SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA
INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

RAFAELA RAMOS SOARES GONÇALVES

Rio de Janeiro
2014

RAFAELA RAMOS SOARES GONÇALVES

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO:
A UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA

Dissertação de mestrado apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.
Área de concentração: AnáliseCombinatória

ORIENTADOR: Roberto Imbuzeiro de Oliveira

Rio de Janeiro

2014

RAFAELA RAMOS SOARES GONÇALVES

UMA ABORDAGEM ALTERNATIVA PARA O ENSINO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO:
A UTILIZAÇÃO DO PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS COMO FERRAMENTA DIDÁTICO-PEDAGÓGICA

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de Mestre em Matemática e aprovada em sua forma final pelo Orientador e pela Banca Examinadora.

Banca Examinadora:

____

Prof. Dr. Roberto Imbuzeiro Oliveira, IMPA.

____

____

Rio de Janeiro - Março de 2014

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha mãe, Remilda Ramos Soares, que sempre me incentivou e apoiou minhas decisões acadêmicas e profissionais.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática, coordenado pela Sociedade Brasileira de Matemática, pela oportunidade de realização de trabalhos em minha área de pesquisa.

Aos colegas e parceiros do curso, Alan Rangel, Gabriella Marques, LynkCardia e Leandro Freitas, pelo auxílio nas tarefas desenvolvidas durante o mestrado e apoio na revisão deste trabalho.

Às minhas amigas e colegas de profissão e estudos Lori Ribeiro, Patrícia Martins e Erica Aragão por todo o apoio emocional e acadêmico.

Ao meu orientador, Roberto Imbuzeiro, pela disponibilidade em me auxiliar neste trabalho, com comentários e instruções fundamentais.

Aos amigos Rogério Nóboa e Bianca Manzani pela revisão conjunta deste trabalho.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela provisão da bolsa de mestrado.

Ter fé é acreditar naquilo que você não vê;
a recompensa por essa fé é ver aquilo
em que vocêacredita!

(Santo Agostinho)

RESUMO

A aprendizagem de Análise Combinatóriasempre se mostrou como um obstáculo aos alunos, devido à forma de abordar esse conteúdo, que geralmente é através da aplicação de fórmulas, o que faz perder o sentido da resolução de problemas. Portanto, este presente trabalho teve por objetivo verificarcomo está o ensino de Análise Combinatória no Ensino Médio e avaliar a aprendizagem dos alunos com diversas metodologias observadas. Além de verificar e avaliar o ensino desse conteúdo, este trabalho também tem por objetivo mostrar a eficácia de outra abordagem de ensino, utilizando a resolução de problemas e as técnicas do Princípio Fundamental da Contagem, para desenvolvimento do raciocínio combinatório em alunos do Ensino Médio, melhorando, desta maneira, o ensino da matemática. As principais fontes de pesquisa foram os Parâmetros Curriculares Nacionais, artigos em revistas e periódicos, dissertações e teses.A partir desses referenciais teóricos foi elaborada a problematização da pesquisa, assim definida: *A metodologia de resolução de problemas facilita o entendimento e a aprendizagem em Análise Combinatória? Como é ensinado esse conteúdo aos nossos alunos? A simples aplicação de fórmulas inibe o desenvolvimento do raciocínio combinatório? Esta aplicação é útil em algum momento?* Para isso, foiobservada a evolução do raciocínio combinatório de quatro turmas do segundo ano do Ensino Médio do Colégio São Paulo, situado na cidade de Teresópolis, no Estado no Rio de Janeiro. A metodologia de pesquisa utilizada foiqualitativa, para avaliar de forma exploratória a evolução dos alunos no aspecto cognitivo em relação ao conteúdo trabalhado e quantitativo, para apurar a aprendizagem dos alunos de forma padronizada, através de avaliações e questionários. Para responder os problemas da pesquisa foram utilizadas avaliações diagnósticas iniciais, intermediárias e finais e análise das provas dos alunos e dos métodos de resolução de problemas, além de uma revisão bibliográfica acerca do assunto abordado.

Palavras-chave: Análise Combinatória. Ensino da matemática. Princípio fundamental da contagem. Resolução de problemas.

ABSTRACT

The learning of Combinatorics has always been an obstacle to many students due to the way of approaching this content, which is usually done through the use of formulas, what makes the solving of mathematical problems senseless. Hence, the current paper aimed at assessing not only how the teaching of Combinatorics in High School is, but also at evaluating students' learning with the diverse methodologies observed. Besides assessing and evaluating the teaching of this content, this paper also aimed at showing the efficiency of a teaching approach, using problem solving and the Fundamental Counting Principle for the development of combinatorial reasoning in high school students, thus improving Mathematics teaching. The main research sources were the *ParâmetrosCurricularesNacionais* (Brazilian Curricular Parameters), scientific papers, dissertations and theses. From these theoretical frameworks, the following research questions were formulated: *Does the methodology of problem solving facilitate the understanding and learning in Combinatorics? How is this content taught to our students? Does the simple application of formulas inhibit the development of combinatorial reasoning? Is this application useful at any point?* In order to answer such questions, the evolution of combinatorial reasoning of four classes of the second year of high school at Colégio São Paulo, were observed. The school is located in the city of Teresópolis, Rio de Janeiro State, Brazil. A qualitative methodology of research was used in order to assess the cognitive aspect of students' development in an exploratory way. A quantitative methodology was used so as to gauge students' learning in a standardized way through evaluations and questionnaires. In order to address the problems of the research, initial, intermediate and final diagnostic evaluations and analyses of students' tests and methods of problem solving were used,in addition to a literature review on the subject matter.

Keywords: Combinatorics. Mathematics teaching. Fundamental Counting Principle.Problemsolving.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, vemos que a sociedade determina que os cidadãos tenham desenvolvido a capacidade de analisar e propor soluções para problemas de forma prática e rápida. Ainda, espera-se que esse desenvolvimento do raciocínio aconteça durante sua formação na educação básica, superior e pós-graduação. Só que, para que isso realmente ocorra, é necessário que exista em nossas instituições de ensino uma matriz curricular voltada para a resolução de problemas. Segundo Aranão (2011,p. 12) “O professor desempenha o papel de mediador na construção do conhecimento, criando situações para que a criança exercite a capacidade de pensar e buscar soluções para os problemas propostos.”

Sabemos que a matemática é a ferramenta fundamental para o desenvolvimento desse raciocínio e que seus conhecimentos são de fundamental importância para a formação do cidadão, fazendo com que todos possam compreender e atuar no mundo de forma mais significativa. Dessa forma, a aprendizagem da matemática se torna algo fundamental para a formação da cidadania, de forma a preparar o sujeito para enfrentar os problemas do dia-a-dia.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN),

> A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papeldecisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo dotrabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outrasáreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.(BRASIL, 1997).

Contudo, não é isso que observamos ao nos depararmos com uma educação voltada para a memorização de fórmulas e o ensino de algoritmos, sequências de instruções bem definidas que podem ser executadas mecanicamente. Identificamos nas escolas uma educação matemática voltada para a resolução de questões sem aplicabilidade e sem significado, o que impossibilita ao aluno um real aprendizado.

Ao não identificar a contextualização dos conteúdos e das respectivas questões em seu cotidiano, o aluno simplesmente “aprende” para ser aprovado no final do ano letivo, isso quando consegue assimilar os conteúdos estudados dessa forma. Aranão afirma que:

> [...] a interação do indivíduo se dá com algo concreto, ou seja, seu conhecimento é construído à medida que se relaciona e interage com materiais concretos (objetos) e com pessoas. Nessa interação, não só o indivíduo age sobre o meio mas este também intervém em seu modo de agir.(ARANÃO, 2011, p.15).

Essa separação evidente entre teoria e prática, entre ensino e aprendizado, muitas das vezes se dá devido à falta de preparo da equipe docente e pedagógica, devido à falta de atualização profissional e com isso, a educação se torna algo desgastado e obsoleto, onde se faz necessária a busca de um novo paradigma para que, dessa forma, seja substituído o debilitado processo ensino-aprendizagem baseado numa educação tradicional que, apesar de ter funcionado por um bom tempo, não se aplica mais nos dias de hoje.

D'Ambrosioafirma que:

> A formação de professores deve ter como objetivo maior a mensagem de que o conhecimento é importante, mas deve estar subordinado a uma profunda responsabilidade de humanidade, que é a verdadeira missão do educador.(D'AMBROSIO, 2012, p.13).

Assim, surge a necessidade de pesquisas educacionais para propor soluções aos problemas encontrados na educação matemática e na formação dos cidadãos.

> A Matemática no Ensino Médio tem um valor formativo, que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo, porém também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. (BRASIL, 1997).

Dentre os conteúdos de matemática, está a Análise Combinatória, objeto de estudo desta pesquisa. Acredito que a Análise Combinatória seja uma das mais importantes ferramentas de resolução de problemas, parte importante do estudo das Probabilidades e que desenvolve o raciocínio lógico matemático de forma plena e eficaz, fazendo com que o aluno, quando trabalhado corretamente, consiga desenvolver diversas outras capacidades de resolução de problemas.

Segundo Roa e Navarro-Pelayo, temos que

> Os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, teoria dos números, a teoria dos autônomos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias.(ROA; NAVARRO-PELAYO, 2001).

Desde 2006, quando ainda era estudante do 3º ano de graduação em Licenciatura Matemática, da Faculdade de Filosofia Santa Dorotéia, Nova Friburgo, trabalho como professora de matemática do Ensino Médio e, durante todos esses anos pude perceber a grande dificuldade que os alunos possuem em relação ao raciocínio combinatório, que lhes é apresentado, na maioria das vezes, pela primeira vez no segundo ano do Ensino Médio. Na verdade, percebi essa dificuldade não somente por parte dos alunos, mas também dos colegas professores, que muitas das vezes evitavam tal conteúdo em seus planejamentos e, quando eram "obrigados" a lecioná-lo, o fazia de forma superficial, pois não tinham pleno domínio do conteúdo.

Assim, quando ainda estudante de graduação, percebi minha identificação com a matemática discreta, a parte da Matemática destinada a estudar os objetos discretos e que consiste em elementos conectados. Me senti uma privilegiada e uma exceção à regra, já que a maioria dos meus colegas não se sentia à vontade com esse ramo da Matemática.

A partir dessa observação e de minha identificação com o tema, este trabalho pretende avaliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos dentro de uma pesquisa exploratória, analisando a amostra da pesquisa, recolhendo informações pertinentes e fazendo levantamento de referenciais teóricos; e também experimental, com o objetivo de levantar hipóteses acerca das novas metodologias de ensino utilizadas.

Assim, ciente das dificuldades encontradas não só pelos alunos, mas também pelos professores, pretende-se mostrar uma abordagem diferenciada para o ensino da Análise Combinatória, tirando do foco a metodologia da fórmula-aplicação e incentivando o uso das técnicas de contagem para a resolução dos problemas em questão.

Não existe um caminho único e correto para o ensino desse conteúdo, mas é necessário aprimorar técnicas pedagógicas para que sejam desencadeadas mudanças notáveis no modo como o aluno aprende, para que seja percebida a real construção do conhecimento feito pelo próprio discente, aprendendo a matemática de uma forma contextualizada e significativa, desenvolvendo um raciocínio dedutivo e lógico que será útil para a resolução dos mais diversos problemas que podem surgir ao longo da vida.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação.(BRASIL, 1997).

Portanto, este trabalho tem como objetivo mostrar como o Princípio Fundamental da Contagem e as técnicas de resolução de problemas, quando trabalhados de forma planejada e correta, atingem resultados surpreendentes relacionados aos aspectos cognitivos dos alunos nessa área da matemática.

Este trabalho é dividido em quatro partes. A primeira parte aborda conceitos e definições básicas da Análise Combinatória que são ensinadas no Ensino Médio, dando ênfase ao Princípio Multiplicativo e à resolução de problemas. Também é feita uma análise crítica acerca dos conceitos e definições divulgados em alguns dos principais livros didáticos.

A segunda parte traz questões pedagógicas no que diz respeito à aprendizagem dos alunos nessa área da matemática e as principais dificuldades encontradas pelos discentes e docentes.

A terceira parte mostra como foi efetuada a pesquisa de campo, realizada no Colégio São Paulo, situado na cidade de Teresópolis, Rio de Janeiro, com quatro turmas do segundo ano do Ensino Médio, com uma amostra intencional de 105 alunos com idades entre 15 e 18 anos.

Por fim, a quarta e última parte traz as considerações finais da pesquisa, com análise crítica dos resultados obtidos e avaliação das metodologias utilizadas, procurando contribuir de modo efetivo para o ensino e aprendizagem de Análise Combinatória.

Toda a pesquisa de campo foi desenvolvida através da metodologia da engenharia didática, que também é explanada neste trabalho.

2. O DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

Este capítulo tem por objetivo mostrar a Análise Combinatória e seus conceitos a partir de diferentes perspectivas.

Num primeiro momento são analisados os aspectos históricos da Análise Combinatória, seu surgimento, os objetivos de seu estudo em cada momento da história e também os principais estudiosos que deram início ao estudo da Teoria Combinatória.

Na seção seguinte são apresentados conceitos e definições básicas da Análise Combinatória, a resolução de problemas de contagem através do Princípio Multiplicativo e as acepções acerca do conceito de permutação, arranjo e combinação.

A última perspectiva é sobre a técnica de resolução de problemas como metodologia ativa para o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos alunos desde o Ensino Fundamental.

2.1. Contando a história da contagem

Esta seção faz um breve apanhado da história da Análise Combinatória. Ela é em parte baseada em artigos publicados na revista Ábaco, da Escola Secundária Infanta D. Maria de Coimbra, divulgados eletronicamente[1].

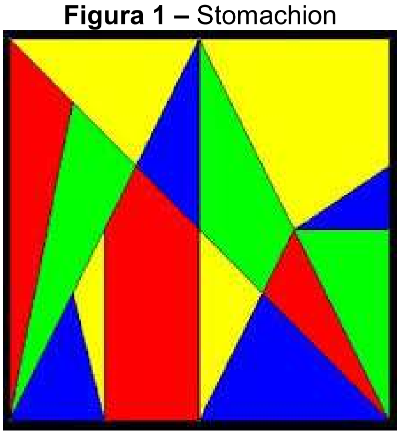
Acredita-se que a Análise Combinatória tenha tido origem ainda na antiguidade, antes mesmo dos registros históricos, mas foi através do matemático grego Arquimedes, que viveu em Siracusa, na Sicília, no século III a.C., que passou-se a ter conhecimento acerca dos problemas de contagem. Ele propôs um problema de combinação de peças em um tabuleiro, que ficou conhecido como *Stomachion*(Figura 1). Embora não se saiba ao certo o significado dessa palavra, sabe-se que tem a mesma origem da palavra estômago. O fato é que não se sabe se foi realmente Arquimedes quem inventou o jogo ou se ele apenas explorou o problema proposto em alguns manuscritos antigos.

---

[1] O leitor interessado poderá encontrar informações mais detalhadas no site http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/matelem/index.html (acesso em 05/03/2014)

Basicamente, o jogo consistia em 14 peças planas, geralmente feitas em marfim, de diversas formas poligonais, e o objetivo era organizar essas peças de diferentes maneiras a formar um quadrado. Uma propriedade importante dessas peças é o fato de que as áreas de cada polígono era comensurável, ou seja, a razão entre a área da peça e a área do quadrado era um número racional. O valor das áreas dos polígonos é facilmente encontrado se utilizado o Teorema de Pick. Dado um polígono com vértices sobre os nós de uma malha, a fórmula de Pick nos fornece a área do polígono sabendo apenas quantos são os nós da malha sobre o bordo do polígono, *b*, e quantos são os nós da malha interiores ao polígono, *i*. Mais exatamente, sua área é dada por$A = i + b/2 - 1$.

Figura 1 – Stomachion



Fonte: Google Imagens.

Pode-se perceber que problemas de contagem sempre surgiram e que técnicas de resolução desses problemas sempre foram as ferramentas que os matemáticos buscavam em seus estudos. Para compreender quão antigas são essas questões, podemos destacar o problema 79 encontrado no Papiro Egípcio de Rhind. O problema é: *Há sete casas, cada uma com sete gatos, cada gato mata sete ratos, cada rato teria comido sete safras de trigo, cada qual teria produzido sete hekat*[2]*de grãos; quantos itens têm ao todo?* Também surgiram os problemas das construções dos quadrados mágicos, que envolviam método de combinações de números, investigado inicialmente pelos chineses.

[2] Antiga unidade de volume egípcio usado para medir cereais, pão e cerveja. Ele é igual a 4,8 litros em medições de hoje.

Apesar dos problemas de contagem existirem desde sempre, a teoria combinatória só surgiu no fim do século XVI, com a necessidade de cálculos de possibilidades dentro dos jogos de azar, e uma teoria combinatória só seria formalmente escrita em meados do século XVII e início do século XVIII pelos matemáticos Pascal (1654, escrito em 1665), Leibniz (1666), Kircher (1669), Wallis (1673) e Bessy (1693). Esse estudo deu origem à Teoria das Probabilidades. De acordo com João Carlos Cataldo (2013), nota-se que:

> [...] Por solucionarem problemas de jogos de azar, Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665) impulsionaram essa área. Pascal escreveu, em 1654, o *Tratado do Triângulo Aritmético*, uma exposição das propriedades dos coeficientes binomiais e das relações entre eles. (CATALDO, 2013).

Além de Pascal e Fermat, outros matemáticos também deram suas contribuições para a Teoria das Probabilidades. O primeiro que tratou o assunto como uma ciência foi Christiaan Huygens (1629-1695). Depois, os mais importantes, porque trataram a probabilidade como um ramo da matemática, foram Jakob Bernoulli (1654-1705), em a *Arte da Conjectura*, publicado em 1713, e Abraham de Moivre (1667-1754) que, em 1718, escreveu a *Doutrina da Probabilidade*.

A contribuição de Leibniz para a matemática começou desde cedo. Leibniz ingressou na escola aos sete anos de idade, porém era autodidata em Latim Avançado e Grego. Aos 14 anos entrou para a universidade e lá começou seu estudo aprofundado em Filosofia, mas não tão bem radicado em matemática. Quando se formou bacharel, em suas férias de verão, conheceu o professor de matemática ErhardWeigel. Weigel influenciou Leibniz com suas ideias sobre o conceito de número e sua relação íntima com o universo. Mais tarde Leibniz recebe o título de mestre por uma dissertação que combinava aspectos de Filosofia e Leis. Mas sua contribuição para a comunidade matemática veio após esse título, quando ele trabalhou sua habilitação em Filosofia e publicou, em 1666, uma dissertação sobre a arte combinatória. Nesse trabalho Leibniz afirmava reduzir todo o raciocínio a uma combinação de elementos básicos. Ele descreve a Análise Combinatória como o estudo da colocação, ordenação e escolha de objetos.

Abraham de Moivre colaborou de forma significativa para o avanço desse ramo da matemática. Apesar de muito inteligente, não obteve sucesso financeiro, pois sua vida profissional se resumiu em trabalhos como professor particular de matemática. Nunca conseguiu lecionar em uma universidade, pois não tinha nacionalidade inglesa. Mas mesmo assim cooperou de forma expressiva ao publicar *DoctrineofChanges*, em 1718, onde aparece pela primeira vez a definição de independência estatística (a probabilidade de um acontecimento composto é o produto das probabilidades dos acontecimentos componentes). Mais de 50 problemas e questões com dados e outros jogos de azar também são mencionados nessa publicação. Investigou as estatísticas da mortalidade, estabelecendo uma equação simples entre 22 anos e o limite da longevidade, que fixou em 86 anos.

Ele era tão especial que até Newton o admirava. Quando levavam problemas de contagem para Newton, ele mesmo dizia: "*Leve para Moivre, ele certamente sabe mais do que eu".*

Jacob Bernoulli também cooperou para a Teoria Combinatória ao escrever sua principal obra, *A arte de Conjeturar* (1713),onde apresenta uma teoria geral sobre permutações e combinações, além dos números de Bernoulli, e faz um estudo mais aprofundado acerca da Teoria das Probabilidades.

A partir do século XVII é que se nota um desenvolvimento formal da Análise Combinatória e assim ela passa a ser reconhecida como um ramo da ciência. Uma teoria que se desenvolveu, organizou e sistematizou em vários trabalhos importantes para a comunidade matemática, trazendo importantes contribuições para o Cálculo, a Teoria das Probabilidades, a Estatística e vários outros campos da ciência.

No ano de 1736, o matemático Leonard Euler resolveu um famoso problema que intrigava os estudiosos da época. O problema consistia em descobrir, a partir de um mapa dado, se era possível dar uma volta em torno da cidade, que possuía sete pontes (das quais cinco ligavam a cidade a uma ilha), passando por todas elas uma única vez. Ele descobriu que não.

Mas a grande contribuição de Euler para a Análise Combinatória foi a representação dos coeficientes binomiais, pelo símbolo$\binom{n}{p}$, resultando na fórmula de combinação$\frac{n!}{n!\,(n-p)!}$.

No século XIX, o matemático Peter Gustav LejeuneDirichlet formulou pela primeira vez o princípio das gavetas, ou princípio das casas dos pombos. Esse princípio, aparentemente ingênuo, é um dos mais úteis para resolver problemas de combinatória.

2.2. Conceitos da Análise Combinatória

A Teoria Combinatória, de acordo com Bose e Manvel (1984), rapidamente assumiu a posição de um dos maiores e mais importantes ramos da matemática, considerando que os métodos combinatórios são particularmente relevantes em estatística e ciência da computação e, juntamente com a matemática pura, torna esse conteúdo, de forma intuitiva, mais atraente.

A ideia básica da Teoria da Contagem é reduzir um grande problema a pequenos similares mais fáceis de analisar. Podemos definir que a Análise Combinatória seria a técnica utilizada para que se possa quantificar objetos de um dado conjunto sem a necessidade de listar ou enumerar todos os elementos.

Existem dois principais princípios de contagem: o princípio aditivo e o princípio multiplicativo. Bose e Manvel (1984) afirmam que o princípio da adição diz que se uma tarefa pode ser realizada de m maneiras e uma outra tarefa pode ser realizada de n maneiras, então, uma tarefa **ou** outra podem ser realizadas de $n + m$ maneiras. Já o princípio multiplicativo diz que se uma tarefa pode ser feita de m maneiras e outra tarefa pode ser feita de n maneiras, então uma tarefa **e** outra podem ser feitas de $n \cdot m$ maneiras. “Estes princípios são a base da combinatória enumerativa, e são aplicáveis em uma enorme variedade de problemas” (BOSE; MANVEL, 1984, p. 2, tradução nossa).

2.2.1. Princípio fundamental da contagem

> A procura por técnicas de contagem está diretamente vinculada à história da Matemática e à forma pela qual as pessoas têm seu primeiro contato com esta disciplina. A primeira técnica matemática aprendida por uma criança é “contar”, ou seja, enumerar os elementos de um conjunto de forma a determinar quantos são os seus elementos. As operações aritméticas são também motivadas (e aprendidas pelas crianças) através de sua aplicação a problemas de contagem. (LIMA et al., 2006, p. 17).

O Princípio Fundamental da Contagem, também conhecido como Princípio Multiplicativo, é um dos métodos mais eficientes de resolução de problemas combinatórios.

Segundo Morgado et al,

> [...] o Princípio Fundamental da Enumeração ou Princípio da Multiplicação diz que se uma decisão d1 pode ser tomada de x maneiras e se uma

> decisão d2 pode ser tomada de y maneiras, então o número de maneiras de se tomarem decisões d1 e d2 é xy. (LIMA et al., 2006, p.18).

A seguir, acompanharemos a resolução de alguns problemas propostos no livro *A Matemática do Ensino Médio*, volume 2, escrito por Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner e Augusto César Morgado, 6ª edição, Rio de Janeiro, 2006(LIMA et al., 2006).

Primeiro exemplo: De um baralho comum de 52 cartas, sacam-se sucessivamente e sem reposição duas cartas. De quantos modos isso pode ser feito se a primeira carta tem que ser de copas e a segunda não deve ser um rei?

Essa não é uma questão das mais simples. Se considerarmos que a primeira retirada de cartas deve resultar numa carta de copas, podemos afirmar que temos 13 possibilidades. E, ao fazer a contagem das possibilidades da segunda carta, sem reposição, e verificar a quantidade de cartas que existem para a retirada em questão, entramos num dilema: teremos 47 cartas se a carta de copas não for um rei e teremos 48 cartas se a carta da primeira retirada for um rei de copas. Então, nesse tipo de questão, precisamos fragmentar a situação.

Vamos inicialmente verificar quais as possibilidades de sair um rei de copas na primeira retirada. Depois vamos analisar quais as possibilidades de se retirar uma outra carta sem ser um rei. Em seguida vamos analisar quais as possibilidades de se retirar uma carta que seja de copas, mas que não seja rei. Depois vamos verificar quantas cartas restaram para a segunda retirada que não seja rei. Pelo princípio multiplicativo, a solução se apresenta da seguinte maneira:

$$\frac{rei\ de\ copas}{1} . \frac{não\ rei}{48} = 48 \text{ modos}$$

$$\frac{copas\ (exceto\ rei)}{12} . \frac{não\ rei}{47} = 546 \text{ modos}$$

Como podemos ter um rei de copas ou qualquer outra carta de copas na primeira retirada, temos que o evento desejado pode ocorrer da primeira ou da segunda maneira. Logo, podemos concluir que, utilizando o princípio multiplicativo e também o princípio aditivo, podemos ter um total de 48 + 564 = 612 retiradas diferentes que satisfazem a situação dada.

Segundo exemplo: Quantos são os inteiros positivos de quatro dígitos nos quais o algarismo 5 figura?

Para pensar em todas as possibilidades em que o algarismo 5 figura, teríamos que encontrar todas as possibilidades em que o 5 figura na casa das unidades, das dezenas, das centenas, da unidade de milhar e, como não há necessidade dos algarismos serem distintos, ele pode aparecer em duas ou mais classes simultaneamente, o que daria muito mais trabalho.

Então, para esse tipo de questão, o melhor é utilizar o princípio multiplicativo juntamente com o método da exclusão. Seria resolver o problema fazendo a contagem exatamente do que não se quer.

Analisemos a quantidade de números de 4 dígitos que podemos formar.

$$\frac{UM}{9}\frac{C}{10}\frac{D}{10}\frac{U}{10} = 9000 \text{ números distintos}$$

Para ocupar a casa da unidade de milhar, podemos colocar qualquer algarismo exceto o zero, pois se o zero fosse uma possibilidade válida, os números que iniciariam com esse seriam, na verdade, números de três dígitos. E, para ocupar as demais casas, quaisquer algarismos são válidos.

Agora, analisemos a quantidade de números de 4 dígitos que podemos formar em que o algarismo cinco **NÃO** figura.

$$\frac{UM}{8}\frac{C}{9}\frac{D}{9}\frac{U}{9} = 5832 \text{ números em que o 5 não figura}$$

Pelo método da exclusão, podemos calcular a quantidade pedida através da diferença dos valores encontrados acima através do Princípio Fundamental da Contagem (PFC), pois se retirarmos do total os números em que o 5 não figura, restarão todos aqueles nos quais o 5 figura.

Logo, a quantidade pedida é 3168 números diferentes.

2.2.2. Permutação

A definição de permutação, de acordocom Michaelis (2004), é apresentada como ato ou efeito de trocar, mudança de um pelo outro, misturar. Agrupamentos que podem se formar com uma quantidade definida de elementos, de modo que o agrupamento formado se diferencie dos demais pela ordem dos elementos.

Nos problemas de Análise Combinatória, a permutação aparece nos problemas em que utilizamos todos os elementos disponibilizados e, trocando esses elementos de posição, podemos formar novos subconjuntos do conjunto dado.

De acordo com Lima et al. (2006, p. 94) "o número de permutação simples de *n* objetos distintos, ou seja, o número de ordens que podemos colocar *n* objetos distintos é $P_n = n!$[3]*"*.

Dessa maneira temos que, se temos à nossa disposição *n* objetos para organizar em *n*casas, vemos que para ocupar a primeira posição temos *n* opções de escolha, para ocupar a segunda posição temos *(n – 1)* opções, na terceira casa *(n – 2) opções,* e assim até chegarmos a n-ésima casa, quando teremos apenas uma opção.

Vejamos a seguir alguns problemas que envolvem o conceito de permutação.

Primeiro exemplo: Quantos são os anagramas[4] da palavra CAPÍTULO?

Como a palavra CAPÍTULO não possui letras repetidas, temos então um problema de permutação simples.

De acordo com a definição de permutação, e sabendo que a palavra dada possui 8 letras, então o número de anagramas deste palavra é 8! = 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 40320.

Segundo exemplo: De quantos modos é possível colocar 8 pessoas em fila de modo que 2 dessas pessoas, Vera e Paulo, não fiquem juntas?

---

[3]O símbolo ! representa o fatorial de um número, definido por n! = n x (n – 1)x(n – 2)x ... x 3 x 2 x 1.
[4]Palavra ou frase formada com as letras de outra.

Como queremos formar diferentes filas com essas oito pessoas, podemos dizer que nosso objetivo é permutar as pessoas na fila. Mas, além da permutação nesse exemplo, vamos utilizar o mesmo princípio da exclusão usado no segundo exemplo anterior.

Primeiro vamos analisar quantas filas diferentes podemos formar com as oito pessoas na fila. Como estamos tratando de permutação, temos $P_8 = 8! = 40320$.

Agora, vamos calcular quantas filas diferente podemos formar em que Vera e Paulo estejam sempre juntos. Calculamos essa permutação "amarrando" as duas pessoas em questão, como se fossem uma só. Nesse caso, ao invés de termos oito pessoas, teremos apenas sete. Então o número de filas formadas com Vera e Paulo juntos é $P_7 = 7! = 5040$. Só que podemos ter Vera e Paulo juntos em qualquer ordem, ou seja, esse resultado deve ser multiplicado por dois. Então existem 10080 filas diferentes nas quais as duas pessoas em questão estão juntas.

Logo, a diferença dos resultados obtidos nos dará o número de filas em que Vera e Paulo não aparecem juntos, e esse número é 30240.

Além da permutação simples, também existem a permutação com repetição e a permutação circular.

A permutação com repetição consiste em anagramas de palavras que contenham letras repetidas ou, generalizando, é uma permutação de elementos de um conjunto em que se tenha símbolos repetidos. Por exemplo, ao permutarmos as letras da palavra ARARA, se trocarmos as duas letras R entre si, estaremos fazendo uma permutação que, na verdade, não forma um anagrama novo. Logo, ao calcularmos o número de permutações, devemos desconsiderar os anagramas repetidos, que são contados mais de uma vez devido à repetição de símbolos. Podemos determinar esse número através da seguinte fórmula: se houver um conjunto com *n* elementos, dentre eles *r* repetidos, o número de permutações possível desses elementos é $P_{n,r} = \frac{n!}{r!}$.

Já a permutação circular consiste em permutar elementos que estão dispostos sobre um círculo, por exemplo, pessoas sentadas numa mesa circular. Esse tipo de permutação é um pouco diferente, pois para algumas disposições dos elementos, mesmo trocando todos eles de lugar, sua posição na roda não se altera.

Assim, se quisermos permutar *n* elementos em um círculo, basta efetuarmos $(n - 1)!$[5].

Veja alguns exemplos.

Terceiro exemplo: Determine o número de anagramas da palavra MISSISSIPI.

Como a palavra dada contém 10 letras, o número de anagramas é 10!. Mas, como MISSISSIPI tem letras repetidas, alguns anagramas não se diferem. Então, temos que dividir pelo fatorial das repetições. Logo, como temos 4 letras I repetidas e 4 letras S repetidas, o real número de anagramas da palavra é $\frac{10!}{4!4!}$.

Quarto exemplo: De quantas maneiras podemos colocar 4 pessoas numa roda de ciranda?

Chamando de A, B, C e D as pessoas dessa roda, se tivermos uma roda com ABCD, ou BCDA, ou CDAB, ou DABC, nessa ordem e nessa disposição, na realidade a ciranda é a mesma, pois as pessoas continuam entre as mesmas pessoas, não altera quem está ao seu lado. Logo, temos uma permutação circular, de 4 pessoas, que podemos calcular por $(4 - 1)! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ modos.

2.2.3. Arranjo

A definição de arranjo consiste basicamente em permutações de apenas alguns elementos do conjunto. Quando pensamos em arranjo, estamos na verdade selecionando objetos de um dado conjunto, e a ordem em que esses objetos são selecionados importa.

Na maior parte das vezes, o conceito de arranjo vem iniciado por exemplos de permutação simples, para que o aluno possa compreender que essa nova definição já está intuitiva em nosso raciocínio combinatório.

---

[5] A demonstração dessa fórmula pode ser encontrada no livro "A matemática do ensino médio", volume 2 (LIMA et al., 2006).

Dessa forma, se queremos permutar apenas *p* elementos de um conjunto com *n* elementos no total, para selecionar o primeiro elemento temos *n* opções, para o segundo temos *(n – 1)* opções, para o terceiro temos *(n – 2)* opções, até chegarmos ao *p-ésimo* elemento, para o qual teremos *(n – p + 1)* opções disponíveis.

Logo, para se calcular o arranjo de *p* elementos de um conjunto com *n* elementos devemos utilizar a seguinte definição: $A_{n,p} = \frac{n!}{(n-p)!}$.

Observemos alguns exemplos:

Primeiro exemplo: Um clube tem 30 membros. A diretoria é formada por um presidente, um vice-presidente, um secretário e um tesoureiro. Se uma pessoa pode ocupar apenas um dos cargos, de quantas maneiras é possível formar uma diretoria?

Essa é uma questão clássica de arranjo. O clube tem 30 membros e só queremos selecionar 4 pessoas, sendo que a ordem de seleção altera a formação da diretoria, pois se escolhermos uma pessoa A como presidente e outra pessoa B como secretário, temos uma diretoria formada. Mas se invertermos os cargos das pessoas A e B teremos outra diretoria formada, pois a disposição das pessoas nos cargos diferencia sua formação.

Logo, para resolver essa questão devemos fazer um arranjo $A_{30,4} = \frac{30!}{(30-4)!}$.

Segundo exemplo: Considere os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Quantos números distintos de quatro algarismos distintos que terminem com 7 podemos escrever?

Esta é uma outra questão clássica de formação de números com *n* dígitos. Mais uma vez, para resolver esse problema podemos utilizar o conceito de arranjo. Como temos que escrever números de quatro algarismos, todos devem ser distintos e ainda, o último dígito já está escolhido, temos que fazer um arranjo de $A_{8,3}$ =

$\frac{8!}{(8-3)!}$, pois dentre os nove símbolos disponíveis, um já está escolhido e nos restam oito símbolos para selecionar 3. Como a disposição desses símbolos no número, a ordem em que eles são colocados importa, então trata-se de uma questão de arranjo.

2.2.4. Combinação

A combinação consiste em uma seleção *p* de objetos distintos entre *n*objetos distintos dados. Segundo Lima et al.,

> [...] cada seleção de *p* objetos é chamada de uma combinação simples de classe *p* dos *n* objetos. Assim, por exemplo, as combinações simples de classe 3 dos objetos a, b, c, d, e são {a, b, c}, {a, b, d}, {a, b, e},{a, c, d}, {a, c, e}, {a, d, e}, {b, c, d}, {b, c, e}, {b, d, e} e {c, d, e}. (LIMA et al., 2006, p. 96).
>
> Para resolver o problema das combinações simples basta notar que selecionar p entre os n objetos equivale a dividir os n objetos em um grupo de p objetos, que são os selecionados, e um grupo de n – p objetos, que são os não selecionados. (LIMA et al., 2006)

Para fazer uma combinação de *p* objetos dentre *n* objetos dados utiliza-se a seguinte fórmula:

$$C_{n,p}=\frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

Podemos considerar a combinação como um arranjo de elementos repetidos. Dessa forma, pode-se resolver as questões pertinentes a esse conceito através do princípio multiplicativo.

Geralmente, o conceito mais formal de combinação vem iniciado por exemplos para maior compreensão dos alunos. A situação mais comum encontrada nos livros didáticos é o exemplo de seleção de pessoas num dado grupo, formação de comissão, etc. Vejamos alguns desses exemplos.

Primeiro exemplo: Com cinco homens e quatro mulheres, quantas comissões de 5 pessoas, com exatamente 3 homens, podem ser formadas?

Nesse caso, temos definido o número de homens e mulheres da comissão. Podemos fazer duas combinações, uma para selecionar os homens e outra para selecionar as mulheres. Logo, temos que fazer uma $C_{5,3}$ e uma $C_{4,2}$. E, como temos que fazer uma combinação para selecionar os homens **e** uma combinação para selecionar as mulheres, multiplica-se os valores obtidos. Logo, o resultado esperado é 10 x 6 = 60 comissões.

Segundo exemplo: Tem-se 5 pontos sobre uma reta R e 8 pontos sobre uma reta S paralela a R. Quantos triângulos com vértices nesses pontos existem?

Primeiro temos que pensar que um triângulo ABC é o mesmo triângulo ACB. Logo, o que nos importa é a seleção dos pontos que serão os vértices e não a ordem em que esses vértices serão escolhidos. Logo, trata-se de um problema de combinação.

Para selecionar vértices para formar um triângulo, precisamos atentar ao fato de que três pontos colineares não formam o polígono pedido. Então, para a formação desse, devemos selecionar dois pontos da reta R e um ponto da reta S ou um ponto da reta R e dois pontos da reta S.

Logo, temos $C_{5,2}$ x $C_{8,1}$ + $C_{5,1}$ x $C_{8,2}$ = 10 x 8 + 5 x 28 = 80 + 140 = 220 triângulos diferentes.

2.3. A Análise Combinatória e aresolução de problemas

Varias estratégias de ensino são utilizadas para a aprendizagem em matemática: observação, manipulação de objetos, experienciação, levantamento de dados, desafios matemáticos e resolução de problemas.

Define-se metodologia de ensino como o estudo das técnicas para o ensino e para a aprendizagem. A metodologia de resolução de problemas consiste na utilização de situações problemas para introdução, desenvolvimento e construção do raciocínio combinatório nos alunos.

Segundo Van de Walle,

> [...] um problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta. (VAN DE WALLE, 2001).

Pode-se perceber então que para resolver um problema não é necessário conhecimento de grandes técnicas ou ferramentas específicas. E utilizar essa metodologia para a resolução de problemas de Análise Combinatória é muito válido, pois faz com que o aluno possa pensar em diversos caminhos e apresentar diferentes propostas de resolução sem a utilização da fórmula-aplicação.

Se considerarmos que um problema de Análise Combinatória pode ser resolvido através de um "trabalho braçal", ou seja, descrevendo elemento por elemento, fazendo a contagem de todos os objetos procurados, podemos simplesmente ignorar as fórmulas apresentadas para a resolução dessas questões.

> Com o desenvolvimento de novos paradigmas educacionais, especialmentedaquele que toma a aprendizagem sob a concepção sócio-construtivista, e diantedas limitações dos problemas "fechados", surgem as propostas de "problemaaberto" e de "situação-problema". Apesar de apresentarem objetivos diferentes,esses dois tipos de problemas colocam o aluno, guardando-se as devidas proporções,em situação análoga àquela do matemático no exercício da profissão.O aluno deve, diante desses problemas, realizar tentativas, estabelecer hipóteses,testar essas hipóteses e validar seus resultados. (BRASIL, 1997).

Temos então, nessa abordagem construtivista, uma metodologia voltada para a resolução de problemas, que faz com que o aluno possa desenvolver seu raciocínio matemático de forma crítica, pensar produtivamente e enfrentar novas situações-problema.

Essa ideia faz com o que o aluno possa construir seu próprio conhecimento, e o professor faz papel de mediador dessa construção, fazendo uma orientação no processo de ensino-aprendizagem, se responsabilizando pela sistematização do conhecimento efetivo.

O professor, quando escolhe a resolução de problemas como metodologia de ensino, precisa estar ciente de que levar um problema à turma e introduzir conceitos formais imediatamente após isso não é a melhor maneira de se estabelecer uma construção de conhecimento. Como o objetivo dessa metodologia é fazer com o que o discente tenha um total envolvimento com o conhecimento que ele pretende alcançar, um único problema não possibilitaria tal construção e não teria como desenvolver um raciocínio lógico-matemático nesse aluno.

Outro ponto que devemos por em questão é o domínio do professor em relação ao conteúdo ministrado. Quando se trabalha com a resolução de problemas, várias propostas de resolução da questão irão surgir durante as aulas, propostas que muitas das vezes nem o professor tinha pensado ainda. A insegurança do professor nesse momento pode se tornar uma barreira e, assim, prejudicar o êxito da proposta metodológica.

Existem três interpretações diferentes para a resolução de problemas como proposta metodológica. Podemos ter a resolução de problemas como um objetivo, como um processo, ou como um ponto de partida.

Se utilizarmos essa metodologia como um **objetivo**, queremos na verdade ensinar o aluno a resolver problemas. Ao utilizarmos a resolução de problemas como um**processo**, estamos nos importando em como as soluções estão sendo apresentadas, com um enfoque na análise das estratégias dos alunos. E utilizar as situações-problemas como um **ponto de partida** é, na verdade, usar esse recurso para ensinar matemática.

Como o foco desta pesquisa ao utilizar a metodologia da resolução de problemas é buscar uma técnica para ensinar Matemática através de situações-problema e não ensinar a resolver problemas, nosso enfoque é na utilização da proposta didática como ponto de partida. Logo, o desenvolvimento do ensino é feito através da apresentação de um problema e, a partir da resolução do mesmo, irão se estabelecer os conceitos previstos pelo professor.

> Propor resolução de problemas em sala de aula, vinculando aos objetivos didáticos, desafiando a curiosidade, a pesquisa e a busca de estratégias são tarefas do professor. Uma prática de ensino direcionada à resolução de problemas desafiará o aluno a tornar-se capaz de solucionar os problemas matemáticos na escola e fora dela. (REITZ; CONTRERAS, 2012, p. 51).

Tem-se então, que a resolução de problemas deve ser uma metodologia na qual os problemas propostos são vistos como elementos que disparam o conhecimento.

Sob esse olhar, os problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação e construção dos conceitos matemáticos previamente planejados pelo professor, antes mesmo de sua apresentação através de uma linguagem matemática formal. Nessa abordagem, o foco está na ação do aluno, ao desenvolver técnicas para a resolução desses problemas.

3. A POLÊMICA DO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA NO ENSINO MÉDIO

Ao pensarmos na matemática como uma disciplina isolada e sem aplicabilidade, estaremos lidando com um problema de conhecimento sem significado, logo, o aprendizado não ocorrerá de fato. Para que o aluno possa realmente ter um processo de aprendizagem válido é preciso que ele veja a necessidade da utilização daquele conteúdo estudado.

Apresentar fórmulas matemáticas para os alunos às vezes se torna menos trabalhoso, porém, dispensa o raciocínio frente aos problemas mais elaborados. Não defendo aqui a dispensa da metodologia da fórmula-aplicação, mas defendo uma nova abordagem, que apresenta as fórmulas como a matemática deveria ser apresentada em toda vida escolar: como uma ferramenta.

Mostrar ao aluno que muitos problemas matemáticos podem ser resolvidos sem conhecimentos complexos e aprofundados de álgebra, aritmética ou geometria faz com que ele, a princípio, se afaste de conceitos importantes. Porém, ao propor para ele um problema, que mesmo podendo ser resolvido apenas com o raciocínio matemático desenvolvido até então, dá muito trabalho; e mostrando que, nesse caso, a utilização de algumas fórmulas pode fazer com que a questão seja resolvida de forma mais rápida e simples, o aluno sentirá a necessidade do conhecimento de tais conceitos, pois, nessa situação, poupar tempo é melhor do que poupar conhecimento.

Com isso, nos deparamos com um ensino que a maioria dos professores valoriza, porém, de forma errada, utilizando a metodologia de fórmula-aplicação sem se preocupar em mostrar que a fórmula apresentada é uma ferramenta que agiliza a solução das questões e sem valorizar a resolução de problemas como foco principal, determinando, muitas das vezes, o desenvolvimento a ser feito.

Percebe-se então que apreciar, num primeiro momento, o raciocínio lógico-matemático trazido previamente pelo aluno fará com que ele aprenda que resolver o problema proposto é mais importante do que aprender um conceito matemático imposto pelo livro didático. Pode ser que num momento mais a frente ele queira utilizar fórmulas para que essas questões sejam resolvidas mais rapidamente. Mas, até mesmo para usar essas fórmulas, ele precisa ver alguma ligação entre o raciocínio e a álgebra apresentada para ele.

No ensino de Análise Combinatória não é diferente. Propor problemas de combinatória, mostrando o passo a passo da evolução dos conteúdos e seus conceitos, faz com que o aluno, ao se deparar com problemas dessa área do conhecimento, se questione antes de utilizar qualquer mecanismo de resolução de problemas se a questão é de permutação, arranjo ou combinação. Ou seja, ele está condicionado a resolver problemas através de fórmulas. O aluno quer saber se o problema é de combinação sem ao menos saber definir o conceito. Temos nos PCN que "As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande" (BRASIL, 1997).

3.1. Problemas de aprendizagem em Análise Combinatória

O que é "Análise Combinatória?" A grande maioria dos alunos do Ensino Médio iria responder que é a parte da matemática destinada a resolver problemas de permutação, arranjo e combinação. Contudo, essa é uma resposta parcial. Sabemos que a Análise Combinatória vai além desses conceitos. Morgado, em seu livro "Análise Combinatória e Probabilidade" (MORGADO et al., 1991) afirma que a análise combinatória trata de problemas além desses citados pelos alunos.

> [...] trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além de combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-lo: o princípio da inclusão e exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas da Análise Combinatória". (MORGADO et al., 2001, p.1-2).

Embora a Análise Combinatória disponha de uma certa gama de ferramentas para a solução dos problemas, é necessária uma certa engenhosidade para a interpretação do problema proposto. Questões fáceis de enunciar quase sempre se mostram difíceis de resolver, exigindo uma alta dose de criatividade.

Muitas vezes os alunos só conseguem resolver essa ou aquela questão se já tiverem visto a solução de algo parecido, algo no qual possa usar o mesmo raciocínio. Segundo Morgado (2006), devemos privilegiar o ensino de problemas de permutações, arranjos e combinações num curso de Análise Combinatória básica, porque "entre os vários tipos de 'números para contagem' da Análise combinatória, eles são certamente os mais simples e de uso mais amplo. Além disso, eles permitem resolver uma grande quantidade de problemas" (MORGADO et al., 1991, p. 2).

Porém, ao ensinar esses conceitos não devemos fazê-lo de forma mecanizada. Devemos sempre incentivar a utilização do raciocínio lógico-matemático dos alunos, fazendo com que se desenvolva cada vez mais o raciocínio combinatório dos mesmos.

> Por outro lado, se a aprendizagem destes conceitos se faz de maneira mecânica, limitando-se a empregá-los em situações padronizadas, sem procurar habituar o aluno com a análise cuidadosa de cada problema, cria-se a impressão de que a Análise Combinatória é somente um jogo de fórmulas complicadas. (MORGADO et al., 1991).

3.1.1. O aluno e a Análise Combinatória

A Análise Combinatória sempre se mostrou como um obstáculo aos alunos devido à maneira como é abordada em sala de aula. A grande motivadora da pesquisa realizada neste trabalho é a grande dificuldade que os alunos apresentam quando abordados problemas desse tipo. Muitos questionamentos acerca de qual fórmula utilizar são feitos ao se depararem com tais questões. Essa dificuldade se dá devido à forma mecanizada que os alunos aprendem matemática desde cedo, através de exemplos e algoritmos memorizados. Qualquer problema que saia um pouco de tal raciocínio se torna de solução impossível aos olhos dos estudantes.

Com a Análise Combinatória não é diferente. Soluções decoradas e exercícios sempre muito similares impedem que o aluno desenvolva a inteligência lógico-matemática[6] para resolver tais problemas. Como geralmente é trabalhado com a metodologia de fórmula-aplicação, não possibilita aos alunos a compreensão real dos conceitos abordados (permutação, arranjo e combinação).

---

[6]Segundo Antunes (2012), "A Inteligência lógico-matemática está ligada à competência em compreender os elementos da linguagem algébrica e numérica, permitindo aos que a possuem em nível elevado ordenar símbolos numéricos e algébricos assim como noções gerais sobre quantidades e reflexões que envolvem análises de espaço e tempo."

Em uma pesquisa realizada pela Internet (Surveymonkey.com) pode-se perceber que a grande maioria dos alunos só tem contato de fato com problemas de contagem no segundo ano do Ensino Médio. Iniciar o ensino da Análise Combinatória somente na metade da última etapa da educação básica não favorece o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos.

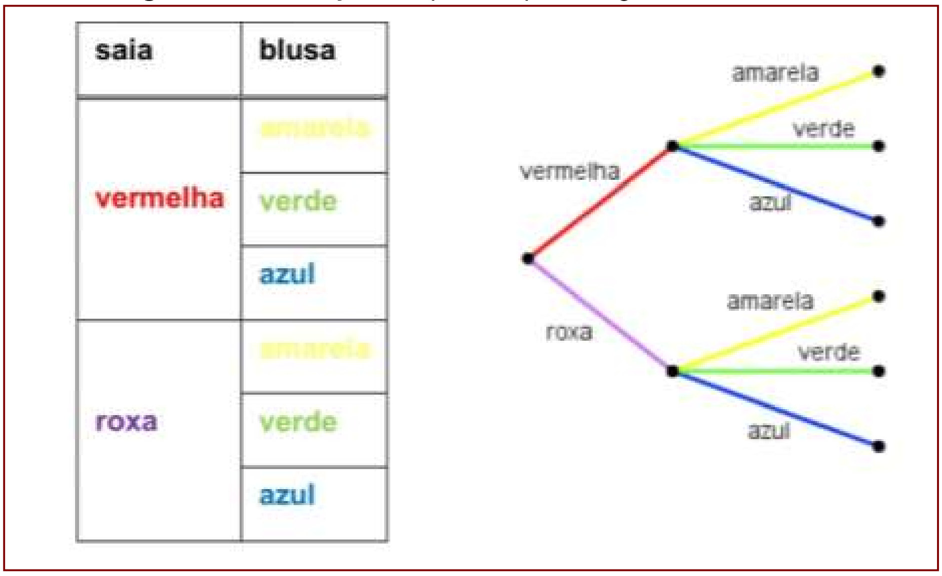
Vemos que alguns livros didáticos apresentam algumas ideias básicas de problemas de contagem desde o sexto ano do Ensino Fundamental. Porém, esses assuntos pouco são abordados pelos professores e, quando trabalhados, são feitos de forma superficial, não valorizando o desenvolvimento do raciocínio do aluno.

Essas noções que geralmente são propostas para serem iniciadas (e não são) nas séries finais do Ensino Fundamental podem muito bem ser abordadas já nas séries iniciais. Crianças com oito anos já são capazes de resolver alguns problemas de contagem utilizando o diagrama de árvores. Resolver questões de combinatória através dessa metodologia se torna fundamental para que se possa desenvolver de forma consistente o raciocínio combinatório. Quando se deixa para apresentar o diagrama quando os alunos estão mais velhos, eles se apresentam menos abertos para a metodologia.

Como exemplo, temos uma questão simples, que pode ser proposta aos alunos do segundo ano do Ensino Fundamental, resolvida pelo diagrama de árvores, um organograma no qual se pode visualizar todas as combinações de elementos possíveis.

Exemplo: Maria possui duas saias, uma vermelha e uma roxa, e possui três camisas, uma amarela, outra verde e outra azul. Quantos conjuntos diferentes ela pode formar?

Figura 2 – Resolução da questão pelo diagrama de árvores



Resolver esse tipo de questão utilizando o diagrama de árvores (Figura 2) se torna agradável para os alunos menores e faz com que o raciocínio combinatório seja desenvolvido desde cedo.Esse tipo de raciocínio vai ajudar consideravelmente no entendimento de conceitos de probabilidade, que também podem ser iniciados nas séries iniciais do Ensino Fundamental.

> A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (BRASIL, 1997).

3.1.2. Dados e resultados da primeira pesquisa

Foi realizada uma pesquisa da Internet através do gerenciador de SurveyMonkey com alunos em geral do terceiro ano e recém-formados do Ensino Médio.A pesquisa "Aprendendo Análise Combinatória" está disponível em https://pt.surveymonkey.com/s/RGFZ2Q5 e no Anexo III. Foi solicitado aos alunos que participaram da pesquisa voluntariamente (alunos do Colégio São Paulo), alunos do 3º ano e recém-formados das escolas da cidade de Teresópolis que respondessem ao questionário. O link para o questionário foi divulgado através das aulas, mensagens e redes sociais.

Esta pesquisa possui um caráter ilustrativo para a pesquisa, pretendendo colher informações e comentários dos próprios discentes e docentes que estão em contato direto com a Análise Combinatória.

O objetivo desta pesquisa era verificar em que momento da vida escolar eles estavam tendo seu contato inicial com os problemas de contagem. Como vamos verificar, a maioria dos entrevistados estudou em escolas particulares, mesmo a pesquisa sendo de livre acesso.

Gráfico 1 – Rede de formação acadêmica (%)

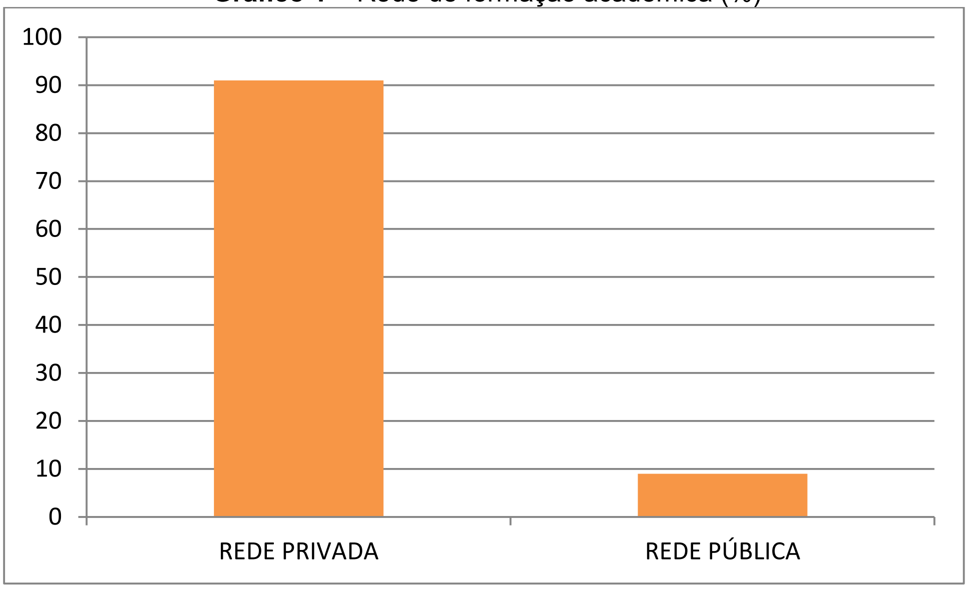


Gráfico 2 – Primeiro contato com questões de Análise Combinatória (%)

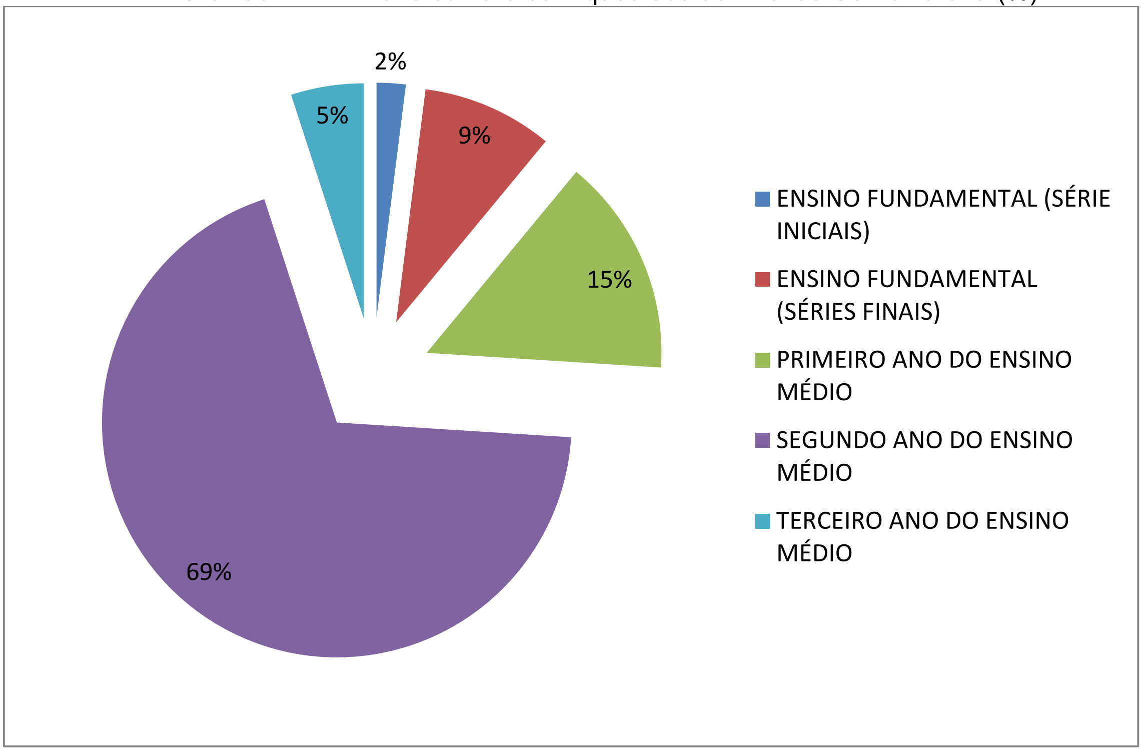
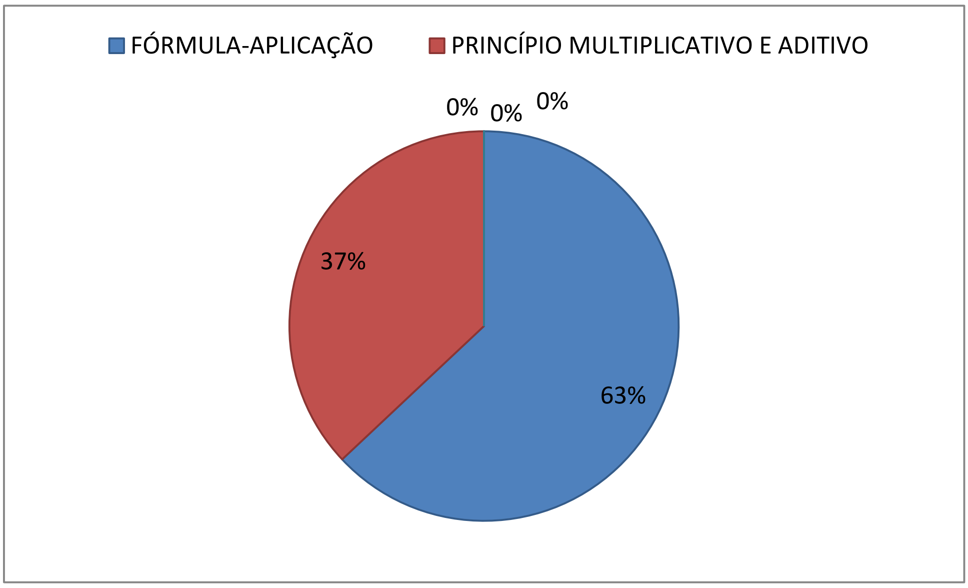


Gráfico 3 – Metodologia de ensino usada pelo professor na maior parte do tempo (%)



A seguir temos os comentários de alguns alunos entrevistados.

- “É necessária uma melhor explicação da matéria não apenas pelos professores, mas também pelos livros didáticos, desencadeando um melhor raciocínio por parte dos alunos.”
- “Já tentei resolver questões de análise combinatória usando os dois princípios e achei o PFC bem mais fácil de aplicar.”
- “Menos imposição de fórmulas e mais desenvolvimento de raciocínio a partir do PFC.”
- “A princípio, não conseguia resolver os exercícios, o que me fazia odiar a matéria, mas ao longo do aprendizado fui pegando o jeito e entendendo que as fórmulas não eram tão necessárias quando aprendi o raciocínio.”
- “Uma vez que é uma matéria interessante e recorrente nos vestibulares, resolvi aprender antes mesmo que o professor a passasse. O recurso do qual me utilizei foram vídeo-aulas (no YouTube), as quais utilizavam-se da metodologia fórmula-aplicação. Na escola, aprendemos pelo outro método (o PFC) e tendo contato com ambos, acredito que o que a professora designou para nós é muito menos confuso e por não se tratar de uma ‘decoreba’, mais proveitoso!”

Podemos perceber que a introdução tardia dos problemas de contagem é um dos problemas que desencadeia a futura dificuldade de aprendizagem dos alunos. Segundo Piaget, quando faz considerações sobre as etapas do desenvolvimento, a crianças já é capaz de resolver problemas de contagem na fase Operatório Formal, ou seja, após os 12 anos. Mas nada impede que conceitos simples possam ser inseridos no currículo escolar desde as séries iniciais do Ensino Fundamental. Muitos alunos, quase todos, só têm o primeiro contato com a Análise Combinatória, conteúdo que se baseia em construções gradativas de contagem, a partir do segundo ano do Ensino Médio, o que ocasiona frequentes dificuldades de compreensão, restringindo seu desenvolvimento a um curto intervalo de tempo.

> No decorrer dos primeiros ciclos do Ensino Fundamental os alunos devem ser levados a desenvolver a familiarização com a contagem de agrupamentos, de maneira informal e direta, fazendo, por exemplo, uma lista de todos os agrupamentos possíveis para depois contá-los (BRASIL, 1997, p. 52).

A utilização excessiva de fórmulas durante a construção dos conceitos também se torna um grande obstáculo para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Os alunos que tiveram algum contato com o PFC para resolução de problemas combinatórios obtiveram mais sucesso aos resolver problemas dessa área. Contudo, ainda vemos uma grande parcela de professores utilizando a metodologia de fórmula-aplicação como ferramenta didático-pedagógica dominante.

3.1.3. O professor e a Análise Combinatória

A Análise Combinatória é considerada um tema difícil, quer por alunos, quer por professores. Não são somente os alunos que apresentam certa dificuldade ao lidar com problemas de combinatória, muitos professores também se sentem inseguros ao lecionar tal conteúdo. As dificuldades se devem ao fato do ensino se limitar à explicação de fórmulas e sua aplicação para resolução de exercícios, o que contraria as recomendações do *NationalCouncilofTeachersofMathematics*(NCTM). Na verdade, temos que analisar os atuais professores como ex-alunos, que enfrentaram obstáculos na aprendizagem da Análise Combinatória e que carregam dificuldades até hoje ao ter que ensinar esse ramo da matemática discreta.

> Problemas combinatórios são usualmente considerados difíceis pela maioria dos alunos e professores de matemática. Talvez a principal dificuldade seja a da conexão correta entre o problema dado e a teoria matemática correspondente. É difícil determinar se o problema combinatório dado é um problema de arranjo, de permutação ou de combinação, ou então se é suficiente usar diretamente o princípio multiplicativo.(HARIKI, 1996, p. 29).

A grande maioria dos profissionais de educação responsabiliza a falta de domínio de conteúdo como o fator decisivo para gerar a dificuldade do ensino. O fato dos problemas de contagem exigirem certa sagacidade ao interpretar as questões faz com que os professores se sintam intimidados perante problemas novos. Pode-se verificar que a dificuldade não está em compreender os conceitos básicos da Análise Combinatória, mas sim ao interpretar questões que, na sua maioria, apresentam informações que precisam ser minuciosamente analisadas, apesar de fácil e breve enunciação.

Para que os professores possam adotar uma metodologia eficaz para o ensino da Análise combinatória é necessário que ele tenha pleno domínio de conteúdo e, que saiba analisar os erros dos seus alunos para possa assim identificar em que momento do raciocínio combinatório a lógica se perde.

O conhecimento de diversas técnicas de resolução de problemas de contagem facilita o ensino da Análise Combinatória. Logo, o professor que busca aprimoramento profissional obtém mais sucesso no processo ensino-aprendizagem.

3.1.4. Dados e resultados da segunda pesquisa

Através de uma pesquisa realizada pela Internet, gerenciada pelo servidor SurveyMonkey, podemos identificar alguns problemas enfrentados pelos professores ao ensinar Análise Combinatória.A pesquisa "Metodologias de ensino de Análise Combinatória" está disponível em https://pt.surveymonkey.com/s/SF53P69 e no Anexo IV.

Os professores entrevistados foram escolhidos aleatoriamente, mas na sua maioria colegas de trabalho e colegas de curso de graduação e especialização.

Esta pesquisa possui caráter ilustrativo e tem como objetivo verificar a formação acadêmica dos professores, as dificuldades em ensinar Análise Combinatória e a metodologia de ensino utilizada.

Gráfico 4 – Formação acadêmica (%)

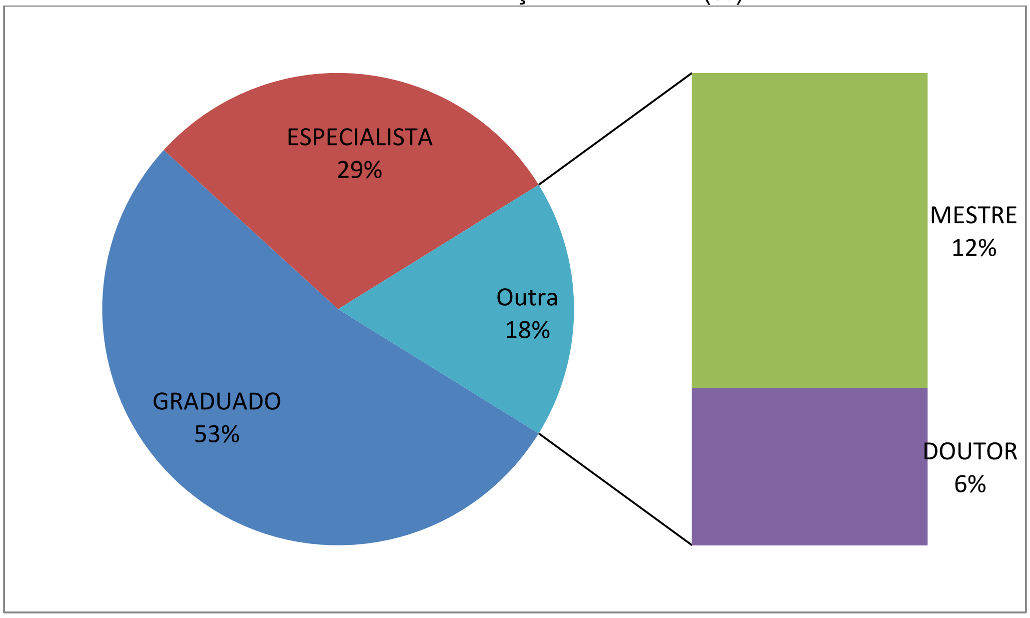


Gráfico 5 – Sentiu dificuldades na área de Análise Combinatória enquanto aluno? (%)

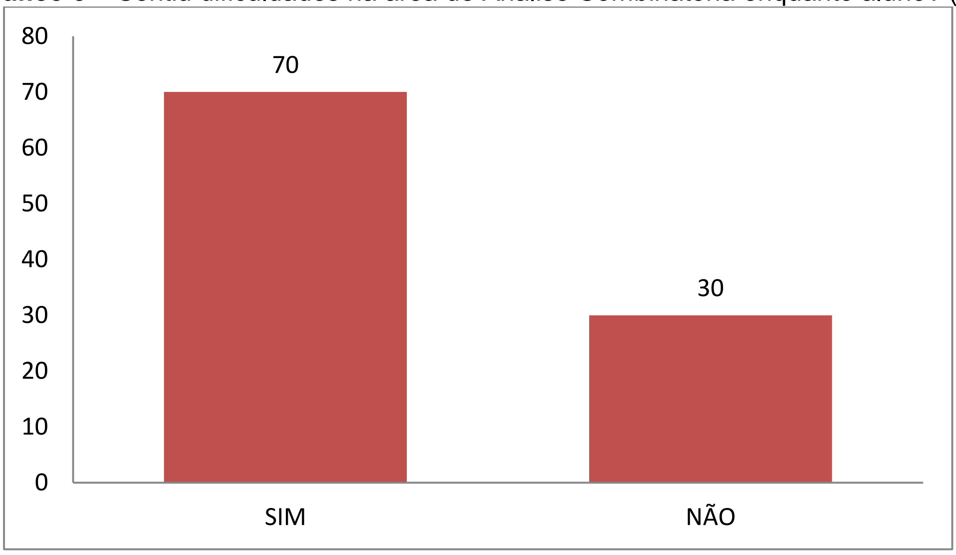


Gráfico 6 – Sentiu dificuldades na área de Análise Combinatória enquanto professor? (%)

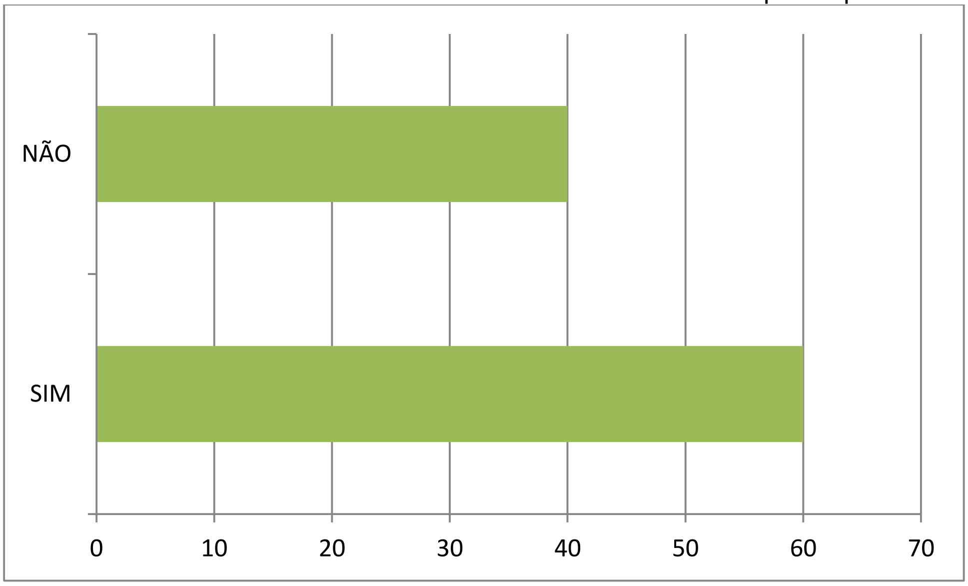
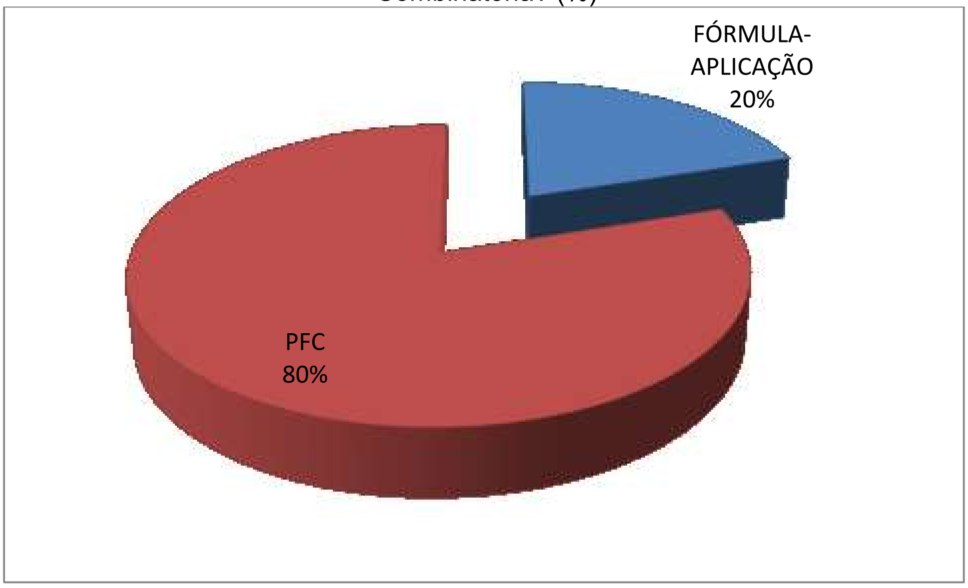


Gráfico 7 – Utiliza qual metodologia (na maior parte do tempo) para o ensino da Análise Combinatória? (%)



A seguir temos os comentários de alguns professores entrevistados.

- "A dificuldade dos alunos é a de identificar qual é a situação. Identificar que tipo de problema e como resolver."

- “A pouca utilização por professores, coisa esta que vem da dificuldade e distanciamento deste por esta disciplina.”
- “Buscar situações realmente interessantes e aplicáveis, pra mim é o maior desafio. Bolinhas coloridas em uma urna, grupos, comissões, etc., são temas muito maçantes e úteis apenas nas introduções. Mostrar o quanto a loteria é jogo de azar; quantas cores podemos gerar, dentre as sete da aquarela, misturarmos de duas em duas, três em três, etc.; que é humanamente impossível descobrir uma senha de apenas 6 dígitos; dentre outras situações é o foco na minha opinião. A questão é que não podemos ter esse ‘ócio criativo’ e tampouco os livros didáticos se atualizam nesse sentido.”
- “A grande dificuldade está em entender o contexto envolvido nos problemas de contagem. É necessário iniciar em um contexto dominado por todos.”
- “O problema do aluno do ensino público se dá no fato de não conseguir interpretar a questão, devido à falta de hábito da leitura e ao sistema mecanizado de se fazer matemática ao longo da vida escolar.”
- “Hoje os alunos não querem pensar, preferem formulas, mas sem o PFC não tem como aprenderem corretamente, vivendo a análise combinatória.”
- “Gosto do tema, procuro sempre valorizar o PFC e só revelo as fórmulas ao final do estudo.Alguns alunos não acham a formula interessante de ser usada!”

Podemos verificar que mais da metade dos entrevistados ainda tem dificuldades com o conteúdo de Análise Combinatória. Vemos também que as dificuldades diminuíram desde a formação escolar até a atuação como professor. A maioria dos professores entrevistados utilizam a metodologia do PFC, favorecendo o ensino-aprendizagem e discursam sobre aplicabilidade e contextualização coerente.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos

> naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas.(BRASIL, 1997, p. 44).

Logo, se os professores, ao ensinar Análise Combinatória, mostrarem a aplicabilidade dos conceitos combinatórios, farão com que as fórmulas tenham sentido e com isso, os alunos verão significado em aprender e utilizar tais mecanismos.

De acordo com o PCN, demonstrar a importância do conhecimento matemático é uma condição necessária para o aprimoramento social, intelectual e profissional do aluno. Temos que desenvolver o conhecimento matemático numa abordagem mais voltada para o cotidiano do aluno e na sua capacidade de resolver problemas das mais diversas situações em que se encontre.

> É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros e que servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. (BRASIL, 1997, p. 40).

4. A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA DE PESQUISA

Segundo D'Ambrosio,

> Entre teoria e prática persiste uma relação dialética que leva o indivíduo a partir para a prática equipado com uma teoria e a praticar de acordo com essa teoria até atingir os resultados desejados. Toda teorização se dá em condições ideais, e somente na prática serão notados e colocados em evidência certos pressupostos que não podem ser identificados apenas teoricamente. Isto é, partir para a prática é como um mergulho no desconhecido. Pesquisa é o que permite a interface interativa entre teoria e prática. (D´AMBROSIO, 2012, p. 73).

Percebemos então que a realização de uma pesquisa em educação matemática é de fundamental importância, pois através dela permitimos, de forma interativa, uma relação estreita entre a teoria e a prática, que deve ser sempre buscada pelos profissionais de educação.

Uma pesquisa deve ter como objetivo permitir aos docentes uma capacidade de sinalizar os enfrentamentos sofridos pelas pessoas no processo de procura à solução de problemas que os cercam, assim, auxiliando professores a entender melhor todos os momentos de dificuldades que os alunos passam nas aulas de matemática.

Aproximar a prática educacional às metodologias de ensino propostas pelos educadores pesquisadores deve ser sempre um objetivo a ser alcançado, contudo, ao realizar essa aproximação, deve-se analisar cuidadosamente o campo que se trabalhará, pois nem todos os alunos são iguais, logo, nem todas as metodologias de ensino funcionam da mesma forma com todos os discentes.

Portanto, a realização de pesquisas de campo sempre será válida e fundamental para análise do funcionamento de tais ferramentas metodológicas. D'Ambrosio diz que "O grande desafio da educação é por em prática hoje o que vai servir para o amanhã. Por em prática significa levar pressupostos teóricos, isto é, um saber/fazer acumulado ao longo de tempos passados, ao presente." (D´AMBROSIO, 2012)

E é com esse objetivo que esta pesquisa foi realizada. Esta pesquisa de campo, com caráter qualitativo[7], em sua maior parte, e quantitativo[8], teve como

---

[7]Um conjunto de diferentes técnicas interpretativas que visam a descrever e a decodificar os componentes de um sistema complexo de significados, tendo por objetivo traduzir e expressar o sentido dos fenômenos do mundo

objetivo analisar duas metodologias de ensino utilizadas para o trabalho de introdução e desenvolvimento do raciocínio combinatório nos alunos do segundo ano de escolaridade do Ensino Médio.

A partir dessa análise, foi realizada uma avaliação das metodologias empregadas, para que as ferramentas escolhidas para aplicação em turmas pré-determinadas sem caráter aleatório possam ser empregadas futuramente por outros professores, para que resultados que alcançaram sucesso possam ser também utilizados por outros.

D’Ambrosio fala que “pesquisa, portanto, é o elo entre teoria e prática. Claro, em situações extremas alguns se dedicam a um lado desse elo e fazem pesquisa chegando a teorias baseando-se na prática de outros” (D´AMBROSIO, 2012). Assim, percebemos que se deve, se possível, realizar uma pesquisa com uma prática em mente. Na maioria das vezes, simplesmente pratica-se o que já foi testado e aprovado por outros e, após a utilização da prática escolhida, são feitas as reflexões concernentes.

A pesquisa de campo escolhida e realizada é conhecida dentro da área de Educação Matemática como Engenharia Didática.

4.1. Engenharia Didática

As pesquisas em Educação Matemática estão se tornando cada vez mais frequentes. Essas pesquisas, em sua maior parte, com caráter qualitativo, têm como objetivo encontrar soluções para os diversos problemas encontrados pelos professores frente ao ensino da Matemática. Estas soluções procuram propor novas metodologias de ensino, novas abordagens de conteúdos, criação de materiais lúdicos e didáticos trabalhados em ambientes específicos ou não, com a finalidade de diagnosticar e identificar as principais dificuldades encontradas pelos discentes para que, conhecendo o problema, possam atuar de forma mais precisa alcançando os resultados esperados.

---

social, reduzindo a distância entre o indicador e o indicado, entre o contexto e a ação, entre a teoria e os dados (MAAMEN, 1979, p. 520).

[8] Pesquisa com pressuposto da existência de uma população de objetos de observação comparável entre si, de modo a enfatizar indicadores numéricos e percentuais, apresentando gráficos e tabelas, comparativas ou não, sobre determinado objeto/fenômeno pesquisado (POMMER, 2013, p. 21).

Entre as diversas pesquisas dentro da área de Educação Matemática está a Engenharia Didática. Essa metodologia de pesquisa se caracteriza por um esquema experimental realizado numa sequência didática previamente planejada, no qual serão analisados, no próprio ambiente escolar, as aulas ministradas.

Uma das partes mais singulares dessa metodologia é a existência de uma análise *a priori* e uma análise *a posteriori*. Essas análises podem ser feitas mesmo com a ausência de uma avaliação diagnóstica ou uma avaliação final. De acordo com Almouloud,

> A Engenharia Didática pode ser utilizada em pesquisas que estudam os processos de ensino e aprendizagem de um dado conceito e, em particular, a elaboração de gêneses artificiais para um dado conceito. Esse tipo de pesquisa difere daquelas que são transversais aos conteúdos, mesmo que seu suporte seja o ensino de certo objeto matemático (um saber ou um saber-fazer). (ALMOULOUD; COUTINHO, 2008, p. 66).

Artigue diz que “A Engenharia Didática caracteriza-se por ser um esquema experimental baseado em realizações didáticas na sala de aula, isto é, na concepção, na realização, na observação e na análise de sequências didáticas”. (1996 apud PINHEIRO, 2008, p. 60).

A Engenharia Didática atua de forma a analisar as práticas que estão em ação e, que por algum motivo, apresentam resultados pouco satisfatórios. Assim, é realizada uma análise crítica e bem fundamentada com o objetivo de apresentar soluções ou mudanças cabíveis para que a prática do ensino alcance seu objetivo, que é a construção do conhecimento pelo aluno.

Pinheiro (2008) aindaafirma que a Engenharia Didática pode ser vista como uma metodologia de pesquisa ou ainda como uma sequência de aulas devidamente planejadas, articuladas e ministradas por um professor – nesse caso, o engenheiro didático, que atua de forma mediadora e receptiva, analisando o desenvolvimento da construção do conhecimento e da evolução da aprendizagem dos discentes, que pode intervir no seu planejamento no momento que lhe parecer melhor, de forma a colaborar com a evolução dos alunos,o que ocorre na maior parte das vezes como um reflexo das decisões tomadas pelo professor durante o projeto.

Assim, percebemos que, mesmo um planejamento já estando pronto, é flexível dentro de uma metodologia ativa e com objetivos específicos de analisar determinados problemas de aprendizagem já apresentados anteriormente por outros alunos, de acordo com um histórico estudado.

De acordo com Pommer,

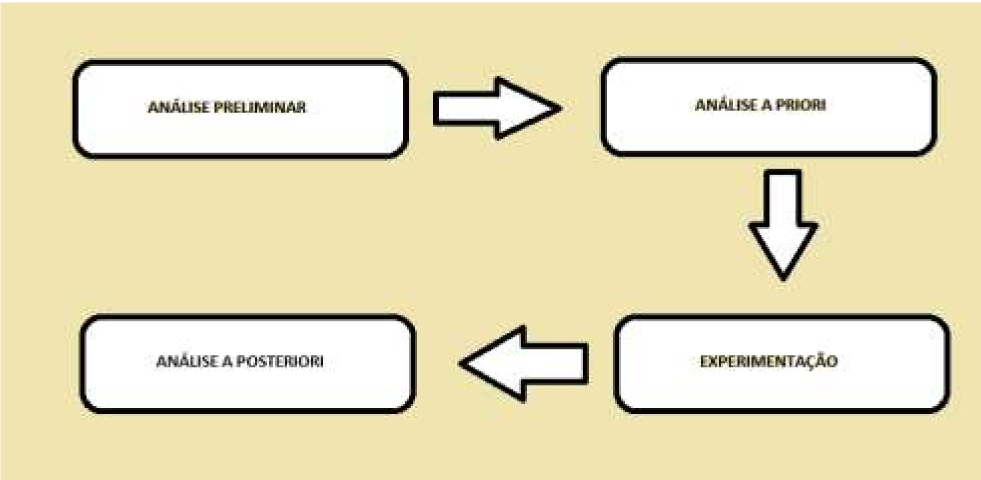
> A Metodologia representa um método, um caminho ou um meio adequado para se alcançar determinada meta ou objetivo. A função da metodologia é mostrar como trilhar no "caminho das pedras" para a investigação de uma pesquisa ou para a prática de sala de aula, com a pretensão de ajudar o pesquisador/professor a refletir e instigar um novo olhar sobre o mundo, um olhar que seja organizador, dedutivo, curioso, indagador e criativo. (POMMER, 2013, p. 60).

Pesquisar pode ser simplesmente procurar respostas para questões previamente propostas. Com essa metodologia de engenharia didática, a pesquisa fica mais voltada para o ramo qualitativo, já que nossa finalidade foi estudar problemas relativos à aprendizagem de conteúdos específicos dentro da matemática, nesse caso, a construção e o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Dessa forma, quisemos diagnosticar os problemas encontrados durante o ensino de Análise Combinatória e compreender os níveis de desenvolvimento dos alunos durante a evolução do aprendizado.

4.2. Etapas da Engenharia Didática

A Engenharia Didática se dá em quatro etapas (Figura 10).

Figura 3 – As quatro etapas da Engenharia Didática



Na primeira etapa é realizada uma análise preliminar, na qual, através de uma observação, conseguimos identificar que existe alguma dificuldade por parte de professores ou alunos em desenvolver e construir determinado conhecimento.

Na segunda etapa, uma análise *a priori* permite ao pesquisador prever algumas ocorrências dentro da pesquisa devido à escolha conveniente de recursos didáticos, que auxilia na evolução da pesquisa.

Na terceira etapa é realizada a experimentação, na qual a pesquisa é desempenhada de fato, num campo previamente escolhido e com amostras antecipadamente selecionadas. De acordo com Machado (2002 apud PINHEIRO, 2008, p. 25), a experimentação "consiste basicamente no desenvolvimento da aplicação da Engenharia Didática, concebida a um grupo de alunos, objetivando verificar as ponderações levantadas na análise *a priori*".

E, na quarta etapa, são feitas as análises finais, que de acordo com Artigue (1996 apud PINHEIRO, 2008, p. 26), "se apoiam sobre o conjunto de dados obtidos ao longo da experimentação pelas observações do pesquisador, pelo registro sonoro ou através da produção escrita".

Embora a primeira etapa receba o título de análise preliminar, isso não significa que não poderá ser feita qualquer alteração acerca das propostas.

> A contribuição da Engenharia Didática para a sala de aula, como campo metodológico, diz respeito à possibilidade de prover a fundamentação teórica para que o professor conheça o significado e amplie o leque de opções, formando elo de ligação entre a teoria e a prática de sala de aula. (PINHEIRO, 2008).

4.3. A aplicação da Engenharia Didática à pesquisa de campo

Com a intenção de estudar meios didáticos para o ensino da Análise Combinatória, enfatizando a resolução de problemas como ponto de partida com os alunos do segundo ano do Ensino Médio, esta pesquisa foi realizada dentro das quatro fases da Engenharia Didática. A pesquisa será descrita no capítulo a seguir.

5. TRABALHO DE PESQUISA UTLIZANDO A ENGENHARIA DIDÁTICA COMO METODOLOGIA

5.1. Análise preliminar

Após alguns anos trabalhando como professora de matemática do Ensino Médio, foram percebidas algumas dificuldades no que diz respeito à aprendizagem de alguns conteúdos específicos dentro dessa disciplina. Com isso, surgiu o interesse em realizar uma pesquisa para que se possa compreender quais as maiores dificuldades encontradas pelos alunos e pelos professores ao trabalhar o conteúdo de Análise Combinatória e, dessa maneira, poder propor uma abordagem alternativa para o ensino desse conteúdo.

A análise preliminar foi feita, de uma maneira geral, através de um estudo sobre algumas dissertações e teses acerca do ensino e da aprendizagem de análise combinatória, onde fora notado que essa dificuldade vem se apresentando com muita frequência e há muito tempo.

Assim, foi elaborada uma avaliação diagnóstica inicial, contendo três questões de Análise Combinatória, com o objetivo de mostrar para os alunos que para solucionar tais questões não eram necessárias ferramentas matemáticas muito sofisticadas e que, possivelmente, a maior parte deles conseguiria resolver os problemas propostos apenas com o raciocínio lógico-matemático já desenvolvido. O objetivo desta etapa foi apresentar ao aluno problemas de combinatória que possam ser resolvidos através de diagramas de possibilidades ou, mostrando todas as possibilidades existentes e contabilizando-as, associando, dessa forma, problemas de combinatória aos problemas de contagem. Dessa maneira, a pesquisa foi guiada para que o aluno percebesse a importância das ferramentas que serão compartilhadas pelo professor futuramente.

5.2. Análise *a priori*

De acordo com MACHADO (2002 apud POMMER, 2013, p. 24), “a análise *a priori* deve comportar um caráter descritivo e preditivo, sendo a análise vinculada às características da situação didática desenvolvida e aplicada aos alunos.”

Dessa maneira, esta pesquisa, realizada prioritariamente com caráter qualitativo, foi desenvolvida na instituição privada de ensino Colégio São Paulo, Unidade Teresópolis, localizada no bairro do Alto, na cidade de Teresópolis, estado do Rio de Janeiro, onde atuo regularmente como professora das turmas de segundos e terceiros anos do Ensino Médio.

Os alunos que participaram da pesquisa pertencem à faixa etária de 15 a 18 anos, totalizando 87 alunos divididos em quatro turmas.

Dentre esses alunos, cerca de 15% já estudaram a Análise Combinatória, seja por ser repetente ou por estar cursando Pré-Vestibular. Nesse caso, solicitei aos alunos que formassem um grupo com aqueles que já tinham visto o conteúdo e que não passassem para o restante da turma conceitos do PFC. Nesse caso, as resoluções apresentadas por tais grupos não foram consideradas para a análise da pesquisa.

Para o desenvolvimento das atividades, uma primeira análise foi realizada. No primeiro conselho de classe do ano letivo de 2013, foi identificada pelos professores uma notável diferença de desempenho pelas turmas, na qual pudemos observar que, das quatro turmas de segundos anos da escola, duas eram mais voltadas para a área de exatas, com excelentes desempenhos e raciocínios brilhantes dentro das disciplinas de química, física e matemática; e duas turmas tinham uma tendência mais para a área de humanas, com desempenhos equivalentes dentro das disciplinas de história, geografia, filosofia, sociologia e linguagens.

A partir dessa observação foi resolvido, juntamente com a equipe pedagógica da escola, que seriam utilizadas duas metodologias de ensino de Análise Combinatória com essas turmas. Nas turmas que apresentavam melhor raciocínio lógico-matemático foi utilizada a metodologia da resolução de problemas como ponto de partida e o conceito do PFC como único e exclusivo recurso pedagógico para resolução de problemas de combinatória. Já nas outras turmas foi utilizada a metodologia de fórmula-aplicação.

5.3. Experimentação

A experimentação se deu durante as aulas de matemática por mim ministradas durante o segundo semestre letivo do ano de 2013. Antes de iniciar os conceitos de Análise Combinatória, as turmas foram divididas em cinco grupos, de quatro a cinco alunos cada. Após essa divisão, foi proposto para a turma que eles analisassem e tentassem resolver, da maneira que eles achassem correto, três problemas de Análise Combinatória.

Os problemas selecionados para essa avaliação diagnóstica foram escolhidos de forma que os alunos pudessem resolvê-los mostrando todas as possibilidades existentes da questão, então, são questões que têm como resultados números consideravelmente pequenos e que não ocupam um grande tempo da aula.

As questões selecionadas, escritas no quadro branco, foram as seguintes:

(1) Quantos números de quatro dígitos podemos formar utilizando apenas os algarismos 2, 3, 4 e 5?

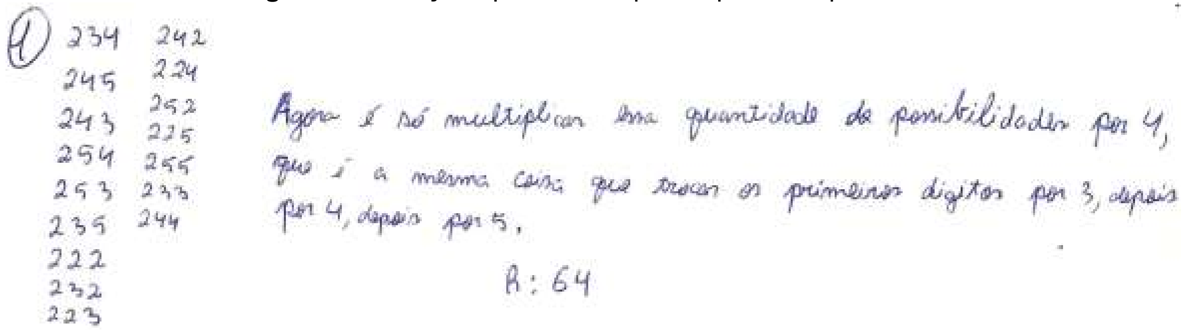
(2) João e Maria têm quatro figurinhas numeradas de 1 a 4. Eles decidem repartir suas figurinhas, ficando casa um com duas. Por exemplo, Maria poderia ficar com as figurinhas 1 e 4, enquanto João ficaria com as figurinhas 2 e 3. De quantos modos eles podem repartir as figurinhas entre si, dessa forma?

(3) Para a formação de um comitê, são escolhidas três pessoas entre André, Bernardo, Carlos e Daniel, para que ocupem os cargos de Presidente, Tesoureiro e Secretário. Sabendo que uma mesma pessoa não pode ocupar mais de um cargo diferente, quantos comitês distintos podem ser formados?

Os alunos, inicialmente, ficaram meio confusos e não sabiam como começar a resolver as questões. Então, foi necessária uma intervenção na qual, através da amostra de uma das possibilidades da primeira questão, eles conseguiram visualizar melhor o que estava sendo solicitado.

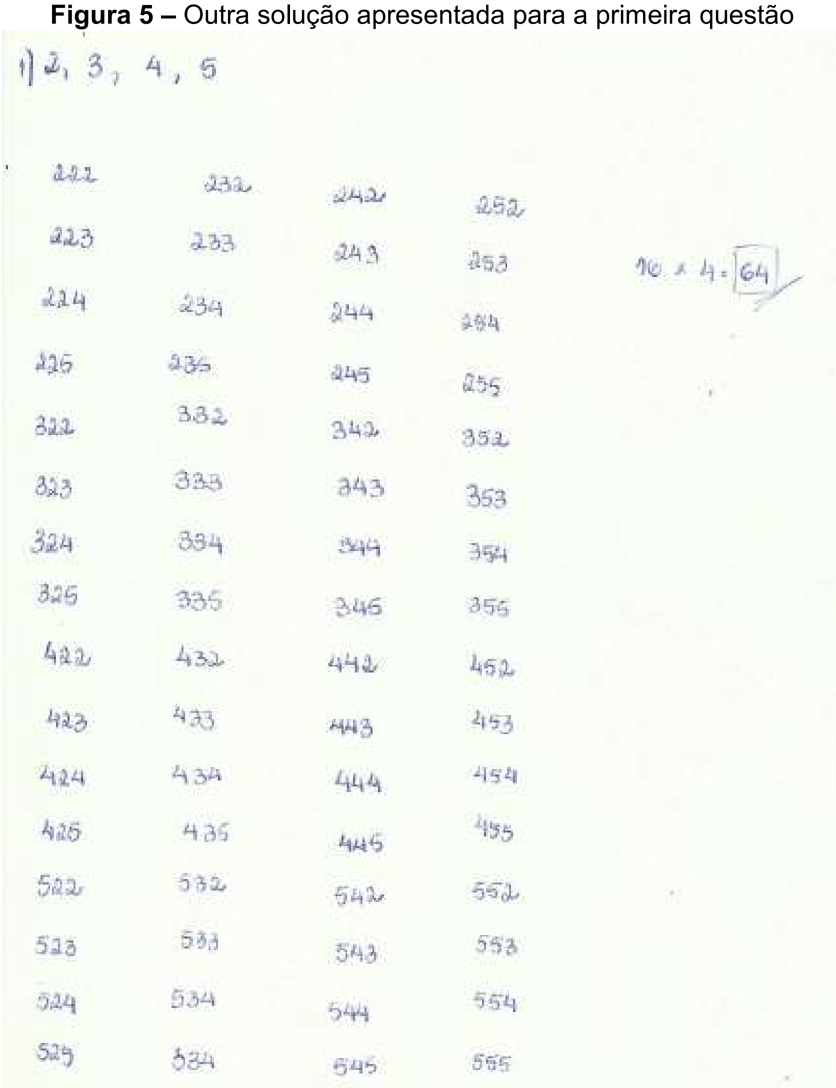
A seguir, algumas soluções apresentadas pelos alunos para a primeira questão.

Figura 4 – Solução apresentada para a primeira questão



Nessa solução (Figura 4), o aluno apresentou todas as possibilidades de números de quatro dígitos contendo os algarismos solicitados que começavam com o 2. Mas, ele percebeu que as quantidades que iniciavam com o 3, o 4 e o 5 eram as mesmas e assim, ele apenas multiplicou o resultado por 4, chegando à resposta correta.

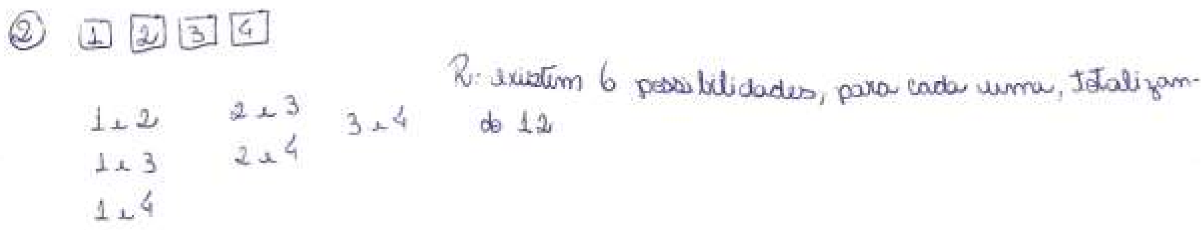
Figura 5 – Outra solução apresentada para a primeira questão



Nesta resolução (Figura 5), o aluno mostrou todas as soluções possíveis, o que já apresenta uma pouco mais de trabalho, porém, também chegando à solução correta.

Na segunda questão, quase todos os alunos chegaram à resposta certa através das possibilidades escritas uma a uma.

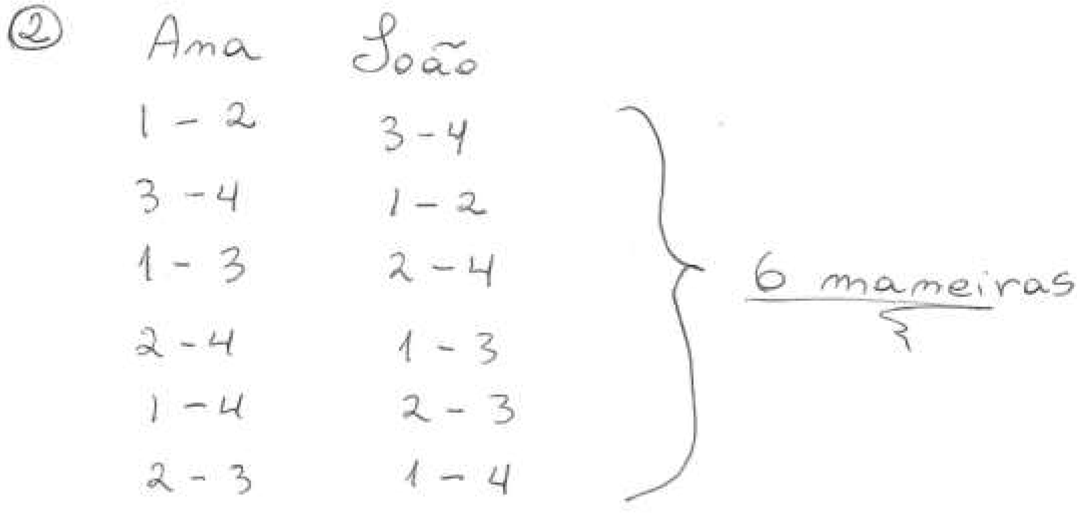
Figura 6 – Solução apresentada para a segunda questão



Nessa resolução (Figura 6), o aluno errou a questão, contabilizando duas vezes, pois não observou que quando escolhidas as figurinhas para a primeira pessoa, a segunda não tem opção, ela já tem as figurinhas certas. Nesse caso, só é necessário ver de quantas maneiras podemos escolher duas figurinhas para a primeira pessoa, vendo também que a ordem que as figurinhas são escolhidas não importa, pois tanto faz a Ana receber as figurinhas 1 e 4 ou 4 e 1.

Nesta outra solução (Figura 7), vemos que quando são escritas todas as soluções, o aluno evita a repetição e dificilmente erra a contagem.

Figura 7 – Outra solução para a segunda questão



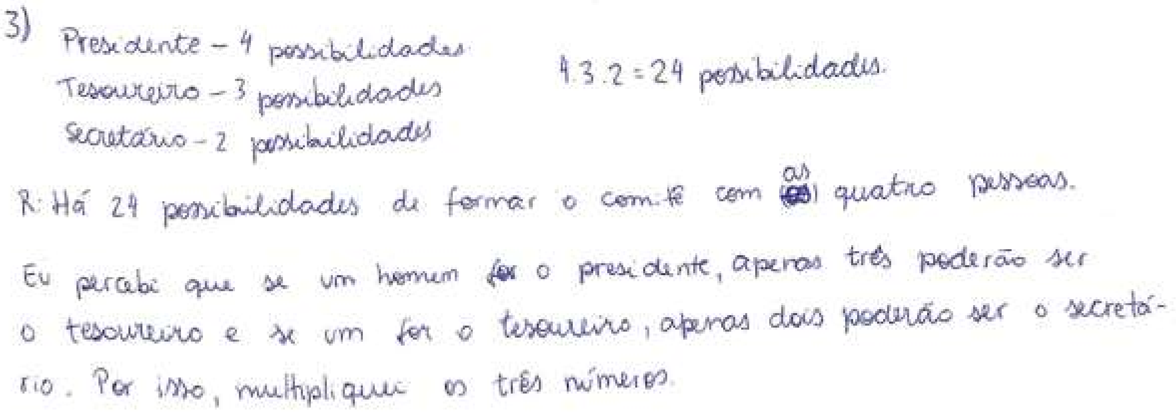
Para a questão 3, os alunos, em sua maioria, apresentavam a seguinte dúvida: André ocupando o cargo de presidente, Bernardo o cargo de tesoureiro e Carlos o cargo de secretário é o mesmo comitê formado por Bernardo como presidente, André como secretário e Carlos como tesoureiro?

Eles já tinham intuitivamente o conceito de combinação e arranjo em mente e, mostrar para eles que cargos diferentes poderiam resultar em salários diferentes dentro de uma empresa, por exemplo, fez com que eles entendessem que, nesse problema, três pessoas ocupando cargos diferentes faziam com que existissem comitês diferentes.

Nesse momento, apresentei à turma um outro exemplo semelhante, pedindo para que formassem comitês com as quatro pessoas, sendo que para esse comitê não existiam diferentes cargos, ou seja, a opção era simplesmente participar ou não do comitê. E compreenderam que nessa situação, um comitê formado por A, B e C ou por B, C e A, na verdade era a mesma coisa.

A seguir duas soluções apresentadas pelos alunos.

Figura 8 – Solução apresentada para a terceira questão


3) Presidente – 4 possibilidades
Tesoureiro – 3 possibilidades
Secretário – 2 possibilidades

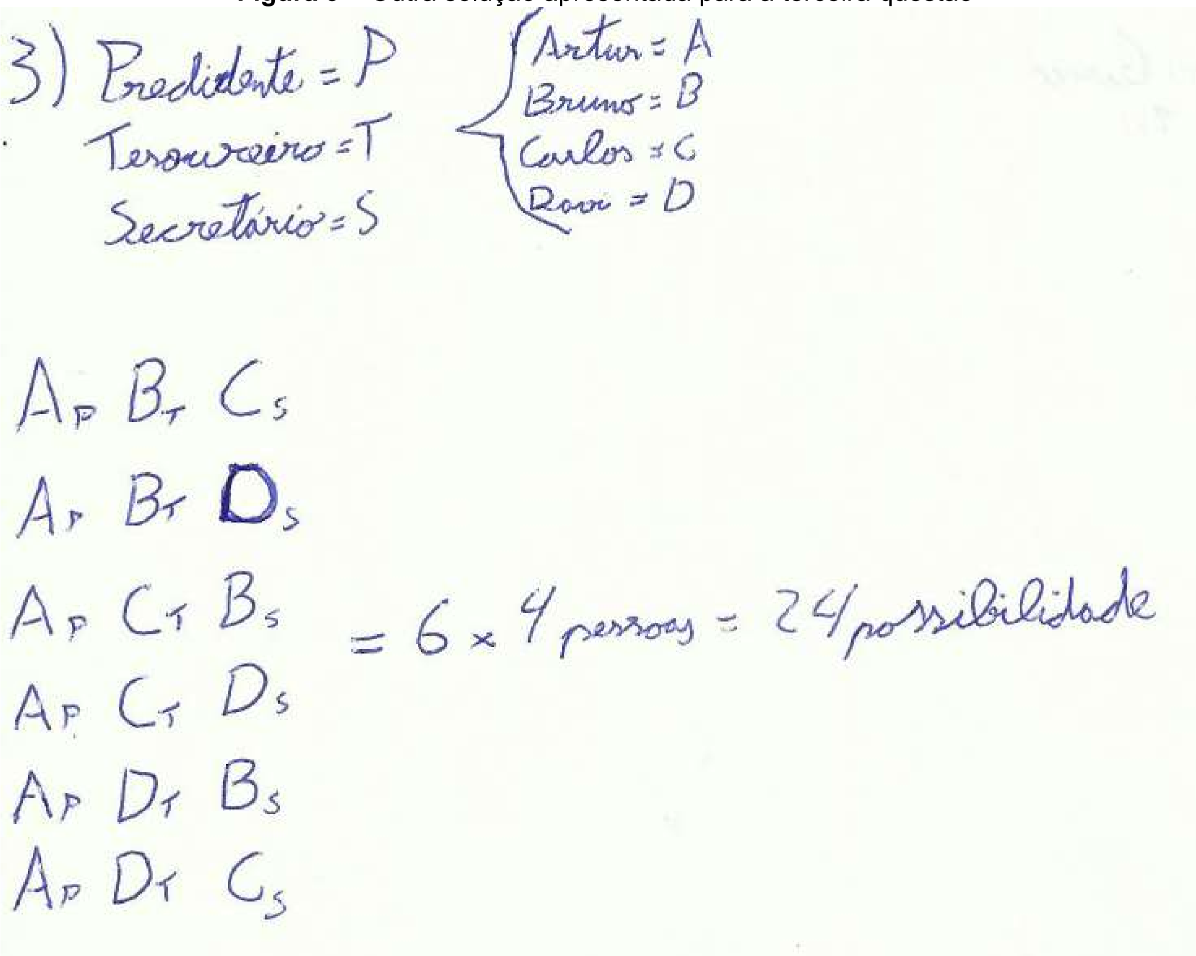
4.3.2 = 24 possibilidades

R: Há 24 possibilidades de formar o comitê com as quatro pessoas.

Eu percebi que se um homem for o presidente, apenas três poderão ser o tesoureiro e se um for o tesoureiro, apenas dois poderão ser o secretário. Por isso, multipliquei os três números.

Nessa solução (Figura 8), vemos que o aluno já apresenta o conceito do Princípio Multiplicativo, mesmo que de forma intuitiva.

Figura 9 – Outra solução apresentada para a terceira questão



Nessa segunda solução (Figura 9), o aluno escreveu todas as possibilidades com o candidato A na presidência. E, como existem quatro possíveis candidatos, ele multiplicou o resultado por quatro, assim chegando à resposta correta.

Com essa avaliação diagnóstica, pode-se perceber que os alunos já trazem desenvolvido um raciocínio combinatório, e que problemas de contagem são facilmente resolvidos quando se observa todas as possibilidades e pode-se fazer a contagem dos elementos um a um. Porém, os próprios alunos ficaram questionando sobre possíveis problemas, paraos quais fazer a descrição de todos os elementos fosse manualmente trabalhoso, pois as questões apresentadas tinham como solução conjuntos com um número pequeno de elementos.

Com esses questionamentos chegamos ao ponto que a pesquisa previa: mostrar a necessidade de algum método de contagem que facilitasse a resolução de tais problemas. A partir desse momento foram iniciados os conceitos de análise combinatória nas turmas e foram desenvolvidos os tópicos pertinentes ao conteúdo.

5.3.1. *Desenvolvimento do conteúdo durante as aulas*

Conforme já preestabelecido, o conteúdo de Análise Combinatória foi desenvolvido nas turmas 221 e 222 através de fórmula-aplicação e nas turmas 223 e 224, através do PFC.

Nas turmas 221 e 222, mesmo com os conceitos sendo apresentados através de fórmulas, foram resolvidas questões, propostas em listas de exercícios, das duas formas para a turma, tendo em vista que alguns alunos ainda não compreendiam a aplicação das fórmulas nos problemas. Sempre surgia aquele velho questionamento: “esse problema é de arranjo ou de combinação?” O interessante é que, alunos que conseguiam fazer as questões com fórmulas, se recusavam a olhar a resolução através do PFC.

Os conceitos de permutação, arranjo e combinação sempre foram inicialmente apresentados através de problemas propostos e a maioria dos alunos sempre tentava resolver as questões descrevendo os elementos do conjunto solução. Então, a partir dessa observação, foram sendo levadas à turma questões em que o número de elementos do conjunto fosse consideravelmente grande, para que assim elestivessem de evitar o método de exaustão de possibilidades.

Enquanto a turma resolvia questões de cada parte do conteúdo separadamente (conceito de permutação apresentado, questões de permutação sendo resolvidas; conceito de arranjo apresentado, questões de arranjo resolvidas; conceito de combinação apresentado, questões de combinação resolvidas) a grande maioria conseguia encontrar as respostas corretas sem grandes dificuldades. Porém, quando foi proposta uma lista com todo o conteúdo misturado, os alunos apresentavam dúvidas quanto a qual fórmula utilizar. Neste momento, alguns alunos solicitaram a resolução das questões através do PFC.

Nas turmas 223 e 224 não foi citado o nome de nenhum sub-tópico do conteúdo (permutação, arranjo e combinação). Apenas, em um momento do curso, foi apresentado o conceito de fatorial, assim como nas turmas 221 e 222 e assim foram solicitados que resolvessem algumas questões para simplificações de números com fatorial, mostrando que esse método de cancelamento facilitaria o cálculo de alguns resultados. Além disso, foram mostradas questões de vestibulares nas quais as alternativas apresentavam respostas em função de algum número com fatorial.

Todo o conteúdo que foi apresentado através do Princípio Multiplicativo se baseou em permutações. A combinação foi apresentada como se fosse uma permutação com repetição. Esse método se mostrou bastante eficaz nas turmas trabalhadas.

Os resultados das avaliações parciais e bimestrais foram satisfatórios. Observou-se que todas as turmas apresentavam certo domínio do conteúdo, mesmo sendo parte com a aplicação de fórmulas e parte com a utilização do PFC.

O que se pode perceber foi que, turmas que apresentam certa dificuldade em disciplinas da área de exatas (matemática, química e física) se adaptaram de forma melhor à metodologia de fórmula aplicação. E, turmas que já tinham uma certa habilidade com a matemática demonstraram grande familiarização com o método do PFC.

Contudo, se fez necessário durante o percurso, mesmo nas turmas 223 e 224, a apresentação dos nomes PERMUTAÇÃO, ARRANJO e COMBINAÇÃO, pois, durante a resolução de uma lista de exercícios, surgiu uma questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), realizado pelo Ministério da Educação do Brasil, para a qual era necessário o conhecimento desses nomes para responder ao problema.

A seguir temos a questão retirada do exame (questão de número 165 retirada da prova amarela do ENEM 2009).

"Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante.

A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

A. uma combinação e um arranjo, respectivamente.

B. um arranjo e uma combinação, respectivamente.

C. um arranjo e uma permutação, respectivamente.

D. duas combinações.

E. dois arranjos.

Acredito que esse tipo de questão não é o mais adequado para verificar se o aluno domina ou não o conteúdo de análise combinatória, pois ao valorizar o simples decorar de nomes não se avalia de forma correta se o aluno está sabendo resolver problemas de contagem.

5.4. Análises *a posteriori* e validação

Nessa fase da pesquisa foi realizada uma confrontação entre os dados recolhidos e a análise *a priori* para a interpretação dos resultados obtidos, verificando uma possível comprovação de hipóteses. Segundo Pommer (2013), nessa etapa da Engenharia Didática“é possível analisar se ocorrem e quais são as contribuições para a superação do problema, caracterizando a generalização local que permitirá a validação interna do objetivo da pesquisa.”

5.4.1. Descrição da análise a posteriori

O objetivo desta pesquisa foi mostrar que a utilização do princípio multiplicativo se torna mais eficaz para o desenvolvimento do raciocínio combinatório nos alunos e também mostrarque a utilização da resolução de problemas como ponto de partida facilita o entendimento de alguns conceitos principais desse conteúdo.

Dentro deste trabalho, era esperado que as turmas que tiveram seu contato inicial com a Análise Combinatória através da metodologia de fórmula-aplicação sentissem mais dificuldades em resolver questões de combinatória, quando esses fossem apresentados de forma aleatória. Enquanto que os alunos que aprenderam a resolver questões utilizando exclusivamente o PFC sentiriam mais segurança para interpretar e chegar ao resultado correto.

Porém, dentro dessa abordagem alternativa de metodologia de ensino de Análise Combinatória, foi verificado que, as classes nas quais foi aplicada a pesquisa de campo, devido à escolha proposital de turmas com facilidade em resolver questões matemáticas utilizando o PFC, e as demais turmas, nas quais foi utilizando a fórmula-aplicação, cada uma se adaptou de forma segura à metodologia empregada.

5.4.2. Uma avaliação final

Neste primeiro semestre de 2014, essas mesmas turmas realizaram uma avaliação final de Análise Combinatória para a verificação da aprendizagem e para a análise da metodologia escolhida preferencialmente pelos alunos para a resolução das questões.

Os alunos que realizaram a pesquisa no ano de 2013 permaneceram em sua grande maioria nas mesmas turmas, então pude concluir a avaliação ainda sendo professora dessas classes.

No terceiro ano do Ensino Médio, esses alunos fazem a revisão de todo o conteúdo estudado no primeiro e segundo anos do ensino médio e, ao realizar a revisão do conteúdo de análise combinatória, deixei de trabalhar com o livro adotado pela escola, já que os exercícios já haviam sido esgotados no ano anterior, e iniciei um trabalho de revisão de aprofundamento de conteúdo com o livro “Matemática do Ensino Médio, volume 2” (LIMA et al., 2006), onde foi trabalho, dessa vez, todo o conteúdo em todas as turmas através do PFC.

O que foi percebido é que a maioria dos alunos preferiu esse método de resolução e, a partir desse momento, em todas as atividades propostas e avaliações escolares realizadas por eles, os mesmos utilizavam quase sempre o PFC como ferramenta de resolução de problemas de combinatória.

Ao fim da revisão do conteúdo, foi solicitado aos alunos que resolvessem, da maneira que achassem mais seguro, quatro questões retiradas do livro acima citado. As questões foram as seguintes:

(1) De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em três times com 5 jogadores cada?

(2) Quantos são os números com cinco dígitos no qual o algarismo 2 figura?

(3) Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre oito homens e cinco mulheres. De quantos modos distintos podemos montar essa comissão?

(4) De quantos modos podemos dividir 8 pessoas em dois grupos de quatro pessoas cada?

A primeira, a terceira e a quarta questões foram escolhidas para verificar de que maneira os alunos resolveriam questões de combinação. A segunda questão escolhida foi para verificar se eles resolveriam o problema através do método da exclusão ou da construção.

Observe algumas das respostas dadas pelos alunos (Figuras 11, 11, 11 e 13).

Figura 10 – Resposta para a questão 1

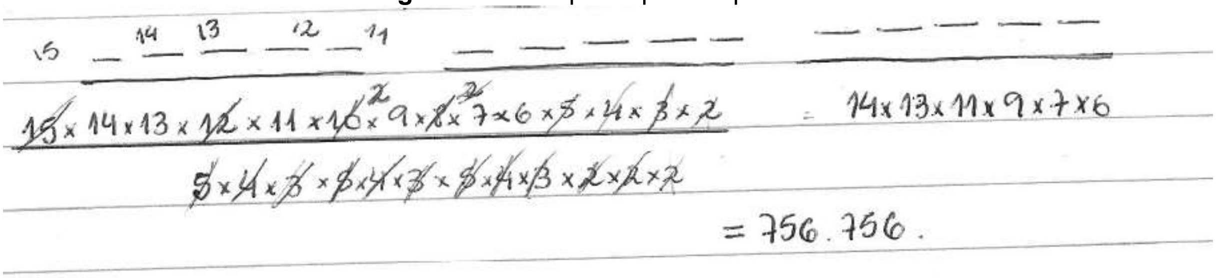


Figura 11 – Resposta para a questão 2

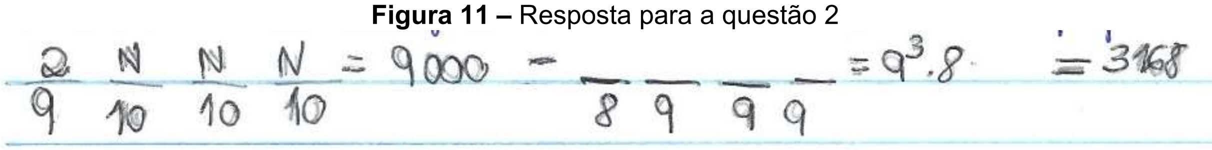


Figura 12 – Resposta para a questão 3

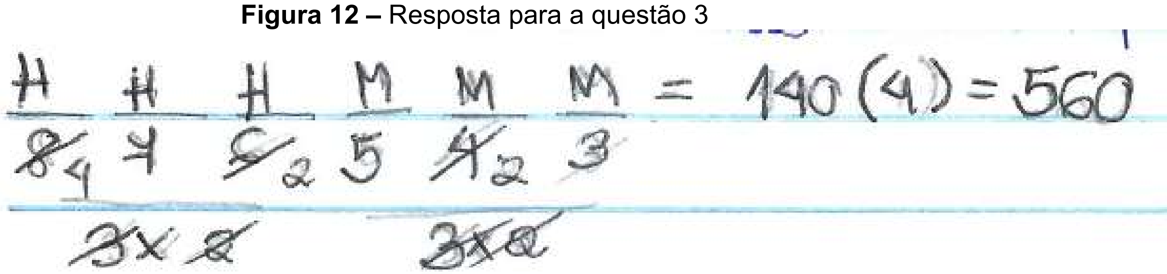
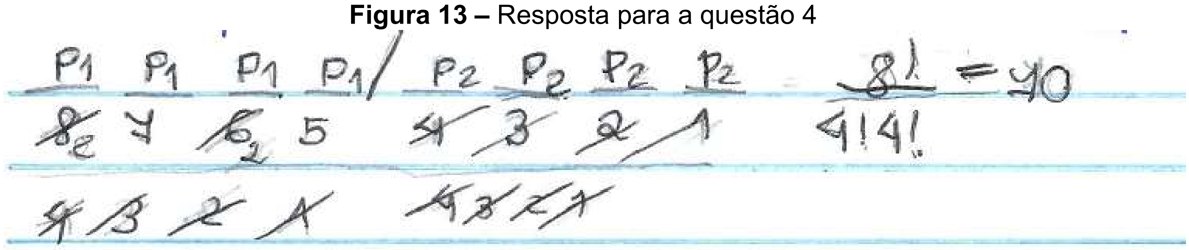
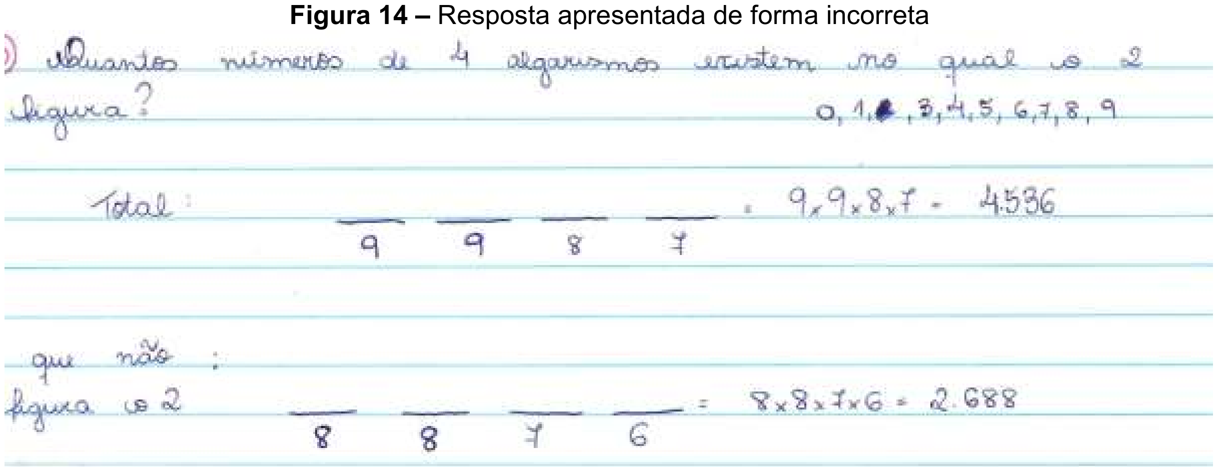


Figura 13 – Resposta para a questão 4



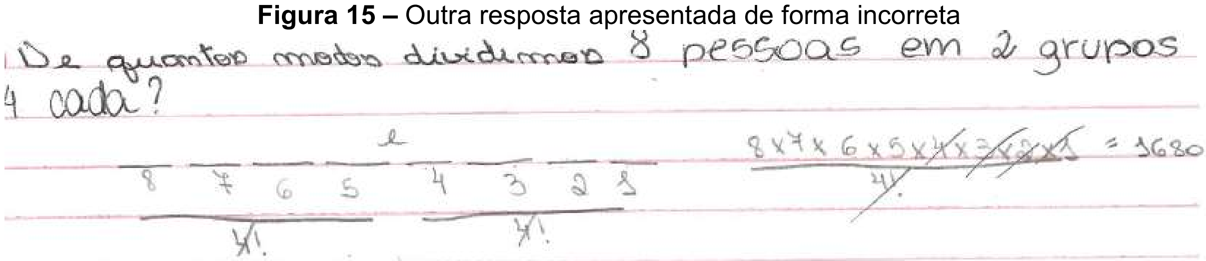
Vejamos a seguir algumas soluções apresentadas de forma incorreta.

Figura 14 – Resposta apresentada de forma incorreta



O erro cometido na resposta da questão 2 (Figura 14) foi não considerar as repetições de algarismos. O aluno teve o raciocínio de exclusão correto, porém, pecou ao considerar números com algarismos distintos, o que o problema não mencionava.

Figura 15 – Outra resposta apresentada de forma incorreta



Na resposta da questão 4 (Figura 15), o erro foi apenas no cálculo da simplificação do fatorial.

Podemos verificar que todas as questões foram resolvidas através do Princípio Multiplicativo e, mesmo aquelas turmas onde foi trabalhada inicialmente a metodologia de fórmula-aplicação utilizaram a nova metodologia ensinada.

Os alunos, durante conversa informal, afirmaram que a utilização do PFC traz mais certeza quanto à resolução das questões já que, para a aplicação das fórmulas é necessária uma análise mais minuciosa do problema, enquanto que ao utilizar o PFC já se pode iniciar uma solução sem pensar se a questão é de arranjo ou combinação, por exemplo.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho teve como objetivo principal mostrar quão eficaz se apresenta o ensino da Análise Combinatória através do PFC, utilizando a metodologia da resolução de problemas como ponto de partida junto aos alunos do segundo ano do Ensino Médio.

A hipótese levantada no início da pesquisa foi a de que alunos que aprendem os conceitos de análise combinatória quase que exclusivamente pela metodologia de fórmula-aplicação dificilmente conseguem resolver problemas de contagem com segurança e muitas vezes não apresentam um raciocínio combinatório satisfatório para solucionar tais questões.

Logo, esta pesquisa procurou mostrar que questões do conteúdo abordado acima podem ser resolvidas, quase que exclusivamente, pelo princípio multiplicativo.

As hipóteses realizadas como ponto de partida da pesquisa e que despertaram o interesse inicial, a princípio se comprovaram, em parte.

Uma das hipóteses levantadas era a de que a utilização de fórmula-aplicação não alcançava o objetivo de fazer com que os alunos fossem tão capazes de resolver questões relativas à Análise Combinatória quanto os alunos que aprenderam esse conteúdo através da metodologia de resolução de problemas e PFC.

Contudo, devido à aplicação do PFC em turmas que já apresentavam certo domínio matemático e à utilização da fórmula-aplicação em turmas que não demonstravam a mesma facilidade na área de exatas, percebeu-se que as quatro turmas se adaptaram muito bem, cada uma à sua metodologia.

Notou-se que, durante a aplicação das atividades da pesquisa de campo, quanto mais facilidade e domínio matemático o aluno apresenta, mais tranquilidade ele tem para resolver problemas de combinatória empregando apenas conhecimentos do PFC.

Ao mesmo tempo, as turmas que não apresentavam a mesma tranquilidade para resolver questões matemáticas se identificaram muito com a aplicação das fórmulas. Foi percebido que a utilização das fórmulas trazia aos alunos certa segurança para resolver tais questões.

Porém, ao retomar os conteúdos de Análise Combinatória neste ano de 2014, realizando a revisão de conteúdos estudados nos dois primeiros anos do Ensino

Médio, pode-se perceber alguns fatos relevantes para a comprovação das hipóteses da pesquisa.

Ao utilizar um novo livro, “A Matemática do Ensino Médio, volume 2” (LIMA et al., 2006), como base didática, os alunos puderam ter contato com questões mais bem elaboradas e que exigiam uma interpretação mais profunda e menos mecânica. Com isso, todas as questões propostas foram resolvidas com a metodologia do PFC, inclusive para as turmas que aprenderam o conteúdo inicialmente pelo uso de fórmulas.

Nesse momento, os alunos puderam escolher qual método que facilitava mais a resolução de tais questões. Observou-se que quase todos os alunos preferiram o uso do PFC, alegando a não necessidade da memorização de fórmulas e a não necessidade de identificar, a princípio, se o problema apresentado envolvia conceitos de permutação, arranjo ou combinação.

Os alunos afirmavam que analisar a questão sem a preocupação da utilização das fórmulas fazia com que eles realmente construíssem a solução, não somente chegando a um resultado numérico esperado, mas finalizando um raciocínio com uma resposta com significado e coerente.

Mesmo errando em algumas elaborações de resoluções, eles sabiam questionar sobre seus erros e defendiam até o fim o seu raciocínio, gerando debates em todas as questões, fazendo com que o objetivo do trabalho fosse alcançado.

O esperado nesta pesquisa não era simplesmente mostrar como podem ser apresentados os conceitos da Análise Combinatória através de outra abordagem pedagógica, mas mostrar que essa metodologia de ensino pode trazer aos alunos um desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático melhor. Fazer com que o aluno chegue a um resultado correto não é o mais importante.

O que realmente é significante é verificar que, com o auxílio da ferramenta de resolução de problemas, o discente se torna capaz de analisar, criticar e defender suas ideias até que ele consiga, por si só, compreender que sua solução está correta ou não. E ainda, mesmo chegando a resultados equivocados, ele é capaz de analisar seus erros e iniciar uma nova investigação para encontrar a solução correta dos problemas.

6.1. Outras considerações

Em estudos e análises de artigos, dissertações e teses acerca do assunto, foram observadas algumas considerações sobre o tema que acredito que sejam relevantes para que a construção do conhecimento de Análise Combinatória ocorra de fato.

Diversos pesquisadores afirmam que o desenvolvimento do raciocínio combinatório deve ser iniciado ainda quando os estudantes estão nas séries iniciais do Ensino Fundamental, relacionando as fases da vida escolar do aluno com as etapas do desenvolvimento cognitivo segundo Piaget.

Um bom trabalho, realizado para que o desenvolvimento do raciocínio combinatórioocorra de forma satisfatória, faz com que os alunos também consigam ter uma mente mais inclinada para resoluções de problemas de probabilidade. E, assim como a Análise Combinatória, a probabilidade também se mostra como um conteúdo específico dentro da matemática, que apresenta certa resistência dos alunos e professores ao lidar com problemas relacionados ao tema.

De acordo com Borba, temos que:

> Sendo o *raciocínio combinatório* alcançado mais plenamente em estágios avançados de desenvolvimento cognitivo, não se deve desconsiderar que a gênese desta forma de pensamento pode iniciar-se antes do alcance do período do pensamento operacional formal. Também é preciso considerar que o *raciocínio combinatório* pode desenvolver-se por meio de uma interação entre maturação cognitiva e experiências sociais – tanto as ocorridas fora da escola quanto as que se vivenciam em contextos escolares. (BORBA, 2010, p. 4).

Logo, podemos perceber que, para que ocorra um desenvolvimento do raciocínio combinatório de forma mais profunda, pode-se iniciar os estudos acerca dos conteúdos ainda no início da escolarização básica. Os conceitos iniciais concernentes à Análise Combinatória podem ser introduzidos, apresentados e trabalhados com os alunos ainda quando crianças, o que facilitaria a compreensão dos problemas.

Se analisarmos os livros didáticos que são utilizados como base pedagógica para o ensino de matemática desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, verifica-se que dão muito mais ênfase aos problemas de adição e multiplicação, por exemplo, do que aos problemas de contagem envolvendo análise combinatória. Ainda segundo Borba, vemos que:

> Os estudos sobre a análise de livros didáticos evidenciam que há uma variedade de situações combinatórias presentes em coleções de livros de Matemática dos anos iniciais – do Ensino Regular e da Educação de Jovens e Adultos – mas em quantidade muito reduzida, quando comparado ao total de problemas de multiplicação e divisão. Ressalta-se também que não é chamada a atenção do professor sobre a diversificação de problemas e sobre as particularidades de cada tipo de problema de Combinatória. Dessa forma, o trabalho matemático a ser desenvolvido, a partir do uso destes livros didáticos, pode ficar limitado a poucas oportunidades que os estudantes terão para pensar sobre as situações de Combinatória e a desenvolverem, assim, seus raciocínios combinatórios. (BORBA, 2010, p. 10).

Os estudos aqui relatados sugerem que a utilização da resolução de problemas como ponto de partida e o PFC como ferramenta didático-pedagógica desenvolvem de maneira mais ampla o raciocínio combinatório nos alunos do segundo ano do Ensino Médio. Contudo, faz-se necessário trabalhar conceitos básicos de Análise Combinatória desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, o que facilitaria a compreensão nas diversas situações combinatórias e possibilitaria o reconhecimento da natureza multiplicativa dos problemas propostos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALMOULOUD, S.A.; COUTINHO, C.Q.S.Engenharia Didática: características e seus usos em trabalhos apresentados no GT-19/ANPEd. **REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática**,v. 3.6, p.62-77, 2008.

ANTUNES, C. **Inteligências Múltiplas e seus Jogos**: introdução, v. 1, 3. ed. Rio de Janeiro: Vozes, 2012.

ARANÃO, I.V.D. **A matemática através de brincadeiras e jogos.** 7. ed. Campinas: Papirus, 2011.

BORBA, R.E.S.R. **O raciocínio combinatório na educação básica**. In: ANAIS DO X ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. Educação Matemática, Cultura e Diversidade, 2010, Salvador.

BOSE, R.C.; MANVEL, B. (RajChandra). **Introduction to combinatorial theory.**New York: Wiley, 1984.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental.**Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília:MEC/SEF, 1997.

CATALDO, J.C. Análise Combinatória: a importância dos métodos de contagem. Parte 1. **Revista eletrônica do vestibular da UERJ**, ano 6, n. 18, 2013. Disponível em: http://www.revista.vestibular.uerj.br/artigo/artigo-pdf.php?seq_artigo=31 . Acesso em 12/03/2014.

D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria á prática.** 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

GOOGLE IMAGENS. Disponível em: http://www.matthewpena.com/PHOTOS/FavPics2007/stomachion.html. Acesso em 10/03/2014.

HARIKI, S. Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios. **Revista Educação e Matemática**, n. 37, 1º trimestre, 1996.

LIMA, E.L; CARVALHO, P.C.P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. **A Matemática do Ensino Médio**. vol. 2**.** Rio de Janeiro: SBM, 2006.

MAANEN, J.V. Reclaimingqualitativemethods for organizational research: a preface. **Administrative Science Quarterly**, v. 24, n. 4, 1979.

MICHAELIS: **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. 1. ed. São Paulo: Melhoramentos, 2004.

MORGADO, A.C.O.; PITOMBEIRA DE CARVALHO, J.; PINTO DE CARVALHO, P; FERNANDEZ, P.**Análise Combinatória e Probabilidade**. 9. ed. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

PINHEIRO, C.A.M. **O ensino de análise combinatória a partir de situações-problema.**166 fls. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade do Estado do Pará, Belém, 2008.

POMMER, W.M. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo, 2013. 72 p.Disponível em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf. Acesso em 20/03/2014.

REITZ, M.D.C.; CONTRERAS, H.S.H. Resolução de Problemas Matemáticos: desafio na aprendizagem. **Revista Chão da Escola**, n. 10, p. 49-57, 2012.

ROA, R.; NAVARRO-PELAYO, V. RazonamientoCombinatorio e Implicaciones para laEnseñanza de laProbabilidad. In: JORNADAS EUROPEAS DE ESTADÍSTICA: La enseñanza y ladifusión de la estatística, 2001,Palma (Ilhas Baleares).

VAN DE WALLE, J.A. **Elementary and Middle School Mathematics.** 4. ed. New York: Longman, 2001. 478 p.

ANEXOS

ANEXO I – Avaliação Inicial

1 222, 223, 224, 225
232, 233, 234, 235
242, 243, 244, 245
252, 253, 254, 255

16

$16 \times 4 = \boxed{64 \text{ números}}$

// ~ // ~ //

2

A	B
1,2	3,4
1,3	2,4
1,4	2,3
2,3	1,4
2,4	1,3
3,4	1,2

$\boxed{6 \text{ combinações}}$

// ~ // ~ //

P = A A B B C C
T = B C A C A B
S = C B C A B A

6

$6 \times 4 = \boxed{24 \text{ comitês}}$

[1] 2, 3, 4, 5

222	232	242	252
223	233	243	253
224	234	244	254
225	235	245	255

Repetindo o esquema para cada algarismo sendo o 1º, temos 4 combinações de 16 possibilidades, então: 16 x 4 =

R: $\boxed{64}$

— " —

[2] 1, 2, 3, 4

Ana	João
1, 2	3, 4
1, 3	2, 4
1, 4	2, 3
3, 4	1, 2
2, 4	1, 3
2, 3	1, 4

$\boxed{6}$

— " —

[3]

Artur
Bruno
Carlos
Davi

Presidente	Tesoureiro	Secretário
Artur	Bruno	Carlos
Artur	Bruno	Davi
Artur	Carlos	Bruno
Artur	Carlos	Davi
Artur	Davi	Bruno
Artur	Davi	Carlos.

↳ Considerando que cada um pode ser presidente em 6 comitês diferentes, e que são 4 meninos ... 6 x 4 = $\boxed{24}$

1) 234 242
245 224
243 252
254 225
253 255
235 233
222 244
232
223

Agora é só multiplicar essa quantidade de possibilidades por 4, que é a mesma coisa que trocar os primeiros digitos por 3, depois por 4, depois por 5.

R: 64

2) $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

MARIA	CARMEM
1 2	3 4
1 3	2 4
1 4	2 3

3) A - B - C
B - A - C
C - A - B
A - B - D
A - D - B
D - A - B
B - A - D
A - C - D
C - D - A
D - A - C
B - C - D
D - B - C
C - D - B
C - A - D
B - D - C

R: ~~X~~ 15 comitês

Grupo: Carolina Borges, Gabriel Henrique, Giovana Fittipaldi e Mariana Dupont.

Turma: 222

(1) 2, 3, 4, 5

(n) dígitos $\Big\}$ $4^3 = 64$

(2) MARIA Carmen

4 figurinhas 4 figurinhas

$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}\boxed{4}$

$(4)^2 = 16 - (4) = \frac{12}{2} = 6$

nº iguais

(3)

$$\left.\begin{matrix}123\\124\\132\\134\\142\\143\end{matrix}\right\} \times 4 = 24$$

1)

222	232	242	252	322	332	342	352
223	233	243	253	323	333	343	353
224	234	244	254	324	334	344	354
225	235	245	255	325	335	345	355

4XX 5XX

16 16 16 16

R: 64

2)

A	J
12	34
34	12
13	24
24	13
14	23
23	14

6 possibilidades

3)

ABC		DBC	ADC	ABD
P: A	A			
T: B	C			
S: C	B			
P: B	B			
T: A	C			
S: C	A			
P: C	C			
T: A	B			
S: B	A			

6 6 6 6

R: 24

① 222 - 223 - 224 - 225
232 - 233 - 234 - 235
242 - 243 - 244 - 245
252 - 253 - 254 - 255
} 16

2 - 16
3 - 16
4 - 16
} = 64
5 - 16

↳ Por analogia o resultado dos números iniciados pelo algarismo 2 é de 16, sendo assim, o resultado com os algarismo 3, 4 e 5 será de 16.

②

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

Ana João

1/2
1/3
1/4
2/3
2/4
3/4

6 possibilidades

Eu separei os pares distintos para Ana e o que sobrar João recebe.

3)

P	T	S
A	B	C
A	B	D
A	C	B
A	C	D
A	D	B
A	D	C

↳ Cada um pode ser 6 vezes presidente, sendo 4 pessoas, 24.

6 x 4 = 24 possibilidades

Grupo: Augusto, Pedro, Lucas e Igor Garcia
3 24 14 10

Turma: 222

Data: 27/08/13

1) 222 2, 3, 4 e 5
223
224
225
232
233
234 = 16 x 4 inicias = 64 possibilidades
235
242
243
244
245
252
253
254
255

2) Maria Carmem

Maria	Carmem
1 e 2	3 e 4
1 e 3	2 e 4
1 e 4	2 e 3
2 e 3	1 e 4
2 e 4	1 e 3
3 e 4	1 e 2

= 12 possibilidades

3) Presidente = P
Tesoureiro = T
Secretário = S

Artur = A
Bruno = B
Carlos = C
Davi = D

A_P B_T C_S
A_P B_T D_S
A_P C_T B_S $= 6 \times 4$ pessoas $= 24$ possibilidade
A_P C_T D_S
A_P D_T B_S
A_P D_T C_S

Data: 27/8/13 – Matemática

Grupo: Giovanna Lamothe, Larissa, Laura e Marcela Couto.

①

222
223
224
225
232
233
234
235
242
243
244
245
252
253
254
255

R: Por analogia teremos a mesma quantidade de números entre 2, 3, 4 e 5. Ou seja, $16 \times 4 = 64$.

② $\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$ $\boxed{4}$

1 e 2 2 e 3 3 e 4
1 e 3 2 e 4
1 e 4

R: existem 6 possibilidades, para cada uma, totalizando 12

③ $3^4 = \frac{81}{3} \rightarrow 27$ combinações

TERESÓPOLIS, 27 DE AGOSTO DE 2013

GRUPO: VICTOR, MATEUS MOREIRA, MATEUS DAVILAS, IGOR GUEDES.

1) 2, 3, 4, 5

4 ALGARISMOS.

$\underline{4} \times \underline{4} \times \underline{4} = 64$ POSSIBILIDADES.

2) $\boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{4}$

MARIA

CARMEM

~~11~~
12
13
14
~~21~~
~~22~~
23
~~31~~
~~32~~
~~33~~
34
~~41~~
~~42~~
43
~~44~~

12
13
14
23
24
34

6 POSSIBILIDADES

3)

$\underline{P}\ \underline{T}\ \underline{S}$

$\underline{A}\ \underline{B}\ \underline{C}\ \underline{D}$

$\underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2}$

$\underline{24}$ POSSIBILIDADES.

1) 2, 3, 4, 5

222	232	242	252
223	233	243	253
224	234	244	254
225	235	245	255
322	332	342	352
323	333	343	353
324	334	344	354
325	335	345	355
422	432	442	452
423	433	443	453
424	434	444	454
425	435	445	455
522	532	542	552
523	533	543	553
524	534	544	554
525	534	545	555

$16 \times 4 = \boxed{64}$

2)

12	31
13	32
14	34
~~21~~	~~41~~
23	~~42~~
24	~~43~~

$= \boxed{6}$

3)

P	A	PABC	TABC	SABC
T	B	PABD	TABD	SABD
	C	PACD	TACD	SACD
S	D	PBCD	TBCD	SBCD

$= \boxed{12}$

1) 222 232 242 252 322 332 342 352 422 432 442 452 522 532 542 552
223 233 243 253 323 333 343 353 423 433 443 453 523 533 543 553
224 234 244 254 324 334 344 354 424 434 444 454 524 534 544 554
225 235 245 255 325 335 345 355 425 435 445 455 525 535 545 555

→ são 64 números com 3 dígitos que podemos formar

maria -
2) 12 13 14
34 24 23

→ São 6 possibilidades

carmem -
34 24 23
12 13 14

3)

Pres.	A	A	A	A	A	A
Tesou.	B	B	C	C	D	D
secret.	C	D	D	B	B	C

> Botamos todas as possibilidades com Artur como presidente. Haverá mesmo número de possibilidades com Bruno como presidente e assim por diante, assim o nº de possibilidades é 24.

Nomes: Natasha, Marcella Damázio, Mariana Colares

222, 333 444 555

234, 235, 242, 245, 253, 254

342, 345, 324, 325, 352, 354

432, 435, 423, 425, 452, 453

532, 534, 524, 523, 542, 543

(2)

Ana — 1,2 — 2,3 — 4,1 — 2,4 — 4,3

[illegible] — 4 — 4,4 — 3,2 — 1,3 — 1,2

(3)

Presidente - Artur
tesoureiro - Bruno
secretário - Carlos

Presidente - Artur
tesoureiro - Davi
secretário - ~~[illegible]~~ Bruno

Presidente - Artur
tesoureiro - Carlos
secretário - ~~[illegible]~~ Davi

Presidente - Bruno
tesoureiro - Artur
secretário - Carlos

Presidente - Bruno
tesoureiro - Carlos
secretário - Davi

Presidente - Bruno
tesoureiro - Davi
secretário - Artur

Presidente - Carlos
tesoureiro - Davi
secretário - Artur

Presidente - Carlos
tesoureiro - Bruno
~~[illegible]~~ secretário - Davi

Presidente - Carlos
tesoureiro - Artur
secretário - Bruno

Presidente - Davi
tesoureiro - Artur
secretário - Carlos

Presidente : Davi
tesoureiro : Bruno
secretário : Artur

Presidente : Davi
tesoureiro : Carlos
secretário : Bruno

1) 222
223
224
225
232
233
234
235
242
243
244
245
252
253
254
255

2
3
4
5

4 algarismos

todas as possibilidades com 2 na 1ª posição = 16

16.4 = 64

R: 64 possibilidades

2) ANA

ANA	JONNY
12	34
13	24
14	23
23	14
24	13
34	12

6 possibilidades

$\boxed{3}$

P	T	S
A	B	C
A	B	D
A	C	D
A	C	B
A	D	B
A	D	C
1ª p	2ª p	3ª p

Com o A na 1ª posição é possível 6 comitês. Logo com o A na segunda e terceira posição existem mais 12 possibilidades. Também existe 6 possibilidades sem o A.

12+6+6 = 24

24 possibilidades

① 222, 223, 224, 225
232 233 234 235
242 243 244 245
252 253 254 255

= 64

② 1 2 3 4

1	2
1,4	2,3
1,3	2,4
2,3	1,4
2,4	1,3
3,4	1,2
1,2	3,4

= 6

③ P = A A B B C C
T = B C A C A B
S = C B C A B

24 comitês

1)

223	332	422	522
222	333	423	523
224	334	424	524
225	335	425	525
232	322	432	532
233	323	433	533
234	324	434	534
235	325	435	535
242	342	442	542
243	343	443	543
244	344	444	544
245	345	445	545
252	352	552	552
253	353	553	553
254	354	554	554
255	355	555	555

lógica: Cada dezena tem 4 opções logo $4 \times 4 = 16 \times 4 = 64$.

2) Cada algarismo repete 3 vezes na frente logo $3 \times 4 = 12$ sendo 2 pessoas

$12 \div 2 = 6$. 6 maneiras

3) Com cada pessoa como presidente existe 6 opções, logo, $6 \times 4 = 24$

1

222	322	422	522
223	323	423	523
224	324	424	524
225	325	425	525
232	332	432	532
233	333	433	533
234	334	434	534
235	335	435	535
242	342	442	542
243	343	443	543
244	344	444	544
245	345	445	545
252	352	452	552
253	353	453	553
254	354	454	554
255	355	455	555

64 números

2

Ana	João
1 - 2	3 - 4
3 - 4	1 - 2
1 - 3	2 - 4
2 - 4	1 - 3
1 - 4	2 - 3
2 - 3	1 - 4

6 maneiras

3 ~~[illegible]~~

01) 64 possibilidades de números (ex: 222, 223, 224, 225, 252, 253, 254, 245, 243, 242, 232, 234, 235, 233, 244, 255)

16 × 4 dígitos

↳ possibilidades por dígitos

02) A - (1 e 2) (1 e 3) (1 e 4) (2 e 3) (3 e 4)

J -

(1 e 2)	(1 e 3)	(1 e 4)	(2 e 3)	(3 e 4)
(1 e 3)	(1 e 2)	(1 e 2)	(1 e 2)	(1 e 2)
(1 e 4)	(1 e 4)	(1 e 3)	(1 e 3)	(1 e 3)
(2 e 3)	(2 e 3)	(2 e 3)	(1 e 4)	(1 e 4)
(3 e 4)	(3 e 4)	(3 e 4)	(3 e 4)	(3 e 4)

⇨ 20 possibilidades

× 2

= 40 possibilidades

1) R:

222	333	444	555
223	332	442	552
224	334	443	553
225	335	445	554
234	345	452	542
235	354	453	543
245	353	455	544
243	352	432	545
254	342	433	532
242	343	434	533
252	345	435	534
253	323	454	535
255	324	422	522
233	325	423	523
244	322	425	524
		424	525

$\boxed{62}$

2)

Ana	João
1,2	3,4
1,3	2,4
1,4	2,3
2,3	1,4
2,4	3,1
3,4	1,2

$\boxed{6}$

~~3) Presidente: A, B, C~~

3)

Presidente:	A	B	C	A	A	A	~~A~~	~~B~~	A	A	B	B	B	B	B
Tesoureiro:	B	A	B	C	B	D	~~C~~	~~B~~	C	D	A	D	C	D	C
Secretário:	C	C	A	B	D	B	~~B~~	~~D~~	D	C	D	A	D	C	A

C	C	C	C	C	D	D	D	D	D	D
A	B	D	A	D	A	B	C	A	B	C
B	D	B	D	A	B	A	A	C	C	B

$\boxed{24}$

ANEXO II – Avaliação Final

15 / 05 / 2014

① De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 cada?

15 __ 14 __ 13 __ 12 __ 11 __   __ __ __ __ __   __ __ __ __ __

$$\frac{\cancel{15}\times 14\times 13\times \cancel{12}\times 11\times \cancel{10}^{2}\times 9\times \cancel{8}^{2}\times 7\times 6\times \cancel{5}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times 2}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}\times\cancel{3}\times\cancel{5}\times\cancel{4}\times 3\times 2\times\cancel{2}\times 2} = 14\times 13\times 11\times 9\times 7\times 6$$

$= 756.756.$

② Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo 2 figura?

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

9   10   10   10   10 $10^4 \cdot 9$ → Todos

8   9   9   9   9 9^5 → sem o 2

Ana Clara Medeiros

Alunas: Mariah Teixeira

T. 231

www.grafons.com.br

Daniel, Mario Victor, Guilherme T: 231
N:4 N:15 N:7

1) De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 cada?

$$\frac{15!}{5!\,5!\,5!} = \frac{\cancel{15}^{3} \times 14 \times 13 \times \cancel{12}^{2} \times 11 \times \cancel{10}^{2} \times 9 \times \cancel{8}^{2} \times \cancel{7} \cancel{6}}{8 \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{5} \times \cancel{4} \times 3 \times 2}$$

$$\frac{6 \times \cancel{4} \times 14 \times 13 \times 11 \times 9 \times 7}{\cancel{4}}$$

$66 \times 14 \times 13 \times 63 = \boxed{756\,756}$

2) Quantos são os números de 5 algarismos, nos quais o algarismo 2 figura?

$\overline{9}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10} = 90000$

$-$

$\overline{8}\ \overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9} = 52488$

$= \boxed{37\,512}$

credeal

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom

/ /

① _ _ _ _ _
15 14 13 12 11

_ _ _ _ _
10 9 8 7 6

_ _ _ _ _
5 4 3 2 1

$$\frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{5!\,5!\,5!}$$

$\boxed{= 756.756}$

② _ _ _ _ _ = 90.000
9 10 10 10 10

_ _ _ _ _ = 52.488
8 9 9 9 9

$= 90.000 - 52.488 = \boxed{37.512}$

→ Luis Henrique e Lukas
→ T. 231
→ nº 9 e 13

nome: Carolina Guimarães
T: 231

data

S T Q Q S S D

01) De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 cada?

1 = dois times, com um reserva cada

2 = $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 25$

3 = $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4$[illegible] anagramas; 4 = interpretada como infinito

02) Quantos são os numeros de 5 algarismos quais o algarismo 2 figuras?

$A(5,5) = \frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ algarismos

Nome Luísa Cunha

Nathacha

3º ano - 231

① De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 cada?

② Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo 2 figura?

①

$$\underline{}_{15}\ \underline{}_{14}\ \underline{}_{13}\ \underline{}_{12}\ \underline{}_{11} = \frac{\cancel{15}^{3}\times\cancel{14}^{7}\times 13\times\cancel{12}^{4}\times 11}{\cancel{5}\times 4\times\cancel{3}\times\cancel{2}}\ 3003$$

$$= \boxed{756756}$$

$$\underline{}_{10}\ \underline{}_{9}\ \underline{}_{8}\ \underline{}_{7}\ \underline{}_{6} = \frac{\cancel{10}^{2}\times\cancel{9}^{3}\times\cancel{8}^{2}\times 7\times\cancel{6}^{3}}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} = 252$$

$$\underline{}_{5}\ \underline{}_{4}\ \underline{}_{3}\ \underline{}_{2}\ \underline{}_{1} = 1$$

②

$$\underline{}_{9}\ \underline{}_{10}\ \underline{}_{10}\ \underline{}_{10}\ \underline{}_{10} = 90000$$

$$\underline{}_{8}\ \underline{}_{9}\ \underline{}_{9}\ \underline{}_{9}\ \underline{}_{9} = 52488$$

81 81

$\boxed{37\,512}$

Karline e Mayara
T: 231 nº 02 e 17.

1) De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 cada

2) Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo 2 figura?

Resolução:

1)

$$\frac{15!}{5!\,5!\,5!} = 756.756$$

2)

$\underset{9}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_} = 90000$ — $90000 - 52488 = \boxed{37.512}$

$\underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_} = 52488$

15 • 05 • 14

Victória S. Carvalho de Almeida

① De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 cada?

$\overline{15}\ \overline{14}\ \overline{13}\ \overline{12}\ \overline{11}\quad \overline{10}\ \overline{9}\ \overline{8}\ \overline{7}\ \overline{6}\quad \overline{5}\ \overline{4}\ \overline{3}\ \overline{2}\ \overline{1}$

$$\frac{15!}{5!\,5!\,5!} = \frac{\cancel{15}\times 14\times 13\times \cancel{12}\times 11\times \cancel{10}\times 9\times \cancel{8}\times 7\times 6\times \cancel{5}\times \cancel{4}\times \cancel{3}\times \cancel{2}}{\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}\times\cancel{5}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}} = 14\times 13\times 11\times 9\times 7\times 6$$

$\boxed{756\,756}$

② Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo 2 figura?

0, 1, ~~2~~, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

$\overline{9}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10} \rightarrow 9.10^4$ 90000

90000 − 52.488

$\boxed{r: 37.512}$

sem o 2 → $\overline{8}\ \overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9} \rightarrow 8.9^4$ 52.488

Diego Yoima
Luiza Bedran T. 231
Marcella Saar

1) De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 cada?

$\underset{15}{\_}\ \underset{14}{\_}\ \underset{13}{\_}\ \underset{12}{\_}\ \underset{11}{\_} = \frac{360360}{5!} = 6006$

$\underset{10}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{8}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{6}{\_} = \frac{30240}{5!} = 50905$

$\underset{5}{\_}\ \underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_} = \frac{5!}{5!} = 1$

total = 110975.

2) Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo 2 figura?

$\underset{2}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_} = 13122 \times 5 = 65610$

Bruna Gênn

① De quantos modos 15 jogadores podem ser divididos em 3 times com 5 jogadores

$$C_{15}^{5} = \frac{15!}{5!\,10!} = \frac{\cancel{15} \times \overset{7}{\cancel{14}} \times 13 \times 12 \times 11 \times \cancel{10!}}{\cancel{10!}\ \cancel{5} \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2}}$$

$$C_{10}^{5} = \frac{10!}{5!\,5!} = \frac{\cancel{10} \times \cancel{9} \times \cancel{8} \times 7 \times 6 \times \cancel{5!}}{\cancel{5} \times 4 \times \cancel{3} \times \cancel{2} \times 1 \times \cancel{5!}} \quad R: = 756\,756$$

$$C_{5}^{5} = \frac{5!}{5!} = 1$$

② Quantos são os números de 5 algarismos nos quais o algarismo 2 figura?

$\underline{8}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}\ \underline{9}$ $\qquad \underbrace{9^4 \cdot 8}_{52\,488}$ $\qquad$ s/ o dois

1 0
~~2~~ 1
3 3
4 4
5 5
6 6
7 7
8 8
9 9

desfavoráveis

$90\,000 - 52\,488$

$\boxed{R: 37\,512}$

$\underline{9}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}\ \underline{10}$ $\qquad 90\,000$

1 0
2 1
3 2
4 3
5 4
6 5
7 6
8 7
9 8
9

Augusto A.
232

1) Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

$\underset{8}{H}\ \underset{7}{H}\ \underset{6}{H}\ \underset{5}{M}\ \underset{4}{M}\ \underset{3}{M} = \frac{8\times7\times6\times5\times4\times3}{3\times2\times3\times2} = 560$ comissões

2) De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$\underset{8}{P_1}\ \underset{7}{P_1}\ \underset{6}{P_1}\ \underset{5}{P_1}\quad \underset{4}{P_2}\ \underset{3}{P_2}\ \underset{2}{P_2}\ \underset{1}{P_2} = \frac{8!}{4!4!} = 70$ modos

3) Quantos números de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

$\underset{9}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_} = 9000 - \underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_} = 3168$ números

① Uma comissão formada por 3 Homens e 5 Mulheres deve ser escolhida entre 8 Homens e 5 Mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

② De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

③ Quantos números de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

① $\underset{8}{H}\ \underset{7}{H}\ \underset{6}{H}\ \underset{5}{M}\ \underset{4}{M}\ \underset{3}{M} = \frac{8.7.6.5.4.3}{3!.3!} = 560$

② $\underset{\div 4!}{|8\,7\,6\,5|}\ \underset{\div 4!}{|4\,3\,2\,1|} = \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{4.3.2.4.3.2} = 70$

③ $\underset{9}{-}\ \underset{10}{-}\ \underset{10}{-}\ \underset{10}{-} = 9000$

$\underset{8}{-}\ \underset{9}{-}\ \underset{9}{-}\ \underset{9}{-} = 5832$

$9000 - 5832 = 3168$

Douglas Stüssi 15/5/14

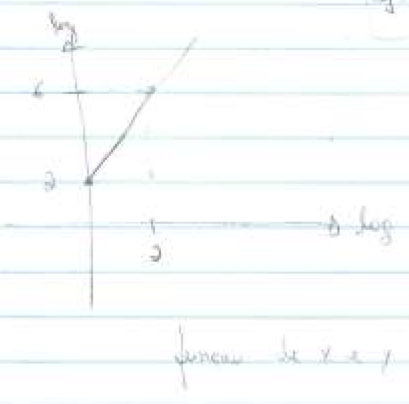
(0,2)
(2,0)

log x

$\boxed{f(x) = y}$ $f(\log x) = \log_{3,0} y$

$f(\log 0 = \log 2$

$\boxed{f(1) = \log 2}$



funcao de x e y em log 2 $y = 100x^2$

15.05.14

Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

$\underline{8}\ \underline{7}\ \underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}$ = 3! 3! $= \frac{8 \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4}^{2} \times \cancel{3}}{\cancel{3} \times \cancel{2} \times \cancel{3 \times 2}} = 560$

H H H M M M

De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$ $\quad$ $\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$ $= \frac{\cancel{8}^{2} \times 7 \times \cancel{6} \times 5 \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}}{\cancel{4} \times \cancel{3 \times 2} \times \cancel{4} \times \cancel{3} \times \cancel{2}} = 70$

8 7 6 5 $\quad$ 4 3 2 1

Quantos números de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

_ _ _ _ $\quad$ _ _ _ _

10 9 8 7

Raffaella Pelayo
Tatiana Bragança

1) Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8H e 5M. Quantas comissões podem ser formadas?

$$\frac{H}{\cancel{8}_4}\ \frac{H}{7}\ \frac{H}{\cancel{6}_2}\ \frac{M}{5}\ \frac{M}{\cancel{4}_2}\ \frac{M}{3} = 140\,(4) = 560$$

$\cancel{3 \times 2}$ $\cancel{3 \times 2}$

2) De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$$\frac{P_1}{\cancel{8}_2}\ \frac{P_1}{7}\ \frac{P_1}{\cancel{6}_2}\ \frac{P_1}{5} / \frac{P_2}{\cancel{4}}\ \frac{P_2}{\cancel{3}}\ \frac{P_2}{\cancel{2}}\ \frac{P_2}{\cancel{1}} \quad \frac{8!}{4!4!} = 70$$

$\cancel{4}\ \cancel{3}\ \cancel{2}\ \cancel{1}$ $\cancel{4\,3\,2\,1}$

3) Quantos nº de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

$$\frac{2}{9}\ \frac{N}{10}\ \frac{N}{10}\ \frac{N}{10} = 9000 - \frac{}{8}\ \frac{}{9}\ \frac{}{9}\ \frac{}{9} = 9^3.8 = 3168$$

Larissa Corrêa

15/05/14

(1) Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

$$\frac{H}{8}\ \frac{H}{7}\ \frac{H}{6}\ \frac{M}{5}\ \frac{M}{4}\ \frac{M}{3} = \frac{8\times7\times\cancel{6}\times5\times4\times3}{\cancel{3!}\cdot 3!} = 640$$

(2) De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$$\frac{\overline{8}\ \overline{7}\ \overline{6}\ \overline{5}}{4!}\ \overset{2}{}\ \frac{\overline{4}\ \overline{3}\ \overline{2}\ \overline{1}}{4!} \qquad \frac{8\times7\times6\times5\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{1}}{\cancel{4!}} = 1680$$

(3) Quantos números de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

$$\overline{9}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10} = 9000$$

$$\overline{8}\ \overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9} = 7128$$

1877

Lara Thayna e Nathália

Seg Ter Qua Qui Sex Sáb Dom / /

1. Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

$$\frac{H}{8}\ \frac{H}{7}\ \frac{H}{6}\ \frac{M}{5}\ \frac{M}{4}\ \frac{M}{3} = \frac{8\times7\times\cancel{6}^{2}\times5\times\cancel{4}\times\cancel{3}}{\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} = \boxed{560}$$

2. De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$$\frac{G1}{8}\ \frac{G1}{7}\ \frac{G1}{6}\ \frac{G1}{5}\quad \frac{G2}{4}\ \frac{G2}{3}\ \frac{G2}{2}\ \frac{G2}{1} = \frac{\cancel{8}\times7\times\cancel{6}^{2}\times5\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}} = \boxed{70}$$

3. Quantos números de 4 algarismos existem no qual é 2 figura?

$$\frac{}{9}\ \frac{}{10}\ \frac{}{10}\ \frac{}{10} = 9\times10\times10\times10 = 9000$$

$$\frac{}{8}\ \frac{}{9}\ \frac{}{9}\ \frac{}{9} = 9\times8\times9\times9 = \cancel{3888}\ 5832$$

$9000 - 5832$

$\boxed{3168}$

Maria Gabriela Felgo e Gabriel Henrique
232

① Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

② De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

③ Quantos números de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

1) $\underset{8}{H}\ \underset{7}{H}\ \underset{6}{H}\quad \underset{5}{M}\ \underset{4}{M}\ \underset{3}{M} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3!} \cdot 3!} = \boxed{560}$ //

2) grupo 1: $\underset{8}{\_}\ \underset{7}{\_}\ \underset{6}{\_}\ \underset{5}{\_}$ grupo 2: $\underset{4}{\_}\ \underset{3}{\_}\ \underset{2}{\_}\ \underset{1}{\_}$ $= \frac{\overset{2}{\cancel{8}} \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot 5 \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{1}}{4! \cdot \cancel{4!}} = \boxed{70}$ //

$\cancel{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

3) $\underset{9}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_}\ \underset{10}{\_} = 9.000$

$\underset{8}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_}\ \underset{9}{\_} = 5832$

$9000 - 5832 = \boxed{3168}$ //

//

Lorena S. Chambarelli

1) Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

$$\frac{\underset{8}{H}\ \underset{7}{H}\ \underset{6}{H}}{3!} \cdot \frac{\underset{5}{M}\ \underset{4}{M}\ \underset{3}{M}}{3!\,2} \rightarrow 8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 2$$

560 comissões

2) De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$$\frac{\underset{8}{P}\ \underset{7}{P}\ \underset{6}{P}\ \underset{5}{P}}{4!} \quad \frac{\underset{4}{P}\ \underset{3}{P}\ \underset{2}{P}\ \underset{1}{P}}{4!}$$

$$\frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70 \text{ pessoas}$$

3) Quantos números de 4 algarismos no qual o 2 figura?

c/2 $\overline{9}\ \overline{10}\ \overline{10}\ \overline{10}$

s/2 $\overline{8}\ \overline{9}\ \overline{9}\ \overline{9}$

$9000 - 9^3 \cdot 8$

3168 números

Matemática II

15/05/14

1) Uma comissão formada por 3 Homens e 3 Mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

$$\underset{8}{H}\ \underset{7}{H}\ \underset{6}{H}\ \underset{5}{M}\ \underset{4}{M}\ \underset{3}{M} = 8.7.6.5.4.3$$

$$56 \cdot 30 \cdot 12$$

$$56 \cdot 360 = \frac{20160}{3!\cdot 3!} = \frac{20160}{36} = 560 \text{ comissões}$$

2) De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$$\underset{8}{G_1}\ \underset{7}{G_1}\ \underset{6}{G_1}\ \underset{5}{G_1} = \frac{8.7.6.5}{4!} = \frac{\overset{14}{\cancel{56}}\cdot\overset{5}{\cancel{30}}}{\underset{1}{\cancel{4}}\cdot \cancel{12}\cdot \underset{1}{\cancel{2}}} = 70 \text{ modos}$$

3) Quantos números de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

$$\underset{1}{\sqcup}\ \underset{1}{\sqcup}\ \underset{1}{\sqcup}\ \underset{1}{\sqcup} = 1 \qquad 1+10+100+1000 = 1111 \text{ números}$$

$$\underset{1}{\sqcup}\ \underset{1}{\sqcup}\ \underset{1}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup} = 10$$

$$\underset{1}{\sqcup}\ \underset{1}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup} = 100$$

$$\underset{1}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup}\ \underset{10}{\sqcup} = 1000$$

Nome: ISABELA LINA   TURMA: 232   Nº: 7

① UMA COMISSÃO FORMADA POR 3 HOMENS E 3 MULHERES DEVE SER ESCOLHIDA ENTRE 8 HOMENS E 5 MULHERES. QUANTAS COMISSÕES PODEM SER FORMADAS?

$$\frac{\underset{8}{\underline{H}}\ \underset{7}{\underline{H}}\ \underset{6\,2}{\underline{H}}}{3 \cdot 2} \quad \frac{\underset{5}{\underline{M}}\ \underset{4\,2}{\underline{M}}\ \underset{3}{\underline{M}}}{3 \cdot 2} = 560$$

② DE QUANTOS MODOS DIVIDIMOS 8 PESSOAS EM 2 GRUPOS DE 4 CADA?

$$\frac{\underset{8\ 7}{P_1\ P_1}\ \underset{6\ 5}{P_1\ P_1}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \quad \frac{\underset{4\ 3}{P_2\ P_2}\ \underset{2\ 1}{P_2\ P_2}}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$$

③ QUANTOS NÚMEROS DE 4 ALGARISMOS EXISTEM NO QUAL O 2 FIGURA?

$\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$ $\quad$ $\underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }\ \underline{\ \ }$

9 10 10 10 $\qquad$ 8 9 9 9

R = 9000 − 5832

3.168

Data 15/05/2014

Assunto Análise combinatória

① Uma comissão formada por 3 homens e 3 mulheres deve ser escolhida entre 8 homens e 5 mulheres. Quantas comissões podem ser formadas?

3H
3M

$$\underset{8}{\underline{H}}\ \underset{7}{\underline{H}}\ \underset{6}{\underline{H}}\ \underset{5}{\underline{M}}\ \underset{4}{\underline{M}}\ \underset{3}{\underline{M}} = \frac{8\times7\times\cancel{6}\times5\times\cancel{4}^{2}\times\cancel{3}}{\cancel{3}!\,\cancel{3}!\,\cancel{2}_1} = 560$$

② De quantos modos dividimos 8 pessoas em 2 grupos de 4 cada?

$$\underset{8}{\underline{G_1}}\ \underset{7}{\underline{G_1}}\ \underset{6}{\underline{G_1}}\ \underset{5}{\underline{G_1}}\ \underset{4}{\underline{G_2}}\ \underset{3}{\underline{G_2}}\ \underset{2}{\underline{G_2}}\ \underset{1}{\underline{G_2}} = \frac{8\times7\times6\times5\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}{\cancel{4}\times\cancel{3}\times2\times\cancel{4}\times\cancel{3}\times\cancel{2}}$$

$$= 70$$

③ Quantos números de 4 algarismos existem no qual o 2 figura?

0, 1, ~~2~~, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

Total: $\underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{9}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}} = 9\times9\times8\times7 = 4536$

que não figura o 2: $\underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{8}{\underline{\quad}}\ \underset{7}{\underline{\quad}}\ \underset{6}{\underline{\quad}} = 8\times8\times7\times6 = 2.688$

$4536 - 2688 = 1848$

Frase do dia:

O Pequeno Príncipe

MATEUS NICODEMOS E VICTOR COUTO

1) UMA COMISSÃO FORMADA POR 3 HOMENS E 3 MULHERES DEVE SER ESCOLHIDA ENTRE 8 HOMENS E 5 MULHERES. QUANTAS COMISSÕES PODEM SER FORMADAS

2) DE QUANTOS MODOS DIVIDIMOS 8 PESSOAS EM 2 GRUPOS DE 4 CADA?

3) QUANTOS NÚMEROS DE 4 ALGARISMO EXISTEM NO QUAL O 2 FIGURA?

1) H H H M M M → [illegible]

8 7 6 5 4 3

2) 8 7 6 5   4 3 2 1 → $\frac{20160}{4!.4!}$ → 70

3) 9 10 10 10 → 9000   (9000 − 5832 = 3168)

8 9 9 9 → 5832

ANEXO III – Pesquisa: "Aprendendo Análise Combinatória"

APRENDENDO ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. FORMAÇÃO ACADÊMICA (EM SUA MAIORIA):

- [ ] ESCOLA PRIVADA
- [ ] ESCOLA PÚBLICA

2. PRIMEIRO CONTATO COM QUESTÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA:

- [ ] EDUCAÇÃO INFANTIL
- [ ] ENSINO FUNDAMENTAL (SÉRIES INICIAIS)
- [ ] ENSINO FUNDAMENTAL (SÉRIES FINAIS)
- [ ] PRIMEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO
- [ ] SEGUNDO ANO DO ENSINO MÉDIO
- [ ] TERCEIRO ANO DO ENSINO MÉDIO

3. METODOLOGIA DE ENSINO UTILIZADA PELO SEU PROFESSOR (MAIOR PARTE DO TEMPO):

- [ ] FÓRMULA-APLICAÇÃO (FÓRMULAS DE PERMUTAÇÃO, ARRANJO, COMBINAÇÃO)
- [ ] PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO E ADITIVO(PFC - PRINCÍPIO DAS "CASINHAS"

4. TEM SEGURANÇA EM RESOLVER QUESTÕES DE ANÁLISE COMBINATÓRIA?

- [ ] SIM
- [ ] NÃO

5. FAÇA ALGUM COMENTÁRIO ACERCA DA SUA APRENDIZAGEM DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

Concluído

ANEXO IV – Pesquisa: "Metodologias de ensino de Análise Combinatória"

METODOLOGIAS DE ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA

1. FORMAÇÃO ACADÊMICA

- [ ] GRADUADO
- [ ] ESPECIALISTA
- [ ] MESTRE
- [ ] DOUTOR

2. SENTIU DIFICULDADES NA ÁREA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ENQUANTO ALUNO?

- [ ] SIM
- [ ] NÃO

3. SENTIU/SENTE DIFICULDADES NA ÁREA DE ANÁLISE COMBINATÓRIA ENQUANTO PROFESSOR?

- [ ] SIM
- [ ] NÃO

4. UTILIZA QUAL METODOLOGIA (NA MAIOR PARTE DO TEMPO) PARA O ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA?

- [ ] FÓRMULA-APLICAÇÃO
- [ ] PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO (PFC)

---

5. FAÇA COMENTÁRIOS ACERCA DO ENSINO DA ANÁLISE COMBINATÓRIA E AS DIFICULDADES ENCONTRADAS PELOS ALUNOS E PROFESSORES.

Concluído