segunda etapa pode ocorrer de m_2 maneiras distintas e assim sucessivamente até que realizadas as $n-1$ primeiras etapas, a n-ésima etapa possa ocorrer de m_n maneiras distintas. O **princípio fundamental da contagem** (PFC) diz que a quantidade total de maneiras distintas do evento ocorrer será dada pelo produto

$$m_1.m_2.\cdots.m_n.$$

Exemplo 2. *Eu possuo 4 pares de sapatos e 11 pares de meias. Então, poderei me calçar de 44 modos diferentes, pois o experimento consiste de duas escolhas, a primeira, a escolha do sapato que calçarei, que são 4 possibilidades e, a segunda, que é a de selecionar um par de meias, dentre 11 possibilidades.*

Pelo PFC, $4.11 = 44$.

Portanto, poderei me calçar de 44 maneiras diferentes.

Exemplo 3. *Considere os algarismos 2, 5, 7, 8 e 9.*

a) *A quantidade de números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 2, 5, 7, 8 e 9, considerando que os algarismos podem repetir é 125.*

b) *A quantidade de números de 3 algarismos podemos formar com os algarismos 2, 5, 7, 8 e 9, considerando que todos os algarismos são diferentes é 60.*

Resolução

a) *Temos 5 algarismos disponíveis para formar o número, e cada algarismo que compõem o número é obtido a partir de uma escolha, logo são três as escolhas que faremos.*

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 5 modos distintos, também o segundo algarismos pode ser escolhido de 5 modos distintos e também o terceiro algarismo.

Pelo PFC, multiplicando as três possibilidades, temos $5.5.5 = 125$ *números de três alagarismos.*

b) *Temos 5 algarismos disponíveis para formar o número, e cada algarismo que compõem o número é obtido a partir de uma escolha, logo são três as escolhas que faremos.*

O primeiro algarismo pode ser escolhido de 5 modos distintos, o segundo pode ser escolhido de 4 modos distintos, já que um deles foi escolhido na primeira escolha. O terceiro algarismo pode ser escolhido de 3 modos diferentes, já que dois deles já foram usados.

Pelo PFC, multiplicando as três possibilidades, temos $5.4.3 = 60$ *números de três alagarismos distintos.*

2.2.2 Combinações

A partir de um conjunto com n elementos, todos distintos, podemos formar subconjuntos contendo p desses elementos.

Cada subconjunto com p elementos é uma **combinação simples** dos n elementos do conjunto.

Exemplo 4. *Considere um conjunto contendo 5 elementos* $A = \{a, b, c, d, e\}$.

A partir dele, podemos formar subconjuntos com 0, 1, 2, 3, 4 ou 5 elementos.

Veja os subconjuntos A_i *de* A *com* i *elementos,* $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$*:*

- $A_0 = \phi$
- $A_1 = \{a, b, c, d, e\}$
- $A_2 = \{ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de\}$
- $A_3 = \{abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde\}$
- $A_4 = \{abcd, abce, abde, acde, bcde\}$
- $A_5 = \{abcde\}$

Observação: Dizer que $A_0 = \phi$, significa que formamos um subconjunto vazio a partir de A.

Representamos por $C_{n,p}$, o número de combinações de n objetos tomados p a p e a quantidade total de combinações de p elementos, formados a partir dos n, é dada pela expressão

$$C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

No entanto, na maior parte do trabalho, usamos a escrita $\binom{n}{p}$ no lugar de $C_{n,p}$.

No exemplo 4, para encontrarmos o número de combinações formadas por 3 elementos, A_3, dos 5 do conjunto A, calculamos

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Exemplo 5. *Numa sorveteria há 7 sabores diferentes de sorvete e um cliente pretende comprar duas bolas de sorvete de sabores diferentes. Existem 21 combinações de sorvetes disponíveis para esse cliente.*

Resolução:

Como o total de sabores é 7, temos $n = 7$ *e serão escolhidas duas bolas,* $p = 2$*, portanto, temos combinação* $C_{7,2}$ *cujo valor é*

$$C_{7,2} = \frac{7!}{2!(7-2)!} = 21.$$

Exemplo 6. *Numa escola, serão formados times mistos de futsal contendo 3 meninas e 2 meninos. O professor de Educação Física possui à sua disposição 6 meninas e 4 meninos. A quantidade de times diferentes que ele pode formar é* 120 *times.*

Resolução:

Temos duas escolhas a fazer, a primeira escolha é do grupo de três meninas que farão parte da equipe e a segunda escolha é do grupo de dois meninos que também comporão a equipe.

A primeira escolha pode ser feita de $C_{6,3}$ *modos distintos e a segunda escolha pode ser feita de* $C_{4,2}$ *modos distintos.*

Pelo PFC, temos um total de

$$C_{6,3}.C_{4,2} = 20.6 = 120$$

equipes diferentes.

2.3 Variáveis Aleatórias

Dantas (2008) define informalmente variáveis aleatórias assim: *"Uma variável aleatória X é uma função definida num espaço amostral, que assume valores quantitativos".*

Vejamos alguns exemplos de variáveis aleatórias:

1. número de alunos que não compareceram a aula de estatística num determinado dia;

2. número de vezes que sai "cara" em 5 cinco lançamentos seguidos de uma moeda.

Se os valores assumidos por X são finitos ou infinitos enumeráveis, então dizemos que X é uma variável aleatória discreta, mas se X assume valores num intervalo de números reais, então dizemos que X é uma variável aleatória contínua. Nesse trabalho focamos apenas em variáveis discretas.

Formalmente, variáveis aleatórias são definidas como a seguir:

Definição 14. *(Lebensztayn, 2012) Uma variável aleatória* X *em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *é uma função a valores reais definida em* Ω *, tal que*

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{F}$$

para todo $X \in \mathbb{R}$.

Na definição acima, $\{X \leq x\} \in \mathcal{F}$ significa que $\{X \leq x\}$ é um evento aleatório.

A uma variável aleatória X está associado uma probabilidade P escrita $P(X = x)$ em que x representa o valor que a variável X assume e $P(X = x)$ é chamada distribuição de probabilidade.

Veja as variáveis aleatórias nos exemplos a seguir:

Exemplo 7. *Consideremos o seguinte experimento aleatório: lançamos uma moeda quatro vezes consecutivas e observamos a face voltada para cima. Os resultados observados nesses lançamentos podem ser:*

KKKK	*KKKC*	*KKCK*	*KCKK*
CKKK	*KKCC*	*KCCK*	*KCKC*
CKCK	*CCKK*	*CKKC*	*CCCK*
CCKC	*CKCC*	*KCCC*	*CCCC*

A variável aleatória é X que representa o número de caras (C). Essa variável pode assumir os valores 0, 1, 2, 3 ou 4. A probabilidade de que tenhamos 3 caras ao final dos quatro lançamentos é indicada por

$$P(X = 3) = P(\{CCCK, CCKC, CKCC, KCCC\}) = \frac{1}{4}.$$

Exemplo 8. *Duas bolas são retiradas sucessivamente e sem reposição de uma caixa que possui quatro bolas verdes e três vermelhas.*

Para esse experimento teríamos o espaço amostral $\Omega = \{GG, GV, VG, VV\}$*, onde* G *representa bola verde e* V *representa bola vermelha.*

Se a variável aleatória X *é o número de bolas verdes retiradas, temos então que* X *assume os valores 0, 1 ou 2.*

Então, a probabilidade de sair x *bolas verdes,* $x = 0, 1, 2$ *é*

- $P(X = 0) = P(\{VV\}) = \frac{3}{7}\frac{2}{6} = \frac{6}{42}$;
- $P(X = 1) = P(\{GV, VG\}) = \frac{4}{7}\frac{3}{6} + \frac{3}{7}\frac{4}{6} = \frac{24}{42}$;
- $P(X = 2) = P(\{GG\}) = \frac{4}{7}\frac{3}{6} = \frac{12}{42}$.

Observe que $P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1$.

2.3.1 Esperança Matemática

A *média*, *esperança* ou *esperança matemática* de uma variável aleatória discreta é a média ponderada dos possíveis valores que ela pode assumir. O peso atribuído a um valor x_i é a probabilidade de ocorrência desse valor.

Num conjunto de valores x_1, x_2, ... , x_n, com probabilidades $P(X = x_1)$, $P(X = x_2)$, ..., $P(X = x_n)$, onde X é uma variável aleatória discreta, podemos definir assim a esperança matemática:

Definição 15. *(Dantas (2008), página 76) A esperança matemática de uma variável aleatória discreta X que assume os valores x_i, com respectivas probabilidades $P(X = x_i)$, para i=1, 2, ..., n é dada por*

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).$$

Exemplo 9. *Considere o experimento lançar uma moeda honesta 4 vezes e contar quantas vezes saem cara. Temos:*

$$E(X) = 0\tfrac{1}{16} + 1\tfrac{4}{16} + 2\tfrac{6}{16} + 3\tfrac{4}{16} + 4\tfrac{1}{16} = 2.$$

Em média, nos lançamentos saem 2 caras.

Definição 16. *Um vetor $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, onde cada X_i, $i = 1, 2, \cdots, n$, é uma variável aleatória, é chamado vetor aleatório. Em particular, se cada X_i é discreta, temos um vetor aleatório discreto.*

Proposição 1. *Seja X uma variável aleatória discreta. Então*

$$E(h(X)) = \sum_{i=1}^{n} h(x_i) P(X = x_i)$$

Definição 17. *Seja $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ um vetor aleatório. A função*

$$p(x_1, \cdots, x_n) = P(X_1 = x_1, \cdots, X_n = x_n)$$

é chamada função de probabilidade conjunta.

Proposição 2. *Seja* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *um vetor aleatório. Então*

$$E(h(X_1, \cdots, X_n)) = \sum_{x_1}\sum_{x_2}\cdots\sum_{x_n} h(x_1, \cdots, x_n)p(x_1, \cdots, x_n).$$

Proposição 3. *Seja* $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ *um vetor aleatório. Então*

$$E(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = E(X_1) + \cdots + E(X_n).$$

Demonstração: *Para* $n = 2$ *e tomando* $h(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ *na proposição anterior, temos*

$$\begin{aligned}
E(X_1 + X_2) &= \sum_{x_1}\sum_{x_2}(x_1 + x_2)P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\
&= \sum_{x_1}\sum_{x_2} x_1 P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) + \sum_{x_1}\sum_{x_2} x_2 P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\
&= \sum_{x_1} x_1 \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) + \sum_{x_2} x_2 \sum_{x_1} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2) \\
&= \sum_{x_1} x_1 P(X_1 = x_1) + \sum_{x_2} x_2 P(X_2 = x_2) \\
&= E(X_1) + E(X_2).
\end{aligned}$$

Assim, a proposição está demonstrada para $n = 2$*, já para* n *qualquer a demonstração é feita por indução sobre* n*.*

∎

2.3.2 Variância

A menos que uma variável aleatória assuma um único valor com probabilidade um, seus possíveis valores estão em algum sentido distanciados da média. Surge, então, uma necessidade que meça este distanciamento. Temos as chamadas **medidas de dispersão**. Existem várias dessas medidas, dentre as quais a mais conhecida e importante, é a **variância**.

Definição 18. *Seja* X *uma variável aleatório com média* $E(X)$*. Então, a variância de* X*, representada por* $Var(X)$*, é definida como sendo*

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right].$$

A variância de uma variável aleatória X pode ser entendida como uma média da distância ao quadrado entre a variável aleatória X e sua esperança.

Podemos obter a variância a partir do valor de $E(X)$ e $E(X^2)$. Ross (2010), traz a expressão seguinte para o cálculo da variância, segundo o qual, oferece maior facilidade para o cálculo de $Var(X)$.

Lema 6. *Seja X uma variável aleatória. Então*

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

Demonstração: *Pela definição de variância, temos que $Var(X) = E[(X-E(X))^2]$. Tomando $h(x) = [X - E(X)]^2$ na Proposição 1 (página 28), temos*

$$E[(X - E(X))^2] = \sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^2 P(X = x_i).$$

Logo

$$\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{n}[x_i - E(X)]^2 P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_iE(X) + [E(X)]^2)P(X = x_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 P(X = x_i) - 2E(X)\sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i) + [E(X)]^2 \sum_{i=1}^{n} P(X = x_i) \\
&= E(X^2) - 2[E(X)]^2 + [E(X)]^2 \\
&= E(X^2) - [E(X)]^2
\end{aligned}$$

■

Proposição 4. *Sejam $X_1, \ldots, X_n$ variáveis aleatórias independentes e $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Então,*

$$Var(S_n) = Var(X_1 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n).$$

Demonstração:

Vamos considerar o caso de duas variáveis ($i = 2$). Portanto, $S_2 = X_1 + X_2$ e

$$\begin{aligned}
Var(S_2) &= E[(X_1 + X_2)^2] - [E(X_1 + X_2)]^2 \\
&= E[(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2)] - [E(X_1) + E(X_2)]^2 \\
&= E(X_1^2 + 2X_1X_2 + X_2^2) - [E(X_1)]^2 - 2E(X_1)E(X_2) - [E(X_2)]^2 \\
&= E(X_1^2) + E(2X_1X_2) + E(X_2^2) - [E(X_1)]^2 - 2E(X_1)E(X_2) - [E(X_2)]^2 \\
&= E(X_1^2) + 2E(X_1)E(X_2) + E(X_2^2) - [E(X_1)]^2 - 2E(X_1)E(X_2) - [E(X_2)]^2 \\
&= E(X_1^2) - [E(X_1)]^2 + E(X_2^2) - [E(X_2)]^2 \\
&= Var(X_1) + Var(X_2).
\end{aligned}$$

Portanto, está demonstrado que $Var(X_1 + X_2) = Var(X_1) + Var(X_2)$ para $i = 2$. A demonstração para $i = n$ é feita por indução sobre n.

■

Considere 3 urnas com a composição dada na tabela a seguir:

Exemplo 10. *Consideremos três urnas com a seguinte composição:*

Tabela 1: Composição de cada urna

Urna	Nº de bolas verdes	Nº de bolas vermelhas
1	7	3
2	5	5
3	4	6

De cada urna são retiradas 3 bolas, uma a uma, ao acaso e sem reposição. Seja X o número de bolas verdes retiradas. Podemos escrever X como

$$X = X_1 + X_2 + X_3$$

onde X_i é o número de bolas verdes retiradas na urna i.

Para a urna 1, temos

$$P(X_1 = k) = \frac{\binom{7}{k}\binom{3}{3-k}}{\binom{10}{3}}, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(X_1) &= 0P(X_1=0)+1P(X_1=1)+2P(X_1=2)+3P(X_1=3) \\ &= P(X_1=1)+2P(X_1=2)+3P(X_1=3) \\ &= \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{120}+2\frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{120}+3\frac{\binom{7}{3}\binom{3}{0}}{120}=\frac{252}{120} \\ &= 2,10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X_1^2) &= 0^2P(X_1=0)+1^2P(X_1=1)+2^2P(X_1=2)+3^2P(X_1=3) \\ &= P(X_1=1)+4P(X_1=2)+9P(X_1=3) \\ &= \frac{\binom{7}{1}\binom{3}{2}}{120}+4\frac{\binom{7}{2}\binom{3}{1}}{120}+9\frac{\binom{7}{3}\binom{3}{0}}{120}=\frac{588}{120} \\ &= 4,90. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Var(X_1) &= E(X_1^2)-[E(X_1)]^2 \\ &= 4,9-2,1^2 \\ &= 0,49. \end{aligned}$$

Para a urna 2, temos

$$P(X_2=k)=\frac{\binom{5}{k}\binom{5}{3-k}}{\binom{10}{3}}, \qquad k\text{=0, 1, 2, 3.}$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(X_2) &= 0P(X_2=0)+1P(X_2=1)+2P(X_2=2)+3P(X_2=3) \\ &= P(X_2=1)+2P(X_2=2)+3P(X_2=3) \\ &= \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{120}+2\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{120}+3\frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{120}=\frac{180}{120} \\ &= 1,50. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E(X_2^2) &= 0^2P(X_2=0)+1^2P(X_2=1)+2^2P(X_2=2)+3^2P(X_2=3)\\
&= P(X_2=1)+4P(X_2=2)+9P(X_2=3)\\
&= \frac{\binom{5}{1}\binom{5}{2}}{120}+4\frac{\binom{5}{2}\binom{5}{1}}{120}+9\frac{\binom{5}{3}\binom{5}{0}}{120}=\frac{340}{120}\\
&= 2,83.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X_2) &= E(X_2^2)-[E(X_2)]^2\\
&= 2,83-1,5^2\\
&= 0,64.
\end{aligned}
$$

Para a urna 3*, temos*

$$
P(X_3=k)=\frac{\binom{4}{k}\binom{6}{3-k}}{\binom{10}{3}}, \qquad k\text{=0, 1, 2, 3.}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
E(X_3) &= 0P(X_3=0)+1P(X_3=1)+2P(X_3=2)+3P(X_3=3)\\
&= P(X_3=1)+2P(X_3=2)+3P(X_3=3)\\
&= \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{120}+2\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{120}+3\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{120}=\frac{144}{120}\\
&= 1,20.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E(X_3^2) &= 0^2P(X_3=0)+1^2P(X_3=1)+2^2P(X_3=2)+3^2P(X_3=3)\\
&= P(X_3=1)+4P(X_3=2)+9P(X_3=3)\\
&= \frac{\binom{4}{1}\binom{6}{2}}{120}+4\frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{120}+9\frac{\binom{4}{3}\binom{6}{0}}{120}=\frac{240}{120}\\
&= 2,00.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Var(X_3) &= E(X_3^2)-[E(X_3)]^2\\
&= 2-1,2^2\\
&= 0,56.
\end{aligned}
$$

Portanto, a esperança de X tem valor:

$$\begin{aligned} E(X) &= E(X_1 + X_2 + X_3) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) \\ E(X) &= 2,1 + 1,5 + 1,2 \\ E(X) &= 4,8, \end{aligned}$$

e o valor da variância é

$$\begin{aligned} Var(X) &= Var(X_1 + X_2 + X_3) = Var(X_1) + Var(X_2) + Var(X_3) \\ Var(X) &= 0,49 + 0,68 + 0,56 \\ Var(X) &= 1,73. \end{aligned}$$

A Lei dos Grandes Números

Imaginemos a seguinte situação: uma moeda é lançada uma vez e sai "cara" (c). É lançada uma segunda vez e pode sair "cara" ou "coroa" (k). Tanto para cara quanto coroa, a probabilidade de sair uma das faces será $\frac{1}{2}$, pois a moeda possui duas faces, das quais uma é cara e uma é coroa.

Se lançarmos essa moeda 4 vezes, temos os seguintes possíveis resultados: $\Omega = \{ckkk, kckk, kkck, kkkc, cckk, ckck, ckkc, kcck, kkcc, kckcccck, cckc, ckcc, kccc, kkkk, cccc\}$. Observe que nos resultados as frequências entre cara (c) e coroa (k) mudam. Contudo, se lançarmos essa moeda n vezes, com n cada vez maior, observamos que a distribuição de caras se aproxima da distribuição de coroas. A lei dos grandes números formaliza esse fato.

Definição 19. *Diz-se que uma sequencia de variáveis aleatórias* $\{X_n, n \geq 1\}$ *em um espaço de probabilidade* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *converge em probabilidade para* $X, X_n \xrightarrow{p} X$, *se existe uma variável aleatória* X *em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tal que*

$$P\{| X_n - X |> \epsilon\} \longrightarrow 0, \forall \epsilon > 0, quando\ n \to \infty.$$

E, se existir uma variável aleatória X em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ tal que

$$P\{\lim_{n\to\infty} X_n = X\} = 1$$

teremos convergência quase certa, $X_n \xrightarrow{q.c.} X$.

Teorema 1. *[A Lei Fraca dos Grandes Números] Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada uma com média finita $\mu = E[X_i]$. Então, para qualquer $\varepsilon > 0$,*

$$P\left\{\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right\} \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

A demonstração desse teorema se encontra em Ross (2010), página 462.

Teorema 2. *[A Lei Forte dos Grandes Números] Seja $X_1, X_2, \ldots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, cada uma com média finita $\mu = E[X_i]$. Então, com probabilidade 1,*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} \to \mu \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

A demonstração desse teorema se encontra em Ross (2010), página 473.

Seguem agora as definições de *convergência em probabilidade* e de *convergência quase certa* para podermos enfim definir a **Lei dos grandes números**.

Tendo conhecimento dos dois teoremas acima citados, podemos agora enunciar a definição da **Lei dos grandes números** segundo Magalhães (2006).

Proposição 5. *[Desigualdade de Chebyshev] Seja X uma variável aleatória com média finita. Então, para qualquer $\varepsilon \geq 0$,*

$$P(|X - E(X)| > \varepsilon) \leq \frac{Var(X)}{\varepsilon^2}.$$

A demonstração desse teorema se encontra em Ross (2010), página 460.

A seguir, temos algumas perspectivas da Lei dos Grandes Números segundo Bernoulli, Borel e Kolmogorov.

Teorema 3. *[Lei dos Grandes Números de Bernoulli, 1713] Considere uma sequência de ensaios binomiais independentes tendo a mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio. Se S_n é o número de sucessos nos primeiros n ensaios, então*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{p} p.$$

Teorema 4. *[Lei dos Grandes Números de Borel, 1909] Considere uma sequência de ensaios binomiais independentes tendo a mesma probabilidade p de sucesso em cada ensaio. Se S_n é o número de sucessos nos primeiros n ensaios, então*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} p.$$

Teorema 5. *[Lei dos Grandes Números de Kolmogorov, 1933] Sejam $X_1, X_2, \ldots$ variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas e integráveis, com $E(X_n) = \mu$ e $S_n = X_1 + ... + X_n$. Então $(X_1, X_2, \ldots)$ satisfaz a Lei Forte dos Grandes Números, isto é*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{q.c.} p.$$

As demonstrações dos teoremas de Bernoulli, de Borel e de Kolmogorov se encontram em Rolla (2013), página 107.

3 Modelos de urnas

Um modelo de urna é um experimento idealizado onde são extraídas bolas ao acaso de uma urna contendo bolas de cores com pelo menos duas cores distintas.

A ideia mais básica do modelo de urna é: uma urna contém g bolas de uma cor e v bolas de outra cor. Uma bola é retirada aleatoriamente da urna e sua cor é observada e anotada. Após repô-la na urna ou descartá-la o processo é repetido enquanto for desejado e possível.

Podemos variar os modelos de urnas colocando-se regras no experimento: repor a bola, descartar a bola, acrescentar novas bolas, criar uma urna com mais de duas cores de bolas, entre outros.

Nesta seção serão expostos algums modelos cuja modelagem matemática recae em modelos de distribuição de probabilidades conhecidos como a distribuição geométrica e outros modelos variados.

Em analogia com situações não idealizadas, podemos relacionar os modelos de urnas com trabalhos estatísticos e probabilísticos quando imaginamos uma urna como sendo uma localidade da qual, ao acaso, sorteamos um indivíduo - que seria uma bola na urna - para entrevistá-lo. As características observadas no indivíduo - olhos azuis ou não, altura maior ou menor que a altura média nacional, gênero masculino ou feminino - seriam as cores das bolas: azuis e vermelhas.

3.1 Modelo com reposição - Distribuição Binomial

Considere uma urna cujo conteúdo sejam g bolas verdes e r bolas vermelhas. São retiradas n bolas, uma a uma, ao acaso e com reposição, isto é, após cada retirada, observamos a cor da bola e então ela é recolocada na urna antes da próxima retirada. Chamemos de X o número de bolas verdes retiradas. Então X possui distribuição binomial com parâmetros n e $\dfrac{g}{g+r}$, isto é: $X \sim$ bin $\left(n, \frac{g}{g+r}\right)$.

Teorema 6. *No modelo com resposição apresentado, temos que:*

1. $P\left(X=k\right)=\binom{n}{k}\left(\dfrac{g}{g+r}\right)^{k}\left(\dfrac{r}{g+r}\right)^{n-k}$, $k=0,1,2,\ldots,n.$
2. $E\left(X\right)=\dfrac{ng}{g+r}.$
3. $Var\left(X\right)=\dfrac{ngr}{\left(g+r\right)^{2}}.$

Definiremos o evento A_i como "sair bola verde na i-ésima retirada", $i=1,2,...,n$. Como após cada retirada é feita a reposição, segue que $P(A_i)=\dfrac{g}{g+r}$.

Demonstração:

1. Temos que

$$\{X = k\} = \bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \left((A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, \cdots i_k\}}}^{n} A_j^c \right) \right)$$

$$P(X = k) = P \left(\bigcup_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \left((A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, \cdots i_k\}}}^{n} A_j^c \right) \right) \right)$$

$$P(X = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} P \left((A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}) \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, \cdots i_k\}}}^{n} A_j^c \right) \right).$$

Pela independência dos eventos, temos

$$P(X = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} \left(P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_k}) \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, \cdots i_k\}}}^{n} P(A_j^c) \right) \right)$$

$$P(X = k) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots, i_k \leq n} \left(\frac{g}{g+r} \right)^k \left(\frac{r}{g+r} \right)^{n-k}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{g}{g+r} \right)^k \left(\frac{r}{g+r} \right)^{n-k}$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{g}{g+r} \right)^k \left(\frac{r}{g+r} \right)^{n-k}.$$

A expressão encontrada acima representa a distribuição binomial.

2. Seja

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a i-ésima bola retirada for verde,} \\ 0, & \text{se a i-ésima bola retirada for vermelha.} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, ..., n$$

Então, pela Proposição 3 (página 29) podemos escrever

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i),$$

onde

$$E(X_i) = \sum_{j=0}^{1} jP(X_i = j) = 0P(X_i = 0) + 1P(X_i = 1)$$
$$E(X_i) = P(X_i = 1) = P(A_i = 1) = \frac{g}{g+r}.$$

Como

$$E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g}{g+r} = \frac{g}{g+r}\sum_{i=1}^{n} 1 = n\frac{g}{g+r}.$$

Portanto,

$$E(X) = \frac{ng}{g+r}.$$

3. Primeiro encontraremos a expressão de $E(X^2)$. Consideremos as variáveis aleatórias X_i definidas em 2. Sabemos que

$$E(X_i^2) = \sum_{j=0}^{1} j^2P(X = j) = 0^2P(X_i = 0) + 1^2P(X_i = 1)$$
$$E(X_i^2) = P(X_i = 1) = P(A_i) = \frac{g}{g+r}.$$

Logo $E(X_i^2) = \dfrac{g}{g+r}$, e portanto

$$\begin{aligned}
Var(X_i) &= E(X_i^2) - E(X_i)^2 \\
Var(X_i) &= \frac{g}{g+r} - \left(\frac{g}{g+r}\right)^2 \\
Var(X_i) &= \frac{g}{g+r}\left(1 - \frac{g}{g+r}\right) \\
Var(X_i) &= \frac{g}{g+r}\left(\frac{r}{g+r}\right).
\end{aligned}$$

Mas, pela propriedade da variância $Var(X) = Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$, temos

$$Var(X) = \frac{ngr}{(g+r)^2}.$$

■

Exemplo 11. *Consideremos que uma urna tenha 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. São retiradas 3 bolas da urna, uma a uma, ao acaso e com reposição.*

a) *A probabilidade de se retirar 2 bolas verdes dentre as três extraídas é* $\dfrac{300}{729}$*;*

b) *O número médio de bolas verdes extraídas é* $\dfrac{1215}{729}$*;*

c) *A variância do número de bolas verdes retiradas é* $\dfrac{60}{81}$*.*

Resolução

a) No dado problema, temos que $g = 5$, $r = 4$, $n = 3$ e $k = 2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
P(X = 2) &= \binom{3}{2}\left(\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right)^1 \\
&= 3.\left(\frac{5}{9}\right)^2\left(\frac{4}{9}\right) \\
&= \frac{300}{729}.
\end{aligned}$$

b) Usando a expressão encontrada para o cálculo da esperança de X numa distribuição binomial, temos

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{3.5}{5+4} \\ &= \frac{15}{9}. \end{aligned}$$

c) E a variância é

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{3.5.4}{(5+4)^2} \\ &= \frac{60}{81}. \end{aligned}$$

3.2 Modelo sem reposição - Distribuição Hipergeométrica

Seja uma urna que contenha g bolas verdes e r bolas vermelhas. São retiradas n bolas, uma a uma, ao acaso e sem reposição. Chamamos de X o número de bolas verdes retiradas. Então X possui distribuição hipergeométrica com parâmetros g, $g+r$ e n, isto é, $X \sim \text{hiper}(g, g+r, n)$.

Teorema 7. *Na situação acima, temos que:*

1. $P(X = k) = \dfrac{\binom{g}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{g+r}{n}}$, com $max\{0, n-r\} \leq k \leq min\{g, n\}$.
2. $E(X) = \dfrac{ng}{g+r}$.
3. $Var(X) = \dfrac{ngr}{(g+r)^2}\left(\dfrac{g+r-n}{g-1}\right)$.

Demonstração:

Sem perda de generalidade, suponhamos que X pode assumir todos os valores $0, 1, 2, 3, ..., n$.

1. Primeiro observe que do ponto de vista de distribuição de probabilidade de X, retirar n bolas uma a uma ao acaso e sem reposição, equivale a retirar de uma vez só n bolas.

   Pelo *Princípio Fundamental da Contagem*, a cardinalidade de $\{X = k\}$ é dado pelo produto $C_{g,k}.C_{r,n-k}$ e sendo Ω o espaço amostral do problema, sua cardinalidade é dada por $C_{g+r,n}$.

   Fazendo uso da definição clássica de probabilidade, então:

$$
\begin{aligned}
P(X = k) &= \frac{|\{X = k\}|}{|\Omega|} \\
P(X = k) &= \frac{C_{g,k}.C_{r,n-k}}{C_{g+r,n}} \\
P(X = k) &= \frac{\binom{g}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{g+r}{n}}.
\end{aligned}
$$

2. Suponhamos uma enumeração de 1 a g para as bolas verdes. Se X dá o número de bolas verdes retiradas, então pode-se escrever $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{g} X_i$, onde

$$
X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a bola verde de número } i \text{ é retirada,} \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, ..., g
$$

   Seja A_i o evento onde a i-ésima bola verde é retirada.

$$
E(X) = E\left(\sum_{i=1}^{g} X_i\right) = \sum_{i=1}^{g} E(X_i)
$$

   e

$$
\begin{aligned}
E(X_i) &= 1P(X_i=1)+0P(X_i=0)\\
&= P(X_i=1)=P(A_i)\\
&= \frac{\binom{1}{1}\binom{g+r-1}{n-1}}{\binom{g+r}{n}}\\
&= \frac{\frac{(g+r-1)!}{(n-1)!(g+r-n)!}}{\frac{(g+r)!}{n!(g+r-n)!}} = \frac{\frac{(g+r-1)!}{(n-1)!}}{\frac{(g+r)!}{n!}}\\
&= \frac{n}{g+r}.
\end{aligned}
$$

Usando a Proprosição 3 na página 29, temos

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{g} E(X_i) = \sum_{i=1}^{g} \frac{n}{g+r}\\
&= \frac{ng}{g+r}.
\end{aligned}
$$

3. Vamos calcular $E(X^2)$:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{\binom{g}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{g+r}{n}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{\frac{g!}{k!(g-k)!}\binom{r}{n-k}}{\frac{(g+r)!}{n!((g+r)-n)!}}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2 \frac{\frac{g(g-1)!}{k(k-1)!(g-k)!}\binom{r}{n-k}}{\frac{(g+r)(g-1+r)!}{n(n-1)!((g+r)-n)!}}\\
&= n\frac{g}{g+r} \sum_{k=1}^{n} k \frac{\frac{(g-1)!}{(k-1)!(g-k)!}\binom{r}{n-k}}{\frac{(g-1+r)!}{(n-1)!((g+r)-n)!}},
\end{aligned}
$$

mas, chamando $k-1=s \Rightarrow k=s+1 \Rightarrow s=0$ e $k=n \Rightarrow s+1=n \Rightarrow s=n-1$, logo

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= n\frac{g}{g+r}\sum_{s=0}^{n-1}(s+1)\frac{\frac{(g-1)!}{s!((g-1)-s)!}\binom{r}{(n-1)-s}}{\frac{(g-1+r)!}{(n-1)!((g+r)-n)!}} \\
&= n\frac{g}{g+r}\left(\sum_{s=0}^{n-1}s\frac{\frac{(g-1)!}{s!((g-1)-s)!}\binom{r}{(n-1)-s}}{\frac{(g-1+r)!}{(n-1)!((g+r)-n)!}}+\sum_{s=0}^{n-1}1\frac{\frac{(g-1)!}{s!((g-1)-s)!}\binom{r}{(n-1)-s}}{\frac{(g-1+r)!}{(n-1)!((g+r)-n)!}}\right) \\
&= n\frac{g}{g+r}\left(\sum_{s=0}^{n-1}s\frac{\binom{g-1}{s}\binom{r}{(n-1)-s}}{\binom{(g-1)+r}{n-1}}+\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\binom{g-1}{s}\binom{r}{(n-1)-s}}{\binom{(g-1)+r}{n-1}}\right). \qquad \text{(I)}
\end{aligned}
$$

Mas

$$
\sum_{s=0}^{n-1}s\frac{\binom{g-1}{s}\binom{r}{(n-1)-s}}{\binom{(g-1)+r}{n-1}}=(n-1)\frac{g-1}{g-1+r}
$$

e

$$
\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\binom{g-1}{s}\binom{r}{(n-1)-s}}{\binom{(g-1)+r}{n-1}}=\sum_{s=0}^{n-1}P(X=s)=1.
$$

Portanto, substituindo as duas expressões anteriores em (I), ficamos com

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= n\frac{g}{g+r}\left((n-1)\frac{g-1}{g-1+r}+1\right) \\
&= n\frac{g}{g+r}(n-1)\frac{g-1}{g-1+r}+n\frac{g}{g+r} \\
&= E(X^2)=\frac{ng(n-1)(g-1)}{(g+r)(g-1+r)}+n\frac{g}{g+r}. \qquad \text{(II)}
\end{aligned}
$$

Para achar a variância da distribuição hipergeométrica, basta substituirmos $E(X^2)$ e $E(X)^2$ em $Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$.

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{ng(n-1)(g-1)}{(g+r)(g-1+r)} + n\frac{g}{g+r} - \left(n\frac{g}{g+r}\right)^2 \\
&= n\frac{g}{g+r}\left((n-1)\frac{g-1}{g-1+r} + 1 - n\frac{g}{g+r}\right) \\
&= n\frac{g}{g+r}\left(n\frac{(g-1)(g+r)}{(g-1+r)(g+r)} - 1\frac{(g-1)(g+r)}{(g-1+r)(g+r)} + 1\frac{(g-1+r)(g+r)}{(g-1+r)(g+r)} - n\frac{g(g-1+r)}{(g+r)(g-1+r)}\right) \\
&= n\frac{g}{g+r}\left(n\frac{g^2+gr-g-r}{(g-1+r)(g+r)} - 1\frac{g^2+gr-g-r}{(g-1+r)(g+r)} + 1\frac{g^2+gr-g-r+rg+r^2}{(g-1+r)(g+r)} - n\frac{g^2-g+gr}{(g+r)(g-1+r)}\right) \\
&= n\frac{g}{g+r}\left(\frac{-nr+gr+r^2}{(g+r)(g-1+r)}\right) \\
&= n\frac{g}{g+r}\left(\frac{r(g+r-n)}{(g+r)(g-1+r)}\right) \\
&= n\frac{gr}{(g+r)^2}\left(\frac{g+r-n}{g-1+r}\right).
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 12. *Consideremos uma urna que tenha 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. São retiradas 3 bolas da urna, uma a uma, ao acaso e sem reposição.*

a) *A probabilidade de se retirar 2 bolas verdes dentre as três extraídas é* $\frac{20}{41}$*;*

b) *O número médio de bolas verdes retiradas é* $\frac{15}{9}$*;*

c) *A variância do número de bolas verdes retiradas é* $\frac{10}{9}$*.*

Resolução

a) No dado problema, temos que $g = 5$, $r = 4$, $n = 3$ e $k = 2$. Portanto,

$$P(X = 2) = \frac{\binom{5}{2}\binom{4}{1}}{\binom{9}{3}} = \frac{40}{84} = 0,4762.$$

Portanto, a probabilidade de se retirar duas bolas verdes da urna ao fazer 3 extrações sucessivas e sem reposição é 0,4762.

b) Usando a expressão encontrada para o cálculo da esperança numa distribuição Hipergeométrica, temos,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{3.5}{9} = \frac{15}{9} \\
&= 1,667.
\end{aligned}
$$

c) Usando a expressão da variância, encontramos que

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{3.5.4}{9^2}.\frac{(5+4-3)}{5-1} = \frac{60}{81}.\frac{6}{4} \\ &= \frac{360}{324} \\ &= 1,111. \end{aligned}$$

3.3 Primeiro modelo com reposição e acréscimo de bolas

Seja uma urna cujo conteúdo é g bolas verdes e r bolas vermelhas. São retiradas n bolas, uma a uma, ao acaso e com reposição. Após cada retirada, acrescentamos a bolas verdes e b bolas vermelhas. Chamemos de X o número de bolas verdes retiradas.

Teorema 8. *Seja $p(k) = P(X = k)$. Na situação acima, temos que:*

1. $P(k) = \displaystyle\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} \left\{ \left[\prod_{l=1}^{k} \frac{g+(i_l-1)a}{g+r+(i_l-1)(a+b)} \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{n} \frac{r+(j-1)a}{g+r+(j-1)(a+b)} \right] \right\}.$

2. $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{g+(i-1)a}{g+r+(i-1)(a+b)}.$

3. $Var(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{g+(i-1)a}{g+r+(i-1)(a+b)} \right) \left(\frac{r+(i-1)b}{g+r+(i-1)(a+b)} \right) \right].$

Demonstração:

1. Para melhor visualização do que acontece a cada retirada, considere a tabela abaixo que mostra a quantidade de bolas na urna em cada retirada.

Tabela 2: Quantidades de bolas vermelhas e verdes na urna após cada retirada

Retirada	**Bolas vermelhas**	**Bolas verdes**	**Total**
1ª	r	g	$g+r$
2ª	$r+b$	$g+a$	$g+r+(a+b)$
3ª	$r+2b$	$g+2a$	$g+r+2(a+b)$
4ª	$r+3b$	$g+3a$	$g+r+3(a+b)$
5ª	$r+4b$	$g+4a$	$g+r+4(a+b)$
6ª	$r+5b$	$g+5a$	$g+r+5(a+b)$
7ª	$r+6b$	$g+6a$	$g+r+6(a+b)$
8ª	$r+7b$	$g+7a$	$g+r+7(a+b)$
nª	$r+(n-1)b$	$g+(n-1)a$	$g+r+(n-1)(a+b)$

$$\{X=k\} = \bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left((A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\cap\left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{n} A_j^c\right)\right)$$

$$P(X=k) = P\left(\bigcup_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left((A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\cap\left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{n} A_j^c\right)\right)\right)$$

$$P(X=k) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n} P\left((A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_k})\cap\left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{n} A_j^c\right)\right)$$

$$P(X=k) = \sum_{1\leq i_1<i_2<\ldots<i_k\leq n}\left(P(A_{i_1})\ldots P(A_{i_k})\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{n} P(A_j^c)\right)\right).$$

Mas,

i) $P(A_1) = \dfrac{g}{g+r}$;

$ii)\ P(A_2) = \dfrac{g+a}{g+r+(a+b)};$

$iii)\ P(A_3) = \dfrac{g+2a}{g+r+2(a+b)};$

$iv)\ P(A_i) = \dfrac{g+(i-1)a}{g+r+(i-1)(a+b)};$

$v)\ P(A_i^c) = \dfrac{r+(i-1)b}{g+r+(i-1)(a+b)}.$

Portanto,

$$p(k) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \left\{ \left[\prod_{l=1}^{k} \frac{g+(i_l-1)a}{g+r+(i_l-1)(a+b)} \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, \cdots, i_k\}}}^{n} \frac{r+(j-1)a}{g+r+(j-1)(a+b)} \right] \right\}.$$

2. Vamos definir

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a i-ésima bola retirada é verde,} \\ 0, & \text{se a i-ésima bola retirada é vermelha.} \end{cases} \qquad i = 1, 2, 3, ..., n$$

Podemos escrever $E(X_i)$ como

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0P(X_i = 0) + 1P(X_i = 1) \\ &= P(X_i = 1) = P(A_i). \end{aligned}$$

Logo:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

de onde tiramos que

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{g+(i-1)a}{g+r+(i-1)(a+b)}.$$

3. Primeiro vamos encontrar a expressão de $E(X_i^2)$.

$$\begin{aligned} E(X_i^2) &= 0^2P(X_i = 0) + 1^2P(X_i = 1) \\ &= P(X_i = 1) = P(A_i) \\ &= \frac{g + (i-1)a}{g + r + (i-1)(a+b)}. \end{aligned}$$

Então, usando a Proposição 4 (página 30) que define a variância de uma soma de variáveis

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i),$$

temos

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{g + (i-1)a}{g + r + (i-1)(a+b)} - \left(\frac{g + (i-1)a}{g + r + (i-1)(a+b)} \right)^2 \right].$$

E colocando $\dfrac{g + (i-1)a}{g + r + (i-1)(a+b)}$ em evidência e fazendo mais alguns cálculos, encontramos a expressão que nos dá o valor da variância:

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{g + (i-1)a}{g + r + (i-1)(a+b)} \right) \left(\frac{r + (i-1)b}{g + r + (i-1)(a+b)} \right) \right].$$

■

Comentário: Observe que o cálculo da distribuição $p(k) = P(X = k)$ gera uma expressão relativamente grande, complicada de se obter e a sua equação não pode ser simplificada.

Exemplo 13. *Consideremos uma urna que contenha 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. Retiremos 3 bolas da urna, uma a uma, ao acaso e com reposição. Após cada retirada, acrescentamos 3 bolas verdes e 2 bolas vermelhas.*

a) *A probabilidade de se retirar 2 bolas verdes dentre três extraídas é* $\frac{2}{9}$*;*

b) *A média do número de bolas verdes retiradas em 3 extrãções é* $\frac{71}{63}$*;*

c) *A variância do número de bolas verdes retiradas em 3 extrações é* $\frac{7808}{15876}$.

Resolução

a) No dado problema, temos que $g = 5$, $r = 4$, $n = 3$, $k = 2$, $a = 3$ e $b = 2$.

Portanto,

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \left\{ \left[\prod_{l=1}^{2} \left(\frac{5+(i_l-1)3}{5+4+(i_l-1)5} \right) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2\}}}^{3} \left(\frac{4+(j-1)3}{5+4+(j-1)5} \right) \right] \right\} \\
&= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 3} \left\{ \left[\prod_{l=1}^{2} \left(\frac{2+3i_l}{4+5i_l} \right) \right] \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i_1, i_2\}}}^{3} \left(\frac{1+3j}{4+5j} \right) \right] \right\} \\
&= \left(\frac{2+3.1}{4+5.1} \right) \left(\frac{2+3.2}{4+5.2} \right) \left(\frac{1+3.3}{4+5.3} \right) + \left(\frac{2+3.1}{4+5.1} \right) \left(\frac{2+3.3}{4+5.3} \right) \\
&\quad \left(\frac{1+3.2}{4+5.2} \right) + \left(\frac{2+3.2}{4+5.2} \right) \left(\frac{2+3.3}{4+5.3} \right) \left(\frac{1+3.2}{4+5.2} \right) \\
&= \frac{5}{9} \frac{8}{14} \frac{10}{19} + \frac{5}{9} \frac{11}{19} \frac{7}{14} + \frac{8}{14} \frac{11}{19} \frac{4}{9} \\
&= \frac{379}{798}.
\end{aligned}
$$

Portanto, a probabilidade de se retirar duas bolas verdes da urna ao fazer 2 extrações sucessivas e com reposição é $\frac{379}{798}$.

b) Usando a expressão encontrada para o cálculo da esperança, temos:

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{g+(i-1)a}{g+r+(i-1)(a+b)} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{5+(i-1)3}{9+(i-1)5} \\
&= \sum_{i=1}^{2} \frac{2+3i}{4+5i} = \frac{2+3.1}{4+5.1} + \frac{2+3.2}{4+5.2} \\
&= \frac{5}{9} + \frac{8}{14} = \frac{71}{63} \\
&= 1,127
\end{aligned}
$$

c) Usando a expressão encontrada para a variância,

$$
Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{g+(i-1)a}{g+r+(i-1)(a+b)} \right) \cdot \left(\frac{r+(i-1)b}{g+r+(i-1)(a+b)} \right) \right],
$$

temos

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{2} \left[\left(\frac{5+(i-1)3}{9+(i-1)5} \right) \left(\frac{4+(i-1)2}{9+(i-1)5} \right) \right] \\
&= \sum_{i=1}^{2} \left[\left(\frac{2+3i}{4+5i} \right) \left(\frac{2+2i}{4+5i} \right) \right] \\
&= \left(\frac{2+3.1}{4+5.1} \right) \left(\frac{2+2.1}{4+5.1} \right) + \left(\frac{2+3.2}{4+5.2} \right) \left(\frac{2+2.2}{4+5.2} \right) \\
&= \frac{5}{9} . \frac{4}{9} + \frac{8}{14} . \frac{6}{14} = \frac{7808}{15876} \\
&= 0,4918.
\end{aligned}
$$

3.4 Segundo modelo com reposição e acréscimo de bolas

Seja uma urna contendo g bolas verdes e r bolas vermelhas. São retiradas n bolas, uma a uma, ao acaso e com reposição. Após cada retirada, acrescentamos tantas bolas verdes, até que a proporção de bolas vermelhas, em relação ao total seja metade da proporção anterior e, assim por diante. Chamamos de X o número de bolas verdes retiradas.

Teorema 9. *Seja A_i o evento "sair bola verde na i-ésima retirada". Na situação acima, temos que:*

1. $P(A_i) = \dfrac{2^{i-1}g + (2^{i-1} - 1)r}{2^{i-1}(g + r)}$.

2. $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{2^{i-1}g + (2^{i-1} - 1)r}{2^{i-1}(g + r)}$.

3. $Var(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{2^{i-1}g + (2^{i-1} - 1)r}{2^{2(i-1)}(g + r)^2}$.

Demonstração:

1. Para melhor visualização do que acontece a cada retirada, consideremos a tabela 3:

Tabela 3: Quantidades de bolas verdes e a razão entre o número de bolas vermelhas e totais após cada retirada

Retirada	Bolas verdes	Bolas vermelhas	Total	Razão
1ª	g	r	$2^0(g + r)$	$\frac{r}{2^0(g+r)}$
2ª	$2g + r$	r	$2^1(g + r)$	$\frac{r}{2^1(g+r)}$
3ª	$4g + 3r$	r	$2^2(g + r)$	$\frac{r}{2^2(g+r)}$
4ª	$8g + 7r$	r	$2^3(g + r)$	$\frac{r}{2^3(g+r)}$
5ª	$16g + 15r$	r	$2^4(g + r)$	$\frac{r}{2^4(g+r)}$
6ª	$32g + 21r$	r	$2^5(g + r)$	$\frac{r}{2^5(g+r)}$
7ª	$64g + 63r$	r	$2^6(g + r)$	$\frac{r}{2^6(g+r)}$
nª	$2^{n-1}g + (2^{n-1} - 1)r$	r	$2^{n-1}(g + r)$	$\frac{r}{2^{n-1}(g+r)}$

E pela definição clássica, a probabilidade de A_i nas i-ésimas retiradas são:

- $P(A_i) = \dfrac{r}{2^{i-1}(g+r)}$,
- $P(A_2) = \dfrac{2g+r}{2^1(g+r)}$,
- $P(A_3) = \dfrac{4g+3r}{2^2(g+r)}$,

  $\ldots$
- $P(A_i) = \dfrac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)}$.

2. Vamos definir

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a i-ésima bola retirada for da cor verde,} \\ 0, & \text{se a i-ésima bola retirada for da cor vermelha.} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, ..., n.$$

Então, a esperança de X_i é

$$E(X_i) = 0.P(X_i = 0) + 1.P(X_i = 1) = P(A_i) = \frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)}.$$

Portanto,

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)}.$$

3. Temos ainda que

$$\begin{aligned} E(X_i^2) &= 0^2 P(X_i = 0) + 1^2 P(X_i = 1) \\ &= P(X_i = 1) = P(A_i) \\ &= \frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)}. \end{aligned}$$

Logo:

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

Pela proposição 4 da página 30, a variância de X em função de X_i é

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) \\ Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} [E(X_i^2) - E(X_i)^2] \end{aligned}$$

podemos escrever que

$$\begin{aligned} Var(X) &= \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)} - \left(\frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)} \right)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)} \right) \left(\frac{2^{i-1}(g+r) - 2^{i-1}g - (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)} \right) \left(\frac{1}{2^{i-1}(g+r)} \right) \right] \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{2(i-1)}(g+r)^2}. \end{aligned}$$

■

Para esse problema serão consideradas apenas 3 extrações devido a obtenção da distribuição de X ser, em geral, complicada.

Vamos definir X, como a variável aleatória que dá o número de bolas verdes retiradas e A_i o evento “sair bola verde na i-ésima retirada”. Assim, os valores que a variável X assume são $X = 0, 1, 2, 3$.

Teremos então:

Para $X = 0$,

$$
\begin{aligned}
P(X=0) &= P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c) \\
&= P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3^c) \\
&= \frac{b}{g+r}\frac{b}{2(g+r)}\frac{b}{4(g+r)} \\
&= \frac{b^3}{2^3(g+r)^3}.
\end{aligned}
$$

Para $X=1$,

$$
\begin{aligned}
P(X=1) &= P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3) + P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c) + P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c) \\
&= P(A_1^c)P(A_2^c)P(A_3) + P(A_1^c)P(A_2)P(A_3^c) + P(A_1)P(A_2^c)P(A_3^c) \\
&= \frac{r}{(g+r)}\frac{r}{2(g+r)}\frac{4g+3r}{4(g+r)} + \frac{r}{(g+r)}\frac{2g+r}{2(g+r)}\frac{r}{4(g+r)} + \\
&\quad \frac{g}{(g+r)}\frac{r}{2(g+r)}\frac{r}{4(g+r)} \\
&= \frac{7gr^3+4r^2}{2^3(g+r)^3}.
\end{aligned}
$$

Para $X=2$,

$$
\begin{aligned}
P(X=2) &= P(A_1^c \cap A_2 \cap A_3) \cup P(A_1 \cap A_2^c \cap A_3) \cup P(A_1 \cap A_2 \cap A_3^c) \\
&= P(A_1^c)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(A_2^c)P(A_3) + P(A_1)P(A_2)P(A_3^c) \\
&= \frac{r}{(g+r)}\frac{2g+r}{2(g+r)}\frac{4g+3r}{4(g+r)} + \frac{g}{(g+r)}\frac{r}{2(g+r)}\frac{4g+3r}{4(g+r)} + \\
&\quad \frac{g}{(g+r)}\frac{2g+r}{2(g+r)}\frac{r}{4(g+r)} \\
&= \frac{14g^2r+14gr^2+3b^3}{2^3(g+r)}.
\end{aligned}
$$

Para $X=3$,

$$
\begin{aligned}
P(X=3) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\
&= P(A_1)P(A_2)P(A_3) \\
&= \frac{g}{(g+r)} \frac{2g+r}{2(g+r)} \frac{4g+3r}{4(g+r)} \\
&= \frac{8g^3+10g^2r+3gr^3}{2^3(g+r)^3}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 14. *Consideremos uma urna que tenha 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. São retiradas 3 bolas da urna, uma a uma, ao acaso e com reposição. Após cada retirada, acrescenta-se bolas verdes até que a proporção de bolas vermelhas em relação ao total seja metade da proporção anterior e, assim por diante.*

a) *A probabilidade de se retirar bola verde em cada uma das três retiradas é* $P(A_1) = \frac{5}{9}$, $P(A_2) = \frac{7}{9}$ *e* $P(A_3) = \frac{8}{9}$*;*

b) *O número médio de bolas verdes retiradas é* $\frac{20}{9}$*;*

c) *A variância do número de bolas verdes retiradas é* $P(A_i) = \frac{7}{54}$.

Resolução

a) No dado problema, temos que $g = 5$, $r = 4$ e $n = 3$. Portanto,

$$P(A_i) = \frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)},$$

onde A_i é o evento "sair bolar verde na i-ésima retirada".

$$
\begin{aligned}
P(A_1) &= \frac{2^{1-1}5 + (2^{1-1}-1)4}{9.2^{1-1}} = \frac{5}{9} = 0,555. \\
P(A_2) &= \frac{2^{2-1}5 + (2^{2-1}-1)4}{9.2^{2-1}} = \frac{14}{18} = 0,777. \\
P(A_3) &= \frac{2^{3-1}5 + (2^{3-1}-1)4}{9.2^{3-1}} = \frac{32}{36} = 0,889.
\end{aligned}
$$

b) Usando a expressão encontrada para o cálculo da esperança nesse modelo de urna, temos

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{i-1}(g+r)} \\
E(X) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{5.2^{i-1} + 4.(2^{i-1}-1)}{9.2^{i-1}} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{9.2^{i-1} - 4}{9.2^{i-1}} \\
&= \frac{9.2^{1-1}-4}{9.2^{1-1}} + \frac{9.2^{2-1}-4}{9.2^{2-1}} + \frac{9.2^{3-1}-4}{9.2^{3-1}} \\
&= \frac{9.2^{0}-4}{9.2^{0}} + \frac{9.2^{1}-4}{9.2^{1}} + \frac{9.2^{2}-4}{9.2^{2}} \\
&= \frac{5}{9} + \frac{14}{18} + \frac{32}{36} \\
&= \frac{20}{9} \\
&= 2,2222.
\end{aligned}$$

c) Usando a expressão encontrada para a variância,

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{2^{i-1}g + (2^{i-1}-1)r}{2^{2(i-1)}(g+r)^2},$$

temos que

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= \sum_{i=1}^{3} \frac{5.2^{i-1} + 4.2^{i-1} - 4}{2^{2(i-1)}.9^2} \\
&= \sum_{i=1}^{3} \frac{9.2^{i-1} - 4}{81.2^{2(i-1)}} \\
&= \frac{9.2^{1-1} - 4}{81.2^{2(1-1)}} + \frac{9.2^{2-1} - 4}{81.2^{2(2-1)}} + \frac{9.2^{3-1} - 4}{81.2^{2(3-1)}} \\
&= \frac{9.2^{0} - 4}{81.2^{2.0}} + \frac{9.2^{1} - 4}{81.2^{2.1}} + \frac{9.2^{2} - 4}{81.2^{2.2}} \\
&= \frac{9.1 - 4}{81.1} + \frac{9.2 - 4}{81.4} + \frac{9.4 - 4}{81.16} \\
&= \frac{5}{81} + \frac{14}{324} + \frac{32}{1296} \\
&= \frac{7}{54} \\
&= 0,1296.
\end{aligned}
$$

3.5 Modelo com reposição - Distribuição Geométrica

Consideremos uma urna cujo conteúdo seja: g bolas verdes e r bolas vermelhas. São retiradas bolas, uma a uma, ao acaso e com reposição. Chamamos de X o número de bolas retiradas até sair bola verde pela primeira vez. Então X possui **distribuição geométrica** com parâmetro $\frac{g}{g+r}$, isto é: $X \sim \text{Geo}\left(\frac{g}{g+r}\right)$.

Teorema 10. *No modelo com reposição descrito anteriormente, temos que:*

1. $P(X = k) = \frac{g}{g+r}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-1}$, $k = 1, 2, 3, ...$
2. $E(X) = \frac{g+r}{g}$.
3. $Var(X) = \frac{g+r}{g^2}r$.

Demonstração:

1. Vamos definir o evento A_i "sair bola verde na i-ésima retirada", $i = 1, 2, ..., k$ onde i é a ordem da retirada em que sai a primeira bola verde.

Então:

$$\begin{aligned}
\{X=k\} &= \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\right) \cap A_k \\
P(X=k) &= P\left[\left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\right) \cap (A_k)\right] = P(A_1^c \cap A_2^c \cap ... \cap A_{k-1}^c)P(A_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} P(A_i^c)\right) P(A_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{r}{g+r}\right) \frac{g}{g+r} \\
&= \frac{g}{g+r}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-1}, \quad k=1,2,...
\end{aligned}$$

2. Pela definição de esperança matemática (página 28),

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k\left(\frac{g}{g+r}\right)\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-1}.$$

Vamos substituir $\frac{r}{g+r}$ por m na equação acima, ficando com

$$E(X) = \frac{g}{g+r}\sum_{k=1}^{\infty} km^{k-1} = \frac{g}{g+r}(1+2m^1+3m^2+...+km^{k-1}+...).$$

Reparemos que $1+2m^1+3m^2+...+km^{k-1}+... = \frac{\partial}{\partial m}(m+m^2+m^3+m^4+...)$.

Portanto,

$$E(X) = \frac{g}{g+r}\left[\frac{\partial}{\partial m}(m+m^2+m^3+m^4+...)\right].$$

Observemos que a soma $m+m^2+m^3+m^4+\cdots$ é uma progressão geométrica de razão m, $0<m<1$, primeiro termo m e de infinitos termos.

Portanto: $m+m^2+m^3+m^4+\cdots = \frac{m}{1-m}$.

Logo,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \frac{g}{g+r}\left[\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m}{1-m}\right)\right] \\
&= \frac{g}{g+r}\left[\frac{1}{(1-m)^2}\right] \\
&= \frac{g}{g+r}\left[\frac{1}{(1-\frac{r}{g+r})^2}\right] \\
&= \frac{g+r}{g}.
\end{aligned}
$$

3. Encontremos a expressão de $E(X^2)$:

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(X=k) \\
&= 1^2\frac{g}{g+r} + 2^2\frac{g}{g+r}\left(\frac{r}{g+r}\right)^1 + 3^2\frac{g}{g+r}\left(\frac{r}{g+r}\right)^2 + ... \\
&= \frac{g}{g+r}\left[1^2 + 2^2\left(\frac{r}{g+r}\right)^1 + 3^2\left(\frac{r}{g+r}\right)^2 + ...\right].
\end{aligned}
$$

Chamando $m = \dfrac{r}{g+r}$ e substituindo na expressão acima, fica

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= \frac{g}{g+r}(1^2+2^2m^1+3^2m^2+4^2m^3...)\\
&= \frac{g}{g+r}\left[\frac{\partial}{\partial m}(m+2m^2+3m^3+4m^4+...)\right]\\
&= \frac{g}{g+r}\left[\frac{\partial}{\partial m}[m(1+2m+3m^2+4m^3+...)]\right]\\
&= \frac{g}{g+r}\left[\frac{\partial}{\partial m}\left[m\left(\frac{\partial}{\partial m}(m+m^2+m^3+m^4+...)\right)\right]\right]\\
&= \frac{g}{g+r}\left[\frac{\partial}{\partial m}\left[m\left(\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{m}{1-m}\right)\right)\right]\right]\\
&= \frac{g}{g+r}\left[\frac{\partial}{\partial m}\left[\frac{m}{(1-m)^2}\right]\right]\\
&= \frac{g}{g+r}\frac{1+m}{(1-m)^3}\\
&= \frac{g}{g+r}\frac{(1+\frac{r}{g+r})}{(1-\frac{r}{g+r})^3}\\
&= \frac{(g+r)(g+2r)}{g^2}.
\end{aligned}
$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
Var(X) = &= E(X^2)-E(X)^2 = \frac{(g+r)(g+2r)}{g^2} - \left(\frac{g+r}{g}\right)^2\\
&= \frac{g+r}{g^2}r.
\end{aligned}
$$

■

Exemplo 15. *Consideremos uma urna que tenha 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. São retiradas bolas da urna, uma a uma, ao acaso, verificada sua cor e devolvida à urna.*

a) *A probabilidade de se retirar bola verde na 1ª, 2ª, 3ª e 4ª retiradas são:*

$P(X=1)=\frac{5}{9}$, $P(X=2)=\frac{20}{81}$, $P(X=3)=\frac{80}{729}$ *e* $P(X=4)=\frac{320}{6561}$;

b) *O número médio de retiradas até sair a primeira bola verde é* $\frac{9}{5}$*;*

c) *A variância do número de retiradas até sair a primeira bola verde é* $\frac{36}{25}$*.*

Resolução

a) No dado problema, temos que $g = 5$, $r = 4$, e $k = 1, 2, 3$ e 4. Portanto,

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \frac{g}{g+r}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-1} \\ &= \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{k-1}. \end{aligned}$$

Assim:

- $P(X = 1) = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{1-1} = \frac{5}{9} = 0,555;$
- $P(X = 2) = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{2-1} = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right) = 0,247;$
- $P(X = 3) = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{3-1} = \frac{5}{9}\left(\frac{16}{81}\right) = 0,110;$
- $P(X = 4) = \frac{5}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{4-1} = \frac{5}{9}\left(\frac{64}{729}\right) = 0,049.$

b) Usando a expressão encontrada para o cálculo da esperança numa distribuição geométrica, temos que

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{g+r}{g} \\ &= \frac{9}{5} \\ &= 1,8. \end{aligned}$$

c) Usando a expressão encontrada para a variância, temos que

$$
\begin{aligned}
Var(X) &= r\frac{g+r}{g^2} \\
&= 4\frac{9}{5^2} \\
&= \frac{36}{25} \\
&= 1,44.
\end{aligned}
$$

3.6 Modelo com reposição - Distribuição de Pascal

Consideremos uma urna cujo conteúdo seja: g bolas verdes e r bolas vermelhas. Desejamos retirar n bolas verdes, uma a uma, ao acaso e com reposição. Chamamos de X o número de retiradas até sair a n-ésima bola verde. Então X possui distribuição de Pascal com parâmetros $\dfrac{g}{g+r}$ e n, isto é, $X \sim$ Pascal $\left(\dfrac{g}{g+r}, n\right)$.

Teorema 11. *Na situação descrita anteriormente, temos que:*

1. $P(X=k) = \binom{k-1}{n-1}\left(\dfrac{r}{g+r}\right)^{k-n}\left(\dfrac{g}{g+r}\right)^{n}$, $k = n, n+1, \cdots$
2. $E(X) = n\dfrac{g+r}{g}$.
3. $Var(X) = nr\dfrac{g+r}{g^2}$.

Vamos definir o evento A_i como "sair bola verde na i-ésima retirada", com $i = 1, 2, ..., n$ e $P(A_i) = \dfrac{g}{g+r}$.

Demonstração:

1. Então, para $k \geq n$:

$$
\begin{aligned}
\{X=k\} &= \bigcup_{1\le i_1<\ldots<i_{n-1}\le k-1}\left((A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_{n-1}})\cap\left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{k-1} A_j^c\right)\cap A_k\right)\\
P\left(X=k\right) &= P\left[\bigcup_{1\le i_1<\ldots<i_{n-1}\le k-1}\left((A_{i_1}\cap\ldots\cap A_{i_{n-1}})\cap\left(\bigcap_{\substack{j=1\\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{k-1} A_j^c\right)\cap A_k\right)\right]\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{n-1}\le k-1}\left[P(A_{i_1})\cdot\ldots\cdot P(A_{i_{n-1}})\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\notin\{i_1,\cdots,i_k\}}}^{k-1} A_j^c\right)P(A_k)\right]\\
&= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{n-1}\le k-1}\left[\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n-1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-n}\frac{g}{g+r}\right].
\end{aligned}
$$

Os $n-1$ sucessos ocorrem entre as $k-1$ primeiras retiradas, portanto,

$$
P\left(X=k\right)=\binom{k-1}{n-1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-n}.\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n}, k=n,n+1,\ldots
$$

2. Usando $E(X^t)=\sum_{x_i=n}^{\infty} x_i^t.P(X=x_i)$ (veja Ross(2010), página 168), temos

$$
E(X^t)=\sum_{k=n}^{\infty} k^t\binom{k-1}{n-1}\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-n}.
$$

Como $k\binom{k-1}{n-1}=n\binom{k}{n}$, então

$$
E(X^t)=n\frac{g+r}{g}\sum_{k=n}^{\infty} k^{t-1}\binom{k}{n}\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n+1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-n}
$$

Fazendo-se $k=m-1$ na equação acima, ficamos com

$$
\begin{aligned}
E(X^t) &= n\frac{g+r}{g}\sum_{k=n}^{\infty}(m-1)^{t-1}\binom{m-1}{n}\left(\frac{g}{g+r}\right)^{n+1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{m-1-n} \\
&= n\frac{g+r}{g}E[(Y-1)^{t-1}] \qquad\qquad (I)
\end{aligned}
$$

onde Y é uma variável aleatória numa distribuição de Pascal com parâmetros $n+1$ e $\frac{g}{g+r}$.

Fazendo-se $t = 1$ em (I), ficamos com

$$E(X^1) = n\frac{g+r}{g}E[(Y-1)^0] = n\frac{g+r}{g}E[1].$$

Uma vez que a esperança de 1 é 1, então

$$E(X) = n\frac{g+r}{g}.$$

3. Primeiro vamos encontrar o valor de $E(X^2)$. Em (I), colocando-se $t = 2$:

$$E(X^2) = n\frac{g+r}{g}E[(Y-1)^{2-1}] = n\frac{g+r}{g}E(Y-1).$$

Como $E(Y-1) = E(Y) - E(1)$ com Y nas condições dada acima, temos

$$
\begin{aligned}
E(X^2) &= n\frac{g+r}{g}\left[E(Y) - E(1)\right] \\
&= n\frac{g+r}{g}\left((n+1)\frac{g+r}{g} - 1\right).
\end{aligned}
$$

Portanto, substituindo $E(X)$ e $E(X^2)$ na expressão da variância,

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

temos

$$Var(X) = n\frac{g+r}{g}\left((n+1)\frac{g+r}{g} - 1\right) - \left(n\frac{g+r}{g}\right)^2.$$

Colocando-se $n\frac{g+r}{g}$ em evidência, a expressão acima fica

$$\begin{aligned} Var(X) &= n\frac{g+r}{g}\left[(n+1)\frac{g+r}{g} - 1 - n\frac{g+r}{g}\right] \\ &= n\frac{g+r}{g}\left[\frac{g+r}{g} - 1\right] \\ &= n\frac{g+r}{g}\frac{r}{g}. \end{aligned}$$

Encontrando-se a expressão da a variância para distribuição de pascal:

$$Var(X) = nr\frac{g+r}{g^2}.$$

$\blacksquare$

Exemplo 16. *Consideremos uma urna que tenha 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas. São retiradas bolas da urna, uma a uma, ao acaso, verificada sua cor e devolvida à urna. Deseja-se retirar da urna 3 bolas verdes.*

a) *A probabilidade de se retirar a 3ª bola verde na 3ª retirada; na 4ª retirada e na 5ª retirada são respectivamente* $\frac{125}{729}$, $\frac{1500}{656}$ *e* $\frac{12000}{59049}$;

b) *O número esperado de retiradas até sair a terceira bola verde é* $\frac{27}{5}$;

c) *A variância do número de bolas retiradas até sair a terceira bola verde é* $\frac{108}{25}$.

Resolução

a) No dado problema, temos que $g = 5$, $r = 4$, $n = 3$ e $k = 3, 4, 5$. Portanto,

$$P(X = k) = \binom{k-1}{n-1}\left(\frac{r}{g+r}\right)^{k-n}\left(\frac{g}{g+r}\right)^n.$$

- Para $k = 3$,

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= \binom{3-1}{3-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{3-3}\left(\frac{5}{9}\right)^{3} \\ &= \left(\frac{4}{9}\right)^{0}\left(\frac{5}{9}\right)^{3} \\ &= \frac{125}{729} \\ &= 0,1714. \end{aligned}$$

- Para $k = 4$,

$$\begin{aligned} P(X = 4) &= \binom{4-1}{3-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{4-3}\left(\frac{5}{9}\right)^{3} \\ &= 3\left(\frac{4}{9}\right)^{1}\left(\frac{5}{9}\right)^{3} \\ &= 3\left(\frac{4}{9}\right)\left(\frac{125}{729}\right) \\ &= \frac{1500}{6561} \\ &= 0,229. \end{aligned}$$

- Para $k = 5$,

$$\begin{aligned} P(X = 5) &= \binom{5-1}{3-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{5-3}\left(\frac{5}{9}\right)^{3} \\ &= 6\left(\frac{4}{9}\right)^{2}\left(\frac{5}{9}\right)^{3} \\ &= 6\left(\frac{16}{81}\right)\left(\frac{125}{729}\right) \\ &= \frac{12000}{59049} \\ &= 0,203. \end{aligned}$$

b) Usando a expressão encontrada para o cálculo da esperança numa distribuição de Pascal, temos

$$\begin{aligned} E(X) &= n\frac{g+r}{g} \\ E(X) &= 3.\frac{9}{5} \\ &= \frac{27}{5} \\ &= 5,4. \end{aligned}$$

c) Usando a expressão encontrada para a variância, temos,

$$Var(X) = nr\frac{g+r}{g^2}$$

$$\begin{aligned} Var(X) &= 3.4\frac{9}{5^2} \\ &= \frac{108}{25} \\ &= 4,32. \end{aligned}$$

3.7 Terceiro modelo sem reposição

Seja uma urna contendo g bolas verdes e r bolas vermelhas. Retiremos bolas da urna, uma a uma ao acaso e sem reposição até que saia a primeira bola verde. Chamemos de X o número de retiradas até sair a primeira bola verde.

Teorema 12. *No modelo sem reposição discutido, temos que:*

1. $P(X = k) = \left[\prod_{i=0}^{k-2} \frac{r-i}{g+r-i}\right] \frac{g}{[g+r-(k-1)]}$, k = 1, 2, ..., r+1.

2. $E(X) = \sum_{i=1}^{r+1} \frac{g}{[g+r-(i-1)]}$.

Vamos definir o evento A_i como "sair bola verde na i-ésima retirada".

Demonstração:

1. Sendo X a variável aleatória que diz o número de extrações até sair a primeira bola verde, então,

$$\{X = k\} = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} A_i^c\right) \cap A_k$$

e

$$P(X = k) = P(A_1^c)P(A_2^c|A_1^c)P(A_3^c|A_1^c \cap A_2^c) \cdot ... \cdot P(A_{k-1}^c|\bigcap_{i=1}^{k-2} A_i^c)P(A_k)$$

com $1 \leq k \leq r + 1$.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \left[\frac{r}{g+r}\right]\left[\frac{r-1}{g+r-1}\right]\left[\frac{r-2}{g+r-2}\right]...\left[\frac{r-(k-2)}{g+r-(k-2)}\right]\left[\frac{g}{g+r-(k-1)}\right] \\ &= \left[\prod_{i=0}^{k-2}\frac{r-i}{g+r-i}\right]\frac{g}{[g+r-(k-1)]}. \end{aligned}$$

2. Seja

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{se a i-ésima bola retirada é verde,} \\ 0, & \text{se a i-ésima bola retirada é vermelha.} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, ..., r + 1.$$

Temos:

- $P(A_1) = \dfrac{g}{g+r}$;
- $P(A_2|A_1^c) = \dfrac{g}{g+r-1}$;

  $\vdots$

- $P(A_i|\bigcap_{i=1}^{i-1} A_i^c) = \dfrac{g}{g+r-(i-1)}$.

Então,

$$
\begin{aligned}
E(X_i) &= 0P(X_i = 0) + 1P(X_i = 1) \\
&= P(X_i = 1) = P(A_i | \bigcap_{i=1}^{i-1} A_i^c) = \frac{g}{g + r - (i-1)}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{i=1}^{r+1} E(X_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r+1} \frac{g}{g + r - (i-1)}.
\end{aligned}
$$

■

4 Probabilidades das Loterias

É de praxe, os alunos de ensino médio dominarem as regras dos jogos lotéricos. Uma vez que os pais de muitos deles jogam e pedem que os mesmos marquem e registrem os jogos, ou mesmo, pela evidência que os diferentes tipos de mídia dão para o assunto.

Todavia, o que muitos não sabem é como realizar os cálculos de probabilidades de ganho nestes jogos.

A proposta no próximo capítulo é a exposição sucinta e sem uso de rigor matemático dos cálculos destas probabilidades para alguns jogos, fazendo com que os alunos possam refletir e refazer estes cálculos com outros jogos de seus interesses.

Esperamos que o aluno compreenda que, para a maioria desses jogos lotéricos, os preços das apostas é proporcional à probabilidade que se tem de ganhar.

4.1 Mega-Sena

No jogo da Mega-Sena, a cartela possui numeração de 1 a 60, das quais são sorteados seis números, chamados de dezenas. O jogador pode ganhar se acertar quatro, cinco ou todos os seis números sorteados, dizendo-se que ganhou na quadra, quina ou sena, respectivamente.

Em seu site, a Caixa Econômica Federal, responsável pelos jogos da Mega-Sena, diz que a Mega-Sena "é a loteria que paga milhões para o acertador dos 6 números sorteados. Mas quem acerta 4 ou 5 números também ganha. Para realizar o sonho de ser o próximo milionário, você deve marcar de 6 a 15 números, entre os 60 disponíveis no volante."

Ainda em seu site, diz que "a aposta mínima, de 6 números, custa R\$ 2,00. E quanto mais números marcar, maior o preço da aposta e a chance de faturar o prêmio..."

A chance de ganho aumenta uma vez que, se escolhendo 6 números o jogador faz uma aposta, escolher 7 números equivale a fazer $C_{7,6} = 7$ jogos independente, pagando-se R\$ 14,00; escolher 8 números equivale a fazer $C_{8,6} = 28$ jogos independentes, pagando-se R\$ 56,00 e assim vai. Fazendo-se a escolha de n números, é equivalente o jogador fazer $Cn, 6 = \dfrac{n!}{6!(n-6)!}$ jogos independentes, e então, paga-se o valor R\$ $\dfrac{2.n!}{6!(n-6)!}$, sendo 15 o máximo de dezenas a escolher permitido.

4.2 Dupla Sena

Na Dupla Sena o jogador escolhe de 6 a 15 números, dos 50 disponíveis no volante e participa de 2 sorteios por concurso. Ganha se acertar 4, 5 ou 6 números no primeiro ou no segundo sorteio. Em cada sorteio, 6 dezenas são retiradas da urna.

A aposta mínima, em 6 números, custa apenas R\$ 1,00.

4.3 Quina

Na Quina, o jogador aposta em 5, 6 ou 7 números, dos 80 disponíveis no volante. É considerado ganhador o jogador que acertar 3, 4 ou 5 números. Em cada sorteio são retiradas 5 dezenas da urna. O preço da aposta com 5 números é de R\$ 0,75, mas, também, pode-se pagar R\$ 3,00 e concorrer com 6 números, equivalente a fazer $C_{6,5} = 6$ jogos independentes ou pagar R\$ 7,50 e concorrer com 7 números, que equivale a fazer $C_{7,5} = 21$ jogos independentes.

4.4 Lotomania

Na Lotomania, o jogador escolhe 50 números, dos 100 no volante e **ganha se acertar 16, 17, 18, 19, 20 ou nenhum número**, sendo que, a cada sorteio, são retiradas 20 dezenas da urna. O preço da aposta é único e custa R$ 1,50.

4.5 Lotofácil

Na Lotofácil, o jogador pode escolher, 15, 16, 17 ou 18 números, dos 25 disponíveis no volante. Recebe o prêmio, o jogador que obtiver êxito acertando 11, 12, 13, 14 ou 15 números. Em cada sorteio são retiradas 15 dezenas das urnas.

4.6 Cálculo das Probabilidades

De modo geral, nos jogos acima em que são sorteados n números, o jogador deve escolher x dentre os N do volante.

Enquanto a quantidade de acertos do jogador é de k números, o total de números sorteados não escolhidos por ele é $n-k$, e constam no grupo dos $N-x$ números não escolhidos pelo jogador. Assim, o total de combinações de k acertos e $n-k$ sucessos não escolhidos é $\binom{x}{k}\binom{N-x}{n-k}$. Como existem $\binom{N}{n}$ combinações possíveis, a probabilidade procurada é

$$P(K=k) = \frac{\binom{x}{k}\binom{N-x}{n-k}}{\binom{N}{n}},$$

onde k representa o número de sucessos obtidos pelo jogador ao escolher os números na cartela. Vê-se, então, que os jogos listados acima possuem distribuição hipergeométrica, de parâmetros (n, x, N), sendo:

$N:$ O total de dezenas constantes no volante;

$n:$ O total de dezenas que são sorteadas;

$x:$ O total de dezenas marcadas/escolhidas pelo jogador;

$k:$ O total de sucessos/acertos obtidos pelo jogador;

$n-k:$ O total de dezenas sorteadas não escolhidas pelo jogador;

$N - x :$ O total de dezenas não escolhidas pelo jogador.

Assim, aplicando os valores de N, n, x, k, $n - k$ e $N - x$ para cada jogo de loteria acima citados, encontramos as probabilidades de ganhar nesses jogos. Estes cálculos são propostos e alguns, feitos na seção seguinte.

4.6.1 Mega-sena

Tabela 4: Valores das variáveis para o jogo da Mega-Sena

N	n	x	k	$n-k$	$N-x$
60	6	de 6 a 15	4, 5 ou 6	2, 1 ou 0	de 54 a 45

Exemplos de alguns jogos, com o jogador escolhendo 6 dezenas, com as possibilidades de ganhar na quadra, quinta e sena, respectivamente:

$$P(K=4) = \frac{\binom{6}{4}\binom{54}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{4.293}{10.012.772},$$

$$P(K=5) = \frac{\binom{6}{5}\binom{54}{1}}{\binom{60}{6}} = \frac{81}{12.515.965},$$

$$P(K=6) = \frac{\binom{6}{6}\binom{54}{0}}{\binom{60}{6}} = \frac{1}{50.063.860}.$$

Exemplos de alguns jogos, com o jogador escolhendo 13 dezenas, com as possibilidades de ganhar na quadra, quinta e sena, respectivamente:

$$P(K=4) = \frac{\binom{13}{4}\binom{47}{2}}{\binom{60}{6}} = \frac{14.053}{910.252},$$

$$P(K=5)=\frac{\binom{13}{5}\binom{47}{1}}{\binom{60}{6}}=\frac{5.499}{4.551.260},$$

$$P(K=6)=\frac{\binom{13}{6}\binom{47}{0}}{\binom{60}{6}}=\frac{39}{1.137.815}.$$

Veja na Tabela 5 as chances de se ganhar na quadra, quina e sena jogando-se na Mega-Sena marcando-se x dezenas, $x = 6, 7, ..., 15$ com todas as possibilidades de jogadas.

Tabela 5: Probabilidades de ganhar prêmios jogando na Mega-Sena

x	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Quadra	$\frac{1}{2.332}$	$\frac{1}{1.038}$	$\frac{1}{539}$	$\frac{1}{312}$	$\frac{1}{195}$	$\frac{1}{129}$	$\frac{1}{90}$	$\frac{1}{65}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{37}$
Quina	$\frac{1}{154.518}$	$\frac{1}{44.981}$	$\frac{1}{17.192}$	$\frac{1}{7.791}$	$\frac{1}{3.973}$	$\frac{1}{2.211}$	$\frac{1}{1.317}$	$\frac{1}{828}$	$\frac{1}{544}$	$\frac{1}{370}$
Sena	$\frac{1}{50.063.860}$	$\frac{1}{7.151.980}$	$\frac{1}{1.787.995}$	$\frac{1}{595.998}$	$\frac{1}{238.399}$	$\frac{1}{108.363}$	$\frac{1}{54.182}$	$\frac{1}{29.175}$	$\frac{1}{16.671}$	$\frac{1}{10.003}$

4.6.2 Dupla Sena

Tabela 6: Valores das variáveis para o jogo da dupla sena

N	n	x	k	$n-k$	$N-x$
50	6	de 6 a 15	4, 5 ou 6	2, 1 ou 0	de 44 a 35

Exemplos de alguns jogos, com o jogador escolhendo 6 dezenas, com as possibilidades de ganhar acertando 4, 5 ou 6 dezenas, respectivamente:

$$P(K=4)=\frac{\binom{6}{4}\binom{44}{2}}{\binom{50}{6}}=\frac{437}{529.690},$$

$$P(K=5)=\frac{\binom{6}{5}\binom{44}{1}}{\binom{50}{6}}=\frac{22}{1.324.225},$$

$$P(K=6)=\frac{\binom{6}{6}\binom{44}{0}}{\binom{50}{6}}=\frac{1}{15.890.700}.$$

Exemplos de alguns jogos, com o jogador fazendo a aposta máxima, escolhendo 15 dezenas, com as possibilidades de ganhar acertando 4, 5 ou 6 dezenas, respectivamente:

$$P(K=4) = \frac{\binom{15}{4}\binom{35}{2}}{\binom{50}{6}} = \frac{221}{4.324},$$

$$P(K=5) = \frac{\binom{15}{5}\binom{35}{1}}{\binom{50}{6}} = \frac{143}{21.620},$$

$$P(K=6) = \frac{\binom{15}{6}\binom{35}{0}}{\binom{50}{6}} = \frac{143}{454.020}.$$

Veja na Tabela 7 as chances de se ganhar na dupla sena acertando-se 4, 5 ou 6 dezenas jogando-se marcando x dezenas, $x = 6, 7, ..., 15$.

Tabela 7: Probabilidades de ganhar na dupla sena

x	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
Quadra	$\frac{1}{1.120}$	$\frac{1}{502}$	$\frac{1}{263}$	$\frac{1}{153}$	$\frac{1}{97}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{45}$	$\frac{1}{33}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{19}$
Quina	$\frac{1}{60.192}$	$\frac{1}{17.597}$	$\frac{1}{6.756}$	$\frac{1}{3.076}$	$\frac{1}{1.576}$	$\frac{1}{881}$	$\frac{1}{528}$	$\frac{1}{333}$	$\frac{1}{220}$	$\frac{1}{151}$
Sena	$\frac{1}{15.890.700}$	$\frac{1}{2.270.100}$	$\frac{1}{567.525}$	$\frac{1}{189.175}$	$\frac{1}{75.670}$	$\frac{1}{34.395}$	$\frac{1}{17.197}$	$\frac{1}{9.260}$	$\frac{1}{5.291}$	$\frac{1}{3.174}$

4.6.3 Quina

Tabela 8: Valores das variáveis para o jogo da quina

N	n	x	k	$n-k$	$N-x$
80	5	5, 6 ou 7	3, 4 ou 5	2, 1 ou 0	de 75 a 73

Exemplos de alguns jogos, com o jogador escolhendo 5 dezenas, com as possibilidades de ganhar acertando 3, 4 ou 5 dezenas, respectivamente:

$$P(K=3) = \frac{\binom{5}{3}\binom{75}{2}}{\binom{80}{5}} = \frac{13.875}{12.020.008},$$

$$P(K=4) = \frac{\binom{5}{4}\binom{75}{1}}{\binom{80}{5}} = \frac{375}{24.040.016},$$

$$P(K=5) = \frac{\binom{5}{5}\binom{75}{0}}{\binom{80}{5}} = \frac{1}{24.040.016}.$$

Exemplos de alguns jogos, com o jogador escolhendo 7 dezenas, com as possibilidades de ganhar acertando 3, 4 ou 5 dezenas, respectivamente:

$$P(K=3) = \frac{\binom{7}{3}\binom{73}{2}}{\binom{80}{5}} = \frac{3.285}{858.572},$$

$$P(K=4) = \frac{\binom{7}{4}\binom{73}{1}}{\binom{80}{5}} = \frac{365}{3.434.288},$$

$$P(K=5) = \frac{\binom{7}{5}\binom{73}{0}}{\binom{80}{5}} = \frac{3}{3.434.288}.$$

Veja na Tabela 9 as chances de se ganhar na quina acertando-se 3, 4 ou 5 dezenas jogando-se marcando x dezenas, $x = 5, 6, 7$.

Tabela 9: Probabilidades de acertar na quina

x	**5**	**6**	**7**
Terno	$\frac{1}{866}$	$\frac{1}{445}$	$\frac{1}{261}$
Quadra	$\frac{1}{64.106}$	$\frac{1}{21.657}$	$\frac{1}{9.409}$
Quina	$\frac{1}{24.040.016}$	$\frac{1}{4.006.669}$	$\frac{1}{1.144.762}$

Tabela 10: Valores das variáveis para o jogo da lotomania

N	n	x	k	$n-k$	$N-x$
100	20	50	0, 16, 17, 18, 19 ou 20	20, 4, 3, 2, 1 ou 00	50

4.6.4 Lotomania

Exemplos de alguns jogos, com o jogador escolhendo 50 dezenas, com as possibilidades de ganhar acertando 16, 18 ou 20 dezenas, respectivamente:

$$P(K=16) = \frac{\binom{50}{16}\binom{50}{4}}{\binom{100}{20}} = \frac{404.752.250}{191.318.062.617}.$$

$$P(K=18) = \frac{\binom{50}{18}\binom{50}{2}}{\binom{100}{20}} = \frac{4.305.875}{104.355.306.882}.$$

$$P(K=20) = \frac{\binom{50}{20}\binom{50}{0}}{\binom{100}{20}} = \frac{140}{1.683.150.111}.$$

A probabilidade, desse jogador de receber o prêmio não acertando nenhuma dezena, acontece quando os números sorteados constam da lista de números não marcados, assim, a probabilidade de $P(K=0)$ é igual a $P(K=20)$. Vejamos:

$$P(K=0) = \frac{\binom{50}{0}\binom{50}{20}}{\binom{100}{20}} = \frac{140}{1.683.150.111}.$$

Vejamos na Tabela 11 todas as chances de se ganhar na lotomania acertando-se 16, 17, 18, 19, 20 ou nenhuma dezena marcando-se 50 dezenas.

Tabela 11: Probabilidades de ganhar na lotomania

Acertos	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**0**
Probabilidades	$\frac{1}{472}$	$\frac{1}{2.776}$	$\frac{1}{24.235}$	$\frac{1}{352.551}$	$\frac{1}{11.372.635}$	$\frac{1}{11.372.635}$

4.6.5 Lotofácil

A Tabela 12 mostra os valores relacionados aos jogos da lotofácil.

Exemplos de cálculos, para algumas apostas, com o jogador escolhendo 15 dezenas, com as possibilidades de ganhar acertando 11, 13 ou 15 dezenas, respectivamente:

Tabela 12: Valores das variáveis para o jogo da lotofácil

N	n	x	k	$n-k$	$N-x$
25	15	15, 16, 17 ou 18	11, 12, 13, 14 ou 15	4, 3, 2, 1 ou 0	10, 9, 8 ou 7

$$P(K=11) = \frac{\binom{15}{11}\binom{10}{4}}{\binom{25}{15}} = \frac{28.665}{326.876},$$

$$P(K=13) = \frac{\binom{15}{13}\binom{10}{2}}{\binom{25}{15}} = \frac{945}{653.752},$$

$$P(K=15) = \frac{\binom{15}{15}\binom{10}{0}}{\binom{25}{15}} = \frac{1}{3.268.760}.$$

Veja agora exemplos de alguns jogos, com o jogador escolhendo 18 dezenas, com as possibilidades de ganhar acertando 11, 13 ou 15 dezenas, respectivamente:

$$P(K=11) = \frac{\binom{18}{11}\binom{7}{4}}{\binom{25}{15}} = \frac{1.638}{4.807},$$

$$P(K=13) = \frac{\binom{18}{13}\binom{7}{2}}{\binom{25}{15}} = \frac{1.323}{24.035},$$

$$P(K=15) = \frac{\binom{18}{15}\binom{7}{0}}{\binom{25}{15}} = \frac{6}{24.035}.$$

Veja na tabela abaixo as chances de se ganhar na lotofácil acertando-se 11, 12, 13, 14 ou 15 dezenas marcando-se x dezenas, $x = 15, 16, 17, 18$.

O preço pago nos jogos da lotofácil é proporcional à probabilidade de ganhar. Na aposta simples, a escolha de 15 números que representam uma aposta, o apostador paga R$1, 50, para as demais apostas, de 16, 17 ou 18 números marcados que representam respectivamente 16, 136 e 816 apostas, o apostador paga por elas os respectivos valores: (R$1, 50).16 = R$24, 00 , (R$1, 50).136 = R$204, 00 e (R$1, 50).816 = R$1.224, 00.

Tabela 13: Probabilidades de ganhar na lotofácil

x (nº de escolhas)	**15**	**16**	**17**	**18**
11 acertos	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{5,9}$	$\frac{1}{3,7}$	$\frac{1}{2,9}$
12 acertos	$\frac{1}{59}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{9,4}$	$\frac{1}{5}$
13 acertos	$\frac{1}{691}$	$\frac{1}{162}$	$\frac{1}{49}$	$\frac{1}{18}$
14 acertos	$\frac{1}{21.791}$	$\frac{1}{3.026}$	$\frac{1}{600}$	$\frac{1}{152}$
15 acertos	$\frac{1}{3.268.760}$	$\frac{1}{204.297}$	$\frac{1}{24.035}$	$\frac{1}{4.005}$

5 Propostas para o ensino médio - Probabilidade de maneira interdisciplinar e curiosa

No Ensino Médio brasileiro, bem como no Ensino Fundamental, a Matemática é trabalhada em sala de aula com foco em conteúdos de álgebra, geometria analítica e aritmética, deixando de lado conteúdos que, talvez do ponto de vista do aluno, sejam mais aplicáveis e mais chamativos.

A probabilidade é um desses conteúdos que apesar de hoje estar presente nos livros, tanto do Ensino Fundamental como do Médio, ainda é visto muito superficialmente, mesmo considerando que é explorada de maneira simples e com linguagem acessível ao aluno.

Ela é trazida para o Ensino Fundamental com uma razão $\frac{a}{b}$ em que, a representa o número de possibilidades favoráveis a um determinado desejo e b representa o total de casos possíveis. Um típico exercício de probabilidade para esse nível de ensino é falar sobre um dado e perguntar sobre a probabilidade de sair o número 3, ou de sair um número par.

Para o Ensino Médio, a probabilidade é trabalhada com os conceitos apresentados mais formalmente, mas sem muito rigor na linguagem e com exercícios simples. É comum os livros iniciarem o conteúdo apresentando a ideia de espaço amostral e eventos, seguida do conceito clássico de probabilidade, avançando um pouco no conteúdo ao trabalhar a probabilidade da união de eventos e multiplicação de probabilidades.

Nesse capítulo, vamos abordar modelos de aula a serem trabalhados com alunos do Ensino Médio, buscando mesclar conteúdos de probabilidade com outros temas do

Ensino Médio.

5.1 Introdução - Quando a intuição falha

Uma situação curiosa, dentro e fora da sala de aula, é quando se questiona alguém sobre a probabilidade prévia de sair bola verde dentre g bolas dessa cor e r bolas vermelhas de uma urna, com extrações seguidas, sem reposição. E cada um, seguindo a intuição, prontamente emite opinião acerca dos valores das probabilidades. No entanto, com falhas na intuição, o resultado palpitado não é o correto: $\dfrac{g}{g+r}$ a razão entre o número de bolas verdes (g) para o número total de bolas ($g+r$). Vamos exemplificar a situação dada com um problema de urna com g bolas verdes e r bolas vermelhas de onde se extrai 3 bolas, uma a uma, ao acaso, e sem reposição. Perguntamos: qual a probabilidade de sair bola verde na **i-ésima** ($i = 1, 2$ e 3) retirada?

Seja G_i o evento "sair bolar verde na i-ésima retirada":

1. Para $i = 1$, teremos

$$P(G_1) = \frac{g}{g+r}.$$

2. Para $i = 2$, teremos

$$\begin{aligned}
P(G_2) &= P[(G_1 \cap G_2) \cup (G_1^c \cap G_2)] \\
&= P(G_1 \cap G_2) + P(G_1^c \cap G_2) \\
&= P(G_1)P(G_2|G_1) + P(G_1^c)P(G_2|G_1^c) \\
&= \frac{g}{(g+r)}\frac{g-1}{(g+r-1)} + \frac{r}{(g+r)}\frac{g}{(g+r-1)} = \frac{g}{(g+r)}\frac{(g+r-1)}{(g+r-1)} \\
&= \frac{g}{(g+r)}.
\end{aligned}$$

3. Para $i = 3$, teremos

$$\begin{aligned}
P(G_3) &= P[(G_1 \cap G_2 \cap G_3) \cup (G_1^c \cap G_2 \cap G_3) \cup (G_1 \cap G_2^c \cap G_3) \cup (G_1^c \cap G_2^c \cap G_3)] \\
&= P(G_1 \cap G_2 \cap G_3) + P(G_1^c \cap G_2 \cap G_3) + P(G_1 \cap G_2^c \cap G_3) + P(G_1^c \cap G_2^c \cap G_3) \\
&= P(G_1)P(G_2|G_1)P(G_3|G_2 \cap G_1) + P(G_1^c)P(G_2|G_1^c)P(G_3|G_2 \cap G_1^c) + \\
&\quad P(G_1)P(G_2^c|G_1)P(G_3|G_2^c \cap G_1) + P(G_1^c)P(G_2^c|G_1^c)P(G_3|G_2^c \cap G_1^c) \\
&= \frac{g}{(g+r)} \frac{g-1}{(g+r-1)} \frac{g-2}{(g+r-2)} + \frac{r}{(g+r)} \frac{g}{(g+r-1)} \frac{(g-1)}{(g+r-2)} \\
&\quad \frac{g}{(g+r)} \frac{r}{(g+r-1)} \frac{g-1}{(g+r-2)} + \frac{r}{(g+r)} \frac{r-1}{(g+r-1)} \frac{g}{(g+r-2)}.
\end{aligned}$$

Colocando $\frac{g}{g+r}$ em evidência, ficaremos com

$$P(G_3) = \frac{g}{(g+r)} \cdot \left[\frac{(g-1)(g-2) + 2r(g-1) + r(r-1)}{(g+r-1)(g+r-2)} \right]$$

em que

$$\frac{(g-1)(g-2) + 2r(g-1) + (r-1)}{(g+r-1)(g+r-2)} = 1,$$

logo,

$$P(G_3) = \frac{g}{g+r}.$$

Portanto, conforme colocado anteriormente, sem sabermos a cor da bola extraída nas retiradas de ordem $i-1, i-2, i-3, ..., 2, 1$, a probabilidade da bola ser verde na extração de ordem i é $P(G_i) = \dfrac{g}{g+r}$.

5.2 Proposta 1 - Cálculos com probabilidades em urnas

Apresentamos nessa seção diversos problemas cuja solução envolve modelo de urnas e tópicos do Ensino Médio. Para resolver esses problemas, os alunos precisam conhecer conceitos básicos vistos no Ensino Médio, como Progressão Aritmética, Progressão Geométrica, Funções de 2º Grau, Somatório e outros.

Frequentemente, as teorias da probabilidade são vistas no 2º ano do Ensino Médio, portanto, acreditamos que na abordagem dessa proposta, o aluno já tenha conhecimentos sobre os conceitos acima citados. Contudo, como é praxe alguns conteúdos serem esquecidos, é necessário que o professor faça uma revisão antes de apresentar os problemas propostos.

Alguns problemas exigem conhecimento em conceitos ainda não vistos, como Independência entre eventos. Então, o professor deve complementar o seu planejamento de acordo com as necessidades para a realização da aula e considerando as necessidades básicas da turma. A partir daí, o professor pode expor cada situação de a a l e discutir e resolver juntamente com os alunos, considerarando o problema abaixo:

Consideremos uma urna contendo a bolas verdes e b bolas vermelhas. Bolas são retiradas uma a uma ao acaso e com reposição até que saia uma bola verde. Seja P_k a probabilidade que sejam necessárias k retiradas até sair a primeira bola verde.

a) Achar a probabilidade P_k:

Observação: *Veja que neste item é usado o modelo de probabilidade de Distribuição Geométrica para encontrar o valor de P_k.*

Resolução

Observe na tabela a razão entre o número de bolas vermelhas ou verdes e o total de bolas na urna em cada retirada de bolas da urna.

1ª retirada	2ª retirada	...	$(k-1)^{a}$ retirada	k^{a} retirada
$\frac{b}{a+b}$	$\frac{b}{a+b}$	...	$\frac{b}{a+b}$	$\frac{a}{a+b}$

Pela independência de cada retirada, podemos escrever:

$$P_k = \frac{b}{a+b}.\frac{b}{a+b}...\frac{b}{a+b}.\frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+b}.\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1}.$$

Logo,

$$P_k = \frac{a}{a+b}.\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1} \qquad \text{k=1, 2, ...}$$

b) Calcule a probabilidade S_k de que sejam necessárias mais que k retiradas até que saia a primeira bola verde.

Observação: *Neste item é usado o Progressão Geométrica, além de somatório.*

Resolução

Temos $S_k = P_{k+1} + P_{k+2} + \cdots$. Fazendo-se $p = \dfrac{a}{a+b}$, então $P_k = p(1-p)^{k-1}$,

$$S_k = \sum_{j=k+1}^{\infty} P_j = \sum_{j=k+1}^{\infty} p(1-p)^{j-1} = p \sum_{j=k+1}^{\infty} (1-p)^{j-1}.$$

Mas a soma de termos de uma PG ifninita $\displaystyle\sum_{j=k+1}^{\infty} (1-p)^{j-1}$ é $\dfrac{(1-p)^{k+1-1}}{1-(1-p)} = \dfrac{(1-p)^k}{p}$.

Logo, $S_k = \dfrac{p(1-p)^k}{p} \Longrightarrow S_k = (1-p)^k$.

c) Construa o gráfico de p_2 sendo $p = \dfrac{a}{a+b}$ a proporção de bolas verdes na urna. Qual é o valor máximo de p_2? Quando ocorre?

Observação: *Aqui é usado a ideia de máximo e mínimo de uma função de segundo grau, estudada pelos alunos nos 9º e 1º anos do Ensino Fundametal e Médio.*

Resolução

Temos

$$\begin{aligned} p_2 &= \left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^{2-1} = p(1-p) \\ &= p(1-p) \end{aligned}$$

Seja $f(p) = p(1-p) = -p^2 + p$, com $p \in [0,1]$.

Na parábola representada pela função $f(p) = -p^2 + p$, o vértice V é dado por $p = \frac{1}{2}$ que é o valor máximo de p_2. Esse valor máximo ocorre quando o número de bolas verdes é igual ao número de bolas vermelhas, isto é, em

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}.$$

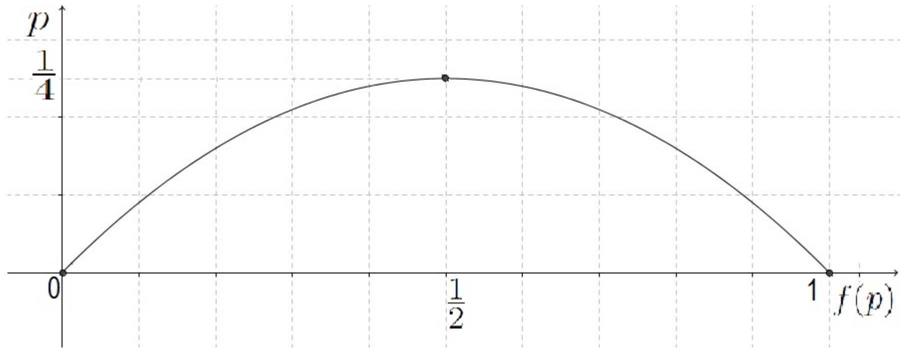

Figura 1: Parábola de $f(p)$

d) Suponhamos que em uma urna possua 12 bolas verdes. Obtenha sua configuração sabendo que a probabilidade de serem necessárias exatamente 2 retiradas até sair a primeira bola verde é $\frac{4}{25}$.

Observação: *Aqui é desenvolvido cálculo simples desenvolvendo-se uma equação transformando-a numa outra equação do segundo grau e aplicada a conhecida fórmula de Bháskara para encontrar suas raízes.*

Resolução

Temos que

$$p_2 = \left(\frac{12}{12+b}\right)\left(\frac{b}{12+b}\right)^{2-1} = \frac{4}{25}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{12b}{(12+b)^2} &= \frac{4}{25} \\
\frac{3b}{(12+b)^2} &= \frac{1}{25} \\
b^2 - 51b + 144 &= 0 \\
\Delta &= (-51)^2 - 4(-1)(144) = 2025 \\
b &= \frac{-(-51) \pm \sqrt{2025}}{2.1}, \qquad \text{portanto:} \\
b' = 48 \quad &e \quad b'' = 3.
\end{aligned}$$

A configuração é 12 bolas verdes e 48 bolas vermelhas ou 12 bolas verdes e 3 bolas vermelhas.

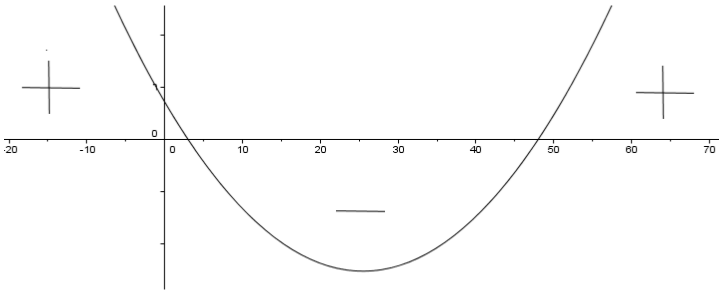

Figura 2: Gráfico de p_2

e) Suponhamos que a urna possua 12 bolas verdes. Obtenha as possíveis configurações da urna sabendo que a probabilidade de serem necessárias exatamente duas retiradas até sair a primeira bola verde é pelo menos $\dfrac{4}{25}$.

Observação: *Aqui é desenvolvido cálculo simples transformando-se uma equação numa outra equação do segundo grau e aplicada a conhecida fórmula de Bháskara para encontrar suas raízes.*

Resolução

Tem-se

$$\begin{aligned} p_2 &\geq \frac{4}{25} \\ \left(\frac{12}{12+b}\right)\left(\frac{b}{12+b}\right)^{2-1} &\geq \frac{4}{25} \\ \frac{12b}{(b+12)^2} &\geq \frac{4}{25} \\ \frac{3b}{(12+b)^2} &\geq \frac{1}{25} \\ b^2 - 51b + 144 &\leq 0. \end{aligned}$$

Resolvendo-se a equação $b^2 - 51b + 144 = 0$ encontramos as suas raízes $b' = 3$ e $b'' = 48$.

Portanto, a solução da inequação $p_2 \geq \dfrac{4}{25}$ é o conjunto B definido por $B = \{b \in \mathbb{N}, 3 \leq b \leq 48\}$.

Então a urna possui 12 bolas verdes e b bolas vermelhas onde $b \in B$.

f) Quais são as possíveis configurações da urna sabendo que a probabilidade de que sejam necessárias cinco retiradas até sair a primeira bola verde é $\dfrac{162}{3125}$?

Observação: *Aqui é desenvolvido cálculo algébrico simples.*

Resolução

Temos: $p_5 = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{5-1} = \dfrac{162}{3.125}$. Tomando $p = \dfrac{a}{a+b}$:

$$\begin{aligned} p(1-p)^4 &= \frac{162}{3125} = \left(\frac{3}{5}\right)^4 \frac{2}{5} \\ p(1-p)^4 &= \frac{2}{5}\left(1 - \frac{2}{5}\right)^4 \\ p &= \frac{2}{5} \Rightarrow \\ \frac{a}{a+b} &= \frac{2}{5} \Rightarrow \\ 2b &= 3a \Rightarrow \\ b &= \frac{3}{2}a. \end{aligned}$$

Logo, a urna possui a bolas verdes e $\dfrac{3}{2}a$ bolas vermelhas. As possibilidades estão no quadro abaixo.

Tabela 14: Possibilidades de configuração da urna

Verdes	2	4	6	8	10	$\cdots$	a	$\cdots$
Vermelhas	3	6	9	12	15	$\cdots$	$\frac{3}{2}a$	$\cdots$

g) Suponhamos que 60% das bolas na urna são verdes. Obtenha o menor valor de k tal que a probabilidade de se retirar pelo menos k bolas até sair a primeira bola verde seja inferior a $0,010$. Use $\log 2 = 0,301$.

Observação: *Neste item, além de usar inequações para a sua resolução, é aplicado o logaritmo e suas propriedades.*

Resolução

Temos:

$$S_k = \left(\frac{b}{a+b}\right)^k = \left(1 - \frac{a}{a+b}\right)^k = (1-0,6)^k = 0,4^k.$$

Mas, queremos $S_k < 0,01$. E isto implica que

$$\begin{aligned}
&0,4^k < 0,01\\
&\left(\frac{2}{5}\right)^k < \frac{1}{100}\\
&\left(\frac{2}{5}\right)^k < \left(\frac{2}{5}\right)^{\log_{\frac{2}{5}} \frac{1}{100}}.
\end{aligned}$$

Mas $\log_{\frac{2}{5}} \dfrac{1}{100} = \dfrac{\log \frac{1}{100}}{\log \frac{2}{5}} = \dfrac{-\log_{100}}{\log 4 - \log 10} = \dfrac{-2}{2(0,302)-1} = \dfrac{2.000}{398} = 5,025.$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{2}{5}\right)^k < \left(\frac{2}{5}\right)^{5,025} \Rightarrow\\
&k > 5,025.
\end{aligned}$$

Logo, o menor valor de k é 6.

h) Suponhamos que a urna possua 10 bolas. Obtenha sua configuração sabendo que a probabilidade de serem necessárias exatamente 4 retiradas, até sair a primeira bola verde é $\dfrac{24}{625}$.

Observação: *Neste item é aplicado o cálculo com equações.*

Resolução

Temos $p_4 = \dfrac{24}{625}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^{4-1} &= \frac{24}{625}\\
\frac{a}{10}.\frac{b^3}{10^3} &= \frac{24}{625}\\
\frac{(10-b)b^3}{10^4} &= \frac{24}{625}\\
(10-b)b^3 &= \frac{24.10^4}{5^4}\\
(10-b)b^3 &= 24\left(\frac{10}{5}\right)^4\\
(10-b)b^3 &= 2^4.2^3.3\\
(10-b)b^3 &= (10-4)4^3\\
b &= 4.
\end{aligned}
$$

Como $a+b=10$, então $a=6$.

Logo, a urna possui 6 bolas verdes e 4 bolas vermelhas.

i) Suponhamos que a urna possua 3 bolas verdes e 2 bolas vermelhas. Obtenha k, sabendo que a probabilidade de serem necessárias no máximo k retiradas para sair a primeira bola verde é $\frac{3.093}{3.125}$.

Observação*: Neste item, é usado a resolução de equações, somatório e soma dos termos de uma P.G. finita, o último sendo trabalhado no Ensino Médio, durante o 1º ano.*

Resolução

Temos $p_1+p_2+\cdots+p_k = S_k = \frac{3.093}{3.125}$.

Mas $p_j = \left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^{j-1} = \left(\frac{3}{3+2}\right)\left(\frac{2}{3+2}\right)^{j-1} = \frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{j-1}$.

Logo,

$$p_1+p_2+\cdots+p_k = \sum_{j=1}^{k}\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{j-1} = \frac{3}{5}\underbrace{\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{2}{5}\right)^{j-1}}_{\text{Soma de termos de uma P.G. finita}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} S_k &= \frac{a_1(1-q^k)}{1-q} \\ &= \frac{\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{2}{5}\right)^k\right]}{1-\frac{2}{5}} \\ &= 1-\left(\frac{2}{5}\right)^k = \frac{3.093}{3.125}. \end{aligned}$$

Assim, $\left(\dfrac{2}{5}\right)^k = 1-\dfrac{3.093}{3.125} = \dfrac{3.125-3.093}{3.125} = \dfrac{32}{3.125} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^5 \Rightarrow k=5.$

j) Suponhamos que há duas bolas vermelhas na urna. Obtenha a configuração da urna sabendo que a probabilidade é de no máximo três retiradas para sair a primeira bola verde é $\dfrac{117}{125}$.

Observação: *Neste item é usado o cálculo de divisão entre os divisores dos coeficientes a_0 e a_n para encontrar as raízes de um polinômio.*

Resolução

Temos que $p_1+p_2+p_3 = \dfrac{117}{125}$, e

$p_k = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)\left(\dfrac{b}{a+b}\right)^{k-1} = \left(\dfrac{a}{a+2}\right)\left(\dfrac{2}{a+2}\right)^{k-1}$, com $k=1,2,....$

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{a+2}\right)\left(\frac{2}{a+2}\right)^0 + \left(\frac{a}{a+2}\right)\left(\frac{2}{a+2}\right)^1 + \left(\frac{a}{a+2}\right)\left(\frac{2}{a+2}\right)^2 &= \frac{117}{125} \\ \frac{a}{a+2}\left[1+\frac{2}{a+2}+\frac{4}{(a+2)^2}\right] &= \frac{117}{125} \\ \frac{a}{a+2}\left[\frac{(a+2)^2+2(a+2)+4}{(a+2)^2}\right] &= \frac{117}{125} \\ \frac{a}{a+2}\left[\frac{a^2+6a+12}{(a+2)^2}\right] &= \frac{117}{125} \\ \frac{a^3+6a^2+12a}{(a+2)^3} &= \frac{117}{125}. \end{aligned}$$

Da equação acima tiramos a seguinte igualdade $a^3 + 6a^2 + 12a - 117 = 0$ cuja raiz é $a = 3$ uma vez que $3^3 + 6.3^2 + 12.3 - 117 = 27 + 54 + 36 - 117 = 0$

Logo, a urna possui 2 bolas vermelhas e 3 bolas verdes.

k) Suponha que há 3 bolas verdes na urna. Calcule o número de bolas vermelhas sabendo que a probabilidade de que sejam necessárias mais que 5 retiradas até sair a primeira bola verde é $0,16807$.

Observação: *Neste item é usado equações .*

Resolução

Temos $\left(1 - \dfrac{a}{a+b}\right)^5 = 0,16807$, como $a = 3$, segue que:

$$\left(1 - \frac{3}{3+b}\right)^5 = \left(\frac{b}{3+b}\right)^5 = 0,16807 \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{3+b} = 0,7 \quad \Rightarrow \quad b = 3.$$

Logo, há três bolas vermelhas nessa urna.

l) Suponha que há 3 bolas verdes na urna. Calcule o número de bolas vermelhas sabendo que $p_k = \dfrac{7}{4}p_{k+1}$ para todo k.

Observação: *Neste item é usado equações e propriedades de potenciação vistas pelos alunos desde o 7^o ano do Ensino Fundamental .*

Resolução

Temos:

$$\begin{aligned}
\frac{a}{a+b}\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k-1} &= \frac{7}{4}\left(\frac{a}{a+b}\right)\left(\frac{b}{a+b}\right)^{k+1-1}\\
\left(\frac{b}{3+b}\right)^{k-1} &= \frac{7}{4}\left(\frac{b}{3+b}\right)^{k}\\
\left(\frac{b}{3+b}\right)^{k}\left(\frac{b}{3+b}\right)^{-1} &= \frac{7}{4}\left(\frac{b}{3+b}\right)^{k}\\
\left(\frac{b}{3+b}\right)^{-1} &= \frac{7}{4}\\
\frac{3+b}{b} &= \frac{7}{4}\\
12+4b &= 7b\\
b &= 4.
\end{aligned}$$

Portanto, há 4 bolas vermelhas.

5.3 Proposta 2 - Mega-Sena

Aqui vamos tratar do jogo da Mega-Sena e mostrar que ganhar nesse jogo é uma ilusão, mas pessoas vivem na esperança de acertar os seis números sorteados cujo prêmio, pode às vezes, ultrapassar a ordem dos 100 milhões de reais.

5.3.1 Introdução a alguns conceitos

Consideremos a probabilidade de ganhar na Mega-Sena marcando uma cartela de seis números que é de

$$P = \frac{1}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860}.$$

No entanto, podemos apostar marcando-se entre 6 e 15 números, pagando-se R\$ 2,00 por cada jogo simples e, proporcionalmente, pagamos mais caro se escolhemos, 7, 8, ... ou 15 números.

Algumas probabilidades P_q de ganhar ao apostar em q números e o preço a pagar pelo jogo está na Tabela 15.

Tabela 15: Preços e possibilidades de ganho para algumas apostas da Mega-Sena

Probabilidade P_q	Valor
$P_6 = \dfrac{1}{C_{60,6}} = \dfrac{1}{50.063.860} = 0,0000000199745$	R$ 2,00
$P_7 = \dfrac{C_{7,6}}{C_{60,6}} = \dfrac{7}{50.063.860} = 0,0000001398214$	R$ 14,00
$P_8 = \dfrac{C_{8,6}}{C_{60,6}} = \dfrac{28}{50.063.860} = 0,0000009787499$	R$ 56,00
$P_{15} = \dfrac{C_{15,6}}{C_{60,6}} = \dfrac{5.005}{50.063.860} = 0,0000999723153$	R$ 10.010,00

Percebemos que o preço da cartela aumenta proporcionalmente à probabilidade de se ganhar na Mega-Sena.

Também, é claro que a probabilidade de jogar marcando-se 7 números é equivalente a jogar 7 jogos simples (marcando-se 6 números em cada jogo.

$$\begin{aligned} P_7 &= 7P_6 \\ \frac{C_{7,6}}{C_{60,6}} &= 7\frac{1}{C_{60,6}} \\ \frac{7}{50.063.860} &= 7\frac{1}{50.063.860}. \end{aligned}$$

Seja ϵ um experimento. Suponhamos que o experimento pode resultar em sucesso ou fracasso. Admita ainda que a chance de sucesso é p. Portanto, a probabilidade de fracasso é $1-p$. Admitamos, ainda que, o experimento é repetido n vezes. A probabilidade de se obter k sucessos é

$$P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Observe a tabela a seguir:

A probabilidade de k sucessos e depois $n-k$ fracassos é $p^k(1-p)^{n-k}$, mas os sucessos podem estar distribuidos ao longo das n repetições de $C_{n,k}$ modos diferentes. Logo, $P_k = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Tabela 16: Probabilidade de obter sucesso nas k primeiras tentativas e fracasso nas demais repetições

Ordem do experimento	1ª	2ª	...	kª	(k+1)ª	...	nª
Característica do resultado	S	S	...	S	F	...	F
Probabilidade por repetição	p	p	...	p	(1-p)	...	(1-p)

5.3.2 A situação problema

Uma pessoa marca uma cartela de 15 números, apostando na Mega-Sena em cada concurso. Normalmente, são realizados 2 concursos por semana, totalizando em torno de 104 concursos no ano. Suponhamos que ele faça isso durante dez anos seguidos e (por simplicidade) que o preço da cartela fique inalterado nesse período. Em 10 anos serão $n = 104.10 = 1040$ concursos. Em cada concurso, a pessoa tem chance $0,000099972$ de fazer a sena (acertando seis números dentre os 15 marcados).

Em 10 anos, a pessoa gastará $(R\$10.010,00).1.040 = R\$104.10400,00$. E a chance de, nesse período, ele não ganhar nenhuma vez na sena é

$$\begin{aligned} P_0 &= \binom{1.040}{0}(0,000099972)^0(1-0,000099972)^{1.040} \\ &= 0,999900028^{1040} \\ &= 0,9012 \\ &= 90,1\%. \end{aligned}$$

Em 100 anos serão $n = (104).(100) = 10.400$ concursos. Nesses 100 anos, a pessoa gastará $(R\$10.010,00).10.400 = R\$104.104.000,00$.

A chance de não ganhar nenhuma vez é

$$P_0 = 0,999900028^{10.400} = 0,3535.$$

Em a anos a pessoa gasta $(R\$10.010,00).104.a = R\$104.1040a$. A chance de não ganhar na Mega-Sena em k anos é

$$
\begin{aligned}
P_0 &= \binom{104k}{0}(0,000099972)^0(1-0,000099972)^{104a}\\
&= \binom{104k}{0}(0,000099972)^0(0,999900028)^{104a}\\
&= 0,999900028^{104k}.
\end{aligned}
$$

Em suma, o assunto aqui discutido pode ser resumido pela tabela abaixo, que mosta a probabilidade de não ganhar na Mega-Sena escolhendo-se 15 números em alguns períodos de tempo dados.

Tabela 17: Probabilidade de não ganhar na Mega-Sena

Tempo	Probabilidade de não ganhar nenhuma vez	Número de jogos realizados	Valor pago pela aposta
1 ano	0,9896	104	R$ 1.041.040
10 anos	0,9012	1.040	R$ 10.410.400
50 anos	0,5946	5.200	R$ 52.052.000
100 anos	0,3535	10.400	R$ 104.104.000
1000 anos	0,00003	104.000	R$ 104.1040.000
a anos	$0,999900028^{104a}$	$104a$	R$ $1.041.040a$

5.4 Proposta 3 - Lançando-se à sorte: Probabilidade no Ensino Médio

A seguir, um modelo de aula para ser trabalhado com alunos de Ensino Médio.

Objetivos

- Calcular a probabilidade de acerto em jogos de loterias;
- Representar na forma de razão e porcentual a chance de ocorrência de um evento.

Conteúdos prévios

- Probabilidade clássica;
- Análise combinatória.

Duração

- Quatro horas-aulas.

Material necessário

- Uma urna com 5 bolas verdes e 4 bolas vermelhas;
- Folhas e lápis;
- Calculadora.

Desenvolvimento

1ª etapa da aula

Os alunos serão divididos em grupos que receberão uma urna. Cada grupo irá fazer a seguinte atividade, repetidas 4 vezes:

- Retirar *três* bolas da urna, uma a uma ao acaso, e sem reposição;
- Anotar as cores das bolas em uma tabela contendo as 4 repetições;

	Extração 1	Extração 2	Extração 3
Atividade 1			
Atividade 2			
Atividade 3			
Atividade 4			

- Avaliar os resultados em cada experimento e verificar alguma semelhança entre eles.

2ª etapa da aula

Será apresentado o modelo de distribuição Hipergeométrica

$$P(X = k) = \frac{\binom{g}{k}\binom{r}{n-k}}{\binom{g+r}{n}}$$

e, em seguida, eles farão os cálculos das probabilidades de X e confrontar os resultados encontrados dentro do trabalho do grupo e entre grupos diferentes.

3ª etapa da aula

Após uma pesquisa na internet, ou usando as cartelinhas da Mega-Sena, será feita uma associação entre o modelo de urnas e as probabilidades de se ganhar na Mega-Sena. Avaliando os parâmetros em cada modelo e usando a expressão da distribuição hipergeométrica, os alunos serão incentivados a calcular as probabilidades de se ganhar na Mega-Sena depois de marcar 6 dezenas, acertando 5 ou as 6 delas, após o professor ter feito junto com os mesmos os cálculos das probabilidades de se ganhar acertando 4 dezenas.

Conforme o adiantamento da atividade, será deixado a atividade de repetir os cálculos para a Mega-Sena para um número maior de dezenas marcadas.

Avaliação

Afim de verificar se os alunos assimilaram as atividades propostas, dar-se-á o desafio de criarem outros modelos de jogos , com outras regras. Cada grupo terá a oportunidade de apresentar seu modelo para a turma. Para tornar a aula lúdica, após o momento, poderá ser feito um sorteio dentro das novas regras apresentadas fazendo uso da urna de bingo que a escola possui. Ao vencedor, uma caixa de bombons.

5.5 Expectativas e observações

Em aulas anteriores - total de 5 aulas - foi introduzido o conteúdo sobre análise combinatória, necessário para a realização da proposta para o Ensino Médio sobre probabilidade da seção 5.3 na página 91 limitando-se às ideias principais de arranjo simples e combinação simples. A forma breve como aconteceu a introdução a esses assuntos se deveu ao pouco tempo disponível para a efetivação das aulas.

Tendo em vista, que o tempo era pouco, já que se tratava de um bimestre curto de apenas dois meses (maio e junho) e com a programação da unidade escolar, que serviu de apoio para essa experiência, repleta de eventos, havia ainda o projeto polêmico da Secretaria Estadual de Educação chamado *Programa de Intensificação de Aprendizagem* que ocupava mais de duas semanas ao final do bimestre atropelando todos os planejamentos das escolas, bem como ainda é possível mencionar a Copa do Mundo que foi mais um motivo para tirar os estudantes de dentro da escola. Diante dessa situação, não fosse pela colaboração da turma do 6º Período B, do período vespertino, não seria possível colocar em prática o que foi feito. Contudo, ainda foi necessário minimizar os conceitos a serem trabalhados a fim de conseguir colocar a proposta de trabalho em prática.

A turma do 6º Período B era uma turma que estava finalizando o ensino médio e contava com poucos alunos, um total de 12, sendo apenas um menino.

A turma, a única remanescente do projeto Ressignificação do Estado que tornou o Ensino Médio em semestral, era "reduto", em parte, de alunos saídos do Instituto Federal de Goiás Unidade de Inhumas e que tinham boa base matemática.

A outra parte da turma, era de alunos que sempre pertenceram à rede estadual de educação, tinham muitas dificuldades embora sempre fizessem as atividades propostas.

Essa diferença do nível de conhecimento matemático e de personalidades, fazia com que a turma se dividisse em dois grupos, contudo, apesar da diferença entre os grupos, eles colaboravam mutuamente.

Foi exposto no data-show alguns problemas sobre o Princípio Fundamental da Contagem e questionado sobre a solução de cada um. Eis a seguir alguns problemas discutidos em sala com sua solução e observação feita a respeito do comportamento dos alunos a eles:

Problema 1. *Existem três rodovias ligando as cidades A e B, as rodovias V_1 , V_2 e V_3 e quatro rodovias ligando as cidades B e C, as rodovias X_1 , X_2 , X_3 e X_4. Um carro que parte de A rumo à cidade C, pode cumprir seu trajeto de quantos modos?*

Solução e observações: Nessa atividade, discutida e feita rapidamente em sala, alguns alunos mostraram não compreender o enunciado do exercício, mas, compreendido, depois da intervenção individual do professor na resolução, outros no entanto, escreveram as possibilidades:

$$\begin{array}{cccc} V_1X_1 & V_1X_2 & V_1X_3 & V_1X_4 \\ V_2X_1 & V_2X_2 & V_2X_3 & V_2X_4 \end{array}$$

$$V_3X_1 \qquad V_3X_2 \qquad V_3X_3 \qquad V_3X_4$$

Apesar de terem compreendido o problema, não conseguiram usar o Princípio Fundamental da Contagem para resolvê-lo: $3.4 = 12$.

Problema 2. *Ana possui três blusas, quatro saias e três calçados. Todas as peças combinam entre si. De quantos modos diferentes Ana pode se vestir para sair?*

Solução e observações: Colocado aos alunos como semelhante ao problema anterior, a solução foi obtida facilmente por eles com menos dificuldades, contudo, alguns ainda mostraram dúvida quanto à resolução do problema. A aluna J.P. chamou o professor e disse que não dava conta de fazer. Então lhe foi explicado novamente o Princípio Fundamental da Contagem e o conceito de independência entre as escolhas a serem feitas em analogia ao problema anterior, então a aluna multiplicou os três números encontrando o resultado correto, $3.4.3 = 36$. A aluna T teve dúvida devido ao problema possuir três escolhas a serem feitas e no anterior apenas duas.

Após os problemas 1 e 2, foi comentado sobre a organização de objetos em fila e sobre a ordem desses objetos ser importante ou não, configurando num arranjo simples ou combinação simples. Como a aula era dedicada a revisar conteúdos já vistos durante o 2º ano do Ensino Médio, alguns alunos comentavam lembrar do professor daquele ano escolar explicando a matéria. Indagando a outros alunos sobre suas lembranças, sobre o que é combinação ou arranjo, estes diziam não se lembrar ou diziam não ter estudado o conteúdo, provavelmente por não lembrar mesmo. Foi, então, apresentado alguns problemas no data-show e discutido em grupos a resolução para cada um.

Problema 3. *Responda os itens abaixo:*

a) Usando-se as 26 letras do alfabeto (a, b, c, ..., z), quantas "filas"distintas (exemplo ADT, TAH, etc.) de três dígitos podemos formar?

b) Com as 26 letras do alfabeto e os 10 algarismos de 0 a 9, quantas placas de carro podem ser emitidas se cada placa dispõe de três letras e quatro algarismos?

Solução e observações: Estas duas questões foram feitas pelo professor para servirem de exemplos.

O primeiro item foi feito calculando-se $A_{26,3}$ já que mudando as letras de ordem temos uma nova fila. Seu resultado é 15600 filas.

O segundo item foi feito calculando-se o arranjo de 26 letras tomadas de 3 a 3 e multiplicada com o arranjo de 10 algarismos tomados de 4 a 4: $A_{26,3}A_{10,4} = 78624000$ placas.

Problema 4. *Em um refeitório há doces e salgados. Cada pessoa receberá um recipiente com 3 doces, dos 8 tipos disponíveis e apenas 2 salgados, dos 7 tipos fabricados. Quantas são as diferentes possibilidades de preenchimento do recipiente?*

Solução e observações: Como a ordem em que escolhemos os doces para os três recipientes e a ordem em que escolhemos os dois salgados para colocar nos recipientes não importam, concluímos que trabalhamos com combinação simples.

Tivemos portanto uma combinação de 8 doces escolhidos de 3 a 3, ou $C_{8,3}$. Tivemos ainda uma combinação de 7 salgados para serem escolhidos de 2 a 2, ou seja, $C_{7,2}$.

Os alunos conseguiram compreender que devemos fazer duas combinações distintas obtendo 56 combinações para os doces e 21 para os salgados, mas tiveram dúvidas em compreender que ainda deveriam combinar os grupos de três doces com os grupos de 2 salgados, obtendo

$$C_{8,3}.C_{7,2} = 56.21 = 1.176.$$

Alguns alunos foram além na resposta quando somaram 56 com 21. As alunas L.T. e S.D. questionaram o por quê de multiplicar os dois valores e então,após voltar no conceito de Princípio Fundamental da Contagem, compreenderam que o produto é a aplicação do PFC.

Após esse problema, ficou claro para alguns alunos, sobretudo aqueles com melhor base matemática, a aplicação do PFC embora ainda fizessem confusões em alguns problemas.

Problema 5. *Oito pessoas irão acampar e levarão quatro barracas. Em cada barraca dormirão duas pessoas. Quantas são as opções de distribuição das pessoas nas barracas?*

Solução e observações: Novamente os alunos todos fazem confusão com a aplicação do PFC. Mas, por meio da intervenção coletiva, ficou claro que o problema se resolvia multiplicando as quantidades de possibilidades para cada escolha necessária, em que cada escolha corresponde, para este problema, às duas pessoas que ficarão dentro de cada barraca. Assim, foi levado ao conhecimento dos alunos o diagrama abaixo para ser preenchido com as combinações possíveis, ao que eles resolveram sem grandes dificuldades:

$$\underbrace{C_{8,2}}_{\text{Escolhe-se 8 de 2}} \cdot \underbrace{C_{6,2}}_{\text{Escolhe-se 6 de 2}} \cdot \underbrace{C_{4,2}}_{\text{Escolhe-se 4 de 2}} \cdot \underbrace{C_{2,2}}_{\text{Escolhe-se 2 de 2}} = (28).(15).(6).(1) = 2.520.$$

Problema 6. *Em um pequeno galinheiro há 12 aves, dentre um galo, galinhas, frangos e frangas, no entanto só existe espaço para 10 aves no poleiro. De quantas maneiras distintas elas podem ser empoleiradas, sabendo-se que o poleiro sempre ficará lotado?*

Solução e observações: Esse problema saiu facilmente para a aluna S.D que calculou $A_{12,10}$, seus colegas no entanto, começaram a resolução calculando $C_{12,10}$ e, apenas depois de S.D. lhes explicar de que se tratava de um arranjo, já que mudando-se a ordem das aves tem-se uma maneira distinta delas se organizarem no poleiro, é que eles partiram para o cálculo do arranjo $A_{12,10}$. Outros, ficaram apáticos não manifestando nenhum comportamento diante do problema. Importante destacar também que a aluna L.T. resolveu diferentemente dos colegas ao calcular o simples produto $\dfrac{12!}{2!} = 239.500.800$.

Discutindo as apostas da Mega-Sena

Na semana seguinte, no início da aula foi distribuído a cada aluno uma cartela de aposta da Mega-Sena e chamados a atenção para que fizessem a leitura da cartela e discutissem entre eles sobre o funcionamento e as regras da aposta.

Todos observaram e leram o que estava escrito na cartela, contudo apenas três alunos discutiram sobre ela e o aluno L.H comentou que o pai acertou no máximo três números marcados num jogo que fizera antes. Em seguida, discutiu-se as mesmas questões sobre o jogo à frente da sala para que todos pudessem participar, colaborando com intervenções ou apenas observando.

Houve aluno que citou o caso em que é marcado uma sequencia de 6 dezenas e completando que "a probabilidade dela sair é pequena, quase zero". Outra aluna disse

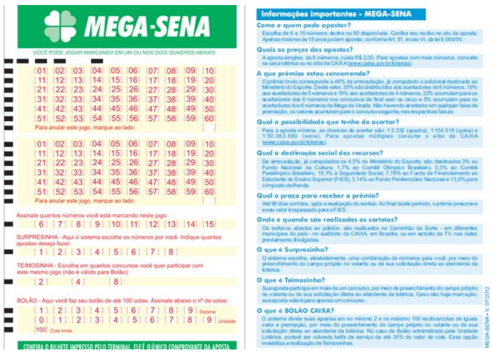

Figura 3: Cartela da Mega-Sena

que o pai sempre marca algum número que saiu no sorteio anterior depois de ter observado que isso quase sempre acontece. Alguns comentaram casos de conhecidos que acertaram 3 números e de outros que ganharam na quadra. Todos disseram não conhecer ninguém que tenha acertado a quina ou a sena.

Posteriormente, foi dado a cada aluno uma cartela e pedido que marcassem 6 números na tabela de cima e 7 números na tabela de baixo. Nesse dia, dentre os materiais usados na aula pelo professor, estavam bolinhas de bingo, numeradas de 1 a 60 dentro de um saco preto de pano. Simulou-se então o sorteio das dezenas da Mega-Sena e cada aluno ia circulando o número que acertasse. A maioria acertou um ou nenhum número. Apenas as alunas J.P. e G conseguiram acertar dois números.

Como não houve ganhador em nenhuma das faixas de prêmio partimos para frente e então foi perguntado aos alunos sobre a probabilidade deles terem ganho. Como ninguém respondeu, lhes foi explicado que 6 números marcados representam um jogo ou aposta e, que com os 60 números constante no volante da cartela era possível "agrupar" os números em 50063860 jogos diferentes, isto é, fazer $C_{60,6}$ combinações de 6 números entre os 60 dos quais eles marcaram apenas um e que a probabilidade de ganharem na Mega-Sena era

$$P = \frac{1}{C_{60,6}} = \frac{1}{50.063.860} = 0,0000000199745$$

pagando-se por este jogo, R$ 2,00.

Sobre o volante de baixo, foram questionados se a probabilidade de ganhar era a mesma, o que prontamente responderam que não, pois marcaram um número a mais. Então lhes foi pedido que combinassem os 7 números de 6 a 6, o que logo cada um escreveu em seu caderno 7 combinações. Alguns alunos que não compreenderam o que foi pedido ficaram aguardando os colegas apresentarem seus resultados e passaram apenas a observarem a aula. Foi desenhado no quadro branco uma sequencia de números de 1 a 7, simulando a aposta de 7 números feita pelo professor. E depois, feitas as combinações de 6 a 6.

Veja:

$$\left\{\begin{array}{c} 1-2-3-4-5-6 \\ 1-2-3-4-5-7 \\ 1-2-3-4-6-7 \\ 1-2-3-5-6-7 \\ 1-2-4-5-6-7 \\ 1-3-4-5-6-7 \\ 2-3-4-5-6-7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Marcar 7 números no volante da cartela da Mega-Sena} \\ \text{equivale a fazer 7 jogos diferentes, todos com igual} \\ \text{probabilidade de acontecer.} \end{array}$$

Ficou justificado, portanto, a resposta que deram anteriormente sobre a probabilidade de se ganhar no volante de baixo em que marcaram 7 pontos e que essa probabilidade é

$$P_7 = \frac{C_{7,6}}{C_{60,6}} = \frac{7}{50.063.860} = 0,0000001398214$$

portanto, 7 vezes maior que a probabilidade de ganhar escolhendo apenas 6 números e que por isso, paga-se 7.(R$ 2,00) = R$ 14,00.

Na aula seguinte, os alunos montaram e preencheram a tabela que traz a probabilidade P_q de se ganhar na Mega-Sena marcando-se 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 1 4 ou 15 números, sendo dados P_6 e P_7 como exemplos. A tabela construída é igual à Tabela 17 (página 94).

Na aula do dia seguinte, as atividades feitas foram avaliadas e somadas às notas do bimestre e, na sequencia, foi definido sucesso e fracasso em um experimento que consiste em retirar bolas de uma urna. A aula foi muito expositiva exigindo dos alunos maior atenção.

Considerou-se um modelo de urnas com reposição em que são sorteadas n bolas, uma a uma, sendo cada sorteio considerado um experimento. Essa urna contém g

bolas verdes e v bolas vermelhas. É de interesse no experimento retirar k bolas com a característica desejada, isto é, verde, e consequentemente sobram $n-k$ bolas com a característica não desejada, vermelha. Estava claro que toda essa definição ficou confuso para os alunos então, tornou-se necessário colocar valores para $g=10$ e para $v=20$ e seguir o experimento.

No problema numérico, a probabilidade de sair bola verde era $\frac{10}{30}$ e a probabilidade de sair bola vermelha era $\frac{20}{30}$. Considerou-se sair bola verde como sucesso (s) no experimento e sair bola vermelha como fracasso (f). Era desejável realizar $n=8$ experimentos e obter $k=6$ sucessos e $n-k=2$ fracassos.

Chamando cada experimento por e_i , pelo PFC, a probabilidade de se obter 6 sucessos nos seis primeiros experimentos e 2 fracassos nos dois últimos experimentos é

$$P=\underbrace{\frac{10}{30}}_{e_1}\cdot\underbrace{\frac{10}{30}}_{e_2}\cdot\underbrace{\frac{10}{30}}_{e_3}\cdot\underbrace{\frac{10}{30}}_{e_4}\cdot\underbrace{\frac{10}{30}}_{e_5}\cdot\underbrace{\frac{10}{30}}_{e_6}\cdot\underbrace{\frac{20}{30}}_{e_7}\cdot\underbrace{\frac{20}{30}}_{e_8}=\left(\frac{10}{30}\right)^6\left(\frac{20}{30}\right)^2=\frac{400.000.000}{656.100.000.000}=0,0609\%.$$

A expressão acima é equivalente a

$$P=\underbrace{s}_{e_1}\cdot\underbrace{s}_{e_2}\cdot\underbrace{s}_{e_3}\cdot\underbrace{s}_{e_4}\cdot\underbrace{s}_{e_5}\cdot\underbrace{s}_{e_6}\cdot\underbrace{f}_{e_7}\cdot\underbrace{f}_{e_8}=s^6f^2$$

Considerando que outras sequencias contendo 6 sucessos e 2 fracassos podem ocorrer, obtendo a mesma probabilidade como em

$$P=\underbrace{s}_{e_1}\cdot\underbrace{f}_{e_2}\cdot\underbrace{s}_{e_3}\cdot\underbrace{s}_{e_4}\cdot\underbrace{s}_{e_5}\cdot\underbrace{s}_{e_6}\cdot\underbrace{s}_{e_7}\cdot\underbrace{f}_{e_8}=s^6f^2,$$

$$P=\underbrace{s}_{e_1}\cdot\underbrace{s}_{e_2}\cdot\underbrace{f}_{e_3}\cdot\underbrace{s}_{e_4}\cdot\underbrace{f}_{e_5}\cdot\underbrace{s}_{e_6}\cdot\underbrace{s}_{e_7}\cdot\underbrace{s}_{e_8}=s^6f^2,$$

$$\vdots$$

$$P=\underbrace{f}_{e_1}\cdot\underbrace{f}_{e_2}\cdot\underbrace{s}_{e_3}\cdot\underbrace{s}_{e_4}\cdot\underbrace{s}_{e_5}\cdot\underbrace{s}_{e_6}\cdot\underbrace{s}_{e_7}\cdot\underbrace{s}_{e_8}=s^6f^2,$$

$$P=\underbrace{s}_{e_1}\cdot\underbrace{s}_{e_2}\cdot\underbrace{s}_{e_3}\cdot\underbrace{f}_{e_4}\cdot\underbrace{s}_{e_5}\cdot\underbrace{s}_{e_6}\cdot\underbrace{f}_{e_7}\cdot\underbrace{s}_{e_8}=s^6f^2,$$

isto é, tivemos uma combinação de 8 elementos tomados 6 a 6, nos leva à probabilidade total de

$$P_6 = \binom{8}{6} s^6 f^2 = 28 \frac{4}{6.561} = 1,7052\%.$$

Até aqui os alunos permaneceram atentos à explanação dos conceitos e aplicações, mas era percebível que apenas alguns alunos com maior domínio matemática de fato compreendiam bem o que era colocado. Contando com a ajuda destes, seguiu-se a aula esperando que estes alunos atuassem monitorando os colegas nas atividades que se seguiram.

Então, generalizando a expressão anterior para valores quaisquer de n, g, v e k, temos que a probabilidade de obter k bolas verdes nos n experimentos é

$$P_k = \binom{n}{k} s^k f^{n-k} \tag{1}$$

em que $s = \dfrac{g}{g+v}$ e $f = \dfrac{v}{g+v}$.

No dia seguinte, foi apresentado aos alunos a situação problema presente na seção 5.3.2 que diz:

Uma pessoa marca uma cartela de 15 números apostando na Mega-Sena em cada concurso ocorrido na semana durante todo o ano. Considere que o valor da aposta simples, de 6 números seja de R$ 2,00. Em cada concurso a pessoa tem chance 0,00009972 de fazer a sena (acertar seis números dentre os quinze marcados). Em 1 ano, qual a chance de nesse período ele não ganhar nenhuma vez na sena?

Foi feito em conjunto o cálculo para encontrar a solução aplicando a equação 1, o que tem levado toda a aula do dia. Houve grande participação dos poucos alunos frequentes no desenvolvimento da equação. Seria calculada também a probabilidade de não ganhar na Mega-Sena, nas condições dada no problema, realizando jogos por períodos de 10, 100 e 1000 anos. Mas o sinal soou e os alunos foram embora, não anotando tudo o que estava no quadro branco.

O dia seguinte seria dedicado à resolução restante do problema apresentado no dia anterior, contudo apenas dois do total de alunos apareceram na escola por terem de entregar um trabalho à professora de Inglês. Já estávamos próximo do final do bimestre, os dias letivos estavam encravados entre finais de semanas e intervalos de recessos devido a feriados e jogos de copa do mundo e como os alunos já haviam notas suficientemente para serem aprovados, simplesmente não apareceram mais na escola de modo que não havia mais como obter nenhum trabalho escrito ou fazer qualquer discussão a respeito das aulas dedicadas ao estudo de problemas de contagem e probabilidade.

Todavia, pôde-se obsevar que apesar de um conteúdo com o qual os alunos têm tão pouco contato, é importante considerar a utilização de um problema com relativa simplicidade para exemplificar problemas mais complexos e abstratos, tais como os problemas que envolvam contagem e probabilidade. Pela proposta de trabalho voltada a alunos do Ensino Médio empenhada nessa monografia, os modelos de urna traduzem bem os diversos problemas cotidianos ou não trazendo maior clareza nos objetivos pedidos nos enunciados.

6 Considerações finais

Embora a teoria das pr

Embora a teoria das probabilidades seja de aplicação imensa e estudada em diversos cursos superiores, podemos verifificar que os alunos tem chegado ao final do ensino médio com grande defazagem desse conteudo. Durante a realização das propostas foi possível fazer essa constatação para a turma escolhida. O fato de poucas aulas serem destinadas ao estudo desse conteúdo têm contribuido negativamente para a sua compreensão.

No entanto, a dificuldade maior observada durante a execução desse trabalho, está na falta de domínio de conceitos básicos do Ensino Fundamental, desde o 6º ano até o 9º ano.

A cada início de aula e introdução de novo conteúdo é necessário o professor fazer revisão de conceitos já explorados em anos anteriores, ou mesmo, em aulas anteriores.

Mesmo alguns alunos demonstrando responsabilidade com as tarefas de casa, é evidente que, na maioria dos casos, elas são feitas apenas com a intenção de receberem vistos e notas, não com o objetivo de aprender.

Somado a isso, ainda tem a questão da gestão da educação que, com projetos criados pela Secretaria da Educação com a intenção de aumentar a nota do IDEB do estado. Esses projetos, não têm conseguido melhorar a formãção de conceitos por parte dos alunos. Na verdade, tem contribuído para aplacar ainda mais o fracasso escolar do aluno. A grande quantidade de responsabilidades impostas ao professor tem deixado o professor sobrecarregado impedindo que o mesmo possa avaliar da maneira correta os resultados das atividades e avaliações feitas e, fazer destas, instrumentos capazes de reorientar o professor no seu fazer pedagógico.

Ainda assim, com todas as dificuldades encontradas durante o processo, foi notável o comportamento dos alunos diante das surpresas no jogo da Mega-Sena. Os comentários, as resoluções das questões propostas em sala, a atenção às indicações da cartela, tudo isso tem somado na formação dos alunos que participaram das propostas executadas.

Algumas observações dos alunos mostraram que os mesmos já tinham alguma experiência com os jogos, que os familiares praticavam com frequência e por isso, eram capazes de fazer exclusão de jogos , supostamente, segundo eles, com pouca chance (não matematicamente) de sair, como marcando-se os seis primeiros números do volante. Assim, saber que qualquer combinação de seis números possui a mesma probabilidade de ser sorteada, foi vista com certa incredubilidade e incerteza.

Isso acontece devido ao fato de nunca uma sequência de seis números consecutivos ter sido sorteada. Contudo, várias outras combinações ainda não saíram e as pessoas continuam na esperança de acertar alguma delas por não conhecer a vastidão de possibilidades de escolhas e, que somente uma delas, será sorteada a cada rodada.

Todavia, em meio à dinamização que o mundo tem vivenciado, é necessário investir mais no estudo da probabilidade e análise combinatória, pois enxergar probabilisticamente tem se tornado tarefa comum, ainda que sem rigor matemático. Isso ocorre, quando, por exemplo, nos indagamos se irá chover ou não com base em resultados anteriores ou que números escolhemos para jogar na loteria. Até em um jogo de par ou ímpar, devemos levar em conta que, dependendo da regra do jogo, apostar com uma paridade pode aumentar ou diminuir a chance de vitória.

Referências

[1] Ross, Sheldon. *Probabilidade: Um curso moderno com aplicações*; tradutor: Alberto Resende De Conti. - 8. ed. - Porto Alegre: Bookman, (2010).

[2] Dantas, Carlos Alberto Barbosa, *Probabilidade: Um Curso Introdutório*, 3. ed. rev. - São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2008, pp. 15-165 - (Acadêmica; 10).

[3] Mendes, Beatriz Vaz de Melo, *Introdução à Análise de Eventos Extremos*, 3. ed. rev. - Rio de Janeiro: E-papers Serviços Editoriais Ltda, 2004, 232p.5 - (Acadêmica; 10).

[4] Spiegel, Murray Ralph, *Probabilidade e estatística*; tradução de Alfredo Alves de Farias. 3. ed. rev. - São Paulo: McGraw-Hill do Brasil, 1978. (Coleção Schaum).

[5] Magalhães, Marcos Nascimento, *Probabilidade e Variáveis Aleatórias*; 2. ed. - São Paulo: Edusp - Editora da Universidade de São Paulo, 2006.

[6] Lebensztayn, Élcio, *Exercícios de probabilidade*; 2012; Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/ lebensztayn/livro/Livro.pdf>. Acessado em 03/04/2014.

[7] Rolla, Leonardo Trivellato, *Introdução à Probabilidade*; 2013; Disponível em: <http://mate.dm.uba.ar/ leorolla/papers/intro-probab.pdf>. Acessado em 04/06/2014.

[8] Shiryayev, A. N., *Probability: Graduate Texts in Mathematics, v. 95*, - Springer Verlag, 1996.

[9] Currículo Referência da Rede Estadual de Educação de Goiás. Disponível em: <http://www.seduc.go.gov.br> Acesso em 14 de maio de 2014.

[10] Caixa Econômica Federal, Loterias. Disponível em: <http://www1.caixa.gov.br/loterias/index.asp> Acesso em 14 de janeiro de 2014.