UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM
REDE NACIONAL – PROFMAT

SOLUÇÃO DOS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA POR CURVAS MECÂNICAS

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

RAPHAEL D'ACAMPORA

Santa Maria, RS, Brasil

2014

SOLUÇÃO DOS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA POR CURVAS MECÂNICAS

Raphael d'Acampora

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo

Santa Maria, RS, Brasil

2014

Ficha catalográfica elaborada através do Programa de Geração Automática
da Biblioteca Central da UFSM, com os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

d Acampora, Raphael
Soluções dos três problemas clássicos da matemática grega por curvas mecânicas / Raphael d Acampora.-2014.
64 p.; 30cm

Orientador: Edson Sidney Figueiredo
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Santa Maria, Centro de Ciências Naturais e Exatas, Programa de Pós-Graduação em Matemática, RS, 2014

1. Geometria 2. Quadratura do círculo 3. Trissecção do ângulo 4. Duplicação do cubo 5. Problemas clássicos I. Figueiredo, Edson Sidney II. Título.

Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT

A Comissão Examinadora, abaixo assinada,
aprova a Dissertação de Mestrado

SOLUÇÃO DOS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA POR CURVAS MECÂNICAS

elaborada por
Raphael d'Acampora

como requisito parcial para obtenção do grau de
Mestre em Matemática

COMISSÃO EXAMINADORA:

Edson Sidney Figueiredo, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

Denilson Gomes, Dr. (UFSM)

Rosane Rossato Binotto

Rosane Rossato Binotto, Dra.(UFFS)

Santa Maria, 29 de agosto de 2014.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. Edson Sidney Figueiredo pela ajuda na construção desta dissertação, desde a escolha do tema até o final da última demonstração.

A Universidade Federal de Santa Maria (UFSM) pela aplicação do programa de Mestrado PROFMAT e extendo a gratidão a cada um dos professores que trabalharam neste programa.

A CAPES, pelo apoio, através da oferta de bolsas.

Aos colegas de turma, em especial, o amigo Sandro Amorim de Souza, parceiro de longa data.

A minha família que me compreendeu nos momentos de ausência e me apoiou durante todo o curso.

O importante é não parar de questionar.

Albert Einstein.

RESUMO

Dissertação de Mestrado
Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

SOLUÇÃO DOS TRÊS PROBLEMAS CLÁSSICOS DA MATEMÁTICA GREGA POR CURVAS MECÂNICAS

AUTOR: RAPHAEL D'ACAMPORA
ORIENTADOR: PROF. DR. EDSON SIDNEY FIGUEIREDO
Local e Data da Defesa: Santa Maria, 29 de agosto de 2014.

Este estudo visa mostrar os primórdios do desenvolvimento da Matemática, através da Geometria, percorrendo os métodos de resolução para o que hoje conhecemos pelos três problemas clássicos da Matemática grega: a quadratura do círculo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo. Esta dissertação discorre sobre os trabalhos de grandes matemáticos da antiguidade, dos quais citamos: Arquimedes, Dinostrato, Erastóstenes, Hípias, Papus e Nicomedes, que debruçaram-se sobre estes problemas e descreveram soluções bastante elegantes, com o uso de curvas mecânicas, como a quadratriz ou trissectriz, a conchóide e a cissóide. Embora o desejado, a princípio, fossem as ditas construções euclidianas, isto é, as construções realizadas somente com régua e compasso. Apresentamos também as construções por Nêusis, responsáveis por uma parte significativa das soluções da trissecção. O trabalho poderá servir como base para interessados no assunto uma vez que mostra a importância da Geometria para o fomento do desenvolvimento de todo o saber matemático.

Palavras-chave: Geometria. Problemas clássicos. Quadratura do círculo. Trissecção do ângulo. Duplicação do cubo.

.

ABSTRACT

Master Course Dissertation
Professional Masters in National Network – PROFMAT
Universidade Federal de Santa Maria

SOLUTION OF THE THREE CLASSICAL PROBLEMS OF THE GREEK MATHEMATICS WITH MECHANICAL CURVES

AUTHOR: RAPHAEL D'ACAMPORA
ADVISOR: DR. EDSON SIDNEY FIGUEIREDO
Location and Date of Defense: Santa Maria, August 29, 2014.

This study aims at displaying the beginning of the development of Mathematics, within a geometrical perspective, covering the methods of resolution, known today as the three classical problems of the Greek Mathematics: squaring the circle, trisecting the angle and doubling the cube. Besides that, this dissertation talks about the work of some great mathematicians of the ancient times, who are Archimedes, Dinostrato, Eratosthenes, Hippias, Pappus and Nicomedes. These mathematicians leaned over the referred problems and offered very elegant solutions, by means of the use of mechanical curves, such as the quadratrix or trisectrix, the conchoids and the cissoids, although the desired ones, initially, were the so called Euclidean constructions, that is, the constructions done only with ruler and a compass. In this work, it is also presented the neusis constructions, responsible for a significant part of the trisection solutions. This work can help others who are interested in the matter, once it shows the importance of geometry for the fostering of the development of all Mathematical knowledge.

Keywords: Geometry. Classical problems. Squaring the circle. Trisection angle. Doubling the cube.

Lista de Figuras

Sumário

INTRODUÇÃO

Os gregos foram responsáveis pelo acelerado desenvolvimento da Matemática no mundo antigo tendo as construções geométricas como principal método de resolver problemas através da ideia de representar uma grandeza qualquer na forma de um segmento de reta.

> O desenvolvimento acelerado da Matemática no mundo antigo deveu-se a gregos geniais, pensadores, filósofos, cientistas que colocaram o raciocínio, a lógica e a razão como ferramentas para descobrir coisas novas e tentar explicar o mundo em que viviam. 'Tudo é número' disse Pitágoras sintetizando o pensamento que tudo na natureza pode ser explicado pelos números, ou seja, pela Matemática. As construções geométricas estavam no centro desse desenvolvimento da Matemática. (WAGNER, [2009?]).

Atualmente, assim como na Grécia antiga, as construções geométricas desempenham grande importância na compreensão da Matemática. Wagner([2009?]) confirma o pensamento apontando que "Seus problemas desafiam o raciocínio e exigem sólido conhecimento dos teoremas de geometria e das propriedades das figuras e não é exagero dizer que não há nada melhor para aprender geometria do que praticar as construções geométricas."

Da mesma forma Boyer, (1974, p. 47) aponta que:

> [...]durante a segunda metade do quinto século circularam relatos persistentes e consistentes sobre um punhado de matemáticos que evidentemente estavam intensamente preocupados com os problemas que formaram a base da maior parte dos desenvolvimentos posteriores na geometria.

Diante disto, constate-se a grande importância da geometria para o fomento do desenvolvimento de todo o saber matemático, pois através da busca de soluções para simples problemas geométricos, surgiram grandes descobertas como as seções cônicas, curvas cúbicas e quárticas e também várias curvas transcendentes, algumas inclusive que trataremos durante este trabalho.

Levando em conta os apontamentos descritos acima, este trabalho se propõe a investigar as soluções dos problemas que ficaram conhecidos como os três problemas clássicos da matemática grega.

São eles:

a) a duplicação do cubo: dado um cubo de aresta a, determinar com régua não graduada e compasso, a aresta b de outro cubo com o dobro do volume do primeiro;

b) a quadratura do círculo: dado um círculo C de raio r determinar, com régua não graduada e compasso, o lado a de um quadrado com área igual à do círculo C;

c) a trissecção do ângulo: dado um ângulo qualquer, determinar, com régua não graduada e compasso, um ângulo com a terça parte da amplitude do ângulo inicial.

"A importância desses problemas reside no fato de que eles não podem ser resolvidos, a não ser aproximadamente, com régua e compasso, embora esses instrumentos sirvam para a resolução de muitos outros problemas de construção." (EVES, 1995, p. 134).

Ainda que não pudessem ser resolvidos utilizando tais instrumentos, estas aparentes dificuldades acabaram por alavancar ainda mais a busca por soluções com base em outros métodos.

> Na realidade, a dificuldade por eles [matemáticos] encontrada testemunha a favor de sua perspicácia, isto é, eles perceberam que havia aí um problema, o que algumas pessoas até hoje não percebem, confundindo construções aproximadas ou mecânicas com construções exatas com régua e compasso.(WAGNER, 2007, p. 92).

É importante delimitar neste momento, o que são consideradas construções com régua e compasso, determinando inclusive, as características de tais instrumentos, salientando que todas as construções nos postulados dos Elementos de Euclides foram realizadas apenas com o uso dos mesmos. Por conta deste fato esses instrumentos são conhecidos como instrumentos euclidianos. A régua euclidiana, assim como o compasso, não servem para transportar comprimentos, pois a régua é não graduada e o compasso é como um compasso atual, porém assim que ele é levantado do papel suas pernas se fecham.

> Com a régua permite-se traçar uma reta de comprimento indefinido passando por dois pontos distintos dados. Com o compasso permite-se traçar uma circunferência com centro num ponto dado passando por um segundo ponto qualquer dado.(EVES, 1995, p. 134)

Logo, a partir de uma sequência finita de passos obtemos pontos através de operações de intersecções entre retas, entre circunferências ou de retas com circunferências. Com os pontos obtidos, podemos traçar novas retas, novas circunferências e assim sucessivamente, sempre de maneira finita.

Ainda tratando-se das construções euclidianas, é salutar lembrar que não é possível:

a) traçar um círculo de centro ou raio arbitrários;

b) usar réguas graduadas ou com marcas;

c) transferir medidas com um compasso;

d) tomar um ponto arbitrário sobre uma reta;

e) deslizar uma régua sobre uma reta ou circunferência até encontrar um ponto.

Conforme Roque e Carvalho (2012) comentam que Papus[1], entendia os problemas geométricos da seguinte maneira:

> Os antigos consideravam três classes de problemas geométricos, chamados ‘planos’, ‘sólidos’, e ‘lineares’. Aqueles que podem ser resolvidos por meio de retas e circunferências de círculos são chamados de ‘problemas planos’, uma vez que as retas e curvas que os resolvem têm origem no plano. Mas, problemas cujas as soluções são obtidas por meio de uma ou mais seções cônicas, são denominados ‘problemas sólidos’, uma vez que superfícies de figuras sólidas (superfícies cônicas) precisam ser utilizadas. Resta uma terceira classe, que é chamada ‘linear’ porque outras ‘linhas’, envolvendo origens diversas, além daquelas que acabei de descrever, são requeridas para sua construção. Tais linhas são as espirais, a quadratriz, a conchóide, a cissóide, todas com muitas propriedades surpreendentes. (ver EECKE, 1982 apud ROQUE; CARVALHO 2012, p. 132, grifos do autor)

A utilidade e beleza dos procedimentos mecânicos, ficam mais evidentes, quando Healt (1912, p. 13, tradução nossa) faz uma leitura da obra de Arquimedes, *O Método dos Teoremas Mecânicos* conforme segue:

> [...] Pensei que seria apropriado escrever-lhe neste livro sobre um certo método por meio do qual você poderá reconhecer certas questões matemáticas com a ajuda da mecânica. Estou convencido de que ele não é menos útil para encontrar provas para os mesmos teoremas. Algumas coisas, que se tornam claras para mim, em primeiro lugar, pelo método mecânico, foram provadas geometricamente em seguida, uma vez que a investigação pelo referido método não fornece de fato uma demonstração. No entanto, é mais fácil encontrar a prova quando adquirimos previamente, pelo método, algum conhecimento das questões, do que encontrá-la sem nenhum conhecimento prévio.

Somam-se ainda as soluções mecânicas, as conhecidas nêusis, que é um método de construção através do ajuste de uma régua graduada e que também não é considerado um instrumento euclidiano.

Assim, embora os problemas abordados, tenham de certa forma uma simplicidade, principalmente pensando em seus enunciados, mostraram-se profundamente importantes, pois contribuíram de forma substancial para o desenvolvimento da matemática, através

[1]Papus (ou Papo) de Alexandria. Geômetra grego, pesquisador e autor de muitos textos sobre cientistas da antiga civilização grega, entre eles a Coleção Matemática, um tratado em grego composto de oito livros dos quais o primeiro e parte do segundo extraviaram-se.

de suas engenhosas soluções. Desta forma, com o objetivo de sistematizar tais resoluções, e organizá-las de uma forma linear, apresentando os argumentos algébricos e geométricos para cada uma delas, é que desenvolvemos este trabalho.

No primeiro capítulo trataremos da quadratura do círculo, iniciando com os primórdios dos trabalhos visando tal solução, as chamadas lunas de Hipócrates, e posteriormente apresentando as soluções com a quadratriz de Hípias e a espiral de Arquimedes. A trissecção do ângulo é abordada no segundo capítulo e traz soluções baseadas nas construções por nêusis incluindo a conchóide de Nicomedes, as cônicas de Aubry e Papus e a solução de Arquimedes. Também no segundo capítulo, apresentamos outra solução da trissecção atribuída a Arquimedes desta vez utilizando a espiral. Por fim, o terceiro capítulo expõe a duplicação do cubo com construções mecânicas baseadas principalmente na redução de Hipócrates. Descreveremos as soluções de Arquitas, Menecmo, Platão, Eratóstenes, Nicomedes e Diócles.

Capítulo 1

A QUADRATURA DO CÍRCULO

O problema da quadratura do círculo é muito natural e também é com certeza o mais antigo. O problema da quadratura de qualquer região poligonal é possível, já que diminuindo-se sempre que desejado o número de vértices da região em questão, usando semelhança de triângulos, obtém-se um triângulo. Daí é trivial a obtenção do quadrado, com a mesma área do triângulo, bastando para isso que se encontre para o lado do quadrado a média proporcional entre a base do triângulo e a metade de sua altura. Logo, quadrando-se as regiões poligonais, o próximo passo seria tentar quadrar regiões limitadas por curvas.

Entre estas regiões, o círculo é a primeira.

Imagina-se que buscando a quadratura do círculo, Hipócrates[1], tenha sido levado à investigar as lunas em torno de 430 a.C.. Os egípcios, desde 1800 a.C., já conheciam uma solução prática para o problema da quadratura, tomando para o lado do quadrado um comprimento igual a $\frac{8}{9}$ do diâmetro do círculo dado.

O problema da quadratura consiste em construir um quadrado de lado x cuja área seja igual à de um círculo de raio r dado. Como a área de um quadrado é expressa por x^2 e a do círculo por πr^2, deve-se obter x de modo que:

$$x = \sqrt{\pi r^2} = \sqrt{r \pi r}$$

Ou seja, x é a média geométrica ou proporcional entre r e $r\pi$. Desta forma, o problema seria resolvido se fosse possível obter um segmento de comprimento $r\pi$, pois usando-se este segmento e o segmento de medida r, facilmente constrói-se, com régua e compasso, a média geométrica entre eles.

Na figura (1.1), $AB = r$ e $BC = \pi r$. No ponto B ergue-se uma perpendicular até que esta encontre a circunferência de diâmetro AC no ponto D. Os triângulos ADB e DCB são semelhantes e portanto podemos escrever:

[1]Hipócrates de Chios (470 a.C. à 410 a.C.) foi um geômetra, nascido na ilha de Chios, no arquipélago de Dodecaneso, Grécia. As informações sobre sua vida e obra têm como fonte principal relatos indiretos de Aristóteles.

$$\frac{AB}{BD} = \frac{BD}{BC},$$

ou ainda

$$\frac{r}{x} = \frac{x}{\pi r}.$$

Assim, resolvendo a proporção, temos

$$x^2 = \pi r^2,$$

ou seja,

$$x = \sqrt{r\pi r}.$$

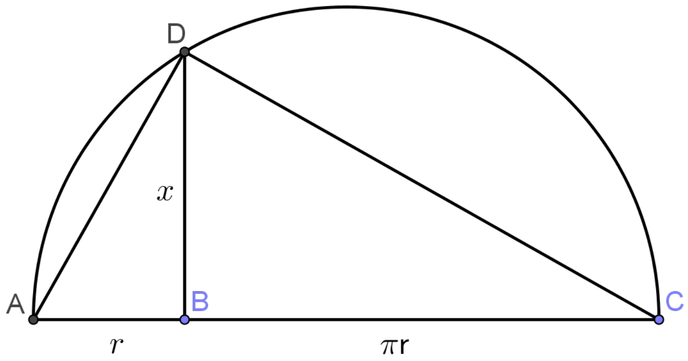

Figura 1.1: Construção da média geométrica.

Plutarco[2], cita que enquanto Anaxágoras[3] permaneceu na prisão, interessou-se pela relação entre o círculo e o quadrado. Este problema consumiu esforços de vários matemáticos durante séculos, sem que se conseguisse resolvê-lo com régua e compasso, até que, no século XIX, demonstrou-se que o problema da quadratura do círculo usando métodos euclidianos não tem solução.

Assim como grande parte da evolução e das descobertas da Matemática, a demonstração da impossibilidade da quadratura do círculo foi obtida em várias fases. Primeiramente, em 1801, no seu livro *Disquisitiones Arithmeticae*, o matemático alemão Carl Friedrich Gauss[4] afirmou que, dado um número natural ímpar $n > 1$, são condições equivalentes:

i. é possível construir um polígono regular com n lados usando apenas régua e compasso;

[2]Plutarco, biógrafo grego do período greco-romano (45 - 120). Estudou na Academia de Atenas, fundada por Platão.

[3]Anaxágoras de Clazômenas (500 a.C. à 428 a.C), filósofo grego do período pré-socrático

[4]Carl Friedrich Gauss, matemático, astrônomo e físico alemão (30 de abril de 1777, Braunschweig - Alemanha; 23 de fevereiro de 1855, Göttingen - Alemanha.)

ii. n pode ser escrito como produto de números primos distintos da forma $2^{2^k}+1$ (os chamados "primos de Fermat", dos quais só se conhecem cinco: 3, 5, 17, 257 e 65537).

No entanto, Gauss apenas publicou a demonstração de que a segunda condição implica a primeira. O primeiro matemático a publicar efetivamente uma prova rigorosa da impossibilidade de se efetuarem determinadas construções geométricas usando apenas régua e compasso foi o francês Pierre Laurent Wantzel[5], em 1837, no *Journal de Mathematiques Pures et Appliquées*.

Wantzel conseguiu provar, influenciado pelas ideias de Gauss, que se for possível, partindo de dois pontos A e B, construir um ponto C com régua e compasso, então o quociente q entre as distâncias de A a C e de A a B terá as seguintes propriedades:

i. o número q é solução de alguma equação polinomial com coeficientes inteiros não todos nulos (ou seja, é aquilo que se hoje designa por um número algébrico);

ii. se $P(x) = 0$ for uma equação polinomial de grau mínimo entre as equações polinomiais com coeficientes inteiros não todos nulos das quais q é uma solução, então o grau de $P(x)$ é uma potência de 2.

Em 1882, Carl Louis Ferdinand von Lindemann[6] demonstrou definitivamente que obter a quadratura do círculo é impossível apenas com a utilização de régua e compasso. A demonstração de Lindemann baseou-se no fato de que para se obter a quadratura do círculo com instrumentos euclidianos, π deveria ser raiz de uma equação algébrica, na forma de um número exprimível por raízes quadradas. Tais números pertencem à classe dos números algébricos, isto é, aqueles que podem ser raízes de uma equação algébrica com coeficientes inteiros. No entanto, Lindemann provou que o número π é transcendente, ou seja, não é raiz de nenhuma equação polinomial de coeficientes racionais.

Existem processos geométricos que dão valores bastante precisos para a construção de um segmento de comprimento $r\pi$. Processos esses que quando executados com régua e compasso acarretam um erro, que nos dias atuais com o uso de tecnologias pode ser bastante reduzido.

Citemos os seguintes:

a) Arquimedes[7], que fornece um erro por excesso na ordem de 0,001;

b) Kochansky[8], que fornece um erro por falta na ordem de 0,00006 e;

---

[5]Pierre Laurent Wantzel, matemático francês (5 de junho de 1814, Paris - França; 21 de maio de 1848, Paris - França.)

[6]Carl Louis Ferdinand von Lindemann, matemático alemão (Hanôver, 12 de Abril de 1852; Munique, 6 de Março de 1939).

[7]Arquimedes, matemático grego, nascido em Siracusa - (Sicília), por volta do ano 287 a.C..

[8]Adam Kochanski Adamandy, matemático polonês,nascido em 05 de agosto 1631, em Dobrzyn, e falecido em 17 de maio 1700, em Teplice, na República Tcheca.

c) Specht[9], que fornece um erro por falta menor que 0,0000003.

A seguir apresentaremos métodos algébricos ou mecânicos para se obter a quadratura do círculo.

1.1 As lunas de Hipócrates

Como citamos anteriormente, é possível que o primeiro matemático a procurar resolver a quadratura do círculo tenha sido Hipócrates de Chios. A busca pela solução da quadratura deu-se inicialmente por suas investigações sobre os problemas com lunas, que segundo Boyer (1974) são figuras geométricas formadas por arcos de circunferências de raios distintos. Hipócrates talvez imaginasse que, obtendo soluções com as lunas pudessem levá-lo a quadratura do círculo.

Simplício[10] descreve, por volta de 520 a.C., com base na obra de Eudemo[11], parte do trabalho de Hipócrates sobre a quadratura de lunas. Conforme Boyer (1974, p. 49), como parte dessa descrição há um fragmento com um teorema atribuído a Hipócrates: "Segmentos de círculo semelhantes estão na mesma razão que os quadrados de suas bases". Como início da prova deste teorema, Hipócrates mostrou que:

Teorema 1.1.1. *Sejam C_1 e C_2 círculos com áreas A_1 e A_2, e diâmetros D_1 e D_2 respectivamente. Então a razão entre as áreas é igual a razão dos quadrados dos diâmetros.*

Demonstração: Seja $\dfrac{A_1}{A_2}$ a razão entre as áreas dos círculos. Usando a fórmula da área de um círculo podemos escrever:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}$$

Simplificando a igualdade e multiplicando o segundo membro por 4 obtemos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{4r_1^2}{4r_2^2}$$

Reorganizando o segundo membro encontramos:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(2r_1)^2}{(2r_2)^2}$$

Como $2r_1 = D_1$ e $2r_2 = D_2$ chegamos a:

[9] Wilhelm Otto Ludwig Specht, matemático Alemão (22 de setembro de 1907 à 19 de fevereiro de 1985).

[10] Simplício, filósofo, matemático e autor aristotélico grego, natural da Cilícia, pesquisador da geometria grega (490 à 560)

[11] Eudemo de Rodes (350 a.C. à 290 a.C.). Filósofo, matemático e escritor grego nascido em Rodes. Um dos discípulos próximos de Aristóteles, que publicou o primeiro História da Matemática (335 a.C.), onde descrevia as obras de Pitágoras, Tales e Hipócrates além de muitos outros.

$$\frac{A_1}{A_2} = \left(\frac{D_1}{D_2}\right)^2$$

■

A seguir, descreveremos dois outros teoremas sobre os trabalhos de Hipócrates com as "lunas".

O primeiro problema das lunas de Hipócrates diz:

Teorema 1.1.2. *Seja AOB um quadrante de um círculo. Seja ainda AB o diâmetro do semicírculo voltado pra fora do quadrante. Então a luna limitada pelo quadrante e pelo semicírculo tem área igual a do triângulo AOB.*

Demonstração: Considere a figura 1.2.

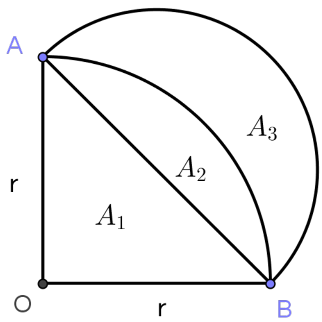

Figura 1.2: Primeira luna de Hipócrates.

Seja r o raio do quadrante determinado pelo segmento $OA = OB$. Logo o triângulo AOB, retângulo em O, é isósceles e têm catetos de medida r e hipotenusa $r\sqrt{2}$. Portanto sua área é $A_1 = \frac{r^2}{2}$. Como a área da luna (A_3) é igual a área do semicírculo de diâmetro AB menos a área da diferença entre a área do quadrante e o triângulo AOB, temos assim que:

$$A_3 = \pi\frac{\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - \left(\pi\frac{r^2}{4} - \frac{r^2}{2}\right)$$

$$A_3 = \pi\frac{\left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2}{2} - \pi\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{2}$$

$$A_3 = \pi\left(\frac{r^2}{4}\right) - \pi\frac{r^2}{4} + \frac{r^2}{2}$$

$$A_3 = \frac{r^2}{2} = A_1$$

Ou seja, a área de luna é igual a área do triângulo AOB.

■

Já o segundo teorema relativo as lunas de Hipócrates diz:

Teorema 1.1.3. *Seja $ABCD$ um semihexágono regular (trapézio) inscrito num círculo de diâmetro AD. Construindo um semicírculo de diâmetro AB externamente ao trapézio, obtém-se uma luna. Então a área do trapézio $ABCD$ é a soma do triplo da área da luna com a área do semicírculo de diâmetro AB.*

Demonstração: Abaixo, a figura 1.3 ilustra esse teorema e também auxiliará em sua prova.

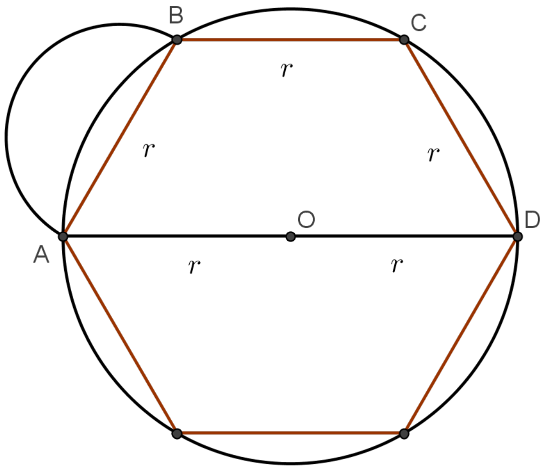

Figura 1.3: Segunda luna de Hipócrates.

Sejam o círculo de raio $r = OA = AB$ e o hexágono regular a ele inscrito. Segue daí que o hexágono terá como lados a medida r. Como a área do hexágono regular é igual a de seis triângulos equiláteros, o trapézio, ou semihexágono $ABCD$ possui área igual a $3\dfrac{r^2\sqrt{3}}{4}$, ou seja, igual a três triângulos equiláteros.

Chamando as áreas do semicírculo de diâmetro AB, do triângulo equilátero de lado r e da luna por A_1, A_2 e A_3, respectivamente, podemos escrever:

$$A_1 = \pi\frac{\left(\frac{r}{2}\right)^2}{2} = \pi\frac{r^2}{8},$$

$$A_2 = \left(\frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right)$$

e

$$\begin{aligned} A_3 &= A_1 - \left(\frac{1}{6}\pi r^2 - A_2\right) \\ A_3 &= \pi\frac{r^2}{8} - \left(\frac{1}{6}\pi r^2 - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}\right) \\ A_3 &= \frac{6r^2\sqrt{3} - \pi r^2}{24} \end{aligned}$$

Então:

$$A_{ABCD} = 3A_3 + A_1 = 3.\frac{6r^2\sqrt{3} - \pi r^2}{24} + \pi\frac{r^2}{8}.$$

Logo,

$$A_{ABCD} = \left[\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}\right],$$

ou seja, a área do trapézio $ABCD$ é $\left[\dfrac{3r^2\sqrt{3}}{4}\right]$.

$\blacksquare$

1.2 A quadratriz de Hípias

Para quadrar um círculo, vimos anteriormente que é necessário determinar um segmento com comprimento $r\pi$, ou seja, um segmento igual a metade do comprimento de uma circunferência de raio r. Desta forma, sendo possível a retificação da circunferência, isto é, fazer com que seu comprimento seja representado por um segmento de reta, torna-se possível obter o segmento $r\pi$ e consequentemente um quadrado de área πr^2.

A quadratriz de Hípias[12], é um instrumento mecânico que além de resolver a quadratura resolve também a trissecção de ângulos. Imagina-se que a princípio, Hípias a tenha desenvolvido pensando na trissecção e Dinostrato[13] a utilizou para a quadratura, baseado em considerações da geometria elementar e pensando justamente não diretamente na quadratura mas na retificação da circunferência, já que o processo não nos dá diretamente o lado do quadrado desejado e sim uma forma de determinar π.

A curva denominada quadratriz, representada pela curva DPZ na figura 1.4 a seguir é assim definida:

[12]Hípias nasceu em Elis, em 399 a.C. e morreu, provavelmente, em meados do século V a.C..

[13]Dinostrato de Atenas. Geômetra grego da Academia de Platão nascido em Alopeconnesus, Ásia Menor, hoje Turquia (350 a. C.).

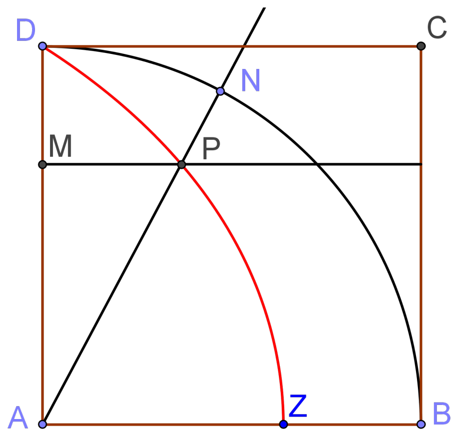

Figura 1.4: Quadratriz de Hípias.

Seja um quadrado $ABCD$. O lado AD gira com movimento circular uniforme em torno de A até que coincide com o lado AB. Ao mesmo tempo, o lado DC desce, paralelamente ao lado AB, com velocidade constante até coincidir com AB. Os dois movimentos estão sincronizados de maneira que ambos os lados, DC e AD, embora tenham velocidades diferentes, coincidam com AB no mesmo instante.

Desta forma, a quadratriz é o lugar geométrico gerado pelas intersecções destes dois lados móveis AD e DC, durante o trajeto até coincidir com AB.

Teorema 1.2.1. *Seja um quadrado $ABCD$ de lado a onde conforme a definição acima está construída a quadratriz de Hípias. O segmento AZ determinado pela interseção da curva com o lado AB tem medida $\frac{2a}{\pi}$.*

Demonstração: Seja a o comprimento do lado do quadrado $ABCD$. Sejam ainda θ o ângulo $P\hat{A}Z$, $AM = y$ e $MP = x$. Pela proporcionalidade dos movimentos podemos escrever que $\frac{y}{\theta} = k$, sendo k a constante de proporcionalidade.

Em particular, quando $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $y = a$ temos que:

$$\frac{a}{\frac{\pi}{2}} = k$$

ou ainda,

$$k = \frac{2a}{\pi}$$

Assim, podemos concluir que

$$\theta = \frac{\pi . y}{2a}$$

ou

$$y = \frac{2a\theta}{\pi}$$

Seja ψ a distância entre o vértice A e qualquer ponto da quadratriz. Desta forma, podemos observar um triângulo retângulo de cateto y e hipotenusa ψ. Assim podemos escrever a equação

$$\frac{y}{\psi} = sen\theta$$

que implica em

$$\psi = \frac{y}{sen\theta}$$

ou

$$\psi = \frac{2a\theta}{\pi \ sen\theta}. \tag{1.1}$$

Aplicando o limite para θ tendendo a zero na equação (1.1) temos que:

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{2a\theta}{\pi \ sen\theta} = \frac{2a}{\pi}.$$

Logo,

$$AZ = \psi = \frac{2a}{\pi}.$$

■

Assim construindo-se um segmento de comprimento $\frac{2a}{\pi}$ torna-se possível construir π para fazer a quadratura do círculo. Com efeito, é possível dividir, usando somente régua e compasso, $\frac{2a}{\pi}$ por $2a$ e em seguida tomamos o inverso de $\frac{1}{\pi}$.

O inverso se obtém levantando-se uma perpendicular sobre um extremo do segmento $\frac{1}{\pi}$ fazendo-a coincidir com o arco de raio unitário de centro no outro extremo deste mesmo segmento. Construindo-se um ângulo reto entre o segmento que une o centro do arco e o ponto obtido anteriormente, determina-se então um triângulo retângulo de hipotenusa igual a π, conforme figura (1.5).

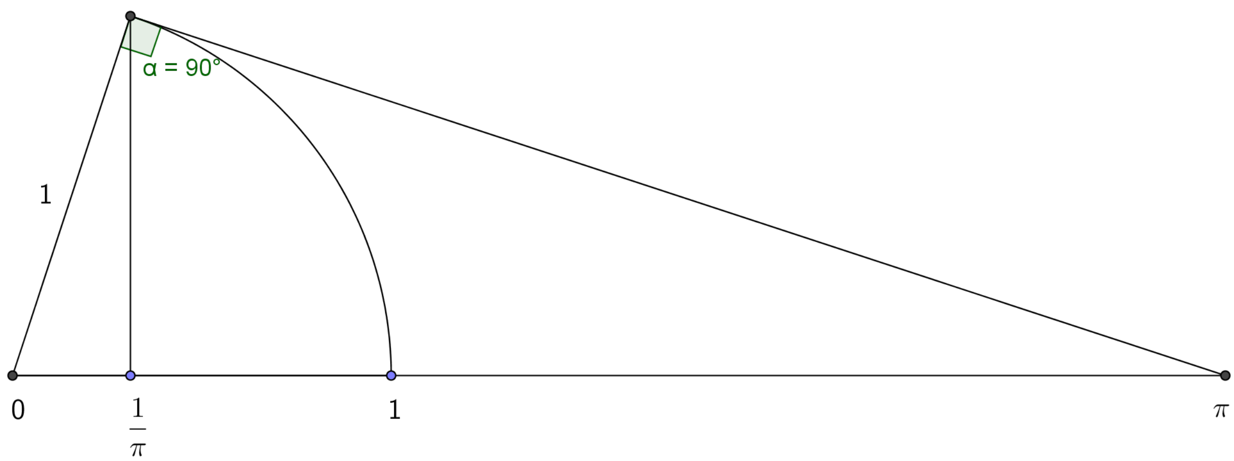

Figura 1.5: Construção do inverso de $\frac{1}{\pi}$.

1.3 A espiral de Arquimedes

A espiral de Arquimedes ou também espiral aritmética, se define como o lugar geométrico de um ponto movendo-se a velocidade constante sobre uma reta que gira sobre um ponto de origem fixo a velocidade angular constante.

Em coordenadas polares (r, θ), a espiral de Arquimedes pode ser descrita pela equação:

$$r = b + a\theta$$

onde a e b são números reais. Quando o parâmetro b muda, a espiral gira, ainda que a controla a distância em giros sucessivos. Tomaremos $b = 0$ nas espirais mencionadas neste trabalho.

Arquimedes tem entre suas publicações o livro Das Espirais, uma obra singular que possui 28 proposições somente sobre espirais, e na qual está descrita a espiral citada acima. Esta curva se distingue da espiral logarítmica pelo fato de que voltas sucessivas da mesma têm distâncias de separação constantes e iguais a $2\pi b$ com θ medido em radianos. Enquanto em uma espiral logarítmica a separação é dada por uma progressão geométrica.

Há de se notar que a espiral de Arquimedes tem dois ramos, um para $\theta > 0$ e outro para $\theta < 0$. O dois ramos estão discretamente conectados na origem.

É possível quadrar o círculo utilizando-se a espiral, apesar de que talvez, nem Arquimedes a tenha utilizado para este fim. Basta que tracemos um círculo de centro O e raio igual a a, conforme figura 1.6. Logo, o segmento OP e o arco do círculo entre as semirretas OA e OP são iguais, ambos medindo $a\theta$. Podemos dizer que a área S do círculo de centro O e raio a é a metade do produto de seu raio pela sua circunferência ($S = \dfrac{C \cdot a}{2}$). Se $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja, OP é perpendicular a OA temos:

$$S = \frac{a}{2} \cdot 4OP = 2a \cdot OP$$

Podemos entender a área do círculo como um retângulo de lados $2a$ e OP. Portanto, o quadrado deve ter lado x igual a média geométrica entre os segmentos anteriormente citados, isto é, $x = \sqrt{2a \cdot OP}$.

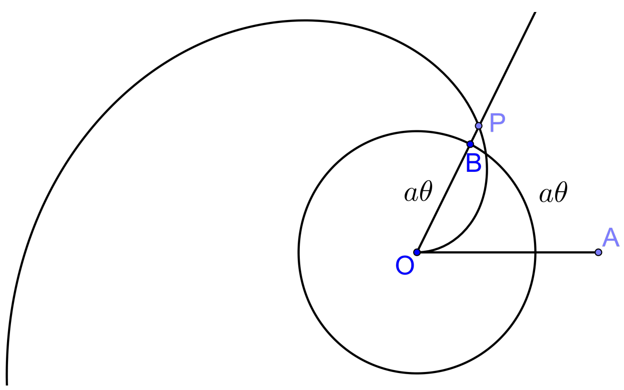

Figura 1.6: Espiral de Arquimedes - Quadratura.

Como a equação em coordenadas polares é $r = a\theta$. Sendo o ponto fixo O, encontramos P o ponto da curva que completou uma volta. Nesse ponto traçamos sua tangente, que corta a perpendicular a OP, que passa por O, em T. Arquimedes provou que OT é o comprimento da circunferência do círculo de raio OP. Isso, é claro, não mostra como achar a quadratura do círculo, mas ele já tinha mostrado que a área de um círculo é igual a área de um triângulo retângulo cujo cateto menor é igual ao raio e o maior é igual ao comprimento da circunferência, isto é, a área da circunferência de centro O e raio OP é igual à área do triângulo OPT. Agora é fácil mostrar como achar a área de um quadrado que seja igual à de um triângulo. A área do triângulo é $S = \frac{1}{2}.OT.OP$, se h é a média geométrica entre OT e OP, isto é, $h^2 = OT.OP$, então h é o lado do quadrado.

Teorema 1.3.1. *Seja P o ponto onde a espiral de Arquimedes intersecta o eixo OX quando $\theta = 2\pi$. A circunferência de raio OP tem área igual ao triângulo de lados OP e OT, onde T é a intersecção do eixo OY com a reta tangente à circunferência no ponto P.*

Demonstração: A figura 1.7, ilustra a demonstração.

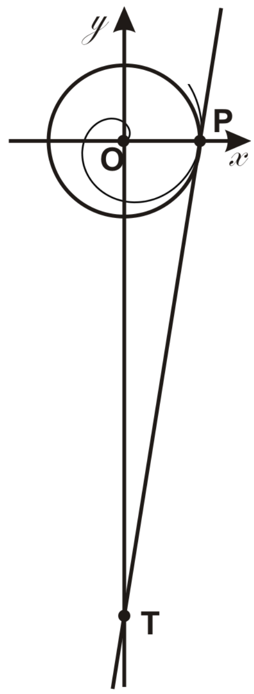

Figura 1.7: Retificação da circunferência pela Espiral de Arquimedes.

Um ponto de coordenadas (x, y), onde o eixo x é a reta suporte de OP e y a reta ortogonal, tem como expressão com parâmetros polares o ângulo de rotação θ e o raio r, assim definimos:

$$x = \frac{r\theta}{2\pi}cos\theta$$

$$y = \frac{r\theta}{2\pi} sen\theta$$

suas derivadas em relação a θ são:

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{r}{2\pi}(-\theta\ sen\ \theta + cos\ \theta)$$

e

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{r}{2\pi}(\theta\ cos\ \theta + sen\ \theta).$$

E portanto a inclinação da reta tangente será:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{r}{2\pi}(\theta\ cos\ \theta + sen\ \theta)}{\frac{r}{2\pi}(-\theta\ sen\ \theta + cos\ \theta}.$$

Aplicando a equação no ponto onde $\theta = 2\pi$ temos $\frac{dy}{dx} = 2\pi$. Logo a equação da reta tangente no ponto será $y = 2\pi(x - r)$.

Se $x = 0$, $y = -2\pi r$, ou seja $T = (0, -2\pi r)$ e a distância $OT = 2\pi r$.

Portanto, de fato a área do triângulo será:

$$S_{triangulo} = \frac{1}{2} OT.OP = \frac{1}{2} 2\pi r r = \frac{2\pi r^2}{2} = \pi r^2 = S_{circulo}.$$

■

Capítulo 2

A TRISSECÇÃO DO ÂNGULO

É possível que o problema da trissecção do ângulo tenha surgido do problema de construção de polígonos regulares, pois sua construção implica na multissecção de ângulos e em particular a trissecção. Por exemplo, se desejarmos construir um polígono regular de nove lados há a necessidade de trissectar o ângulo de 120º.

Este problema difere dos outros dois problemas clássicos, a quadratura do círculo e a duplicação do cubo, pois não há como se quadrar nenhum círculo ou duplicar um cubo com a utilização dos instrumentos euclidianos, ou seja, utilizando apenas régua não graduada e compasso e seguindo as regras sugeridas por Platão[1]. Por outro lado, existem muitos ângulos que são possíveis se trissectar. Como um exemplo desta possibilidade, Papus indica em seu livro IV da Coleção Matemática, um método simples para a trissecção do ângulo reto. Este processo é assim descrito:

Sendo $A\hat{B}D$ o ângulo reto como ilustra a figura (2.1), basta para sua trissecção, dispormos um dos lados de um triângulo equilátero BDG, sobre um dos lados do ângulo $A\hat{B}C$ e, dividindo o ângulo compreendido pelas retas DB, BG em duas partes iguais, teremos o ângulo compreendido pelas retas AB, BG dividido em três partes iguais.

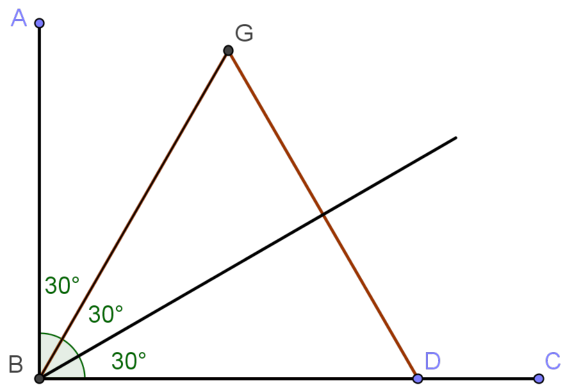

Figura 2.1: Trissecção do ângulo reto - Método de Papus.

[1]Platão (427 a.C. - 347 a.C.), filósofo grego da antiguidade.

Assim como os outros dois problemas clássicos, por muito tempo, a trissecção consumiu esforços de grandes matemáticos que tentaram resolvê-lo. Porém, depois do surgimento do contraexemplo com argumentos algébricos estas tentativas deixaram de fazer sentido.

Todos esses esforços produziram uma série de métodos não euclidianos para a solução. Em grande parte das soluções existe a redução a outro problema, um problema de nêusis, que abordaremos em seguida.

Enunciaremos aqui, dois teoremas que não serão demonstrados, mas que servirão de base para para as afirmações que se seguirão.

Teorema 2.0.2. *Se um número racional* $\frac{a}{b}$ *, com a e b primos entre si, é raiz da equação polinomial de coeficientes inteiros* $c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + ... + c_1 x^1 + c_0 x^0 = 0$ *então a será um divisor de* c_0 *e b um divisor de* c_n*.*

Teorema 2.0.3. *Uma condição necessária e suficiente para que as três raízes de uma equação de grau* 3*, com coeficientes racionais sejam construtíveis por régua e compasso é que uma delas seja racional.*

O argumento algébrico que garante que a trissecção do ângulo não é possível é o seguinte:

Se um ângulo θ for construtível por régua e compasso, então seu cosseno: $cos\ \theta = \phi$ também o é e reciprocamente. Por uma simples fórmula da trigonometria $cos\ \frac{\theta}{3} = z$ está relacionado com $cos\ \theta$ pela equação

$$cos\ \theta = cos\ \left(\frac{2\theta}{3} + \frac{\theta}{3}\right) = 4cos^3(\frac{\theta}{3}) - 3cos(\frac{\theta}{3}) = \phi.$$

Em outras palavras, o problema de trissectar o ângulo θ com $cos\ \theta = \phi$ equivale a construir uma solução da equação cúbica

$$4z^3 - 3z - \phi = 0$$

Tomemos um contraexemplo para mostrar que isto não pode ser feito em geral. Vamos considerar o caso particular para $\theta = \frac{\pi}{3}$, de modo que $cos\ \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} = \phi$. A equação torna-se então:

$$4z^3 - 3z - \frac{1}{2} = 0$$

ou

$$8z^3 - 6z - 1 = 0$$

Suponhamos que com $\theta = \frac{\pi}{3}$, $z = cos\ \frac{\pi}{9}$ seja um número racional da forma $\frac{a}{b}$, isto é, que seja uma raiz racional da equação $8z^3 - 6z - 1 = 0$, onde $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Assim, pelo teorema 2.0.2, a será um divisor de -1 e b será um divisor de 8.

Os possíveis divisores de $c_0 = -1$ são: $\{1, -1\}$ e os de $c_3 = 8$ são: $\{-8, -4, -2, -1, 1, 2, 4, 8\}$. Logo, temos as seguintes possibilidades para as raízes racionais da equação $8z^3-6z-1 = 0$:

$$\{-1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1\}.$$

Mas nenhum destes números é raiz da equação $8z^3 - 6z - 1 = 0$.

Portanto $8z^3 - 6z - 1 = 0$ não tem raízes racionais e assim, pelo teorema 2.0.3, estas raízes não podem ser construídas com régua e compasso.

Importante lembrar que em hipótese alguma estamos garantindo que não é possível trissectar ângulos com o uso de instrumentos Euclidianos, pois já mostramos acima, com o exemplo de Papus, que o ângulo reto é facilmente trissectável assim como tantos outros ângulos. É garantido porém que não será qualquer ângulo dado que poderemos trissectar.

2.1 Construções por Nêusis

Como abordamos anteriormente, antes mesmo do desenvolvimento de alguns métodos para trissectar ângulos, surgiu um método que reduzia a trissecção a um outro problema, conhecido como construção por nêusis, do verbo grego *neuein*, que significa apontar, que consiste na inserção de um segmento de reta de comprimento pré-definido entre duas curvas, de modo que um ponto fixo se encontre ou nesse segmento ou em seu prolongamento.

Este método, apesar de resolver a trissecção, não o faz diretamente e sim o transforma em outro problema, o de encontrar a posição exata que o segmento ou a reta deva estar entre essas duas curvas dadas, de modo que solucione o problema inicial.

O problema da trissecção refere-se à ângulos agudos já que ângulos retos são trissectáveis como vimos no exemplo de Papus. E, se o ângulo for obtuso, pode ser escrito como a soma de um ou mais ângulos retos com outro ângulo agudo.

Vejamos a seguir, uma forma não mecânica, a construção por nêusis, que trissecta um ângulo agudo qualquer.

Teorema 2.1.1. *Seja $A\hat{B}C$ um ângulo agudo, com vértice em B. Pelo ponto A traça-se uma paralela e uma perpendicular ao lado BC. Um segmento $DE = 2AB$ é inserido entre as duas retas criadas anteriormente de modo que B, D e E sejam colineares. Desta forma, o ângulo $E\hat{B}C$ é $\frac{1}{3}$ do ângulo $A\hat{B}C$ dado.*

Demonstração: Seja H o ponto médio de DE, ou seja $DH = HE = AB$, conforme a figura 2.2.

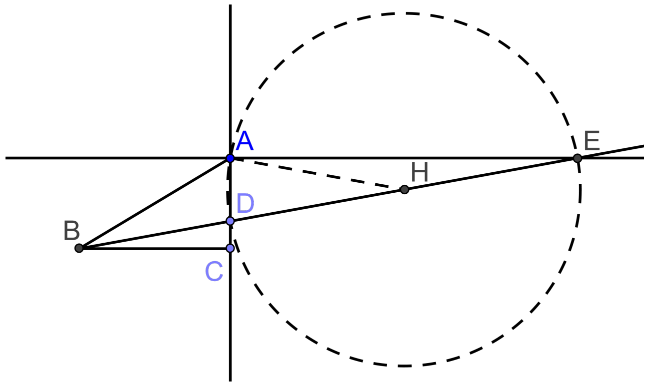

Figura 2.2: Trissecção do ângulo - Nêusis.

Por construção, a reta que passa por A e E é paralela à reta que passa por B e C. Assim, os ângulos $A\hat{E}H$ e $H\hat{B}C$ são congruentes. Como o ângulo $E\hat{A}D$ é reto, o triângulo ADE pode ser inscrito numa circunferência de centro em H. Ainda por construção, HA e HE são iguais, logo o triângulo HEA é isósceles e portanto os ângulos $A\hat{E}H$ e $E\hat{A}H$ são congruentes. Temos ainda que como $AH = HE$ e que $HE = AB$ o triângulo ABH também é isósceles e então os ângulos $A\hat{B}H$ e $A\hat{H}B$ são congruentes.

Por fim, como o ângulo $A\hat{H}B$ é angulo externo do triângulo AHE, temos que $A\hat{H}B = A\hat{E}H + E\hat{A}H$. Como $A\hat{E}H$ e $E\hat{A}H$ são congruentes então $A\hat{H}B = 2A\hat{E}H$ e como $A\hat{E}H$ e $H\hat{B}C$ também são congruentes temos que $A\hat{H}B = 2H\hat{B}C$. Portanto como $A\hat{B}C = H\hat{B}C + A\hat{B}H$ e $A\hat{B}H = A\hat{H}B$, temos que $A\hat{B}C = H\hat{B}C + 2H\hat{B}C = 3H\hat{B}C$. Assim, $H\hat{B}C = \dfrac{1}{3}A\hat{B}C$.

■

2.2 A Conchóide de Nicomedes

Uma das aplicações da construção por nêusis, para a trissecção do ângulo é a Conchóide de Nicomedes[2], que é uma curva obtida através de um dispositivo mecânico. A curva, hoje chamada de Conchóide, conforme a figura 2.3, é definida da seguinte maneira:

Sejam r uma reta e O um ponto fora dela. Tomando-se um ponto P pertencente a r, e um ponto Q no prolongamento de OP de comprimento fixo $k = QP$. Logo a Conchóide de Nicomedes é o lugar geométrico dos pontos Q quando P se move ao longo de r para o pólo O.

A propriedade importante desta curva, base de sua definição, é que qualquer reta partindo do polo O e que intersecta a reta e posteriormente a curva, tem a distância constante entre esses pontos de intersecção.

[2]Nicomedes, geômetra grego, 280a.C.; 210a.C..

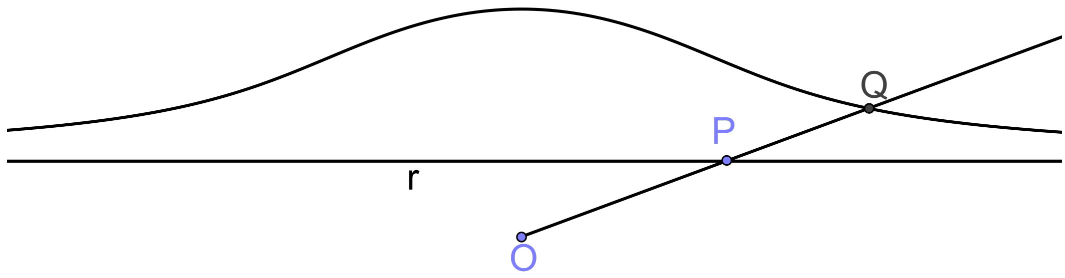

Figura 2.3: Curva Conchóide de Nicomedes.

O teorema a seguir, mostra como podemos utilizar a conchóide para trissectar um ângulo.

Teorema 2.2.1. *Seja um ângulo $A\hat{O}B$ qualquer, traça-se uma perpendicular a OA, passando por A e interceptando a reta OB em N, denominada reta r. Chamando de k a distância ON, traça-se a Conchóide relativa a reta r com pólo O e a constante de comprimento $2k$. A reta s paralela a OA que passa por N, intersecta a Conchóide no ponto C. O segmento OC trissecta o ângulo AOB, isto é, o ângulo $A\hat{O}B = 3A\hat{O}C$.*

Demonstração: Seja s a reta que passa por N e é paralela a reta que contém o segmento OA, logo os ângulos OCN e AOC são côngruos, conforme a figura 2.4.

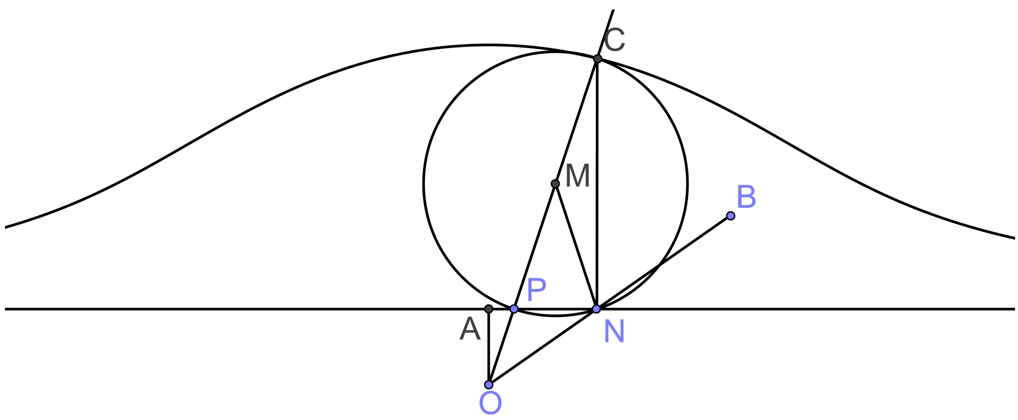

Figura 2.4: Trissecção com a Conchóide de Nicomedes.

Sejam P um ponto na intersecção de r com o segmento OC e M um ponto sobre OC tal que $PM = MC = d$, ou seja, M é ponto médio de PC.

Por construção, o ângulo $P\hat{N}C$ é reto, logo o triângulo PNC pode ser inscrito em uma circunferência de centro M e raio d. E, também por construção, o parâmetro k para a Conchóide é igual a $2ON$.

O triângulo MCN é isósceles, portanto o ângulo $M\hat{C}N$ é côngruo ao ângulo $M\hat{N}C$.

O triângulo OMN também é isósceles e os ângulos $O\hat{M}N$ e $N\hat{O}M$ são congruentes.

Como o ângulo $O\hat{M}N$ é externo do triângulo $M\hat{C}N$ temos que

$$O\hat{M}N = M\hat{C}N + M\hat{N}C$$

Daí, como os ângulos $M\hat{C}N$ e $M\hat{N}C$ são côngruos obtemos:

$$O\hat{M}N = 2M\hat{C}N$$

Mas $M\hat{C}N = O\hat{C}N$ e $O\hat{M}N = M\hat{O}N = M\hat{O}B$, então:

$$M\hat{O}B = 2O\hat{C}N = 2A\hat{O}C$$

Por fim, como $A\hat{O}B = A\hat{O}C + M\hat{O}B$, temos:

$$A\hat{O}B = A\hat{O}C + 2A\hat{O}C = 3A\hat{O}C$$

■

2.3 A trissecção por cônicas

Usando algumas cônicas, especialmente a hipérbole, com o uso de nêusis, é possível trissectar um ângulo dado. Abaixo, destacamos três destes, em especial o primeiro, descrito por Aubry em 1896 utilizando um cone circular reto e o os demais, citados por Papus, já no ano de 300 a.C. em seu livro IV da *Coleção Matemática*.

Como citamos anteriormente, Aubry, em 1896, utilizou um cone circular reto, de vértice V, onde a geratriz é igual a três vezes o raio, $g = 3r$, para trissectar um ângulo $A\hat{O}B$ dado.

Teorema 2.3.1. *Seja um cone circular reto, com $g = 3r$. Em sua base marca-se o ângulo $A\hat{O}B$ que deseja-se trissectar, com O no centro da base. Planificando então a superfície lateral do cone, com os pontos A e B determinam sobre o arco de circunferência gerado pela planificação em questão o ângulo $A\hat{V}B$. O ângulo $A\hat{V}B$ é portanto $\frac{1}{3}$ do ângulo $A\hat{O}B$.*

Demonstração: Seja α o ângulo $A\hat{O}B$. Desta forma o arco AB mede $r\alpha$. Sejam ainda γ o ângulo do setor circular de raio $g = 3r$, formado pela planificação da superfície lateral do cone e θ o ângulo $A\hat{V}B$. Assim, os comprimento dos arcos definidos por estes ângulos são respectivamente $g\gamma = 3r\gamma$ e $g\theta = 3r\theta$ (Arco AB).

Temos então que

$$3r\theta = r\alpha \text{ ou } 3\theta = \alpha.$$

Portanto

$$\theta = \frac{1}{3}\alpha.$$

■

Uma outra forma de se obter a trissecção é utilizando a proposição 31 do Livro IV de Papus, com a intersecção de uma hipérbole equilátera com uma circunferência, usando-se para tanto uma construção por nêusis. Neste caso, o problema da trissecção é justamente conseguir inserir o segmento de reta DE, com o dobro do segmento BA, entre as retas FA e AE, passando por B. Na verdade, tudo se resume em determinar o ponto E na construção.

Antes de enunciarmos o próximo teorema com sua respectiva prova, enunciaremos e demonstraremos dois lemas, do Livro I dos Elementos de Euclides, que facilitarão substancialmente nosso trabalho.

Lema 1. *(Proposição 33 - Elementos de Euclides - Livro I.) Linhas retas que unem as extremidades de duas linhas retas na mesma direção são iguais e paralelas.*

Demonstração: Sejam, por hipótese, AB e CD segmentos de retas iguais e paralelos, e sejam os segmentos AC e BD que unem as suas extremidades conforme a figura 2.5.

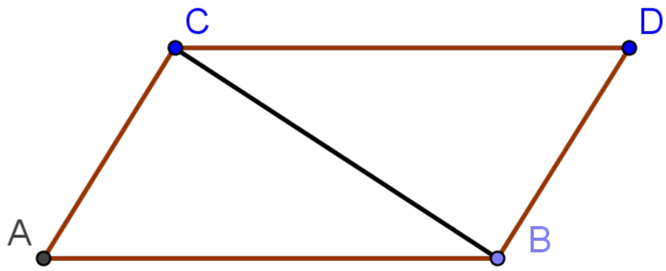

Figura 2.5: Proposição 33, Livro I dos Elementos de Euclides.

Como AB é paralela a CD, e BC une, pela diagonal, suas extremidades, então os ângulos alternos internos $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são congruentes.

Observando os triângulos ABC e BCD, temos que $AB = CD$, BC é lado comum e $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}D$ são ângulos congruentes. Portanto, pelo caso de congruência LAL, lado-ângulo-lado, os triângulos são congruentes. Portanto, AC e BD têm comprimentos iguais. Ainda, temos que os ângulos $C\hat{A}B$ e $C\hat{D}B$ também são côngruos, logo AC é paralelo a BD.

Assim, as linhas retas que unem as extremidades de outras duas linhas retas na mesma direção são iguais e paralelas.

■

Lema 2. *(Proposição 43 - Elementos de Euclides - Livro I.) Em qualquer paralelogramo, os complementos dos paralelogramos ao redor da diagonal são iguais entre si.*

Demonstração: Sejam $ABCD$ um paralelogramo, AC a sua diagonal e I um ponto de AC. No entorno de AC temos os paralelogramos $FIHC$ e $AEIG$ e os chamados complementares $GIFD$ e $EBHI$ conforme ilustra a figura 2.6.

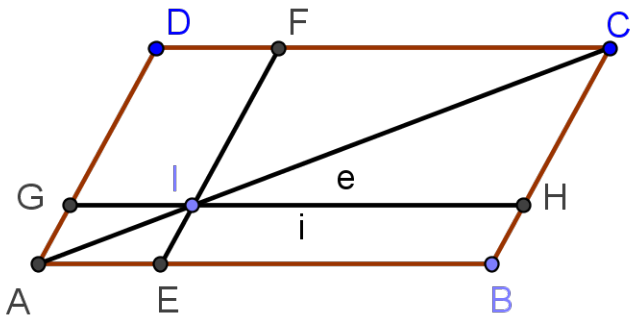

Figura 2.6: Proposição 43, Livro I dos Elementos de Euclides.

Como, $ABCD$ é um paralelogramo, e AC sua diagonal, então os triângulos ABC e ACD são congruentes.

Analogamente por $AEIG$ e $FIHC$ também serem paralelogramos com suas respectivas diagonais AI e IC temos que o triângulo AEI é côngruo ao triângulo AIG e também o triângulo IHC é côngruo a IDC.

Pelas congruências dos triângulos acima, temos que as áreas do triângulos ABC e ACD são dadas respectivamente como:

$$A_{ABC} = A_{AEI} + A_{IHD} + A_{EBHI} \text{ e } A_{ACD} = A_{AIG} + A_{ICF} + A_{GIFD}$$

Como $A_{ABC} = A_{ACD}$, $A_{AEI} = A_{AIG}$ e $A_{IHC} = A_{ICF}$, podemos concluir que:

$$A_{EBHI} = A_{GIFD}$$

Assim, os paralelogramos complementares são equivalentes.

■

Teorema 2.3.2. *Seja $A\hat{B}C$ um ângulo qualquer. Por A traçam-se duas retas, uma paralela e outra perpendicular ao outro lado, o lado BC. A intersecção da reta perpendicular a BC passando por A chamamos de F. Construindo-se o retângulo $AFBB_1$, com B_1 sobre a reta paralela a BC como sendo o centro de um dos ramos da hipérbole equilátera que possui assíntotas sobre as retas suportes dos segmentos B_1A e BB_1 e que passa por F. A circunferência de centro F e raio igual a $2AB$ intersectará a hipérbole em um ponto denotado por P. Então o ponto E que será a intersecção de uma reta passando por B, paralela ao segmento PF com a reta suporte do segmento B_1A e o ângulo $E\hat{B}C$ será igual a $\frac{1}{3}$ do ângulo $A\hat{B}C$.*

A ilustração deste teorema é dada pela figura 2.7.

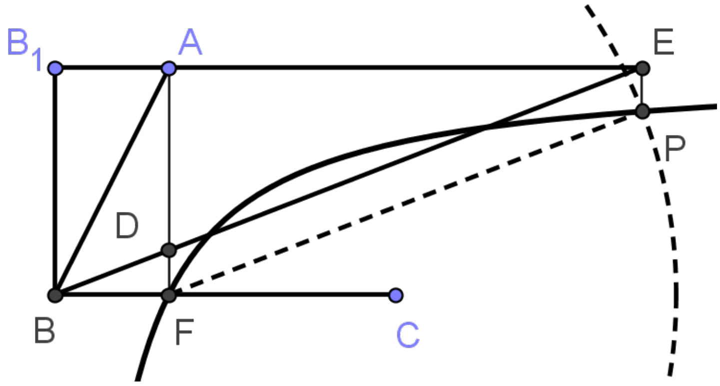

Figura 2.7: Trissecção com cônicas de Papus (Hipérbole Equilátera).

Demonstração: Com base no que foi tratado na primeira construção por nêusis, no início deste capítulo, é necessário apenas que se insira um segmento de comprimento $2AB$ entre os pontos D e E, para garantir a resolução do problema. Precisamos mostrar apenas que o segmento $DE = FP$, ou seja, $DE = 2AB$. Temos a seguir a figura 2.8, que ilustra a prova.

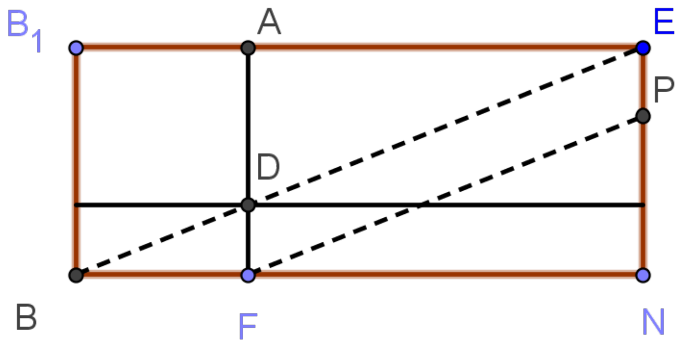

Figura 2.8: Esquema para prova - Trissecção com hipérbole equilátera.

Mostraremos que $FPED$ é um paralelogramo, lembrando que por construção FP é o raio da circunferência que mede $2AB$.

Como P e F pertencem a hipérbole, sabemos desde Apolônio[3], em seu livro II, proposição 12, que dadas duas retas concorrentes, assíntotas de uma hipérbole, um ponto Z, vértice de um paralelogramo de área c qualquer, situado na intersecção de duas retas paralelas as assíntotas é o lugar geométrico de uma hipérbole cujas assíntotas são as retas dadas.

Portanto, podemos afirmar, que as áreas dos retângulos $EPEB_1$ e B_1AAF têm valor constante c.

[3]Apolônio de Perga (262 a.C. à 190 a.C.), conhecido como “O Grande Geômetra” e considerado como um dos mais originais matemáticos gregos no campo da geometria pura. É autor do famoso tratado As Cônicas, uma das principais obras de matemática da antiguidade, composta por oito livros

Se tomarmos a diagonal EB e utilizando o lema 2, descrito anteriormente, podemos afirmar que as áreas $BN \cdot DF$ e $B_1A \cdot AF$ também são iguais.

Como EB_1 e BN são iguais, podemos afirmar que $BN \cdot DF$ e $EB_1 \cdot DF$ também são iguais. Como $EP \cdot EB_1 = B_1A \cdot AF = BN \cdot DF = EB_1 \cdot DF$, em especial $EP \cdot EB_1 = EB_1 \cdot DF$ temos que EP é igual a DF.

Portanto, como EP e DF são paralelos por construção, podemos afirmar com base no lema 1, que os segmentos DE e PF são iguais e paralelos. Então $DEPF$ é um paralelogramo e com isso $DE = PF = 2AB$.

$\blacksquare$

A próxima construção, também descrita por Papus, utilizando nêusis para trissectar um ângulo, faz uso da intersecção entre uma circunferência e uma hipérbole de excentricidade 2. Lembrando que a excentricidade de uma hipérbole é dada por $e = \dfrac{c}{a}$, onde $2c$ é a distância entre os focos e $2a$ a distância entre os vértices. Neste caso, $c = 2a$.

Teorema 2.3.3. *Seja $A\hat{O}B$ um ângulo central de uma circunferência com centro em O e OC como a bissetriz desse ângulo. Seja o ramo da hipérbole de excentricidade 2 com foco em A e OC como diretriz. Seja P a interseção da hipérbole com o arco $\overset{\frown}{AB}$. Então o ângulo $A\hat{O}P$ é igual a $\dfrac{1}{3}$ do ângulo $A\hat{O}B$.*

Demonstração: Por construção, conforme a figura 2.9, P está sobre a hipérbole e portanto temos que a distância do foco A ao ponto P é igual ao dobro da distância entre P e a reta diretriz, a reta OC, propriedade foco-diretriz da hipérbole.

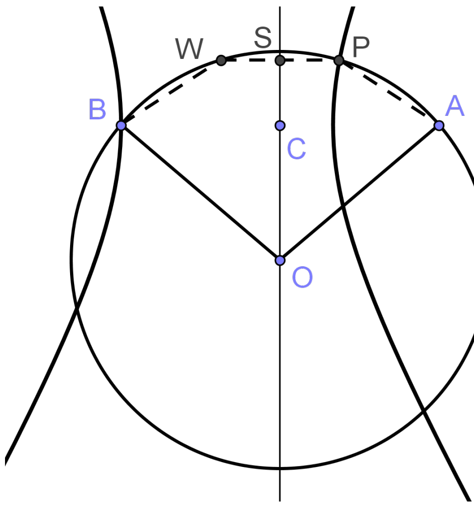

Figura 2.9: Trissecção com cônicas de Papus (hipébole de excentricidade 2).

Fixando um ponto S sobre OC, no pé da perpendicular passando por P, obtemos $AP = 2PS$. Prolongando o segmento PS até a intersecção com a circunferência, encontramos o ponto W tal que $PS = SW$, ou seja, $PW = PS + SW = 2PS = PA$.

Como OC é bissetriz de $A\hat{O}B$, a distância de W até B é igual a AP.

Assim, temos que $AP = PW = WB$ e portanto o arco AB está dividido em três arcos que possuem cordas iguais. Logo também são iguais.

Concluímos então que o ângulo $A\hat{O}P$ é igual a $\dfrac{1}{3}$ do ângulo $A\hat{O}B$.

■

2.4 A trissecção por Arquimedes

Embora Arquimedes não tenha diretamente dado uma solução para trissecção de ângulos, há pelo menos dois de seus trabalhos que indicam uma possível solução para o problema em questão:

i. a proposição VIII do Livro dos Lemas; *Liber Assumptorum*, que é uma construção por nêusis, descrita no teorema 2.4.1 abaixo e;

ii. a curva espiral definida no Livro Das Espirais.

Trataremos cada um dos casos separadamente a seguir.

2.4.1 Proposição VIII (Livro dos Lemas)

O teorema 2.4.1 é mais uma trissecção por nêusis, já que para conseguir a trissecção é necessária a construção de um segmento com três pontos colineares, onde dois deles determinam uma corda, e o terceiro exterior ao círculo a uma distância r do próprio círculo.

Teorema 2.4.1. *Sejam BD uma corda de uma circunferência de centro O e raio r, E um ponto de BD tal que $DE = r$, C e A os pontos da interseção de EO com a circunferência, onde C está entre O e E. Então $\overset{\frown}{AB} = 3\ \overset{\frown}{DC}$.*

Demonstração: Seja $\alpha = A\hat{O}B$, o ângulo central de uma circunferência de centro O e raio $OA = OB$, conforme ilustra a figura 2.10.

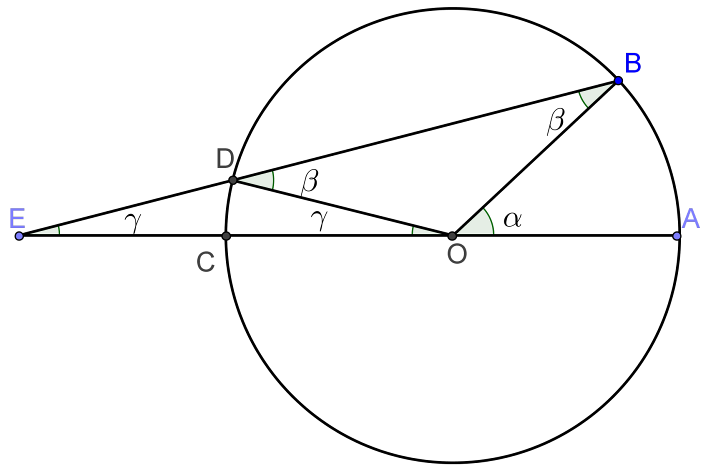

Figura 2.10: Trissecção segundo o Livro dos Lemas.

Como os triângulos DOB e DOE são isósceles pois possuem dois lados iguais a r, os ângulos $O\widehat{E}D$ e $D\widehat{O}E$ são iguais, chamaremos de γ e $O\widehat{B}D$ e $B\widehat{D}O$ são iguais e chamaremos de β.

O ângulo $B\widehat{D}O$ é externo ao triângulo DEO, logo $\beta = 2\gamma$.

A soma dos ângulos internos do triângulo BDO é $2\beta + B\widehat{O}D = 180^o$ portanto,

$$B\widehat{O}D = 180^o - 2\beta = 180^o - 2.2\gamma = 180^o - 4\gamma \tag{2.1}$$

Ainda, $\gamma + B\widehat{O}D + \alpha = 180^o$ ou seja,

$$B\widehat{O}D = 180^o - \alpha - \gamma \tag{2.2}$$

Igualando as equações (2.1) e (2.2) temos que:

$$\begin{aligned} 180^o - 4\gamma &= 180^o - \alpha - \gamma \\ \alpha &= 4\gamma - \gamma \\ \alpha &= 3\gamma \end{aligned}$$

Portanto

$$O\widehat{E}D = \frac{1}{3} A\widehat{O}B.$$

■

2.4.2 A espiral de Arquimedes

A Espiral de Arquimedes, bem como a Trissectriz de Hípias, transforma a proporcionalidade entre ângulos em uma proporcionalidade entre segmentos. Logo, utilizando a Espiral de Arquimedes também podemos trissectar e até mesmo multisseccionar um ângulo dado $A\hat{O}B$. A possibilidade de trissectar ângulos é citada por Arquimedes em seu Livro das Espirais, na proposição XIV.

Teorema 2.4.2. *Se a partir da origem da espiral traçarmos duas linhas retas até encontrarem a circunferência do primeiro círculo, então as linhas traçadas até a espiral terão entre si a mesma razão que os arcos da circunferência entre a extremidade da espiral e as extremidades das retas prolongadas até encontrarem a circunferência, sendo seus arcos medidos para frente a partir da extremidade da espiral.*

Demonstração: Seja a espiral de Arquimedes com centro em O, origem do sistema cartesiano, e de raio r. Sejam θ_1 e θ_2 os ângulos medidos a partir do eixo x e pelos quais são traçadas as retas que intersectam a circunferência.

Pela definição da espiral de Arquimedes, estes pontos de intersecção das retas geram segmentos de comprimentos $r\theta_1$ e $r\theta_2$ respectivamente.

Fazendo a razão entre estes segmentos determinados pelas interseções temos:

$$\frac{r\theta_1}{r\theta_2}$$

Simplificando a razão obtida, encontramos:

$$\frac{r\theta_1}{r\theta_2} = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

■

Assim, aplicando o descrito no teorema 2.4.2 temos que:

Se A e D são dois pontos da espiral no primeiro círculo, então:

$$\frac{BD}{BA} = \frac{\overset{\frown}{FD}}{\overset{\frown}{FE}}.$$

Conforme o exposto acima, fica fácil e evidente trissectar um ângulo utilizando a Espiral de Arquimedes. Basta que para isso, construa-se a espiral com centro coincidente com o vértice do ângulo dado, e também coincidindo a reta inicial da espiral com um dos lados do ângulo. O ponto onde a espiral intersectar o outro lado do ângulo em questão, determinará o segmento a ser trissectado.

Tomando como base o ângulo $A\hat{B}C$, representado na figura 2.11 a seguir, suponhamos que a origem da espiral esteja sobre o ponto B e sua reta inicial coincidindo com o lado BC. A espiral encontrará o lado AB no ponto A e portanto o segmento AB é o segmento que deverá ser trissectado.

Assim, tomando um ponto $E = \dfrac{1}{3}AB$ e traçando uma circunferência de centro B e de raio BE, o ponto D de intersecção entre a circunferência e a espiral é o ponto que trissecta o ângulo, ou seja, o ângulo $D\hat{B}C$ é igual a $\dfrac{1}{3}$ do ângulo $A\hat{B}C$ dado.

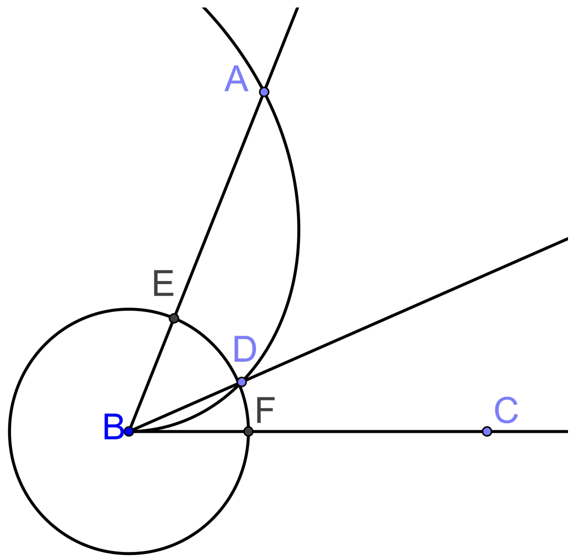

Figura 2.11: Retificação da circunferência.

De fato, como já exposto anteriormente, a espiral relaciona o comprimento de um segmento de reta, que chamaremos de ρ, com o ângulo θ determinado pelo segmento de reta BD. Em coordenadas polares, (r, θ), podemos escrever que $\rho = k\theta$ com $k \in \mathbb{R}^+$.

Como A e D pertencem a espiral, vem que $BA = k\theta_1$ e $BD = k\theta_2$, sendo θ_1 o ângulo $A\hat{B}C$ e θ_2 o ângulo $D\hat{B}C$.

Mas, o ponto E é de tal forma que $BA = 3BE = 3BD$, já que BD também pertence a circunferência. Então,

$$k\theta_1 = 3k\theta_2,$$

ou seja,

$$\theta_2 = \frac{\theta_1}{3}.$$

Portanto, conclui-se que o ângulo $D\hat{A}B$ é $\frac{1}{3}$ do ângulo $A\hat{B}C$.

Por um processo análogo pode-se obter a multisseção de um ângulo qualquer. Bastando para tanto dividir o segmento AB em tantas partes quantas forem desejadas, ou seja, se tomarmos a igualdade $BA = n \cdot BE = n \cdot BD$ teremos que $\theta_2 = \frac{\theta_1}{n}$.

2.5 A trissectriz de Hípias

Outra forma de trissectar ângulos sem o uso de instrumentos euclidianos, é a utilização da Trissectriz de Hípias, uma curva mecânica determinada através do movimento simultâneo de dois segmentos distintos já apresentada no capítulo 1, seção 2, para a quadratura.

É importante salientar que assim como a Espiral de Arquimedes, a Trissectriz de Hípias, por ser descrita pela interseção de dois movimentos, um linear e outro circular, transforma a proporcionalidade entre ângulos em uma proporcionalidade entre segmentos. Logo, qualquer ângulo que for inserido na construção, com vértice em A, e intersectar a curva em um ponto que chamaremos de Z, determinará sobre o lado AD um segmento que ser for trissectado, transporá sua trissecção ao ângulo dado.

Teorema 2.5.1. *Sejam $X\hat{A}B$ um ângulo qualquer com o lado AB coincidindo com o lado AB do quadrado e Z a interseção do lado AX com a curva trissectriz. Seja PB_3 o segmento de reta paralelo ao lado AB passando por Z, onde P é a interseção da reta com o lado AD. Considere agora P_1 tal que $AP_1 = \frac{1}{3}AP$ e seja o segmento de reta paralelo ao lado AB passando por P_1, intersectando a trissectriz em L. Então o ângulo $L\hat{A}B$ é a terça parte do ângulo $X\hat{A}B$ dado.*

Demonstração: Sejam R e S pontos pertencentes a interseção do arco de circunferência $\overset{\frown}{BD}$ com as retas suporte do segmentos AL e AZ e B_1, B_3 as intersecções do lado BC com as retas P_1L e PZ respectivamente, conforme a figura 2.12 a seguir.

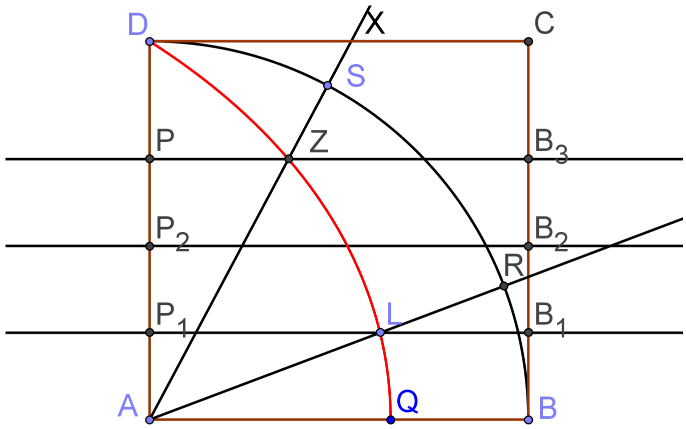

Figura 2.12: Trissecção por Hípias.

As retas P_1B_1 e AR intersectam a curva trissectriz em L e PB_3 e AX intersectam a mesma curva em Z. Pela proporcionalidade dos movimentos, podemos escrever que,

$$\frac{AP}{AP_1} = \frac{\overset{\frown}{SB}}{\overset{\frown}{RB}}$$

e como a amplitude de um ângulo ao centro é igual a amplitude do arco compreendido entre seus lados tem-se que

$$\frac{\overset{\frown}{SB}}{\overset{\frown}{RB}} = \frac{Z\hat{A}B}{L\hat{A}B}.$$

Como

$$AP = \frac{AP_1}{3}$$

vale

$$L\hat{A}B = \frac{1}{3} Z\hat{A}B.$$

■

Assim como abordamos no item anterior quando trabalhamos a trissecção com a espiral de Arquimedes, o raciocínio é análogo com relação a multisseção de ângulos para a trissectriz de Hípias. Isto é, se dividirmos AP em n partes, o ângulo $Z\hat{A}B$ também ficará dividido em n partes.

Capítulo 3

A DUPLICAÇÃO DO CUBO

Com relação as origens desse famoso problema existe uma lenda que conta que em 429 a.C. Péricles morrera de peste juntamente com um quarto da população de Atenas. Consternados por essa enorme perda, os habitantes consultaram o oráculo de Apolo em Delos, pequena ilha grega no mar Egeu, sobre como combater a doença. A resposta foi que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado.

Prontamente, os atenienses dobraram as dimensões do altar, mas isso não afastou a peste pois com a duplicação da aresta, o volume ficou multiplicado por oito e não por dois.

Devido a essa história, dada a aresta de um cubo, construir só com régua não graduada e compasso a aresta de um segundo cubo tendo o dobro do volume do primeiro, ficou conhecido como problema deliano, ou simplesmente, o problema da duplicação do cubo.

Diferentemente dos outros dois problemas abordados anteriormente, a primeira vista, este parece ser de ordem espacial e não plana, pois há uma relação entre volumes de dois cubos. Porém o que se deseja na verdade é, dado um segmento de reta a, aresta de um cubo de volume a^3, determinar a aresta de um segundo cubo de volume $2a^3$, ou seja, um cubo de aresta $a\sqrt[3]{2}$, portanto um problema de ordem plana.

É possível também que tal problema tenha vindo de duplicação do quadrado. Sabiam os Pitagóricos que para duplicar a área um quadrado, era suficiente que dado um quadrado de lado a, bastava tomar a sua diagonal, ou seja $a\sqrt{2}$, como lado do novo quadrado e sua área estaria duplicada (CAJORI, 2007). Então é natural transpor este problema da geometria plana para a geometria espacial, ou seja, do quadrado para o cubo.

A impossibilidade da duplicação do cubo com instrumentos euclidianos, também faz parte do trabalho de Wantzel, citado anteriormente. A idéia da não duplicação do cubo parte do princípio que se o cubo dado tiver uma aresta de comprimento unitário, seu volume será uma unidade cúbica, ou seja, se $a = 1$, $V_1 = 1^3 = 1$. Então é necessário encontrar a aresta de um cubo com o dobro deste volume. A aresta exigida x, satisfará a seguinte equação cúbica.

$$\begin{aligned} V_2 = x^3 &= 2.V_1 = 2.1 = 2 \\ x^3 &= 2 \\ x^3 - 2 &= 0 \qquad (3.1) \end{aligned}$$

A proposição 1 a seguir mostrará que a equação (3.1) não possui raízes racionais e portanto, pelos teoremas 2.0.2 e 2.0.3, x não pode ser construído com régua e compasso.

Preposição 1. *A equação $x^3 - 2 = 0$ não possui raízes racionais.*

Demonstração: Suponhamos que o número x procurado para a aresta, seja um número racional $\frac{a}{b}$, com $mdc(a, b) = 1$ e raiz da equação $x^3 - 2 = 0$.

Pelo teorema 2.0.2, a é divisor de -2 e b é divisor de 1. Logo os possíveis valores para a são $\{-2, -1, 1, 2\}$ e para b são $\{-1, 1\}$. Assim $\frac{a}{b}$ pode assumir os seguintes valores $\{-2, -1, 1, 2\}$.

Mas nenhum destes números é raiz, pois as igualdades $(-2)^3 - 2 = 0$, $2^3 - 2 = 0$, $(-1)^3 - 2 = 0$ e $1^3 - 2 = 0$ são todas falsas.

Portanto, $x^3 - 2 = 0$ não tem raízes racionais e pelo teorema 2.0.3, a aresta x não pode ser construída somente com régua e compasso.

■

As soluções da duplicação do cubo, vêm da redução de Hipócrates. A redução de Hipócrates está para a duplicação do cubo, assim como as construções por nêusis estão para a trissecção do ângulo, ou seja, transforma o problema dado em outro, ampliando suas possibilidades de resolução e até simplificando o trabalho de forma substancial.

3.1 A redução de Hipócrates

Hipócrates, já na metade do século V a.C., buscava soluções para o problema da duplicação do cubo. A ideia de Hipócrates é que se entre dois segmentos de reta, onde o maior é igual ao dobro do menor, se inscreverem duas médias proporcionais, o cubo ficará duplicado. Na verdade, o que se propõe é reduzir o problema de encontrar o segmento que duplica o cubo, utilizando instrumentos euclidianos, em encontrar tal proporção.

A afirmação de Hipócrates é que, dado um cubo de aresta a, devemos determinar dois segmentos x e y de tal forma que $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}$, ou seja, se encontrarmos tais segmentos, o cubo ficará duplicado na razão $\frac{b}{a}$.

Igualando duas das razões da proporção da redução de Hipócrates temos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y}.$$

Aplicando a propriedade básica das proporções e reorganizando a equação segue que

$$y = \frac{x^2}{a}. \tag{3.2}$$

Tomando a outra proporção e repetindo o processo segue que

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b}$$
$$ab = xy. \tag{3.3}$$

Substituindo a equação (3.2) em (3.3) temos:

$$ab = \frac{x^3}{a} \Leftrightarrow x^3 = a^2 b,$$

ou seja,

$$x^3 = \frac{b}{a} a^3.$$

Em particular, para a duplicação do cubo, temos o caso particular onde os segmentos a e b, são de tal forma que b é o dobro de a, ou seja, $b = 2a$.

Portanto, reescrevendo a proporção, encontramos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Isto é,

$$x^3 = 2a^3.$$

Desta forma, x é a aresta do cubo que possui o dobro do volume do cubo de aresta a, isto é, a razão entre seus volumes é $\frac{1}{2}$.

É possível que a ideia de propor a duplicação do cubo determinando duas médias proporcionais, tenha forte relação com a duplicação do quadrado.

Seja um quadrado de lado a. Unindo dois destes quadrados, obtemos um retângulo de lados a e $2a$ conforme a figura (3.1). O objetivo é quadrar o retângulo obtido, determinando para isso um novo quadrado de lado x, onde x é a média proporcional entre a e $2a$.

Então:

$$x^2 = 2a^2$$

Ou seja,

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{2a}$$

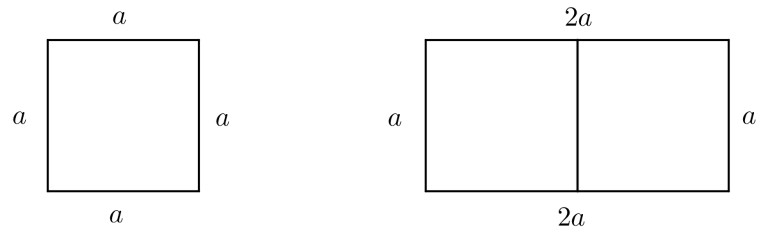

Figura 3.1: Retângulo com área igual ao dobro do quadrado.

Mostra-se desta forma que a área do quadrado de lado x é o dobro da área do quadrado de lado a.

Especula-se que, por um raciocínio análogo, Hipócrates tenha obtido a inspiração para proceder a duplicação do cubo através da determinação das duas médias proporcionais.

Pois tomando um cubo de aresta a e unindo dois destes, temos um paralelepípedo de volume duplicado e de dimensões a, a e $2a$, conforme ilustra a figura (3.2).

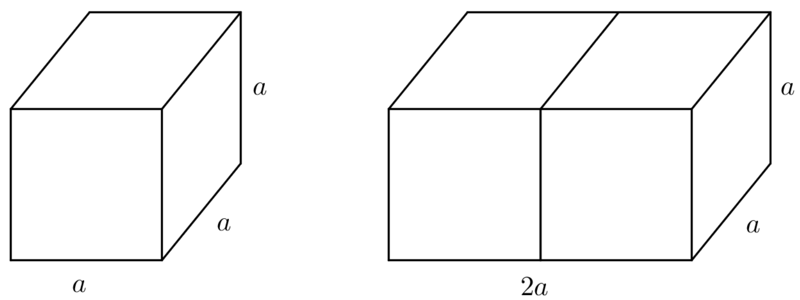

Figura 3.2: Paralelepípedo com volume igual ao dobro do cubo.

Determinemos então um outro paralelepípedo de mesmo volume do anterior, com a mesma altura a e uma das dimensões da base x, que posteriormente será a aresta do novo cubo que desejamos obter. Fica claro que também precisamos definir a segunda dimensão da base que por hora chamaremos de y, conforme a figura (3.3) que segue. Do exposto anteriormente temos:

$$xy = 2a^2$$

Ou ainda,

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{2a} \tag{3.4}$$

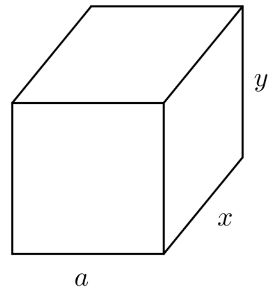

Figura 3.3: Paralelepípedo com volume igual ao dobro do cubo.

De maneira análoga, vamos transformar o paralelepípedo (a, x, y) em um cubo de aresta x, conforme figura (3.4), fazendo:

$$ay = x^2$$

ou

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} \tag{3.5}$$

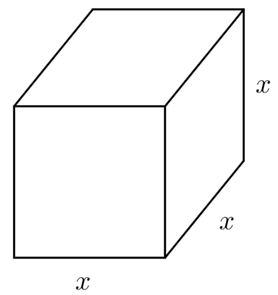

Figura 3.4: Cubo com volume duplicado.

Das equações (3.4) e (3.5) vêm que:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

Assim, Hipócrates mostrou que podia-se reduzir o problema da duplicação do cubo ao de determinar duas médias proporcionais entre dois segmentos dados.

3.2 A solução de Arquitas

Arquitas, contribuiu com uma solução do problema fornecendo uma solução tridimensional, embora sem o uso de coordenadas, que hoje facilitam seu entendimento por meio da geometria analítica, conforme descrevemos a seguir.

Seja a a aresta do cubo a ser duplicado e seja $(a, 0, 0)$ o centro de três circunferências mutuamente ortogonais de raio a e cada uma situado num plano perpendicular a um eixo coordenado.

É de extrema importância nesse momento que se faça adequadamente a escolha do posicionamento dos eixos coordenados, afim de facilitar a disposição dos sólidos envolvidos na solução do problema.

Assim, faremos o eixo OX coincidir com o diâmetro da circunferência situada no plano XY. O eixo OY ficará então tangente à circunferência citada anteriormente. Por fim, o eixo OZ, na interseção e perpendicular aos dois descritos anteriormente.

Sobre a circunferência perpendicular ao eixo Ox construa um cone circular com vértice em $(0, 0, 0)$ e de raio da base $a\sqrt{3}$, quando $x = a$ (equação 3.6); sobre a circunferência do plano XY, construa um cilindro circular reto de raio da base $r = a$ e centro em $(a, 0, 0)$ (equação 3.7); seja agora a circunferência de raio $r = a$ e centro em $(a, 0, 0)$ no plano XZ girando em torno do eixo OZ para gerar um toro (equação 3.8). Abaixo apresentamos as equações cartesianas das superfícies descritas acima lembrando que conforme a redução de Hipócrates devemos ter necessariamente $b = 2a$.

$$C : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \tag{3.6}$$

$$T : bx = x^2 + y^2 \tag{3.7}$$

$$V : x^2 + y^2 + z^2 = b\sqrt{x^2 + y^2} \tag{3.8}$$

Teorema 3.2.1. *Seja $P = (x, y, z)$, onde P é obtido por $C \cap T \cap V = \{P\}$, então a abscissa x é tal que vale $a\sqrt[3]{2}$.*

Demonstração: A prova que segue, usa como argumento a redução de Hipócrates descrita anteriormente. O que faremos é organizar as equações dos sólidos descritas acima de forma a encontrar as médias proporcionais determinadas por Hipócrates.

Podemos reescrever a equação (3.8) como

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^2 = b\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Desta forma obtemos:

$$\frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{b}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{3.9}$$

Substituindo a equação (3.7) em (3.6) temos:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{(x^2 + y^2)^2}{a^2}$$

ou

$$\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2}{a}$$

ou ainda

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \tag{3.10}$$

Das equações (3.9) e (3.10) obtemos:

$$\frac{b}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a} \tag{3.11}$$

Sejam então A a origem do sistema cartesiano, X a intersecção dos três sólidos e I a projeção de X no plano XY. Assim, $AX = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e $AI = \sqrt{x^2+y^2}$.

Voltando a equação (3.11) temos:

$$\frac{b}{AX} = \frac{AX}{AI} = \frac{AI}{a}$$

■

3.3 As soluções de Menecmo

Menecmo[1], notável por seus estudos sobre cônicas, que são curvas obtidas com a intersecção do cone com um plano, conseguiu determinar os dois meios proporcionais, descritos por Hipócrates, através da intersecção destas.

A redução de Hipócrates, se resume a determinar dois valores x e y, meios proporcionais entre a e $2a$ usando a igualdade:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$$

E utilizando a geometria analítica, podemos retirar as seguintes equações:

Parábola com reta diretriz paralela ao eixo OX;

$$x^2 = ay \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{a}$$

Hipérbole equilátera com assíntotas sobre os eixos cartesianos;

$$xy = 2a^2 \Leftrightarrow y = \frac{2a^2}{x}$$

Parábola com reta diretriz paralela ao eixo OY.

$$y^2 = 2ax \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{2a}$$

[1]Menecmo (380 a.C. à 320 a.C.) foi um matemático e geômetra grego. Nasceu em Alopeconnesus (atualmente a Turquia). Irmão de Dinostrato.

Com as três curvas acima, fazendo a intersecção, duas a duas, obtemos a abscissa que dá a solução para a duplicação do cubo, ou seja, o segmento que tem comprimento igual a $a\sqrt[3]{2}$. Seguem as intersecções abaixo:

i. Primeira solução de Menecmo, ilustrada pela figura (3.5):

   Intersecção entre a parábola $y = \dfrac{x^2}{a}$ com a hipérbole equilátera $y = \dfrac{2a^2}{x}$.

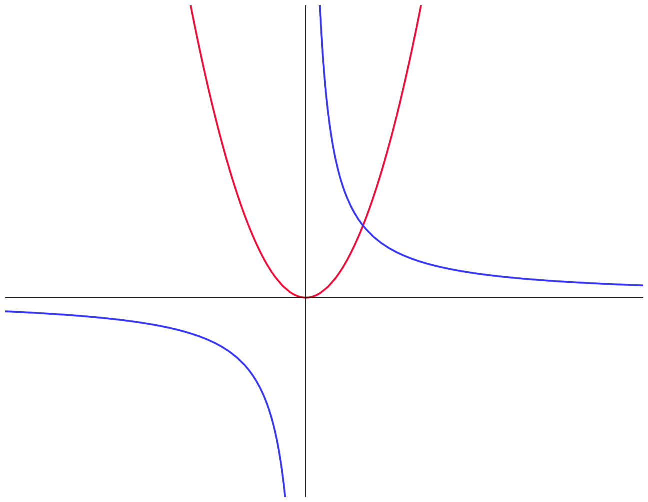

Figura 3.5: Intersecção entre parábola e hipérbole.

ii. Segunda solução de Menecmo, ilustrada pela figura (3.6):

   Intersecção entre a parábola $y = \dfrac{x^2}{a}$ e a parábola $x = \dfrac{y^2}{2a}$.

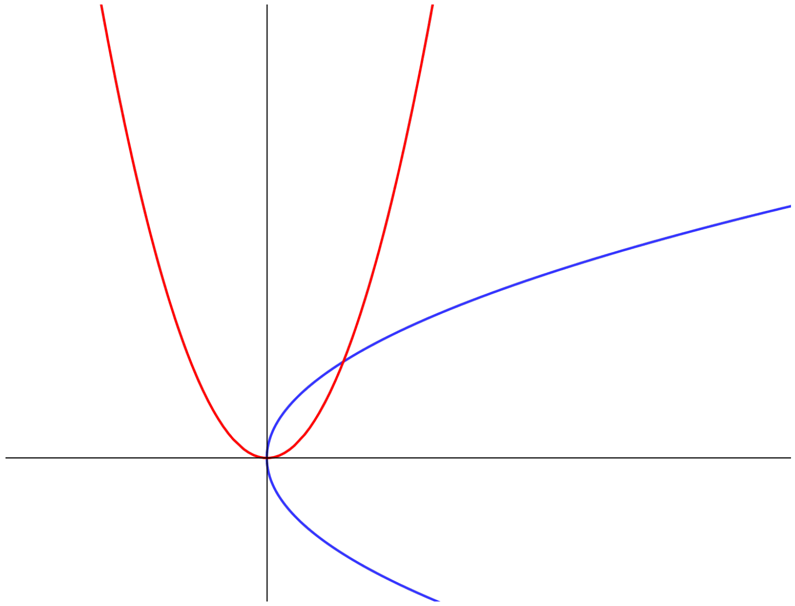

Figura 3.6: Intersecção de duas parábolas.

É fácil ver que ao igualarmos as equações das curvas obtemos em ambos os casos $x^3 = 2a^3$ e embora hoje sejam imediatas, há de se lembrar que a geometria analítica teve seu desenvolvimento no século XVII, com René Descartes[2], e portanto, Menecmo debruçou-se sobre as propriedades das curvas para obter tais soluções.

3.4 A solução (atribuída) a Platão

Existem indícios, numa citação de Eutócio[3], que Platão, tivesse encontrado uma solução mecânica para a duplicação do cubo, através da inserção de dois meios proporcionais. Porém, há também contradições sobre esta autoria pelo fato de Platão rejeitar soluções mecânicas, sob o argumento de destruir a virtuosidade da geometria. Podendo ainda a solução ter sido encontrada por seus discípulos.

A solução se dá através da utilização de um instrumento, chamado de esquadro de Platão, composto de três réguas, sendo duas delas paralelas entre si e uma terceira perpendicular às duas anteriores. Uma das paralelas desloca-se sobre a perpendicular, procurando os meios proporcionais desejados.

A solução mecânica, atribuída a Platão, consiste em, a partir de duas retas perpendiculares entre si, AB e BC, entre as quais pretendemos encontrar os dois meios proporcionais, segundo a redução apresentada por Hipócrates, construir triângulos semelhantes de tal forma que se obtenha $\dfrac{BC}{BD} = \dfrac{BD}{BE} = \dfrac{BE}{AB}$ conforme ilustrado pela figura (3.7) abaixo. Pensando no problema da duplicação, já iniciaremos o problema considerando o caso particular em que AB é o dobro de BC, ou seja, $AB = 2a$ e $BC = a$.

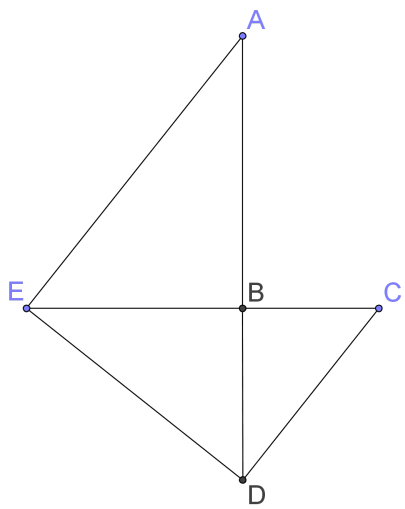

Figura 3.7: Esquema de Platão para a duplicação do cubo.

[2]René Descartes (1596-1650) filósofo, físico e matemático francês.

[3]Eutócio de Ascalão (480 à 540). Matemático grego que escreveu comentários sobre vários tratados de Arquimedes e sobre a "Cônica" de Apolônio.

Teorema 3.4.1. *Sejam os triângulos EDC e AED, retos, respectivamente em D e E, tal que o lado ED é comum a ambos. As hipotenusas dos triângulos em questão se intersectam em B também sob um ângulo reto. Se $BC = a$ e $AB = 2a$, os segmentos BD e DE são as médias proporcionais que satisfazem a redução de Hipócrates, ou seja, BD é a aresta que duplica o volume do cubo.*

Demonstração: É fácil ver que os triângulos BCD, BDE e AEB são semelhantes entre si já que todos possuem ângulos retos.

E portanto,

$$B\widehat{C}D + C\widehat{D}B = 90^o \text{ e } B\widehat{D}E + C\widehat{D}B = 90^o$$

Daí,

$$B\widehat{C}D = B\widehat{D}E \tag{3.12}$$

Temos ainda:

$$A\widehat{E}B + B\widehat{E}D = 90^o \text{ e } B\widehat{D}E + B\widehat{E}D = 90^o$$

Logo,

$$A\widehat{E}B = B\widehat{D}E \tag{3.13}$$

Das equações (3.12) e (3.13) temos,

$$B\widehat{C}D = A\widehat{E}B = B\widehat{D}E$$

Portanto, dos triângulos BCD e BDE temos:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE} \tag{3.14}$$

Dos triângulos BDE e ABE temos:

$$\frac{BE}{AB} = \frac{BD}{BE} \tag{3.15}$$

De (3.14) e (3.15) obtem-se,

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{AB} \text{ ou } \frac{a}{BD} = \frac{BD}{BE} = \frac{BE}{2a}.$$

■

A utilização do esquadro se dá da seguinte maneira:

Inicia-se traçando duas retas perpendiculares, que se intersectam em um ponto B, entre as quais se deseja inserir os dois meios proporcionais. Marca-se sobre uma das retas o ponto A e na outra o ponto C, tal que $2BC = AB$. Importante atentar-se ao fato que $BC = a$, onde a é a aresta do cubo que desejamos duplicar.

Manipula-se o esquadro de modo que cada uma das réguas paralelas intersecte as duas retas perpendiculares traçadas no pontos A e E, C e D respectivamente. Os segmentos BC e BD, conforme demonstrado anteriormente, são os meios proporcionais procurados e BD é a aresta x do cubo de volume duplo.

3.5 O mesolábio de Eratóstenes

Eratóstenes[4], não está somente ligado ao problema da duplicação de cubo pelo simples fato de tê-lo descrito, como está também associado a uma solução que se utiliza da ideia da redução de Hipócrates, ou seja, de determinar os dois meios proporcionais, com o uso de um instrumento mecânico conhecido como Mesolábio de Eratóstenes. Tal instrumento fora descrito por Papus em seu Livro III da Coleção Matemática e por Eutócio no comentário do Livro II do tratado da Esfera e do Cilindro.

O Instrumento é composto por uma base em forma de um retângulo $ABCD$ e de três triângulos congruentes, conforme ilustrado pela figura (3.8) abaixo. Um deles é fixo, e os outros dois deslizantes sobre as bases do retângulo. É necessário, inclusive que, durante o processo, que os triângulos em algum momento se sobreponham.

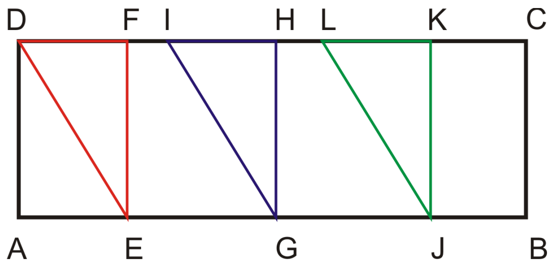

Figura 3.8: Esquema de Eratóstenes.

Na verdade, desejamos que, dado um retângulo onde um lado mede $AD = 2a$, ou seja, igual ao dobro da medida da aresta do cubo que se deseja duplicar, e um ponto médio M em KJ, com uma reta passando por D e M e intersectando AB em P, encontrar os pontos N e O resultado das intersecções dos segmentos JL com GH e GI com EF, respectivamente. Os segmentos GN e EO são respectivamente x e y que procuramos como médias proporcionais, e assim x é a aresta do cubo duplicado. O esquema deste processo esta representado no esquema da figura (3.9) abaixo.

[4]Eratóstenes de Cirene (276 a.C. à 196 a.C.). Estudou em Alexandria, no Egito, e depois em Atenas, retornando a Alexandria em 255 a.C., onde se estabeleceu. Escreveu sobre matemática, astronomia, geografia, história e fez críticas literárias.

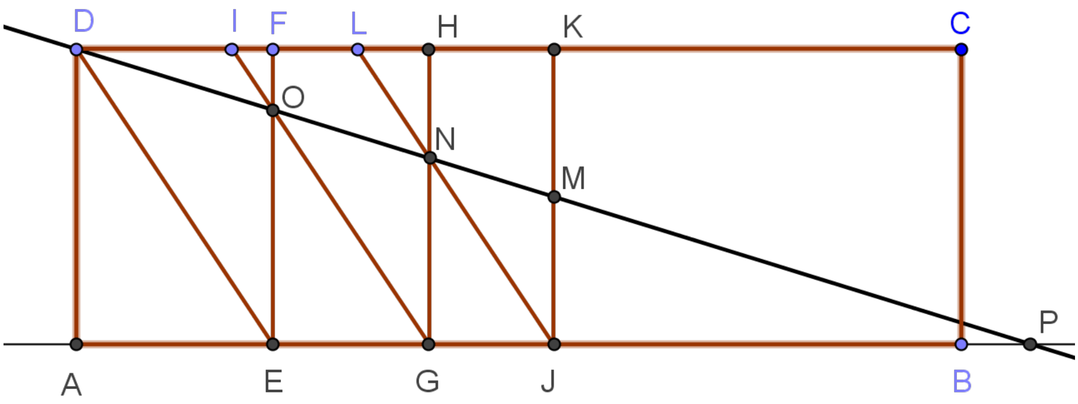

Figura 3.9: Utilização do Mesolábio de Eratóstenes.

Teorema 3.5.1. *Seja um retângulo $ABCD$, com o lado $AD = 2a$. Sejam ainda três triângulos retângulos com um de seus catetos, paralelos a AD, medindo $2a$ e um ponto médio M, sobre o cateto do triângulo mais afastado de AD. Uma reta que une M ao vértice D determina na interseção dos triângulos os pontos N e O que por sua vez determinam os segmentos que verificam a redução de Hipócrates.*

Demonstração: Por construção, $AB//CD$ e $EF//GH//JK$. Logo, os ângulos $A\hat{D}P$ e $E\hat{O}P$, $G\hat{N}P$ e $J\hat{P}M$ são congruentes, por serem ângulos correspondentes. Da mesma forma $D\hat{A}P$ e $O\hat{E}P$, $N\hat{G}P$ e $M\hat{J}P$ também são. Portanto, pelo caso de semelhança AA, ângulo-ângulo, podemos dizer que os triângulos PDA, PMJ, PNG e POE são semelhantes e em consequência disso podemos afirmar que os ângulos $M\hat{P}J$, $N\hat{P}G$, $O\hat{P}E$ e $D\hat{P}A$ também são congruentes. Por outro lado, se $DE//IG//LJ$, então os ângulos $D\hat{E}P$, $O\hat{G}P$ e $N\hat{J}P$ também são congruentes. Pelo exposto, os triângulos DEP, OGP e NJP são semelhantes. Então:

Da semelhança entre os triângulos PMJ e PNG obtemos:

$$\frac{MJ}{NG} = \frac{PJ}{PG} \tag{3.16}$$

Entre os triângulos NJP e OGP:

$$\frac{PJ}{PG} = \frac{NJ}{OG} \tag{3.17}$$

e

$$\frac{NJ}{OG} = \frac{PN}{PO} \tag{3.18}$$

Entre NPG e OPE:

$$\frac{PN}{PO} = \frac{NG}{OE} \tag{3.19}$$

e

$$\frac{NG}{OE} = \frac{PG}{PE} \tag{3.20}$$

Entre PGO e PDE:

$$\frac{PG}{PE} = \frac{OG}{DE} \tag{3.21}$$

e

$$\frac{OG}{DE} = \frac{PO}{PD} \tag{3.22}$$

Entre POE e PDA:

$$\frac{PO}{PD} = \frac{OE}{DA} \tag{3.23}$$

Encadeando as igualdades de (3.16) a (3.23) obtemos:

$$\frac{MJ}{NG} = \frac{PJ}{PG} = \frac{NJ}{OG} = \frac{PN}{PO} = \frac{NG}{OE} = \frac{PG}{PE} = \frac{OG}{DE} = \frac{PO}{PD} = \frac{OE}{DA}$$

Tomando o que é de nosso interesse:

$$\frac{MJ}{NG} = \frac{NG}{OE} = \frac{OE}{DA}$$

Chamando agora $MJ = a$, $NG = x$, $OE = y$ e $DA = 2a$, escrevemos:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Portanto ficam determinadas assim as médias proporcionais x e y que duplicam o cubo.

■

3.6 A conchóide de Nicomedes

A solução de Nicomedes, também recorre a procura dos dois meios proporcionais, descritos na Redução de Hipócrates, por meio de uma construção por nêusis. Nicomedes faz uso de sua curva, a Conchóide, já descrita neste trabalho no capítulo 2, seção 2, para solucionar a duplicação do cubo.

O processo, desenvolvido por Nicomedes, é o seguinte:

Sejam dadas duas retas perpendiculares entre si, AB e BC, entre as quais se pretende construir os dois meios proporcionais, neste caso, em particular, quando $AB = 2BC$. Completando-se o retângulo $ABCD$ e determinando os pontos médios E e F dos segmentos dos lados AB e BC, respectivamente. Partindo de D, traça-se uma reta passando por E e encontrando o prolongamento de BC em um ponto G. Com uma perpendicular partindo de F, determina-se o ponto H, distante de C uma distância igual ao segmento AE. Unindo G a H, e paralelo a este segmento uma reta passando por C. Obtém-se então, o ponto I, sobre a reta traçada por C.

A conchóide será traçada com pólo em H, com o ponto I percorrendo a reta que passa por C e é paralela ao segmento GH e com sua constante de comprimento igual a AE. A Conchóide irá intersectar o prolongamento da reta BC num ponto designado por J.

Assim, com uma construção por nêusis, após a determinação de J, fica inserido entre as retas EC e CI, um segmento de reta com comprimento igual a AE apontando pra H. O ponto I fica situado sobre o segmento H e J.

Pela propriedade das conchóides,$IJ = HC = AE$.

Afim de obter a duplicação do cubo, devemos unir J a D prolongando o segmento até a intersecção com a reta AB determinando o ponto K. Os meios proporcionais desejados são CJ e AK e a proporção fica assim determinada:

$$\frac{AB}{CJ} = \frac{CJ}{AK} = \frac{AK}{BC}.$$

Enunciaremos o seguinte lema, que encontra-se no Livro II dos Elementos de Euclides, que nos ajudará a mostrar que a conchóide de Nicomedes duplica o cubo.

Lema 3. *(Proposição 4, Livro II - Elementos de Euclides.) Tome um segmento AB bissectado num ponto C, e tome um segmento BD, no prolongamento de AB. Podemos dizer que o retângulo $ADBD$ adicionado com o quadrado CB é equivalente ao quadrado CD.*

Demonstração: A figura (3.10) abaixo, auxilia no entendimento e na demonstração deste lema.

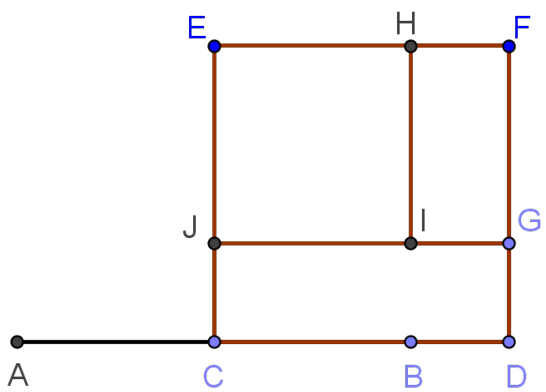

Figura 3.10: Proposição 4, Livro II - Elementos de Euclides.

A proposição, nos dias atuais, é conhecida como o quadrado da soma, ou seja, $(a+b)^2$.

Com efeito, o quadrado CD é equivalente ao quadrado $CB + BD$.

Por hipótese, $AC = CB$. Por construção, na figura acima, $DG = BD = IG$, $FD = CD$ e $AC = CB = FG = IJ = IH$. Desta forma, o retângulo $AD \cdot BD$ é equivalente a soma dos retângulos $CBDG$ e $IGDG$. Como o quadrado $CDFE$ é composto pelo quadrado $JIHE = CB^2$, pelos retângulos $CBIJ$ e $IGFH$, e o quadrado $BDGI$, temos que $CD^2 = AD \cdot BD + CB^2$.

■

Teorema 3.6.1. *A Conchóide de Nicomedes duplica o cubo.*

Demonstração: Observando a figura (3.11) abaixo e com base no lema 3, temos que:

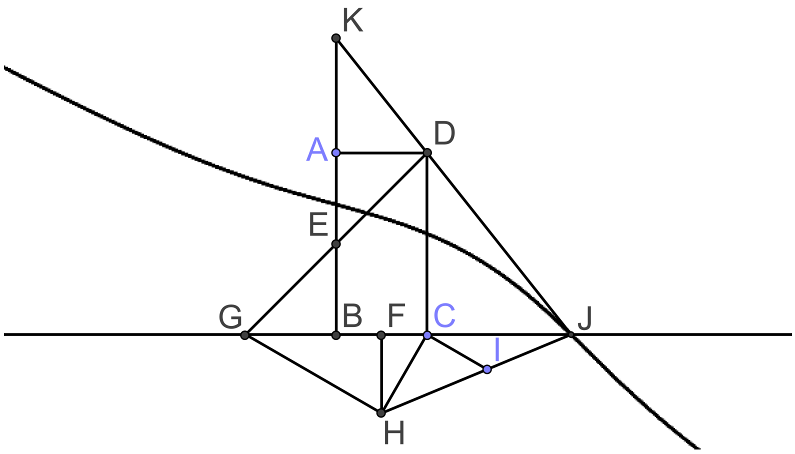

Figura 3.11: Conchóide de Nicomedes para a duplicação.

$$BJ \cdot CJ + FC^2 = FJ^2$$

Adicionando FH^2 a ambos os lados da igualdade obtemos:

$$BJ \cdot CJ + FC^2 + FH^2 = FJ^2 + FH^2$$

Do Teorema de Pitágoras temos que:

$$FJ^2 + FH^2 = HJ^2 \text{ e } FC^2 + FH^2 = HC^2 \text{ logo,}$$

$$BJ \cdot CJ + HC^2 = HJ^2 \tag{3.24}$$

Da semelhança entre os triângulos KAD e DCJ podemos escrever a proporção:

$$\frac{KA}{CD} = \frac{KD}{DJ} = \frac{AD}{CJ}$$

Mas por construção, $AD = BC$ e $CD = AB$, por serem lados paralelos do retângulo $ABCD$.

Daí:

$$\frac{KA}{AB} = \frac{BC}{CJ}$$

Ainda, $AB = 2AE$, já que E é ponto médio de AB e $BC = \frac{1}{2}GC$ uma vez que os triângulos ADE e EGB são côngruos e $BC = AD$. Portanto:

$$\frac{KA}{2AE} = \frac{\frac{GC}{2}}{CJ}$$

ou

$$\frac{KA}{AE} = \frac{GC}{CJ} \tag{3.25}$$

Agora, nos triângulos GHJ e CIJ que tem bases, GH e CI paralelas por construção, podemos aplicar o Teorema de Tales e obter:

$$\frac{GC}{CJ} = \frac{HI}{IJ} \tag{3.26}$$

Das equações (3.25) e (3.26) temos:

$$\frac{KA}{AE} = \frac{HI}{IJ} \tag{3.27}$$

Da igualdade (3.27) acima, vamos adicionar uma unidade a cada um dos lados da igualdade, ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{KA}{AE} + 1 &= \frac{HI}{IJ} + 1 \\
\frac{KA}{AE} + \frac{AE}{AE} &= \frac{HI}{IJ} + \frac{IJ}{IJ} \\
\frac{KA + AE}{AE} &= \frac{HI + IJ}{IJ} \\
\frac{KE}{AE} &= \frac{HJ}{IJ}
\end{aligned}$$

E por construção, $AE = IJ$. Logo $KE = HJ$, ou

$$KE^2 = HJ^2 \tag{3.28}$$

Retornemos ao lema (3) para escrever:

$$KE^2 = KB \cdot KA + AE^2 \tag{3.29}$$

Das equações (3.28) e (3.29)temos:

$$HJ^2 = KB \cdot KA + AE^2 \tag{3.30}$$

E das equações (3.24) e (3.30)temos:

$$BJ \cdot CJ + CH^2 = KB \cdot KA + AE^2$$

Mas $AE = CH$ por construção, logo:

$$\begin{aligned} BJ \cdot CJ + AE^2 &= KB \cdot KA + AE^2 \\ BJ \cdot CJ &= KB \cdot KA \\ \frac{CJ}{KA} &= \frac{KB}{BJ} \end{aligned}$$

Tomando os triângulos KBJ e DCJ encontramos:

$$\frac{KB}{BJ} = \frac{DC}{CJ}$$

e

$$\frac{CJ}{KA} = \frac{DC}{CJ} \tag{3.31}$$

Analogamente no triângulos KBJ e KAD temos:

$$\frac{KB}{BJ} = \frac{KA}{AD} \tag{3.32}$$

Logo das equações (3.31) e (3.32),

$$\frac{DC}{CJ} = \frac{CJ}{KA} = \frac{KA}{AD}$$

Portanto, como $AB = CD$ e $BC = AD$ concluímos:

$$\frac{AB}{CJ} = \frac{CJ}{KA} = \frac{KA}{BC},$$

Onde CJ e KA são as médias proporcionais procuradas. Assim a duplicação do cubo de aresta AB dada é determinada considerando-se $BC = 2AB$ e assim CJ será a aresta procurada.

■

3.7 A cissóide de Diócles

Embora Diócles[5], tenha vivido no século II a.C, e seus trabalhos já fossem conhecidos pelas citações de Eutócio. Sua descoberta para a duplicação do cubo fora traduzida para o inglês e publicada em um texto em árabe apenas em 1976. Diocles, soluciona o problema da duplicação do cubo usando mais um curva, chamada na era moderna de Cissóide.

Uma Cissóide em um caso geral, é definida da seguinte maneira:

Dadas C_1 e C_2 duas curvas quaisquer, A um ponto fixo e uma reta passando por A e intersectando C_1 e C_2 em Q e R, respectivamente. Determina-se P, sobre a reta traçada,

[5]Diócles de Caristos(240 a.C. à 180 a.C.) matemático e geômetra grego.

tal que $AP = QR$. O lugar geométrico descrito por P é a cissóide de C_1 e C_2 relativa ao ponto A.

No caso particular da Cissóide de Diócles, conforme a figura (3.12), a curva é determinada a partir de uma circunferência e uma reta tangente, onde o ponto fixo é o ponto diametralmente oposto ao ponto de tangência.

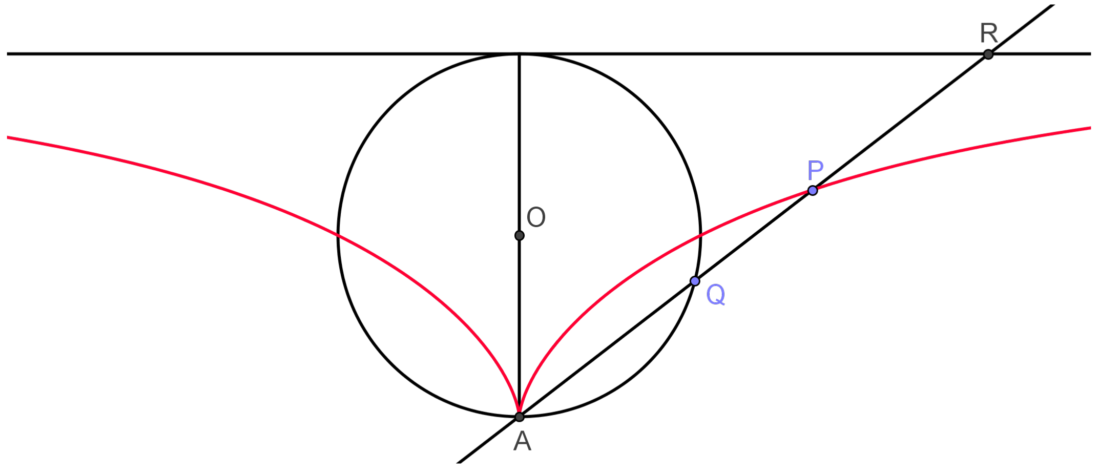

Figura 3.12: Cissóide de Diocles.

Diócles, construiu a sua curva, baseando-se apenas em um dos quadrantes da circunferência. Trata-se de traçar uma circunferência de centro O, e diâmetros perpendiculares AB e CD. Sejam E e F pontos da circunferência, equidistantes de B, ou seja, os arcos EB e BF tem o mesmo comprimento. Com segmentos perpendiculares a CD e passando por E e F, determina-se em CD os pontos G e H. O segmento EC, intersecta FH num ponto P. O lugar geométrico do ponto P, quando E percorre um quadrante da circunferência.

Desta forma, o ponto P conforme descrito e ilustrado pela figura (3.13) abaixo, permite provar que HF e HC são dois meios proporcionais entre os segmentos DH e HP.

Ou seja,

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP}$$

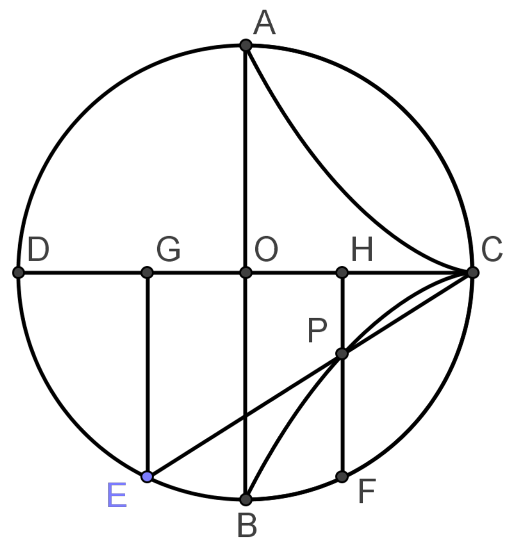

Figura 3.13: Utilização da cissóide de Diocles.

Teorema 3.7.1. *A Cissóide de Diócles duplica o cubo.*

Demonstração: Dos triângulos semelhantes DHF e HFC, podemos escrever:

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} \tag{3.33}$$

Ou seja, HF é a média proporcional entre DH e HC.

Da construção temos que os triângulos GEC e HFD são congruentes, já que $HF = GE$ e $DG = HC$.

Assim,

$$\frac{DH}{HF} = \frac{GC}{GE} \tag{3.34}$$

Também dos triângulos semelhantes GEC e HPC, encontramos:

$$\frac{GC}{GE} = \frac{HC}{HP} \tag{3.35}$$

Das equações (3.33), (3.34) e (3.35) vem:

$$\frac{DH}{HF} = \frac{HF}{HC} = \frac{HC}{HP}.$$

Assim, HF e HC são dois meios proporcionais inseridos entre DH e HP.

Desta forma, se tivermos $DH = 2HP$, com HP sendo a aresta a do cubo a se duplicar, então HC será a aresta x do cubo de volume duplo.

$\blacksquare$

CONCLUSÃO

Este trabalho teve a intenção de mostrar o quanto são importantes as construções geométricas e as soluções dos problemas advindos destas, além da importância das investigações para o encontro das soluções. Como disse Arquimedes em sua carta a Eratóstenes, muitas vezes a prova matemática não parecia possível, porém através de alguns experimentos ou construções, após a obtenção da solução do problema, a prova formal tornava-se mais evidente.(HEALT, 1912).

Desde os primórdios das civilizações, através dos problemas geométricos, incluindo os chamados clássicos, desenvolveu-se o saber matemático.

Toda e qualquer construção geométrica, que se deseje realizar, sobretudo as que utilizam meios mecânicos ou nêusis, faz com que o executor conheça não só de geometria, com suas definições, axiomas, lemas, teoremas, corolários e propriedades. É necessário também o conhecimento de álgebra, álgebra linear, geometria analítica, cálculo e todo o mais.

Fica evidente que grande parte do conhecimento relativo a Matemática que temos hoje, vem da junção de todas estas investigações que discutimos durante este trabalho. Soluções que aparentemente, após apresentadas, mostram-se tão simples, se multiplicam em raciocínios fantásticos. A partir de um problema, de um caminho para a solução, surgem resultados dos mais diversos. Problemas de geometria são resolvidos com muita álgebra, geometria analítica, cálculo. Embora os conceitos que justificam cada uma das construções sejam em sua grande maioria de extrema simplicidade, impressionam pela engenhosidade de cada uma delas.

Pretende-se que os conteúdos matemáticos aqui trabalhados sejam entendidos do modo mais claro possível, pois almejamos contribuir com este trabalho, para que a disciplina seja útil não apenas para os professores, mas para qualquer pessoa que se interesse pelo assunto.

Uma forma de introduzir os problemas aqui abordados no ensino básico, sobretudo no Ensino Médio, pode se dar em um primeiro momento, com o uso da espiral de Arquimedes, no problema da quadratura do círculo. Arquimedes propõe a equivalência de áreas entre o círculo e um triângulo retângulo, onde um dos seus catetos tem a medida da circunferência retificada e o outro a medida do raio. A busca pela medida deste cateto de forma experimental pode trazer um bom entendimento com relação aos números irracionais e também sobre as áreas do círculo e de polígonos.

Por fim, pode-se ainda, com o problema da duplicação do cubo, através da redução de Hipócrates, trabalhar com as proporções. A ideia é utilizar o processo de transformação de um cubo de volume unitário em dois paralelepípedos de volumes iguais ao dobro do cubo inicial até chegar ao cubo de volume duplicado. Uma problematização deste tipo pode ainda trazer um bom entendimento de geometria espacial, em especial da relação entre a proporção de arestas e volumes e também como na investigação do problema da quadratura do círculo, o conhecimento relativo ao conjunto dos números irracionais através da aproximação para $\sqrt[3]{2}$.

REFERÊNCIAS

ARTMANN, B. **Euclid:** the creation of mathematics. New York: Springer, 1999.

BALL, W. W. R. **A short account of the mathematics.** 4th ed. Mineola: Dover , 1908.

BOYER, C. B. **História da matemática.** São Paulo: Blücher, 1974.

CAJORI, F. **Uma história da matemática.** Rio de Janeiro: Ciência moderna, 2007.

EVES, H. **Introdução à história da matemática.** Campinas: UNICAMP, 1995.

HEALT, T. L., The method of Archimedes, In: HEALT, T. L. **The works of Archimedes.** New York: Dover, 1912.

ROQUE, T. **História da matemática:** uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana; CARVALHO, João B. P. **Tópicos de história da matemática.** Rio de Janeiro: SBM , 2012.

WAGNER, E. **Construções geométricas.** 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

WAGNER, E. Uma introdução às construções geométricas.[S.l.:s.n.], [2009?]. Disponível em: $< http : //www.obmep.org.br/docs/Apostila8 - construcoes_{g}eometricas.pdf >$. Acesso em: 10 abr. 2014.