Universidade do Estado do Rio de Janeiro
Centro de Tecnologia e Ciências
Instituto de Matemática e Estatística

Rejane Teixeira de Souza Floret

Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio

Rio de Janeiro
2014

Rejane Teixeira de Souza Floret

Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientadora: Profª. Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido

Rio de Janeiro

2014

CATALOGAÇÃO NA FONTE
UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

S634 Floret, Rejane Teixeira de Souza.
Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio / Rejane Teixeira de Souza Floret – 2014.
67 f. : il.
Orientadora: Cláudia Ferreira Reis Concordido.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.
1. Cálculo – Estudo e ensino – Teses. 2. Matemática – Ensino médio - Teses. I. Concordido, Cláudia F. R. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística. III. Título.
CDU 517

Rejane Teixeira de Souza Floret

Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 17 de abril de 2014.

Banca Examinadora:

Cláudia Ferreira Reis Concordido
Profª. Dra. Cláudia Ferreira Reis Concordido
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Jeanne Denise Bezerra de Barros
Profª. Dra. Jeanne Denise Bezerra de Barros
Instituto de Matemática e Estatística - UERJ

Walcy Santos
Profª. Dra. Walcy Santos
Instituto de Matemática - UFRJ

Rio de Janeiro

2014

DEDICATÓRIA

Ao meu esposo Helder, por se fazer presente em todos os momentos.

AGRADECIMENTOS

Ao meu esposo Helder, por estar sempre ao meu lado.

Aos meus pais, Reynaldo e Míriam, por toda torcida, incentivo e amor incondicional.

Aos meus amados sobrinhos Gabriel, Maria Luiza, Rafael e Pedro, por todos os momentos de alegria que sempre me proporcionam.

Aos meus familiares, em especial irmãos e cunhadas.

À minha orientadora Profª. Dra. Claudia Ferreira Reis Concordido, pela orientação competente.

Ao corpo docente do PROFMAT/UERJ por toda colaboração.

Aos funcionários da secretaria do IME/UERJ pela contribuição para esta pesquisa.

Aos amigos Francisco Eduardo e Geisa Corrêa.

Aos colegas do PROFMAT: Gabrielle Pinho, Ana Patricia e José Souto.

A Deus, pois sem Ele nada seria possível.

A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original.

Albert Einstein

RESUMO

FLORET, R. T. S. *Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio.* 2014. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

A presente dissertação tem o objetivo de propor a reinclusão de elementos de Cálculo no ensino médio, pois no passado o Cálculo fazia parte do currículo e foi abolido após uma reforma no ensino da matemática. O trabalho apresenta os resultados de um levantamento estatístico sobre os índices de reprovação na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I nos períodos mais recentes da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e, também, uma pesquisa quantitativa com quarenta professores de matemática com o objetivo de analisar a viabilidade do projeto e os problemas a serem enfrentados. Por fim, a dissertação conta com uma série de atividades comentadas sobre o tema de limites, que é o foco do trabalho. Tais atividades podem ser incluídas já no 1º ano do ensino médio, paralelamente ao conteúdo de funções, e visam proporcionar aos estudantes o contato com elementos de Cálculo em uma linguagem acessível, e orientar o professor nesta tarefa.

Palavras-chave: Ensino de matemática. Ensino médio. Cálculo Diferencial e Integral. Limite.

ABSTRACT

FLORET, R. T. S. *A proposal to introduce notions of Calculus in high school.* 2014. 67 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

This dissertation has the objective of proposing the reinclusion of Calculus elements in high school, because in the past Calculus was part of the curriculum and it was abolished after a reform in mathematics teaching. This paper presents the results of a statistical return about the rates of fails in the subject *Differential and integral Calculus I* in recent terms at Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) and also a quantitative research with forty mathematics teachers, which has the objective of analyzing the viability of the project and the problems to be faced. Finally, the dissertation has a series of discussed activities about the theme of limits, which is the focus of this paper. These activities can be included in the first year of high school, at the same time as functions content. They aim to offer students a contact with Calculus elements in an accessible language and also to orientate the teacher in this task.

Keywords: Mathematics teaching. High school. Differential and integral Calculus. Limit.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A motivação para este trabalho surgiu de um fato muito alardeado e preocupante, que são os altíssimos índice de reprovação na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, logo nos primeiros períodos da graduação. Estes índices estão relacionados a diversos fatores, dentre eles, podemos destacar a falta de embasamento teórico apresentada pelos discentes e a metodologia de ensino empregada nas universidades em relação ao ensino do Cálculo que, muitas vezes, prioriza a parte teórica em detrimento das aplicações práticas.

No início do século XX, Klein (1908, p.1, tradução nossa apud Gronbaek; Winslow, 2013, p.2) observou que os alunos enfrentam uma descontinuidade quando saem da escola e ingressam na universidade, que é primeira da "*double discontinuity*" por ele citada.

> O jovem estudante universitário encontrou-se, no início, confrontado com problemas que não sugerem, em qualquer espécie, as coisas com as quais ele se preocupou na escola. Naturalmente, ele se esqueceu dessas coisas de forma rápida e exaustiva.[1]

Diversos estudos têm sido feitos com foco no ensino da matemática. Muitos discentes demonstram dificuldades na compreensão dos conceitos matemáticos. Os conteúdos abordados em sala de aula não fazem sentido para muitos alunos e não contemplam aplicações práticas. Essas dificuldades não se limitam apenas aos conceitos básicos, uma vez que os conteúdos dessa disciplina se encadeiam e é necessária a compreensão de uns para o aprendizado dos assuntos seguintes. Esses estudos apontam que mudanças são necessárias no ensino de matemática.

A partir daí, a pesquisa procurou analisar o cenário escolar em relação ao ensino de Cálculo, e propor meios que permitam diminuir os problemas enfretados nestes níveis de ensino, com a introdução de noções de Cálculo no ensino médio.

No primeiro capítulo desta dissertação consta o referencial teórico onde a pesquisa está embasada. Nele citamos os principais autores que defendem a reinclusão de noções de cálculo no ensino médio e suas propostas. Fazemos, também, um breve relato histórico sobre ensino de Cálculo na educação básica, onde citamos as reformas e movimentos que culminaram na sua retirada desta etapa de ensino.

---

[1] O texto em língua estrangeira é: "The young university student found himself, at the outset, confronted with problems which did not suggest, in any particular, the things with which he had been concerned at school. Naturally he forgot these things quickly and thoroughly."

No segundo capítulo, apresentamos os resultados de um levantamento sobre os índices de reprovação na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I, nos perídos de 2011/1 a 2013/1 na Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ), que confirmaram as suspeitas que serviram de motivação para este trabalho. Este capítulo conta também com uma pesquisa realizada com professores de matemática, que foram inquiridos sobre a viabiladade da proposta e destacaram problemas para implementação da mesma.

No último capítulo estão propostas sete atividades que visam incluir já no início do ensino médio noções de Cálculo. As atividades propõem aplicações práticas do conceito de limites, através de problemas relacionados com outras áreas de conhecimento como a física, por exemplo, e também a utilização de matérias concretos e *softwares* matemáticos.

Assim, a presente dissertação tem o objetivo de defender a introdução de elementos de Cálculo no ensino médio com uma linguagem acessível, bem como apresentar ao docente atividades sobre o conceito de limite para auxiliá-lo nessa terefa.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

A área da matemática que hoje conhecemos como Cálculo Diferencial e Integral demorou séculos para ser formalizada. Muitos estudiosos deram suas contribuições para que a teoria fosse construída e, a partir desta, grandes questões da humanidade puderam, pouco a pouco, ser respondidas e esclarecidas. A necessidade de se estudar Cálculo Diferencial e Integral, assim como grande parte dos outros campos da matemática, é impulsionada pelo desejo de se resolver situações-problema.

Hoje, estas fazem parte das infinitas aplicações que temos para a disciplina e muitas estão inseridas no conteúdo programático do ensino médio. Porém, apenas alguns livros de ensino médio abordam o assunto e em poucas escolas esse conteúdo é lecionado, com o argumento de que é um conteúdo muito avançado para esta fase de ensino e que os programas de matemática, por serem muito longos, não possibilitariam a inserção de mais tópicos. Vários autores defendem que esta é uma ideia equivocada e que, fazendo uma reestruturação dos programas atuais, é possível fazer tal inclusão. O termo correto seria reinclusão pois o Cálculo já fez parte do ensino secundário brasileiro.

O Cálculo Diferencial e Integral foi incluído no currículo do ensino secundário no ano de 1890 através da Reforma Benjamin Constant. Esta reforma provocou profundas mudanças no sistema educacional brasileiro. Elaborada segundo as ideias de Augusto Comte, esta reforma intentava, entre outras coisas, introduzir uma formação científica em substituição à formação literária existente. Nesta proposta, foram contempladas, nos tópicos relativos à matemática, tanto a matemática aplicada, quanto a matemática discreta, tendo no 3° ano a cadeira de Cálculo Diferencial e Integral. Porém, o estudo do Cálculo era feito de um ponto de vista muito formal e não tinha ligação com o restante do curso. Assim, em 1900, houve a retirada do Cálculo Diferencial e Integral dos programas oficiais do ensino secundário.

Em alguns países europeus, no final do século XIX, existiu uma grande preocupação com relação ao ensino da matemática neste nível de ensino, baseando-se no fato de que a matemática ministrada nos cursos secundários estava em completo descompasso com as novas exigências do novo contexto sócio-político-econômico e também com a matemática universitária. Assim, em 1908, foi criada a Comissão Internacional de Ensino da Matemática, liderada pelo matemático Felix Klein. Os trabalhos do CIEM (Commission Internationale de L'Enseignement) mostraram a muitos países, inclusive ao Brasil, a necessidade da reformulação tanto do currículo, quanto da abordagem de determinados conteúdos.

Inspirado nas ideias de Félix Klein e do CIEM, o professor Euclides Roxo, diretor do Colégio Pedro II, que foi a primeira escola pública secundária da cidade do Rio de Janeiro, propôs uma mudança curricular no programa de matemática, que foi efetivada através de decreto em 1929. Apesar da mudança estar restrita ao Colégio Pedro II, esperava-se que outras instituições fossem atingidas, visto que este deveria ser o modelo para as outras escolas secundárias.

Este fato só aconteceu em 1931, com a Reforma Francisco Campos, que foi a primeira tentativa de estruturar todo o curso secundário nacional, e de introduzir nele os princípios modernizadores da educação. Por meio desta reforma ficaram estabelecidos definitivamente o currículo seriado, a frequência obrigatória, dois ciclos, um fundamental e outro complementar. As disciplinas matemáticas agora estavam unificadas sob o título de Matemática. No programa de Matemática, foi proposta a fragmentação de suas várias áreas, tendo sido enfatizadas a importância de suas aplicações, a introdução do conceito de função e noções do Cálculo Infinitesimal.

Entretanto, muitos fatores contribuíram para que esta proposta inovadora não tivesse o efeito desejado. Dentre eles, podemos citar a resistência, principalmente, por parte dos professores que, em geral, não se sentiam seguros para trabalhar a matemática de uma maneira tão diferente daquela a que estavam habituados e a inexistência, quase que total, de livros didáticos que contemplassem as ideias modernizadoras.

Em 1942, a Reforma Capanema dividiu o ensino secundário em dois ciclos: ginasial e clássico ou científico. De forma mais sintética, os conteúdos referentes ao Cálculo permaneceram nos programas regulares do científico.

No final dos anos 50 e início dos anos 60, houve um movimento denominado Matemática Moderna, que mudou consideravelmente o ensino da matemática no Brasil. Os defensores desse movimento acreditavam que era preciso modernizar o ensino e, assim, imprimir mais rigor e formalismo ao ensino da matemática. Esse movimento de modernização culminou na retirada de programas importantes do ensino, como a Geometria e o Cálculo.

Em 1961, a Lei de Diretrizes e Bases (LDB) estrutura a escola brasileira e ratifica a exclusão do Cálculo da escola secundária, situação que perdura até hoje.

O retorno do ensino de Cálculo ao ensino médio é uma questão que vem sendo levantada por alguns pesquisadores, dada a sua importância para as ciências e tecnologias modernas. Ávila faz uma colocação importante a respeito do tema, quando afirma que

> O Cálculo vem desempenhando um papel de grande relevância em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Portanto, descartá-lo no ensino é grave,

> porque deixa de lado uma componente significativa e certamente a mais relevante da matemática para a formação do aluno num contexto de ensino moderno e atual. (ÁVILA, 1991, p.2)

O autor afirma que o ensino de funções é feito com a introdução de muitas noções novas e exercícios pouco estimulantes que não aguçam a curiosidade do aluno, e defende que ideias elementares como o conceito de limite, derivada, razão incremental e declividade de uma reta possam ser elencadas de forma simples já no início do ensino médio, paralelamente, ao estudo das funções com aprendizado significativo e sem sobrecarregar o programa oficial de ensino de matemática. De acordo com ele,

> Para podermos mostrar ao aluno a importância do conceito de função, temos de ensinar-lhe os conceitos de derivada e integral e para que servem esses conceitos. À medida que vamos avançando com a apresentação de ideias, com o desenvolvimento de métodos relevantes no tratamento de problemas significativos, aí sim, vão surgindo, a cada passo, gradativamente, a necessidade de definições novas, e dessa maneira o ensino pode tornar-se interessante, o aluno se sentirá estimulado porque entende a razão de ser do que está aprendendo. (ÁVILA, 1991, p.5)

Segundo o autor, seria muito mais proveitoso que todo o tempo que hoje se gasta, no ensino médio, ensinando formalismo e longa terminologia sobre funções, que todo esse tempo fosse utilizado com o ensino das noções básicas do Cálculo e suas aplicações. Então, ao longo desse desenvolvimento, o ensino das funções seria feito no contexto apropriado, de maneira espontânea, progressiva e proveitosa.

Duclos defende que a matemática deve ser motivadora e não pode isolar-se, sob pena de ficar desinteressante. E afirma

> A Matemática é uma linguagem, e isolá-la das outras ciências é como ter o domínio de um idioma e não ter nada para dizer. Sem motivação, o estudante assimilará a Matemática a um simples quebra-cabeça, ou então a considerará apenas como uma modalidade de ginástica mental. (DUCLOS, 1992, p.27-28)

Em seguida, defende que o ensino de matemática deve partir do concreto para o abstrato e não o contrário.

> Acreditamos que generalizar antes de particularizar ou preceder a abstração ao concreto é contrário à boa pedagogia. Não podemos generalizar ignorando os casos particulares. Quem não conhece cães, gatos, tigres, leões, elefantes, etc, jamais poderá assimilar o conceito de mamífero. Do mesmo modo, quem não tem experiência física das variações lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, periódicas, etc, dificilmente poderá compreender a importância do estudo genérico das funções em Matemática. (idem)

O professor deve apenas sugerir a abstração, ela não deve ser ensinada, pois o aluno pode ser levado a decorá-la ao invés de deduzi-la.

Para permitir uma compreensão direta de ideias é importante que a abordagem inicial seja mais intuitiva do que dedutiva. Depois que o aluno estiver familiarizado com os elementos é que podemos partir para a Lógica Formal e as abstrações subsequentes.

Segundo Duclos (1992, p.28), "a criança fala antes de conhecer gramática, e não são conhecimentos profundos do idioma que fazem o literato. E comum o rigor desviar a pesquisa, inibindo a intuição. Muita gente confunde erudição com cultura."

Um obstáculo para o ensino de Cálculo no ensino médio é a falta de material didático apropriado, fator este que contribuiria de forma negativa para uma postura de maior aceitação do Cálculo no ensino médio por parte dos professores. Neste sentido, Ávila afirma que deveria existir, antes de tudo, uma nova postura dos professores autores de livros didáticos, para darem um pontapé inicial na aceitação da ideia de trabalhar elementos de Cálculo juntamente com o estudo das funções e comemora os avanços neste sentido quando diz:

> É gratificante constatar que alguns autores já estão incluindo a derivada em seus livros para o ensino médio, de maneira sensata, breve e equilibrada: mas, infelizmente, ainda na terceira série, já no final do curso, quando pouco se pode aproveitar desse estudo. (ÁVILA, 2006, p.37)

O retorno do Cálculo ao ensino médio é importante, pois permite corrigir um erro do passado quando os reformistas do ensino da matemática o retiraram do currículo na tentativa de modernizar o ensino.

Atualmente o Cálculo continua desempenhando um papel importante em todo o desenvolvimento científico-tecnológico. Ávila resume bem a importância do Cálculo no ensino médio:

> O Cálculo é moderno porque traz ideias novas, diferentes do que o aluno de 2.° grau encontra nas outras coisas que aprende em Aritmética, Álgebra, Geometria, Trigonometria e Geometria Analítica. Não apenas novas, mas ideias que têm grande relevância numa variedade de aplicações científicas no mundo moderno. Ora, o objetivo principal do ensino não é outro senão preparar o jovem para se integrar mais adequadamente à sociedade. Não se visa, com o ensino da Matemática no 2.° grau, formar especialistas no assunto. Ensina-se Matemática porque esta é uma disciplina que faz parte significativa da experiência humana ao longo dos séculos, porque ela continua sendo hoje, com intensidade ainda maior do que no passado, um instrumento eficaz e indispensável para os outros ramos do conhecimento. (ÁVILA, 1991, p.2)

Uma pequena abordagem sobre elementos de Cálculo Diferencial e Integral é feita em alguns livros didáticos de matemática do terceiro ano do ensino médio. Entretanto, o fato do conteúdo de Cálculo estar presente no livro didático de matemática e ele realmente fazer parte do currículo mínimo trabalhado pelo professor é algo que dependerá de múltiplos fatores. Muitas vezes, o assunto não é ensinado com o pretexto de que são "difíceis" para a compreensão dos alunos ou que o currículo de matemática não comporta a inclusão de mais um conteúdo.

Esta forma negativa de pensar sobre o Cálculo não está dissociada da realidade de ensino do Cálculo nos cursos universitários. Além de inúmeros outros fatores, as metodologias de ensino empregadas nas universidades em relação ao ensino do Cálculo contribuem em sua origem para que esta disciplina tenha um dos mais elevados índices de abandono. Segundo afirma Palis,

> Os cursos de Cálculo, principalmente o primeiro da sequência, apresentam índices absurdamente elevados de abandono e insucesso. Estes índices, por si só, já apontam a necessidade de se buscar alternativas de ação pedagógica que, aliadas a outras medidas, possam dar conta desse problema que, desde muitos anos, subsiste na universidade. (PALIS, 1995, p.22)

Sobre como o Cálculo é ensinado nos cursos superiores Franchi afirma:

> De modo geral, as aulas são expositivas. O centro do processo ensino-aprendizagem está no professor, que deve transmitir os conhecimentos matemáticos ao aluno. Os conteúdos são apresentados prontos, de forma inquestionável e pouco têm a ver com situações da realidade. São apresentadas definições, enunciados e teoremas que a seguir são demonstrados. Seguem técnicas de cálculos e exercícios.(FRANCHI, 1995, p.40)

O autor retrata o que provavelmente muitos professores de matemática já vivenciaram durante as licenciaturas quando, em seguida, acrescenta que

> A grande quantidade de matéria a ser exposta, faz com que a aula siga um ritmo acelerado, havendo pouco espaço para o aluno pensar. Este tem uma postura passiva em relação à aula. Espera participar apenas fazendo perguntas sobre algumas explicações não compreendidas ou resolvendo exercícios. (idem)

Devido a inúmeros fatores, dentre eles, a formação acadêmica deficiente e insuficiente do professor, o ensino de Cálculo no ensino médio é um assunto que traz muita discussão e merece ser analisado. Contudo, alguns autores já demonstram a possibilidade de se trabalhar algumas ideias do Cálculo no ensino médio de forma produtiva e sem sobrecarregar o currículo já trabalhado pelo professor de matemática do ensino médio.

Assim como a ideia de que o currículo de matemática trabalhado no ensino médio é bastante extenso e não comportaria outros temas a serem abordados em sala de aula, existem outros questionamentos que merecem uma reflexão e uma investigação mais profunda para tentar compreender os aspectos ou causas que influenciam o professor de matemática em sua opção por ensinar ou não elementos de Cálculo no ensino médio.

Desta forma, o presente trabalho tem o objetivo de analisar os problemas enfrentados para inclusão de elementos de cálculo no ensino no médio bem como os benefícios que tal inclusão traria. Além disso, o trabalho propõe atividades que permitem a inclusão do tema no ensino médio.

2 LEVANTAMENTO ESTATÍSTICO E PESQUISA QUANTITATIVA

A reprovação em Cálculo I é um tema bastante pesquisado e discutido, pois afeta muito cursos superiores que acumulam índices altíssimos de retenção trazendo transtornos para as universidades, pois estas precisam disponibilizar cada vez mais vagas para suprir a demanda desta disciplina, e prejudicam o desenrolar do curso dos discentes, uma vez que Cálculo I é pré-requisito para outras disciplinas. Neste sentido, a inclusão de noções de Cálculo no ensino médio pode ser eficaz para sanar tal problema. O objetivo não é incluir mais um conteúdo extenso e pesado no currículo do ensino médio e sim, permear aulas com noções de Cálculo e mostrar ao aluno sua importância e aplicabilidade.

Muito se questiona se o tema não seria de interesse de poucos alunos, apenas os que optam por cursos na área de exatas, e assim, seria mais um conteúdo descartável para os demais. O fato é que diversos cursos têm Cálculo I em sua grade e muitos alunos seriam beneficiados. Além disso, o assunto é de extrema importância e aplicabilidade. O aluno tem a oportunidade de aplicar o que foi estudado em diversos problemas das mais variadas áreas, diminuindo aquela sensação, comum em muitos discentes, de que está estudando algo descartável, que não serve pra nada.

Em recente pesquisa feita na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), Vianna (2013, p.8) afirma que praticamente 50% dos alunos que ingressarem na universidade terão alguma disciplina referente ao estudo dos limites, das derivadas e da integral. Em sua pesquisa ele fez um levantamento do quadro de vagas oferecidas e da grade curricular de cada curso disponibilizado pela UFRJ em 2013 e constatou que das 4745 vagas oferecidas pela UFRJ, 2366 destinam-se a turmas que terão Cálculo Diferencial e Integral no decorrer do curso. E, das 105 turmas previstas, 53 delas terão aulas de Cálculo Diferencial e Integral durante a graduação. Essa pesquisa ratifica a importância da introdução de noções de Cálculo no ensino médio, uma vez que o cenário de outras universidades não é muito diferente. Se a pesquisa fosse estendida em outras universidades teríamos um panorama bem similar.

Em seu trabalho, Vianna faz uma afirmação que vai ao encontro da proposta deste trabalho

> A nossa proposta não é inserir Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Médio em sua completude e sim ambientar nossos estudantes a interagirem de modo dinâmico com ideias que têm o intuito de desenvolver aptidões para uma melhor compreensão dos conceitos abordados no estudo dos limites, derivadas e integral. Propomos um estudo livre de formalizações e muito mais prático, algo que fuja das técnicas e priorize a reflexão dos conceitos por parte dos alunos, familiarizando-os com novas

> simbologias, e que desperte a curiosidade nas inúmeras aplicações dessa disciplina. (idem, p.9)

Por outro lado, qual seria a viabilidade desta proposta? Será que os professores estariam dispostos e de acordo com ela? Ou até mesmo, será que tais professores se sentem preparados para ensinar tais conteúdos no ensino médio? Qual é sua experiência com a disciplina? Como foi seu curso de Cálculo na universidade?

Diante disto, elaboramos um questionário que foi respondido por 40 professores de matemática, que aborda tais questões e tem o objetivo de traçar um panorama dos problemas apresentados.

Assim, neste capítulo, analisamos os índices de reprovação da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I nos períodos mais recentes da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ) e também, analisamos os questionários respondidos por professores de matemática que exploram a importância e aplicabilidade de conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I no ensino médio.

2.1 **Índices de reprovação da disciplina Cálculo Diferencial e Integral I nos períodos de 2011/1 A 2013/1 da Universidade do Estado do Rio de Janeiro (UERJ)**

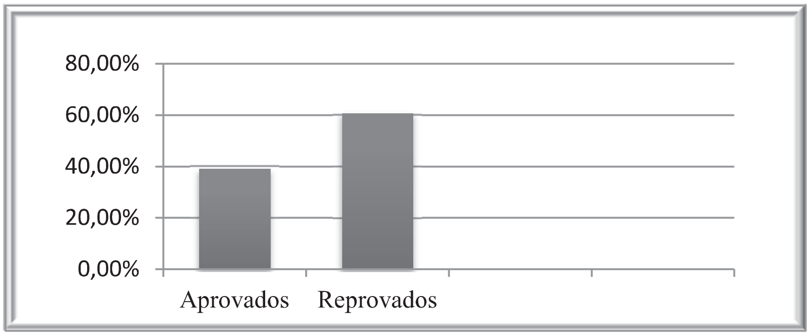
No primeiro semestre de 2011, ou seja, no período 2011/1, foram coletados os dados de 18 turmas. Houve 536 alunos matriculados, com 327 reprovados e 209 aprovados, isto é, o índice de reprovação foi de 61,01%. A tabela abaixo permite uma observação mais detalhada do panorama do período.

Tabela 1: Desempenho dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I – UERJ – 2011/1

	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por falta
Número de Alunos	209	175	152
Porcentagem	38,99%	32,65%	28,36%

O gráfico abaixo ilustra o índice de aprovados e reprovados em relação ao total de inscritos na referida disciplina no período 2011/1.

Gráfico 1 – Índice de Aprovação e Reprovação no período 2011/1



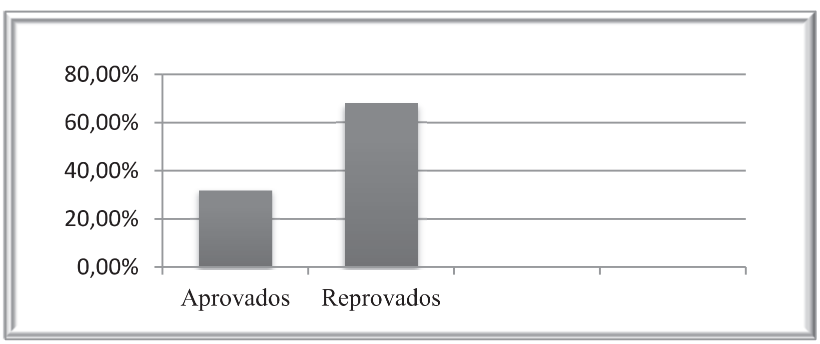
No segundo semestre de 2011, isto é, no período 2011/2, foram coletados os dados de 16 turmas. No total havia 472 alunos matriculados, sendo 152 aprovados e índice de reprovação de 67,80%, ou seja, 320 alunos reprovados. Pela tabela abaixo é possível uma observação mais detalhada do período.

Tabela 2: Desempenho dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I – UERJ – 2011/2

	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por falta
Número de Alunos	152	199	121
Porcentagem	32,20%	42,16%	25,64%

O índice de aprovados e reprovados em relação ao total de inscritos no período 2011/2 na disciplina Cálculo Diferencial e Integral I pode ser observado no gráfico a seguir.

Gráfico 2 – Índice de Aprovação e Reprovação no período 2011/2



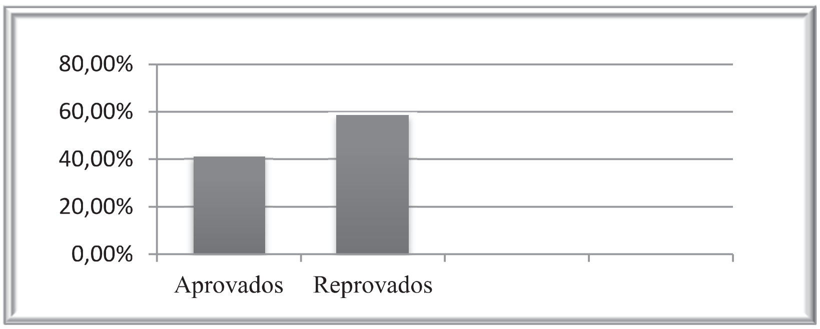
No período 2012/1, 19 turmas tiveram seus dados coletados. Houve 504 alunos matriculados, onde o índice de reprovação foi de 58,53%, isto é, 295 alunos. Já o número de aprovados foi de apenas 209. O panorama do período pode ser observado com maior clareza na tabela a seguir.

Tabela 3: Desempenho dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I – UERJ – 2012/1

	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por falta
Número de Alunos	209	141	154
Porcentagem	41,47%	27,98%	30,55%

Em relação ao total de inscritos, o índice de aprovados e reprovados no período 2012/1 pode ser verificado no gráfico abaixo.

Gráfico 3 – Índice de Aprovação e Reprovação no período 2012/1



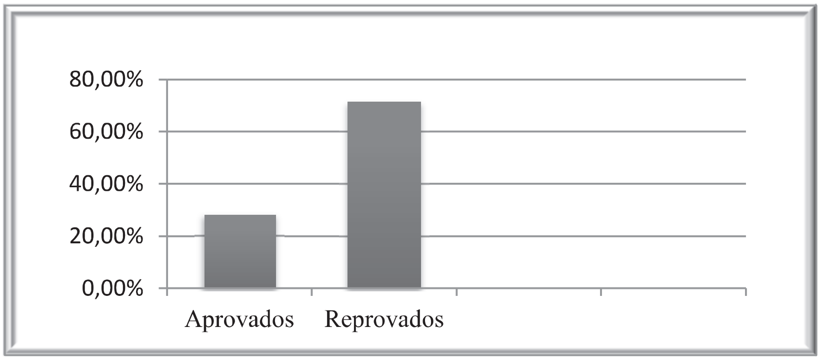
No segundo período de 2012, houve um total de 485 alunos matriculados nas 17 turmas cujos dados foram coletados. Desses, 138 foram aprovados e 347 reprovados, isto é, o índice de reprovação foi de 71,55%. A tabela a seguir, mostra os dados referentes a esse período que teve o maior índice de reprovação dos períodos analisados.

Tabela 4: Desempenho dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I – UERJ – 2012/2

	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por falta
Número de Alunos	138	248	99
Porcentagem	28,45%	51,14%	20,41%

Segue o gráfico relativo a esse período, onde podemos verificar o alto índice de reprovação, em relação ao número total de alunos matriculados.

Gráfico 4 – Índice de Aprovação e Reprovação no período 2012/2



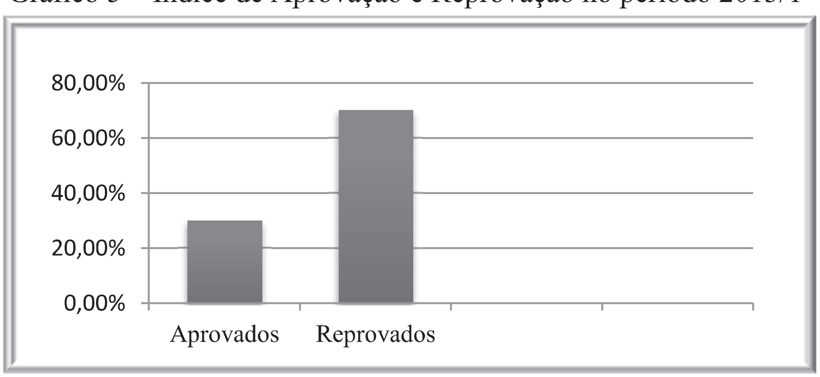
O último período em que os dados foram recolhidos foi o período 2013/1 com 17 turmas tendo seus dados analisados. Dos 503 alunos inscritos, 150 foram aprovados e 353 reprovados, com índice de reprovação 70,18%. Os dados podem ser melhor analisados na tabela abaixo, referente ao período em questão.

Tabela 5: Desempenho dos alunos de Cálculo Diferencial e Integral I – UERJ – 2013/1

	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por falta
Número de Alunos	150	234	119
Porcentagem	29,82%	46,52%	23,66%

O gráfico a seguir ilustra o índice de aprovados e reprovados em relação ao total de inscritos na referida disciplina no período 2013/1.

Gráfico 5 – Índice de Aprovação e Reprovação no período 2013/1

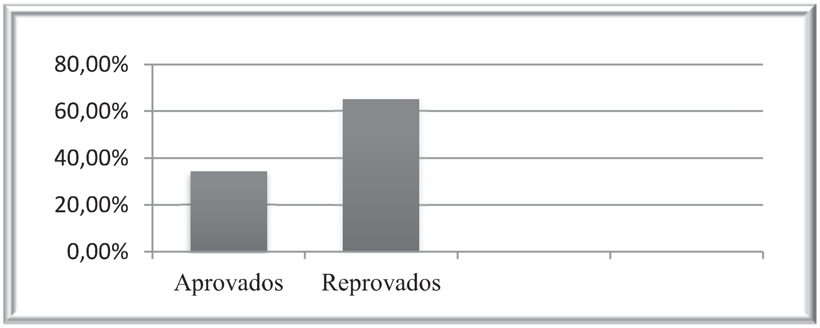


Analisando todos os cinco períodos, tivemos 2500 alunos inscritos, 858 aprovados e 1642 reprovados, isto é, um índice de reprovação preocupante de 65,68%.

Tabela 6: Desempenho dos alunos de Cálculo Dif. e Integral I – UERJ – 2011/1 a 2013/1

	Aprovados	Reprovados por nota	Reprovados por falta
Número de Alunos	858	997	645
Porcentagem	34,32%	39,88%	25,80%

Gráfico 6 – Índice de Aprovação e Reprovação nos períodos de 2011/1 a 2013/1



Ao concluir esta pesquisa constatamos o que já era esperado, isto é, um alto índice de reprovação em Cálculo Diferencial e Integral I. Das 87 turmas analisadas, em apenas 15 o número de aprovados foi superior ao de reprovados. Outro dado observado foi o índice de reprovados por falta, que foi superior a 20% em todos os períodos analisados, e em alguns casos sendo muito próximo ou até mesmo superior ao índice de reprovados por nota.

Esses números tão expressivos e preocupantes podem ser justificados e relacionados com as dificuldades apresentadas pelos estudantes logo nas primeiras aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Tais dificuldades, relacionadas aos conceitos abordados inicialmente nessa disciplina, podem levá-los a não acompanhar o desenrolar do curso. Podemos destacar a falta de embasamento em conteúdos do ensino médio, como um dos principais problemas encontrados pelos discentes ao ingressar na universidade, gerando um desconforto e até mesmo desmotivando-os a prosseguir, justificando assim, os altos índices de reprovados tanto por nota quanto por falta.

A partir do que foi verificado pela pesquisa, sobre o número de reprovações nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I, destacamos a necessidade de criar alternativas para solucionar tal problema.

Observamos várias universidades se mobilizando e criando estratégias para minimizar esses números. Em algumas instituições, tais como UFRGS e FURG, matérias como pré-cálculo são disponibilizadas com o objetivo de dar embasamento para os cursos de Cálculo. Já em outras, como na UNESP, o curso de Cálculo Diferencial e Integral é oferecido em período anual e não semestral, permitindo uma abordagem mais detalhada do conteúdo de Cálculo.

Por outro lado, existem autores que defendem a introdução de elementos de Cálculo ainda na educação básica, mais precisamente, no ensino médio. Esses autores, afirmam que é possível introduzir tais elementos sem sobrecarregar o currículo e que tais medidas beneficiariam os alunos, uma vez que permitiria a familiarização com conteúdos que seriam abordados na universidade de maneira mais formal.

Beltrão corrobora a ideia quando ressalta que

> Tal deficiência, porém, não vem de agora. Por volta de 1908, um estudo detalhado, realizado em vários países, para verificar a situação em que se encontrava o ensino de matemática na escola secundária, concluiu haver desvinculação entre o ensino da matemática neste nível e o ensino universitário, provocando certa descontinuidade entre estes dois níveis. Desse modo, buscando contornar a situação, foi apresentada como solução, entre outras, a introdução de conteúdos mais modernos como Cálculo Diferencial e Integral, devido a sua importância no desenvolvimento da matemática e na unificação de suas várias partes, valorização das aplicações e a descompartimentalização dos conteúdos ensinados. (BELTRÃO, 2001, p.31 apud Spina, 2002, p.21)

Assim, investir na educação básica pode auxiliar a modificar o quadro de fracasso no ensino e na aprendizagem de Cálculo, proporcionando aos estudantes, desde cedo, o contato com as noções intuitivas necessárias a um bom desempenho nessas disciplinas.

Com base em todos os dados apresentados, justifica-se a necessidade da inserção das ideias de Cálculo no ensino médio; por exemplo, através de atividades que envolvam as ideias intuitivas de limites, sua importância e aplicabilidade.

2.2 **Análise dos questionários respondidos por professores de matemática**

Nesta seção analisamos os questionários respondidos pelos professores entrevistados, onde foi possível traçar um panorama dos possíveis problemas que serão enfrentados para introdução de elementos de Cálculo no ensino médio.

O questionário foi dividido em três partes:

1ª parte: Perfil dos professores entrevistados

2ª parte: Sobre a graduação e o curso de Cálculo Diferencial e Integral dos professores entrevistados

3ª parte: Sobre a introdução de elementos de Cálculo no ensino médio

2.2.1 Perfil do professores entrevistados

Tabela 7

Sexo	Feminino	Masculino	Total
Quantidade de professores	11	29	40
Porcentagem	27,5%	72,5%	100%

Gráfico 7 - Sexo

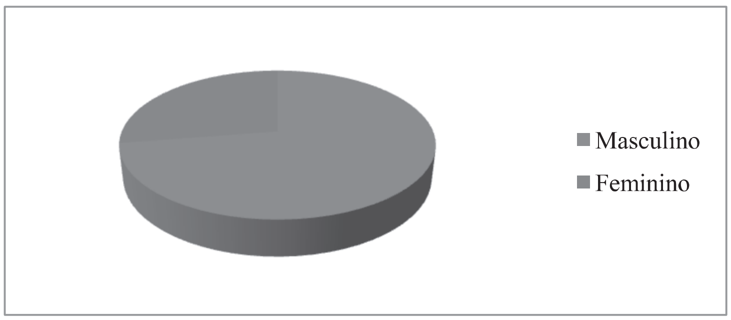


Tabela 8

Idade (anos)	20 a 30	31 a 40	41 a 50	Mais de 50	Total
Quant. de professores	10	24	4	2	40
Porcentagem	25%	60%	10%	5%	100%

Gráfico 8 - Idade

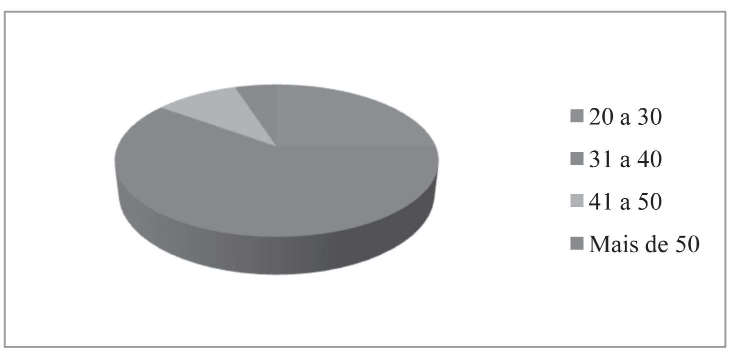


Tabela 9

Formação	Licenciatura em Matemática	Licenciatura em área correlata com a Matemática	Outras	Total
Quant. de professores	38	2	0	40
Porcentagem	95%	5%	0%	100%

Gráfico 9 - Formação

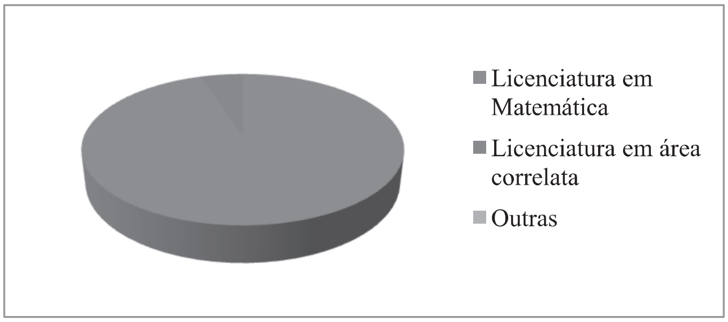


Tabela 10

Instituição em que leciona Matemática					
	Escola Pública	Escola Privada	Ambas	Outras[2]	Total
Quant. de professores	29	2	8	1	40
Porcentagem	72,5%	5%	20%	2,5%	100%

Gráfico 10 – Instituição em que leciona Matemática

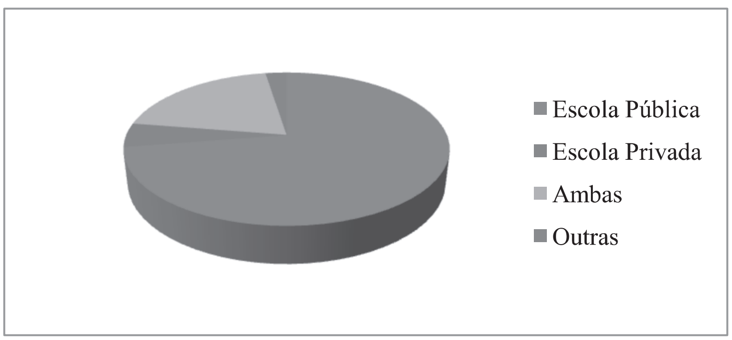


Tabela 11

Há quanto tempo (anos) ministra ou ministrou aulas de matemática?							
	1 a 5	6 a 10	11 a 15	16 a 20	21 a 25	Mais de 25	Total
Quant. de professores	9	13	9	8	0	1	40
Porcentagem	22,5%	32,5%	22,5%	20%	0%	2,5%	100%

[2] Tais como: Curso preparatório, Pré-vestibular comunitário, entre outros.

Gráfico 11 – Há quanto tempo ministra ou ministrou aulas de Matemática?

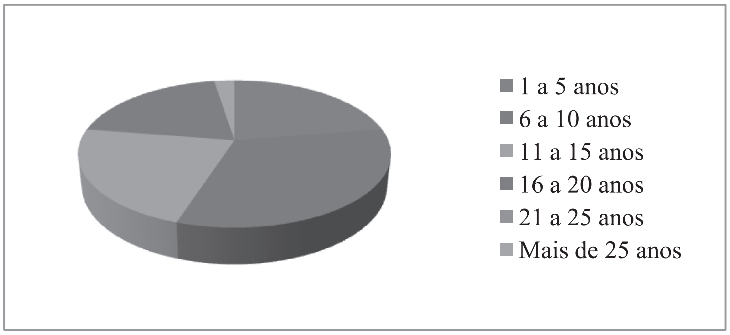
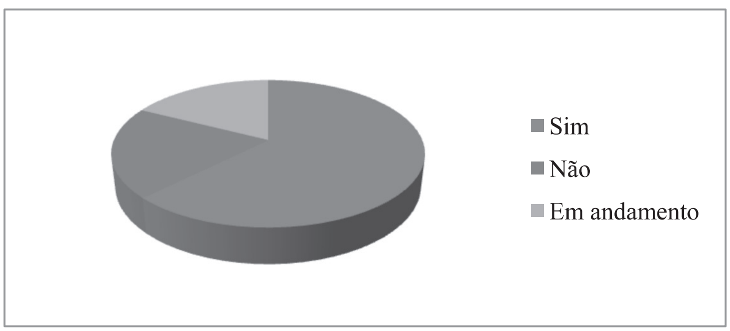


Tabela 12

Possui especialização em Matemática?

	Sim	Não	Em andamento	Total
Quant. de professores	25	8	7	40
Porcentagem	62,5%	20%	17,5%	100%

Gráfico 12 – Possui especialização em Matemática?



2.2.2 Sobre a graduação e o curso de Cálculo Diferencial e Integral dos professores entrevistados

Tabela 13

Em relação à formação que lhe foi oferecida pela instituição onde fez a graduação

	Péssima	Ruim	Regular	Boa	Excelente	Total
Quant. de professores	1	2	9	20	8	40
Porcentagem	2,5%	5%	22,5%	50%	20%	100%

Gráfico 13 – Em relação à formação que lhe foi oferecida pela instituição onde fez a graduação

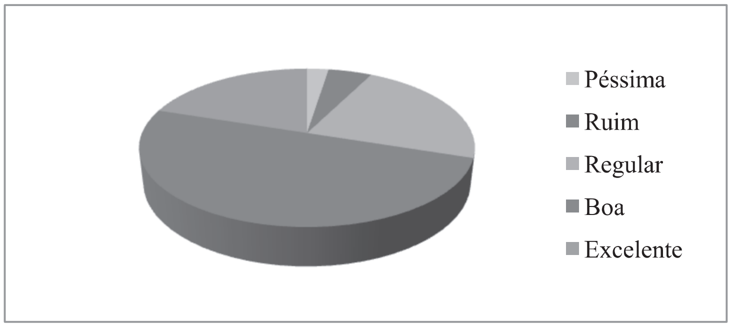


Tabela 14

Embasamento teórico no Curso de Cálculo Diferencial e Integral I						
	Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Excelente	Total
Quant. de professores	1	5	9	16	9	40
Porcentagem	2,5%	12,5%	22,5%	40%	22,5%	100%

Gráfico 14 – Embasamento teórico no Curso de Cálculo Diferencial e Integral I

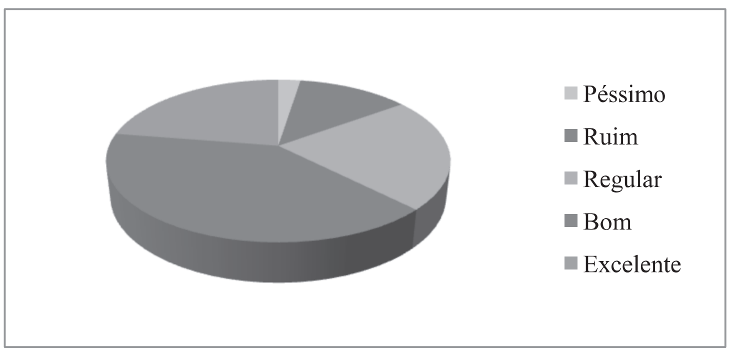


Tabela 15

Estratégias de ensino utilizadas pelo professor de Cálculo I durante sua formação						
	Péssima	Ruim	Regular	Boa	Excelente	Total
Quant. de professores	0	9	7	20	4	40
Porcentagem	0%	22,5%	17,5%	50%	10%	100%

Gráfico 15 – Estratégias de ensino utilizadas pelo professor de Cálculo I durante sua formação

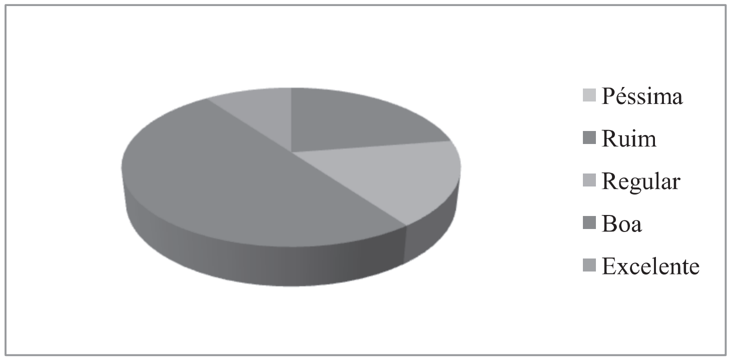


Tabela 16

Material didático utilizado (livro texto) pelo professor no Curso de Cálculo I na licenciatura

	Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Excelente	Total
Quant. de professores	1	5	8	18	8	40
Porcentagem	2,5%	12,5%	20%	45%	20%	100%

Gráfico 16 – Material didático utilizado (livro texto) pelo professor de Cálculo I na licenciatura

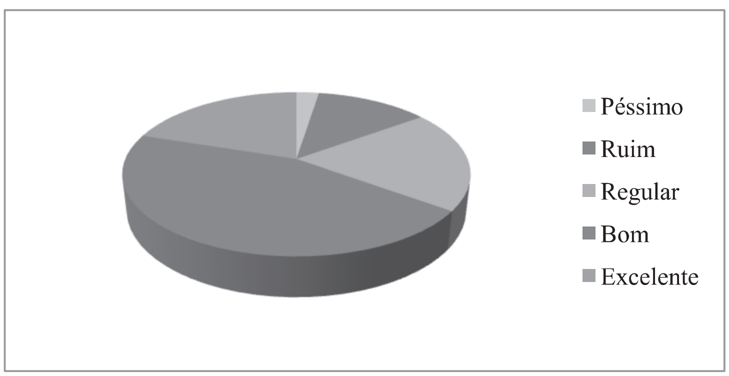


Tabela 17

Outros recursos didáticos (computadores, oficinas, etc.) utilizados pelo professor durante as aulas de Cálculo I

	Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Excelente	Total
Quant. de professores	19	8	8	5	0	40
Porcentagem	47,5%	20%	20%	12,5%	0%	100%

Gráfico 17 – Outros recursos didáticos utilizados pelo professor durante as aulas de Cálculo I

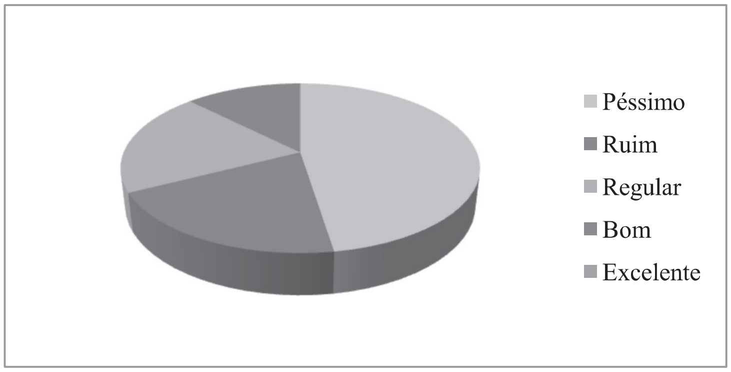


Tabela 18

Em relação à didática dos professores ministrando aulas de Cálculo I na licenciatura						
	Péssima	Ruim	Regular	Boa	Excelente	Total
Quant. de professores	0	7	9	16	8	40
Porcentagem	0%	17,5%	22,5%	40%	20%	100%

Gráfico 18 – Em relação à didática dos professores ministrando aulas de Cálculo I na licenciatura

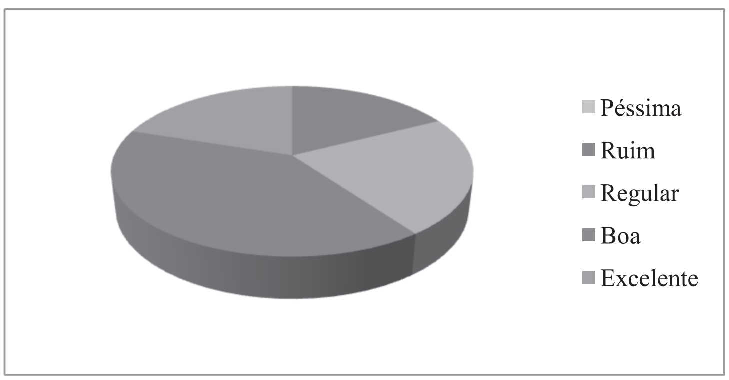
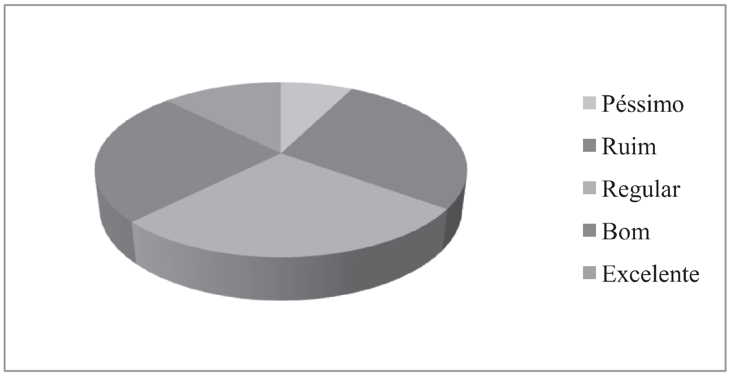


Tabela 19

7) Interesse dos professores de Cálculo I em apresentar aplicações práticas desta disciplina						
	Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Excelente	Total
Quant. de professores	3	11	11	10	5	40
Porcentagem	7,5%	27,5%	27,5%	25%	12,5%	100%

Gráfico 19 – Interesse dos professores de Cálculo I em apresentar aplicações práticas desta disciplina



2.2.3 Sobre a introdução de elementos de Cálculo no ensino médio

Tabela 20

Viabilidade para ensinar elementos de Cálculo I no Ensino Médio

	Péssima	Ruim	Regular	Boa	Excelente	Total
Quant. de professores	11	11	12	6	0	40
Porcentagem	27,5%	27,5%	30%	15%	0%	100%

Gráfico 20 – Viabilidade para ensinar elementos de Cálculo I no Ensino Médio

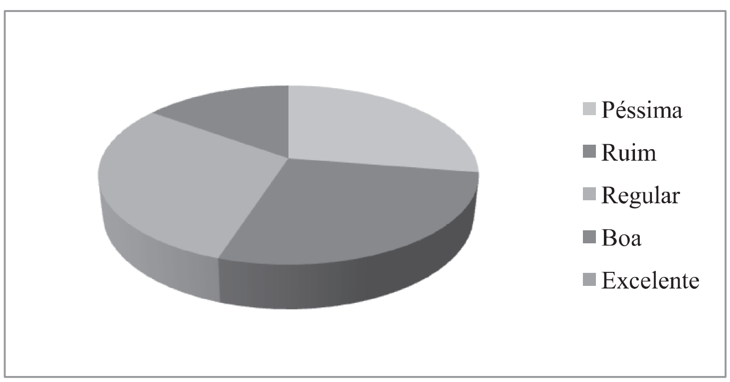


Tabela 21

Sobre o seu preparo e interesse em ensinar elementos de Cálculo I no Ensino Médio

	Péssimo	Ruim	Regular	Bom	Excelente	Total
Quant. de professores	5	2	16	15	2	40
Porcentagem	12,5%	5%	40%	37,5%	5%	100%

Gráfico 21 – Sobre o seu preparo e interesse em ensinar elementos de Cálculo I no Ensino Médio

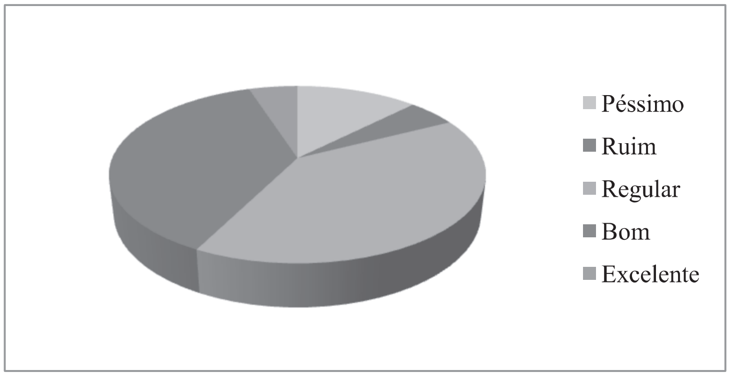


Tabela 22

Sobre a adequação do material didático para o ensino de elementos de Cálculo I no Ensino Médio						
	Péssima	Ruim	Regular	Boa	Excelente	Total
Quant. de professores	8	14	15	2	1	40
Porcentagem	20%	35%	37,5%	5%	2,5%	100%

Gráfico 22 – Sobre a adequação do material didático para o ensino de elementos de Cálculo I no Ensino Médio

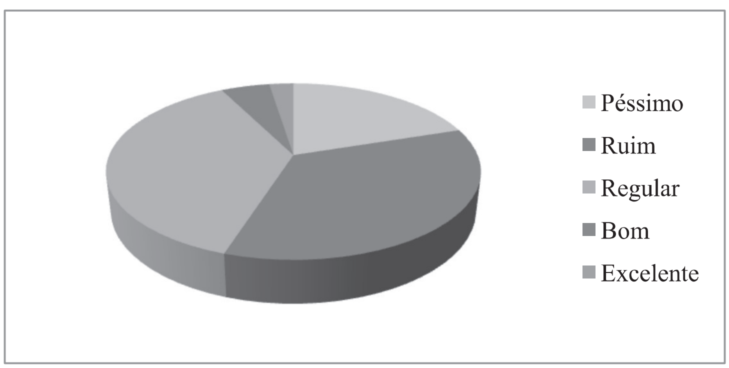


Tabela 23

Grau de importância para o aluno aprender elementos de Cálculo I no Ensino Médio						
	Muito baixo	Baixo	Regular	Alto	Muito Alto	Total
Quant. de professores	5	7	17	9	2	40
Porcentagem	12,5%	17,5%	42,5%	22,5%	5%	100%

Gráfico 23 – Grau de importância para o aluno aprender elementos de Cálculo I no Ensino Médio

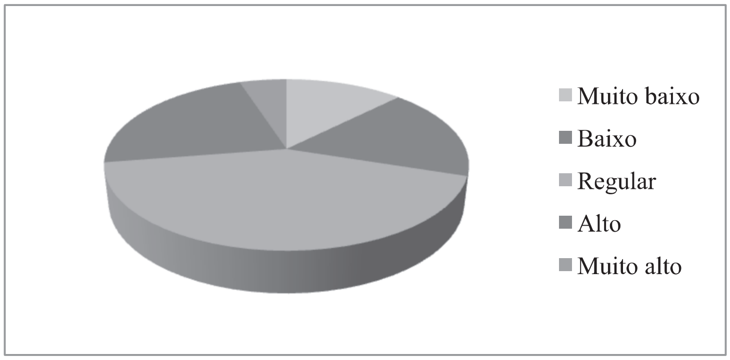
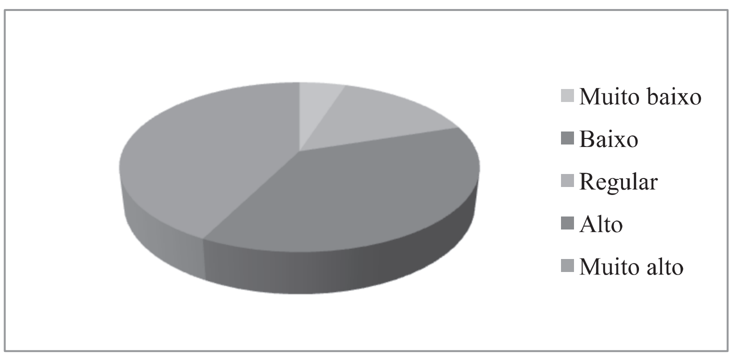


Tabela 24

Grau de dificuldade que o ensino de elementos de Cálculo I apresentaria para alunos do Ensino Médio

	Muito baixo	Baixo	Regular	Alto	Muito Alto	Total
Quant. de professores	2	0	6	15	17	40
Porcentagem	5%	0%	15%	37,5%	42,5%	100%

Gráfico 24 – Grau de dificuldade que o ensino de elementos de Cálculo I apresentaria para alunos do Ensino Médio



2.2.4 Observações a partir dos dados coletados

Os dados demonstram que os cursos superiores de formação de professores de Matemática são considerados de bom nível pelos participantes desta pesquisa e que os mesmos forneceram um bom embasamento teórico para o aprendizado do Cálculo durante a sua formação. O único ponto considerado insuficiente foi o da utilização de recursos didáticos, o qual a maioria dos entrevistados considerou péssimo.

O levantamento de dados aponta que a maioria dos docentes julga inviável a inserção de elementos de Cálculo no ensino médio, apesar de considerarem seu preparo entre regular e bom, e julgarem importante a introdução do tema ainda na escola básica. A justificativa para tais fatos pode estar no perfil dos entrevistados, em sua maioria, professores de escolas públicas. Muitas dessas respostas podem ter sido influenciadas pelo panorama que encontramos no ensino público brasileiro. Isto é, alunos muito despreparados e um ambiente de ensino muito desfavorável. Fica clara tal percepção, quando a maioria dos professores aponta no questionário que seus alunos teriam muitas dificuldades para assimilarem o conteúdo, o que de fato prejudicaria a proposta apresentada. Outro fator negativo indicado pelos docentes é a falta de material didático adequado. Fator esse que, no entanto, vem apresentando avanços, como já foi dito no capítulo anterior. Já existem autores incluindo o conteúdo em seus livros de ensino médio, ainda que de maneira discreta no fim do volume, após todo conteúdo do 3º ano.

Ao final do questionário, conforme se pode verificar no Apêndice A, deixamos um espaço para possíveis observações dos entrevistados. Alguns professores fizeram colocações pertinentes acerca do assunto. Eles destacaram que o Cálculo permite a associação com diversas áreas de conhecimento, o que torna o assunto mais interessante por permitir aplicar o conhecimento adquirido. Outros defenderam uma reformulação no ensino da matemática. Alguns destacaram que a proposta seria viável em escolas particulares e públicas de referência. As observações feitas pelos docentes podem ser consultadas no anexo desta dissertação.

Pesquisa semelhante a esta foi realizada com professores de Natal, no Rio Grande do Norte (GUEDES; ASSIS, 2009, p. 10). Os docentes entrevistados também acreditam que a introdução de tais conteúdos seria de grande importância para o ensino da matemática e que os alunos apresentariam um alto grau de dificuldade para assimilar o conteúdo. O que difere da pesquisa aqui apresentada está relacionado ao preparo do professor. A pesquisa aponta que cerca de 48% dos entrevistados não se julga capaz de ensinar Cálculo no ensino médio. Fato este justificado pela avaliação ruim que fizerem sobre seu curso de Cálculo da graduação, apesar de considerarem sua formação geral boa. Os autores da pesquisa concluem que a falta de qualificação dos professores de matemática para ensinar tal assunto e o baixo nível de conhecimento matemático que dispõe o aluno quando chega ao ensino médio seriam os maiores problemas enfrentados.

A partir dos resultados de ambas as pesquisas verificamos que o ensino de elementos de Cálculo nas escolas de ensino médio ainda não é algo que esteja claro e definido nesta amostra, ou seja, apesar de julgá-lo importante, consideram-no uma tarefa complicada ou mesmo inviável.

3 ATIVIDADES PROPOSTAS PARA INTRODUÇÃO DE ELEMENTOS DE CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO

Como já foi dito anteriormente, nossa ideia não é introduzir mais um conteúdo de maneira formal ao programa do ensino médio. A proposta visa tratar de noções de Cálculo através de atividades que estejam relacionadas com o conteúdo que está sendo trabalhado. Assim, pode-se trabalhar a noção de limite já no 1º ano do ensino médio, paralelamente ao ensino de funções.

Neste capítulo vamos propor atividades que permitam a inserção de elementos de Cálculo no ensino médio. Essas atividades contemplam o conceito de limite, que é o foco do trabalho. Em cada atividade é possível verificar o tempo previsto para aplicação, o momento em que deve ser aplicada e o objetivo da mesma. As atividades estão resolvidas de modo a servir de orientação para o professor. As resoluções encontram-se no formato itálico para destacá-las do resto do texto. No apêndice B desta dissertação encontra-se uma versão para o aluno com as mesmas atividades.

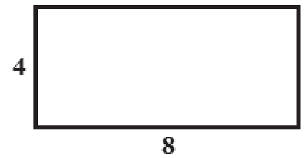
Vale lembrar que o trabalho é apenas uma sugestão que visa auxiliar o professor na introdução de tais conteúdos. Desta forma, o docente deve adequar as atividades que julgar necessárias permitindo um melhor aproveitamento de seus alunos.

A primeira atividade tem o objetivo de iniciar a construção do conceito de limite e deve ser abordada logo após as primeiras aulas sobre conteúdo de funções. A tarefa tem o tempo previsto entre 50 e 70 minutos.

ATIVIDADE 1 – VERSÃO COMENTADA

Com auxílio de uma cartolina, régua e tesoura vamos confeccionar uma figura de forma retangular de área igual a 32 cm^2, com 8 cm de comprimento e 4 cm de largura.

Figura 1 – Retângulo

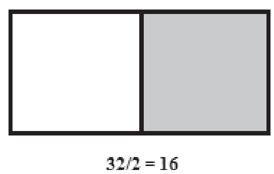


Vamos cortar metade dessa figura, em seguida, metade da metade que sobrou, depois metade da parte que ainda sobrou, e assim por diante, num total de 8 cortes.

a) Ao efetuar o primeiro corte e separar uma das partes, qual é a área da parte separada?

R: 16 cm^2

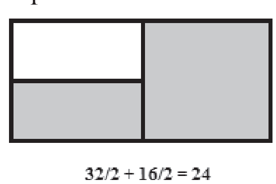
Figura 2 – Retângulo
após o 1º corte



b) Ao efetuarmos o segundo corte na parte que sobrou e separar uma das partes, qual será a área total das partes separadas no primeiro e segundo cortes?

R: 24 cm^2

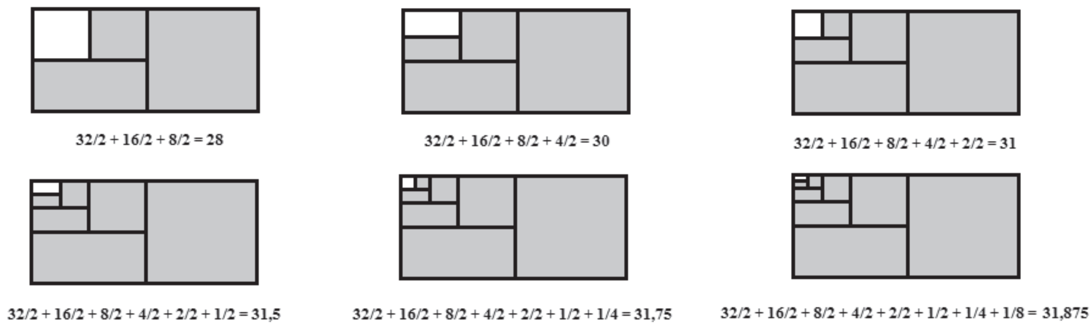
Figura 3 – Retângulo
após o 2º corte



c) Seguindo esse mesmo procedimento, determine a área total das partes separadas após o 3º, 4º, 5º, 6º, 7º e 8º cortes.

R: 28 cm^2*; 30 cm*^{2}*; 31 cm*^{2}*; 31,5 cm*^{2}*; 31,75 cm*^{2}*; 31,875 cm*^{2}.

Figura 4 – Retângulos após o 3º, 4º, 5º, 6º, 7º e 8º cortes



Observação: As figuras 2, 3 e 4 não estarão disponíveis para os alunos, servem apenas de orientação para o professor.

d) Organize os dados obtidos na tabela abaixo:

Tabela 25: Número de cortes x área

Número de cortes (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área total das partes separadas (y)	*0*	*16*	*24*	*28*	*30*	*31*	*31,5*	*31,75*	*31,875*

e) O que acontece com área da figura se repetirmos esse processo sucessivamente?

R: A área da parte separada (y) se aproxima da área da figura toda.

Observação: Nesse momento o professor deve introduzir a ideia de limite. Mostrando que se fosse possível fazer infinitos cortes e separar cada nova metade encontrada, a área total das partes separadas estaria cada vez mais próxima da área total da figura inicial, ou seja, tenderia a 32 cm^2.

Assim, dizemos que a área ***tende*** *a 32. Indicamos esse fato por:*

$$\lim_{n\to\infty} y = 32$$

(Lê-se: o limite de y quando n tende a infinito é igual a 32)

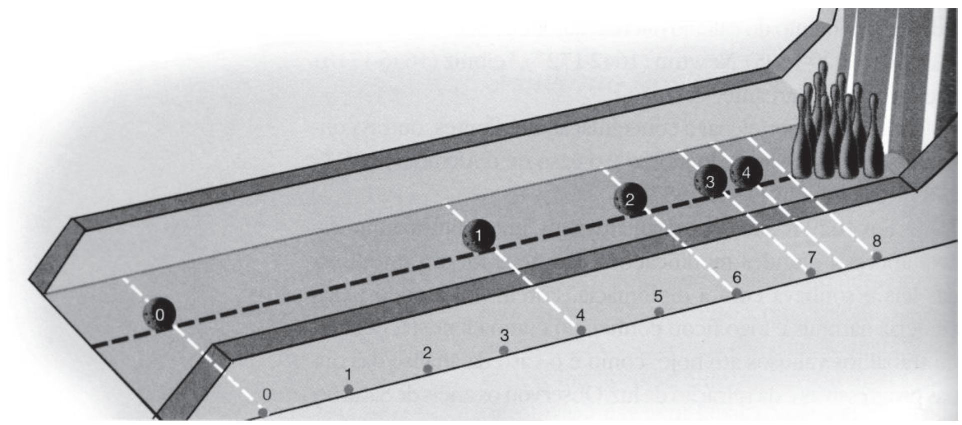
A próxima atividade é muito semelhante à primeira, apenas com uma roupagem diferente. O objetivo é fixar a ideia da primeira atividade e solucionar possíveis dúvidas que possam existir. Deve ser aplicada logo após a primeira atividade. A tarefa tem o tempo previsto entre 20 e 30 minutos. Em dois tempos de aula, é possível aplicar as duas atividades.

ATIVIDADE 2 – VERSÃO COMENTADA

Uma bola de boliche foi jogada em uma pista de 8 m, sendo que, em cada segundo, percorre metade da distância que a separa do primeiro pino.

Considere a função d(t) que faz corresponder a cada valor t de tempo ($t \in \mathbb{N}$), em segundos, um único valor d, em metros, da distância percorrida por essa bola.

Figura 5 – Pista de Boliche.



Fonte: Xavier e Barreto (2005, p.222)

a) Complete a tabela abaixo:

Tabela 26: Tempo x Distância

t (s)	d (m)
0	*0*
1	*4*
2	*6*
3	*7*
4	*7,5*
5	*7,75*
6	*7,875*

b) O que acontece a cada segundo que passa?

R: A cada instante a bola se aproxima mais e mais do 1º pino, assim como a distância percorrida se aproxima de 8, quanto maior for o valor do tempo.

Dizemos que, quando t tende a assumir um valor cada vez maior (t tende ao infinito), então d tende a 8.

Em símbolos:

$$\lim_{t\to\infty} d(t) = 8$$

Observação: Nesta questão o professor pode citar o paradoxo de Zenon que conta a história do herói grego Aquiles e da tartaruga.

Aquiles, o herói grego, e a tartaruga decidem apostar uma corrida. Como a velocidade de Aquiles é maior que a da tartaruga, esta recebe uma vantagem, começando corrida um trecho na frente da linha de largada de seu adversário. Aquiles nunca sobrepassa à tartaruga, pois quando ele chegar à posição inicial A da tartaruga, esta encontra-se mais a frente, numa outra posição B. Quando Aquiles chegar a B, a tartaruga não está mais lá, pois avançou para uma nova posição ***C****, e assim sucessivamente.*

A atividade a seguir tem o objetivo de mostrar uma aplicação prática do conteúdo de limite, relacionando com outras disciplinas como a física, por exemplo. Esta atividade pode ser introduzida juntamente com outros problemas de aplicação prática no conteúdo de funções. Porém, como a questão aborda gráfico de função afim, é necessário que o aluno já tenha conhecimento de tal assunto. O tempo previsto é de 40 a 50 minutos.

ATIVIDADE 3 – VERSÃO COMENTADA

Num teste de um protótipo de um trem, que se move ao longo de um monotrilho retilíneo, engenheiros determinam a velocidade média do protótipo, em metros por segundo, a partir da origem da trajetória, no instante t, por:

$$v(t) = \frac{4.(t^2 - 4)}{t - 2}$$

Qual é a velocidade média v(t) para os tempos:

- menores que 2s

a) t = 1 s *R: v(t) = 12 m/s*

b) t = 1,2 s *R: v(t) = 12,8 m/s*

c) t = 1,4 s *R: v(t) = 13,6 m/s*

d) t = 1,6 s *R: v(t) = 14,4 m/s*

e) t = 1,8 s *R: v(t) = 15,2 m/s*

- maiores que 2s

f) t = 3 s   *R: v(t) = 20 m/s*

g) t = 2,8 s   *R: v(t) = 19,2 m/s*

h) t = 2,6 s   *R: v(t) = 18,4 m/s*

i) t = 2,4 s   *R: v(t) = 17,6 m/s*

j) t = 2,2 s   *R: v(t) = 16,8 m/s*

k) Esboce o gráfico da função v(t).

Para t ≠ 2, temos:

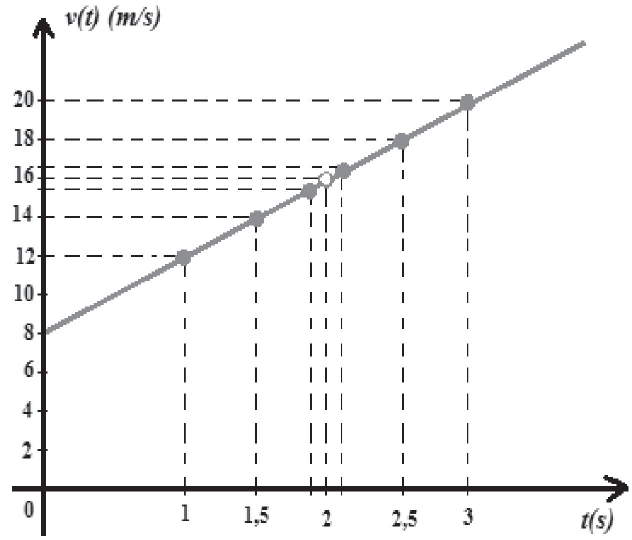
$$v(t) = \frac{4.(t^2-4)}{t-2} = \frac{4.(t+2).(t-2)}{(t-2)} = 4.(t+2) = 4t + 8$$

Representando o gráfico de v em função de t, pata t ≠ 2, temos:

Tabela 27: Tempo x Velocidade

t (s)	*v(t) (m/s)*
1	*12*
1,2	*12,8*
1,4	*13,6*
1,6	*14,4*
1,8	*15,2*
2,2	*16,8*
2,4	*17,6*
2,6	*18,4*
2,8	*19,2*
3	*20*

Gráfico 25: Tempo x Velocidade



l) O que acontece com a função quando t se aproxima de 2 s?

R: v(t) se aproxima de 16 quando t tende a 2, independente do lado (pela esquerda ou pela direita do 2). Indicamos esse fato por:

$$\lim_{t \to 2} v(t) = 16$$

Observação: O professor deve ressaltar nessa questão que o limite da função quando t tende 2 existe apesar de t = 2 não fazer parte do domínio da função.

A próxima atividade pode ser aplicada logo após a atividade 3 e tem o objetivo de introduzir o conceito de limites laterais e mostrar mais um exemplo de aplicação prática do conteúdo. O tempo previsto é de 20 a 30 minutos.

ATIVIDADE 4 – VERSÃO COMENTADA

Um carro está em movimento progressivo passa pela origem da trajetória em t=0s, com uma velocidade escalar constante de 6m/s . A tabela a seguir demonstra as posições do objeto ao longo do tempo.

Tabela 28: Tempo x Posição

t (s)	x (m)
0	0
1	6
2	12
3	18
4	24
5	30

Plotando os dados em um gráfico, posição (x) em função do tempo (t), é possível explorar limites de função.

Gráfico 26: Posição x Tempo

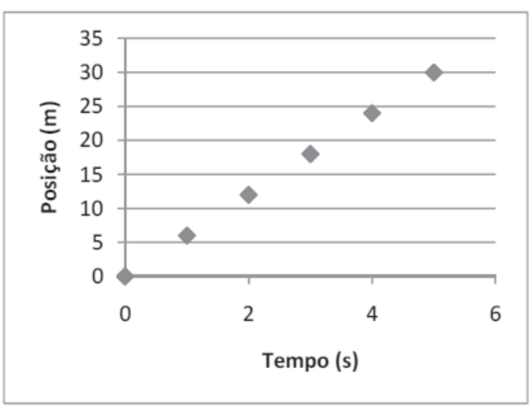
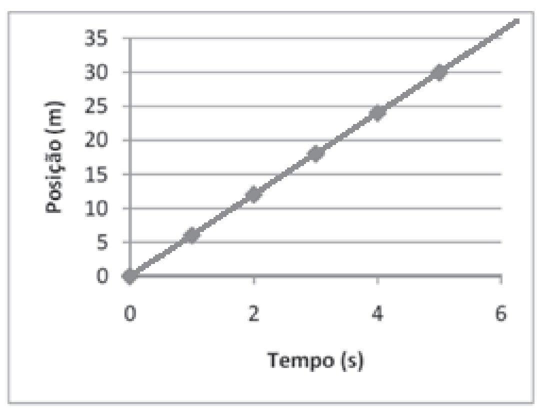


Gráfico 27: Posição x Tempo (D = ℝ)



Fonte: Dominguini, Gomes, Alves (2011, p.6)

a) O que acontece com os valores de posição, quando o tempo se aproxima de 4 s?

R: Se aproximam de 24 m. Isto é,

$$\lim_{t \to 4} x\,(t) = 24.$$

Observação: Nessa questão, podemos introduzir o conceito de limites laterais. Quando t tende a 4 tanto pela direita quanto pela esquerda, isto é, com valores maiores ou menores que 4, x(t) tende a 24. O mesmo não ocorre na alternativa b, quando temos apenas o limite à direita de 0.

b) O que acontece com os valores de posição quando o tempo se aproxima de zero?

R: Se aproximam de 0 m. Neste caso só é possível ter valores de tempo acima de zero. Isto é,

$$\lim_{t \to 0^+} x(t) = 0 \ e \nexists \lim_{t \to 0^-} x(t).$$

A atividade 5 introduz o conceito de limites infinitos e retorna à ideia de limites no infinito, já vista nas duas primeiras atividades. Pode ser aplicada após todo o conteúdo de funções, quando os alunos devem estar familiarizados com construções de gráficos. O tempo previsto é 50 a 60 minutos.

ATIVIDADE 5 - VERSÃO COMENTADA

Seja a função f: $\mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1}{x}$.

a) Com o auxílio de uma calculadora, complete a tabela abaixo:

Tabela 29: Função f(x) = 1/x com valores de x tendendo para ∞

	x = 1	x = 10	x = 100	x = 1000	x = 10000	x = 100000	x = 1000000	
f(x)	*1*	*0,1*	*0,01*	*0,001*	*0,0001*	*0,00001*	*0,000001*	

b) Se continuarmos aumentando o valor x, o que vai acontecer com f(x)?

R: f(x) irá se aproximar cada vez mais próxima de zero.

Observação: O professor deve orientar o aluno no sentido que o valor de x não necessariamente precisa ser uma potência de 10, isso é apenas para facilitar os cálculos. E mostrar que, quanto maior for o valor de x, mais próximo de zero f(x) estará, porém, nunca se anulará, pois por maior que seja o valor x, o quociente $\frac{1}{x}$ nunca será igual a zero. Isto é,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

c) Complete a tabela a seguir:

Tabela 30: Função f(x) = 1/x com valores de x positivos tendendo para 0

	x = 1	x = 0,1	x = 0,01	x = 0,001	x = 0,0001	x = 0,00001	x = 0,000001
f(x)	*1*	*10*	*100*	*1000*	*10000*	*100000*	*1000000*

d) Se continuarmos diminuindo o valor de x (valores positivos), o que vai acontecer com f(x)?

R: f(x) vai tender para + ∞. *Isto é,*

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

Observação: Nesta questão podemos retornar à ideia de limites laterais, já vista anteriormente.

Nas próximas alternativas vamos seguir o mesmo raciocínio, mas, desta vez, vamos trabalhar com valores negativos de x.

e) Complete a tabela abaixo:

Tabela 31: Função f(x) = 1/x com valores de x tendendo para $-\infty$

	x = -1	x = -10	x = -100	x = -1000	x = -10000	x = -100000	x = -1000000
f(x)	*-1*	*-0,1*	*-0,01*	*-0,001*	*-0,0001*	*-0,00001*	*-0,000001*

f) O que acontece com f(x), se continuarmos diminuindo o valor de x, isto é, aumentar o valor absoluto dos números negativos?

R: f(x) irá se aproximar cada vez mais de zero. Isto é,

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

g) Complete a tabela a seguir:

Tabela 32: Função f(x) = 1/x com valores de x negativos tendendo para 0

	x=-1	x=-0,1	x=-0,01	x=-0,001	x=-0,0001	x=-0,00001	x=-0,000001
f(x)	*-1*	*-10*	*-100*	*-1000*	*-10000*	*-100000*	*-1000000*

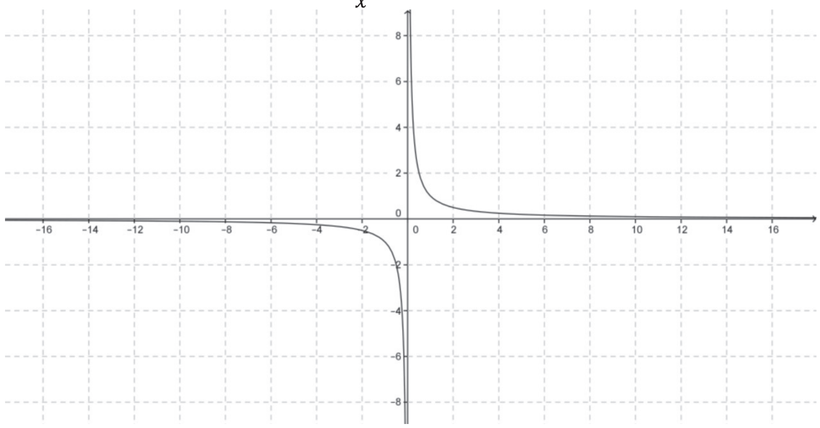
h) O que acontece com f(x), se continuarmos aumentando o valor de x (valores negativos), isto é, diminuir o valor absoluto dos números negativos?

R: f(x) vai tender para - ∞. *Isto é,*

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

i) Esboce o gráfico da função. Se necessário, atribua outros valores para x.

Gráfico 28: Função $f(x) = \frac{1}{x}$



A próxima atividade tem o tempo previsto de 1 h e 40min (2 tempos) e deve ser aplicada em um laboratório de informática, para que os alunos tenham acesso ao *software Geogebra.* Nesta atividade o aluno irá perceber o que acontece nos pontos em que o denominador da função se anula. Assim, o professor pode abordar o conceito de assíntota vertical e, consequentemente, assíntota horizontal. A atividade deve ser aplicada após a questão 5.

ATIVIDADE 6 – VERSÃO COMENTADA

São dadas as seguintes expressões algébricas:

$f(x) = \frac{3}{x+4}$	$g(x) = -\frac{x}{x-2}$	$h(x) = \frac{1}{x^2-4}$

a) Para que essas expressões definam funções, determine seus respectivos domínios maximais:

R: $D_f = \mathbb{R} - \{-4\},\ D_g = \mathbb{R} - \{2\}\ e\ D_h = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$

b) Com o auxílio do *software Geogebra,* construa seus respectivos gráficos.

Gráfico 29: Função $f(x) = \frac{3}{x+4}$

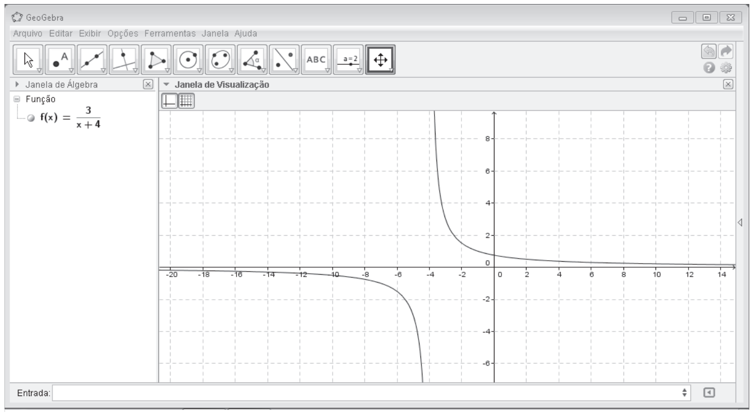


Gráfico 30: Função $g(x) = -\frac{x}{x-2}$

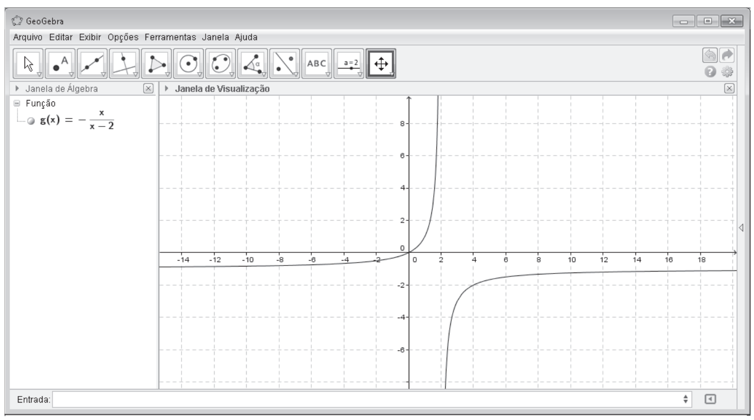
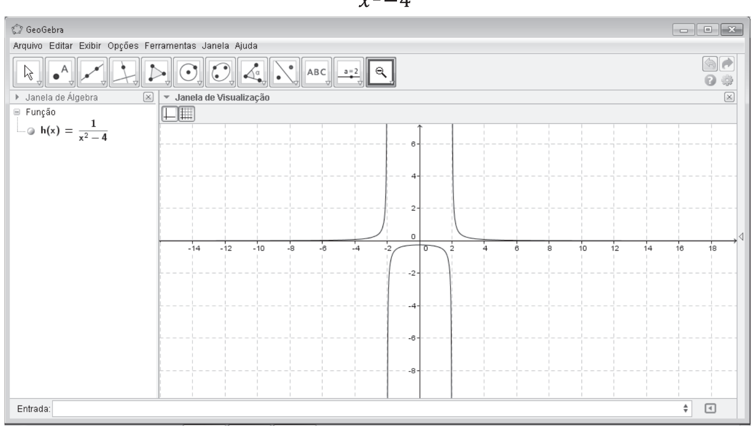


Gráfico 31: Função $g(x) = \frac{1}{x^2-4}$



c) Você consegue perceber alguma semelhança entre esses gráficos? O que acontece nos pontos que não pertencem ao domínio das funções?

R: Nesses pontos as funções tendem para $+\infty$ *ou* $-\infty$*. Ou seja,*

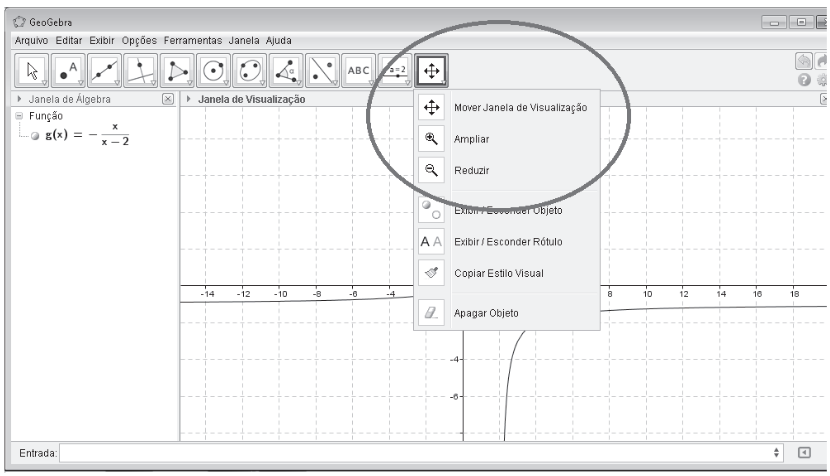
$$\lim_{x\to -4^-} f(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to -4^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} g(x) = \infty \quad e \quad \lim_{x\to 2^+} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} h(x) = \infty, \quad \lim_{x\to -2^+} h(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to 2^-} h(x) = -\infty \quad e \quad \lim_{x\to 2^+} h(x) = \infty$$

Observação 1: Para melhor visualização do que acontece com esses gráficos, devemos utilizar as ferramentas: ampliar, reduzir e mover janela de visualização na barra de opções.

Figura 6: Tela do *Software Geogebra*



Observação 2: Nesta questão, o professor pode abordar o conceito de assíntotas verticais e horizontais. Podendo, também, retornar ao exercício anterior para mostrar que os eixos coordenados são assíntotas.

- *a reta x = k é uma assíntota vertical ao gráfico de t(x) se ao menos um dos limites a seguir acontece:*

$$\lim_{x\to k^-} t(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to k^+} t(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to k^-} t(x) = \infty \quad ou \quad \lim_{x\to k^+} t(x) = \infty$$

- *a reta y = b é uma assíntota horizontal ao gráfico de t(x) se ao menos um dos limites a seguir acontece:*

$$\lim_{x\to -\infty} t(x) = b \quad ou \quad \lim_{x\to \infty} g(x) = b$$

Observação 3: As definições acima são precisam ser expostas em sala, apenas servem de orientação para o professor. O objetivo é fazer o aluno perceber o comportamento assintótico dessas funções.

d) Determine as assíntotas verticais e horizontais dessas funções.

R: Assíntotas de f(x): x = - 4 (vertical) e y = 0 (horizontal)

Assíntotas de g(x): x = 2 (vertical) e y = -1 (horizontal)

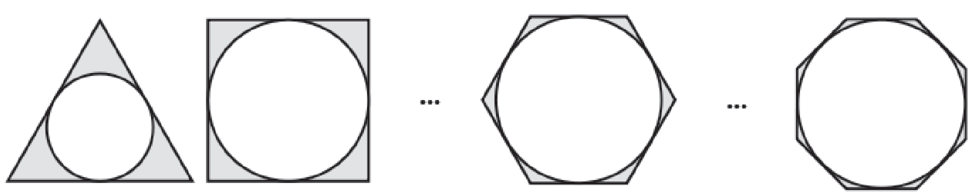
Assíntotas de h(x): x = -2 e x = 2 (verticais) e y = 0 (horizontal)

A última atividade tem como objetivo demonstrar a fórmula para o cálculo da área de um círculo através do conceito de limite, mostrando uma aplicação do conteúdo. Deve ser aplicada após as atividades de limites no infinito, pois o aluno precisa estar familiarizado com a ideia. Pode também, ser aplicada no 2º ano do ensino médio, antes da aula sobre sólidos geométricos, na revisão sobre áreas de figuras planas. Fazendo, assim, uma associação com o conteúdo de limite visto no 1º ano. O tempo previsto para atividade é de 50 a 60 minutos.

ATIVIDADE 7 – VERSÃO COMENTADA

Observe as figures abaixo, que mostram polígonos regulares circunscritos a uma circunferência.

Figura 7: Polígonos circunscritos à circunferência



Fonte: Wikipédia

a) O que ocorrerá com área dos polígonos regulares circunscritos se continuarmos considerando polígonos com um número cada vez maior de lados?

R: As áreas dos polígonos se aproximarão cada vez mais da área do círculo.

Observação: Nesta questão, o professor pode construir com a turma a demonstração da fórmula utilizada para o cálculo da área do círculo.

Para qualquer polígono regular, a área é dada por:

$$S = \frac{a.n.l}{2}$$

onde:

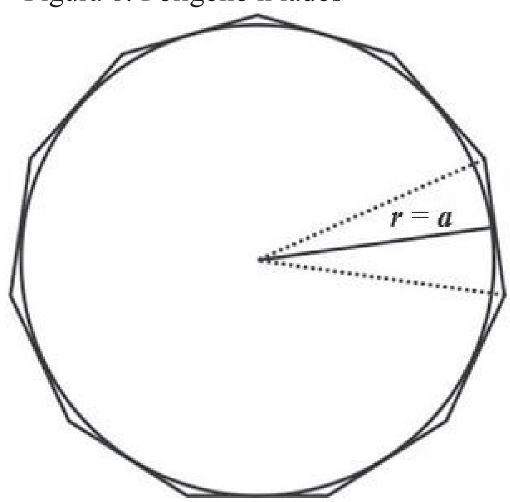
a é o comprimento da apótema do polígono

n é o número de lados do polígono

l é comprimento do lado do polígono

Construímos, então, um círculo de raio r inscrito a um polígono regular de n lados. O apótema deste polígono é igual ao raio do círculo.

Fígura 8: Polígono n lados



Fonte: www.obaricentrodamente.blogspot.com.br

Representamos por:

S_C *a área do círculo*

S_P *a área do polígono*

P o perímetro do polígono

C a circunferência do círculo

Então:

$$S_P = \frac{r.n.l}{2} \cong S_C \qquad e \qquad P = n.l \cong C$$

Além disso, se n cresce ilimitadamente, o polígono de n lados se aproxima do círculo inscrito e obtemos os limites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r.n.l}{2} = S_C \quad (I) \qquad\qquad e \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} n.l = C \quad (II)$$

Uma vez que π é a razão da circunferência pelo diâmetro de um círculo, temos que:

$$\pi = \frac{C}{D} = \frac{C}{2r} \qquad (III)$$

onde D é o diâmetro do círculo e D = 2r

Então, se substituirmos (II) em (III), obtemos:

$$\pi = \frac{C}{2r} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} n.l}{2r} = \lim_{n\to\infty} \frac{n.l}{2r} \qquad (IV)$$

Se multiplicarmos o numerador e o denominador de (I) por r, obtemos:

$$S_C = \lim_{n\to\infty} \frac{r.n.l}{2}.\frac{r}{r} = \lim_{n\to\infty} \frac{r^2.n.l}{2r} = r^2.\lim_{n\to\infty} \frac{n.l}{2r} \qquad (V)$$

Mas, de (IV) temos que:

$$\pi = \lim_{n\to\infty} \frac{n.l}{2r}$$

e substituindo em (V), obtemos:

$S_C = \pi r^2$,

que é a fórmula para o cálculo da área do círculo.

CONCLUSÃO

Neste trabalho apresentamos uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio através de atividades contextualizadas sobre limites, que podem ser introduzidas logo no início do curso.

O objetivo é permitir o acesso a elementos de Cálculo, não ficando restrito apenas à graduação. O tema é muito rico e, portanto, torna o aprendizado mais eficiente por permitir ao aluno aplicar os conceitos adquiridos em divervas áreas do conhecimento; além de servir como introdução para os futuros universitários que terão Cálculo na grade curricular, visto que diversos cursos apresentam a disciplina no currículo, como já foi dito no corpo da dissertação. Assim, os problemas enfrentados na transferência do ensino médio para o superior podem ser minimizados.

Com exceção das escolas públicas de referência como colégios de aplicação e escolas federais, o ensino público brasileiro apresenta um cenário muito preocupante. Alunos despreparados e professores desmotivados são problemas cada vez mais presentes nos dias atuais.

De fato, precisamos investir muito para que a proposta “saia do papel”, pois temos diversos problemas a serem enfrentados. A dificuldade em matemática apresentada pelos alunos do ensino médio e a resistência por parte de muitos professores a novas ideias são pontos que dificultam a implementação da proposta e precisam ser trabalhados.

Ressaltamos ainda que qualquer mudança visando melhoria no ensino de matemática requer esforço e dedicação, sem os quais será impossível prosseguir.

Por fim, destacamos que este trabalho tem o intuito de dar sugestões e fornecer ideias que permitam que esses assuntos sejam tratados no ensino médio, servindo de inspiração para professores que desejarem incluir tais atividades em seu planejamento. O professor que desejar pode fazer uso, na íntegra, das atividades aqui sugeridas, ou ainda, selecionar as atividades conforme sua necessidade para o desenvolvimento de suas aulas de matemática.

Assim, com este trabalho esperamos contribuir para melhoria da qualidade do ensino de matemática no país.

REFERÊNCIAS

ÁVILA, G. O Ensino do Cálculo no 2º Grau. *Revista do Professor de Matemática*, n. 18, p.1-9. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 1991.

______. Limites e Derivadas no Ensino Médio? *Revista do Professor de Matemática*, n. 60, p.30-38. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 2006.

BIANCHINI, E.; PACCOLA, H. *Matemática*. Editora Moderna, 1ª edição, 200p. São Paulo, 2004.

DANTE, L. R. *Matemática Contexto e Aplicações*. Editora Ática, 1ª edição, 264p. São Paulo, 2011.

DOMINGUINI, L.; GOMES, S. F.; ALVES, E. S. B. *Limite de uma função: Conteúdo viável para o ensino médio?* II CNEM - Congresso Nacional de Educação Matemática. Ijuí, 2011. Disponível em: <http://www.projetos.unijui.edu.br/matematica/cnem/cnem/principal/re/PDF/RE48.pdf> Acesso em: 1 set, 2013.

DUCLOS. R.C. Cálculo no 2º grau. *Revista do Professor de Matemática*, n. 20, p. 26-30. Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), Rio de Janeiro, 1992.

FRANCHI, R. H. O. Curso de cálculo: Uma proposta alternativa. Temas e Debates. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, n. 6, p. 39-43. São Paulo, 1995.

GUEDES, A. G.; ASSIS, M. M. A. *Cálculo Diferencial e Integral no ensino médio: Uma análise nas escolas de ensino médio da cidades de Natal/RN*. II EREM – Encontro Regional de Educação Matemática. Natal, 2009. Disponível em: <http://www.sbemrn.com.br/site/II%20erem/comunica/doc/comunica3.pdf>. Acesso em: 13 nov, 2013.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C.; MACHADO, N. J. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Atual Editora, 6ª edição, 263p. São Paulo, 2011

MOLON, J. *Cálculo no ensino médio: Uma abordagem possível e necessária com auxílio do software Geogebra*. PROFMAT/UFSM. Santa Maria, 2013. Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/123456789/165/2011_00024_JAQUELINE_MOLON.pdf?sequence=1>. Acesso em: 1 set, 2013

PAIVA, M. *Matemática*. Editora Moderna, 1ª edição, 656 p. São Paulo, 1995.

PALIS, G. R. Computadores em cálculo: uma alternativa que não se justifica por si mesma. Temas e Debates. *Revista da Sociedade Brasileira de Educação Matemática*, n.6, p. 22-38. São Paulo, 1995.

PEREIRA, V. M. C. *Cálculo no ensino médio: Uma proposta para o problema da variabilidade*. UFRJ. Rio de janeiro, 2009. Disponível em: <http://www.pg.im.ufrj.br/pemat/13%20Vinicius%20Pereira.pdf>. Acesso em: 6 jan, 2014.

SMOLE, K. T.; DINIZ, M. I. *Matemática: Ensino Médio*. Editora Saraiva, 6ª edição, 352p. São Paulo, 2010.

SPINA, C.O.C. *Modelagem matemática no processo ensino-aprendizagem do cálculo diferencial e integral para o ensino médio.* Universidade Estadual Paulista. Rio Claro, 2002. Disponível em: <http://www.athena.biblioteca.unesp.br/exlibris/bd/brc/33004137031P7/2002/spina_coc_me_rcla.pdf>. Acesso em: 16 fev, 2014.

VIANNA, B. *Cálculo no ensino Médio: Despertando ideias sobre o infinito.* PROFMAT/IMPA, Rio de Janeiro. 2013. Disnponível em: <file:///C:/Users/HelderRejane/Downloads/2011_00212_BRUNO_VIANNA_DOS_SANTOS%20(1).pdf>. Acesso em: 6 jan, 2014.

WINSLOW, C.; GRONBAEK, N. Klein's double discontinuity revisited: what use is university mathematics to high school calculus? *ZDM (Revista Internacional de Educação Matemática)*, 29 p., 2013. Disponível em: <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1307/1307.0157.pdf>. Acesso em: 25 out, 2013.

XAVIER, C.; BARRETO, B. *Matemática Aula por Aula*. FTD, 2ª edição, 336p. São Paulo, 2005.

APÊNDICE A – Questionário aplicado aos professores entrevistados

Caros professores,

o questionário abaixo faz parte da pesquisa que estou realizando para o meu Trabalho de Conclusão de Curso do PROFMAT cujo tema é "Uma proposta para introdução de noções de Cálculo no ensino médio".

Obrigada pela sua colaboração!

Rejane Floret

Perfil dos colaboradores:

1) Sexo: ( ) F ( ) M

2) Idade(anos): ( ) 20 a 30 ( ) 31 a 40 ( ) 41 a 50 ( ) mais de 50

3) Formação:

( ) Licenc. em Matemática ( ) Licenc. em área correlata com a Matemática ( ) Outros

4) Instituição em que leciona Matemática:

( ) Escola Pública ( ) Escola privada ( ) Outras

5) Há quanto tempo ministra ou ministrou aulas de Matemática?

( ) 1 a 5 anos ( ) 6 a 10 anos ( ) 11 a 15 anos

( ) 16 a 20 anos ( ) 21 a 25 anos ( ) mais de 25 anos

6) Possui especialização em Matemática?

( ) Sim ( ) Não ( ) Estou cursando

Como foi sua graduação e o curso de Cálculo Diferencial e Integral I?

1) Em relação à formação que lhe foi oferecida pela instituição onde fez a graduação:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

2) Embasamento teórico no curso de Cálculo I:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

3) Estratégias de ensino utilizadas pelo professor de Cálculo I durante sua formação:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

4) Material didático utilizado (livro texto) pelo professor de Cálculo I na licenciatura:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

5) Outros recursos didáticos (computadores,oficinas, etc.) utilizados pelos professores durante as aulas de Cálculo I na Licenciatura:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

6) Em relação à didática dos professores ministrando aulas de Cálculo I na licenciatura:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

7) Interesse dos professores de Cálculo I em apresentar aplicações práticas desta disciplina:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

Sobre a introdução de elementos de Cálculo I no Ensino médio:

1) Viabilidade para ensinar elementos de Cálculo I no Ensino médio:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

2) Sobre o seu preparo e interesse em ensinar elementos de Cálculo I no Ensino Médio atualmente:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

3) A adequação do material didático para o ensino elementos de Cálculo I no Ensino médio:

( ) Péssimo ( ) Ruim ( ) Regular ( ) Bom ( ) Excelente

4) Grau de importância para o aluno no Ensino médio aprender elementos de Cálculo I:

( ) Muito baixo ( ) Baixo ( ) Regular ( ) Alto ( ) Muito alto

5) Grau de dificuldade que o ensino de elementos de Cálculo I apresentaria para seus alunos do Ensino médio:

( ) Muito baixo ( ) Baixo ( ) Regular ( ) Alto ( ) Muito alto

Se desejar, use o espaço abaixo para fazer observações:

____

____

____

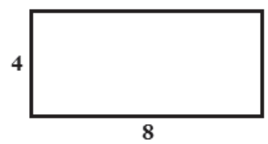
____

Muito Obrigada!

APÊNDICE B – Atividades na versão do aluno

ATIVIDADE 1

Com auxílio de uma cartolina, régua e tesoura vamos confeccionar uma figura de forma retangular de área igual a 32 cm^2, com 8 cm de comprimento e 4 cm de largura.



Vamos cortar metade dessa figura, em seguida, metade da metade que sobrou, depois metade da parte que ainda sobrou, e assim por diante, num total de 8 cortes.

a) Ao efetuar o primeiro corte e separar uma das partes, qual é a área da parte separada?

b) Ao efetuarmos o segundo corte na parte que sobrou e separar uma das partes, qual será a área total das partes separadas no primeiro e segundo cortes?

c) Seguindo esse mesmo procedimento, determine a área total das partes separadas após o 3º, 4º, 5º, 6º, 7º e 8º cortes.

d) Organize os dados obtidos na tabela abaixo:

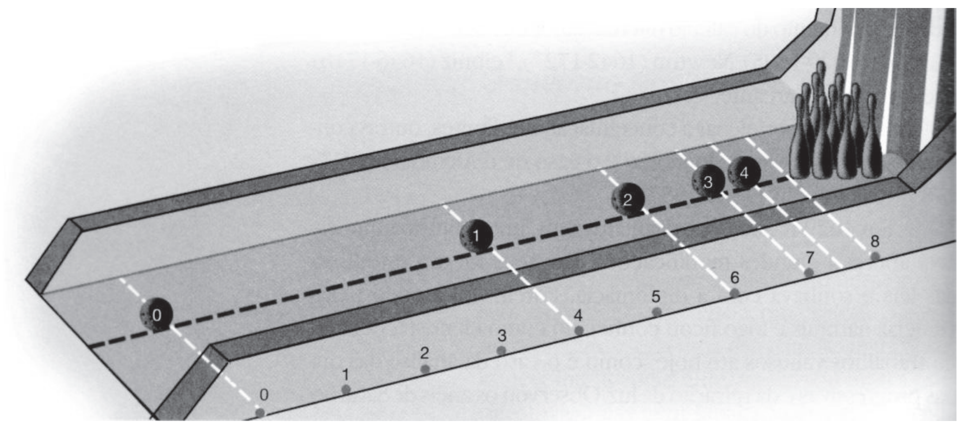
Número de cortes (n)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Área total das partes separadas (y)									

e) O que acontece com área da figura se repetirmos esse processo sucessivamente?

ATIVIDADE 2

Uma bola de boliche foi jogada em uma pista de 8 m, sendo que, em cada segundo, percorre metade da distância que a separa do primeiro pino.

Considere a função d(t) que faz corresponder a cada valor t de tempo (t ∈ ℕ), em segundos, um único valor d, em metros, da distância percorrida por essa bola.



Fonte: Xavier e Barreto (2005, p.222)

a) Complete a tabela abaixo:

t (s)	d (m)
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	

b) O que acontece a cada segundo que passa?

ATIVIDADE 3

Num teste de um protótipo de um trem, que se move ao longo de um monotrilho retilíneo, engenheiros determinam a velocidade média do protótipo, em metros por segundo, a partir da origem da trajetória, no instante t, por:

$$v(t) = \frac{4.(t^2 - 4)}{t - 2}$$

Qual é a velocidade média v(t) para os tempos:

- menores que 2s

a) t = 1 s

b) t = 1,2 s

c) t = 1,4 s

d) t = 1,6 s

e) t = 1,8 s

- maiores que 2s

f) t = 3 s

g) t = 2,8 s

h) t = 2,6 s

i) t = 2,4 s

j) t = 2,2 s

k) Esboce o gráfico da função v(t).

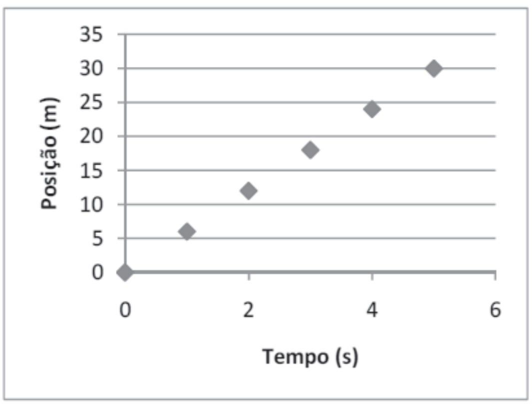
l) O que acontece com a função quando t se aproxima de 2 s?

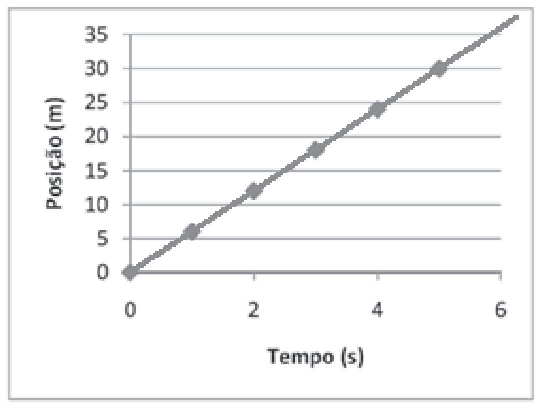
ATIVIDADE 4

Um carro está em movimento progressivo passa pela origem da trajetória em $t=0s$, com uma velocidade escalar constante de $6m/s$. A tabela a seguir demonstra as posições do objeto ao longo do tempo.

t (s)	x (m)
0	0
1	6
2	12
3	18
4	24
5	30

Plotando os dados em um gráfico, posição (x) em função do tempo (t), é possível explorar limites de função.





Fonte: Dominguini, Gomes, Alves (2011, p.6)

a) O que acontece com os valores de posição, quando o tempo se aproxima de 4 s?

b) O que acontece com os valores de posição quando o tempo se aproxima de zero?

ATIVIDADE 5

Seja a função f: $\mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ definida por f(x) = $\frac{1}{x}$.

a) Com o auxílio de uma calculadora, complete a tabela abaixo:

	x = 1	x = 10	x = 100	x = 1000	x = 10000	x = 100000	x = 1000000
f(x)							

b) Se continuarmos aumentando o valor x, o que vai acontecer com f(x)?

c) Complete a tabela a seguir:

	x = 1	x = 0,1	x = 0,01	x = 0,001	x = 0,0001	x = 0,00001	x = 0,000001
f(x)							

d) Se continuarmos diminuindo o valor de x (valores positivos), o que vai acontecer com f(x)?

e) Complete a tabela abaixo:

	x = -1	x = -10	x = -100	x = -1000	x = -10000	x = -100000	x = -1000000
f(x)							

f) O que acontece com f(x), se continuarmos diminuindo o valor de x, isto é, aumentar o valor absoluto dos números negativos?

g) Complete a tabela a seguir:

	x=-1	x=-0,1	x=-0,01	x=-0,001	x=-0,0001	x=-0,00001	x=-0,000001
f(x)							

h) O que acontece com f(x), se continuarmos aumentando o valor de x (valores negativos), isto é, diminuir o valor absoluto dos números negativos?

i) Esboce o gráfico da função. Se necessário, atribua outros valores para x.

ATIVIDADE 6

São dadas as seguintes expressões algébricas:

$\boxed{f(x) = \frac{3}{x+4}}$ $\boxed{g(x) = -\frac{x}{x-2}}$ $\boxed{h(x) = \frac{1}{x^2-4}}$

a) Para que essas expressões definam funções, determine seus respectivos domínios maximais:

b) Com o auxílio do *software Geogebra,* construa seus respectivos gráficos.

c) Você consegue perceber alguma semelhança entre esses gráficos? O que acontece nos pontos que não pertencem ao domínio das funções?

d) Determine as assíntotas verticais e horizontais dessas funções.

ATIVIDADE 7

Observe as figures abaixo, que mostram polígonos regulares circunscritos a uma circunferência.

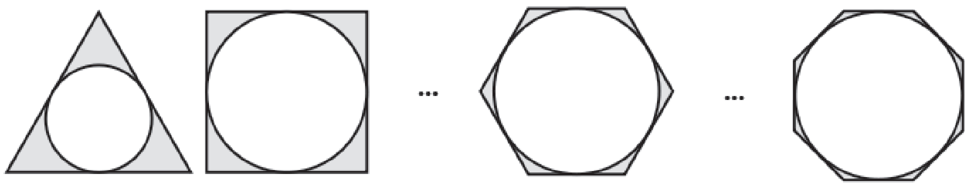


Figura 7: Polígonos circunscritos à circunferência. Fonte: Wikipédia

a) O que ocorrerá com área dos polígonos regulares circunscritos se continuarmos considerando polígonos com um número cada vez maior de lados?

ANEXO – Observações feitas pelos professores entrevistados na pesquisa quantitativa

"O ensino de Cálculo I mudou minha visão de matemática. A partir da compreensão de derivadas e integrais uma porta nova se abre para muitas aplicações e generalizações de conceitos. Inclusive aplicações de teorias nas outras áreas de exatas que, sem Cálculo, se resumem a deltas ao invés de integrais (Física, por exemplo). Faço outro curso superior no momento e é realmente surpreendente ver que, 10 anos depois de cursar Cálculo I, as mesmas ideias simples do meu primeiro semestre de faculdade ainda são usadas e aplicadas em praticamente todas as áreas do conhecimento: Mecânica dos solos, Mecânica dos fluidos, Resistência dos Materiais, Hidrologia, Hidráulica... É um campo de aplicações muito extenso, cujas ideias e teorias complexas são traduzidas de forma simples por meio de ferramentas de cálculo. Sem contar a compreensão, dentro da matemática teórica mesmo, que o Cálculo traz para o conceito de função (que em minha opinião é o mais importante do ensino médio). Entretanto não acho que deveria simplesmente ser ensinado de forma teórica aos alunos de ensino médio. É importantíssima a associação com ferramentas tecnológicas. Existem diversos programas que podem auxiliar o professor a trabalhar o Cálculo de forma simples e intuitiva, ajudando os alunos a adquirir uma boa visualização gráfica (geométrica) dos conceitos mais importantes"

"Na escola pública é impossível, na particular precisa mais tempo pois é difícil vencer o conteúdo com bons índices de aprovação."

"Na minha opinião, o ensino médio deveria passar por uma mudança radical, do tipo: os alunos deveriam ingressar no ensino médio por áreas específicas como ciências exatas, humanas, saúde, e estudar temas de seu interesse de uma forma mais direcionada, aí sim o ensino de Cálculo Diferencial e Integral teria espaço e tempo merecidos e necessários."

"Nesses últimos anos venho lecionando Matemática para o ensino médio na EJA, sendo assim, acredito ser um pouco difícil trabalhar cálculo diferencial e integral, mas, para o ensino regular, em algumas escolas, isso é possível. Me formei no ensino técnico na ETE (hoje ETEC) e no 4º ano tive noções de Limites, Derivadas e Integrais e suas aplicações. Achei muito interessante, principalmente porque estudava Mecânica."

“Infelizmente, no ensino médio me deparo cada vez mais com alunos que saem do ensino fundamental ainda com muita dificuldade com as 4 operações básicas o que, nem precisaria dizer, torna qualquer outro assunto na área de matemática como quase impossível de ser ministrado. Nossos alunos estão entrando cada vez mais nas universidades sabendo menos de tudo.”

“Lecionei disciplinas de Cálculo durante 4 anos. Acho muito importante os alunos terem uma noção básica de Cálculo no Ensino Médio. Eu, antes da minha graduação, estudei em escola publica estadual e senti dificuldades no Cálculo I, pela falta de embasamento. Na minha experiência como professora, vi que as turmas de Engenharia tinham muito mais facilidade e desempenho melhor em Cálculo do que as turmas de Matemática propriamente. Visto que os alunos que cursam engenharia na Uerj, em sua maioria vieram de Instituições Federais (Cefets) onde possuem Calculo no seu programa de Ensino Médio.”

“Sou bacharel em química logo, não tenho a licenciatura. Fiz a resolução 2 de 97 para cursar matemática mas foram apenas 6 encontros para discutir o conteúdo pedagógico. A derivada e a integral que tive no bacharelado foi na verdade aplicação de regras “como a do tombo” não houve uma demonstração ou aplicação deste cálculo no curso que fazia.”

“A questão da viabilidade dos elementos de Cálculo I no ensino médio varia de turma para turma. Questões como maturidade e aptidão não podem ser dispensadas.”

“A matemática do ensino médio ainda está muito voltada para os alunos que pretendem seguir a área tecnológica. Os alunos com interesse em outras áreas, além das dificuldades de conhecimentos prévios que todos os alunos (de modo geral) têm, não demonstram nenhum interesse pela matemática, uma vez que os exemplos contextualizados não atendem adequadamente a área que pretende seguir.”

“O uso do Cálculo no ensino médio seria muito interessante, o problema é o nível de dificuldade dos alunos.”

“Acho bom o ensino de Cálculo I no ensino médio para algumas turmas, uma vez que alguns vestibulares como IME, ITA e AFA, ou mesmo cursos técnicos do CEFET-RJ o utilizam.”