



RENATA DE LACERDA MARTINS VULCANI

GRAFOS EULERIANOS E APLICAÇÕES

CAMPINAS  
2015





UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística  
e Computação Científica

RENATA DE LACERDA MARTINS VULCANI

GRAFOS EULERIANOS E APLICAÇÕES

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestra

**Orientador:** Profa. Dra. Celia Picinin de Mello

**Coorientador:** Profa. Dra. Anamaria Gomide

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELA ALUNA RENATA DE LACERDA MARTINS VULCANI, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. CELIA PICININ DE MELLO.

Assinatura da Orientadora

A handwritten signature in cursive script, appearing to read "Celia", is written over a horizontal line.

Assinatura da Coorientadora

A handwritten signature in cursive script, appearing to read "Anamaria", is written over a horizontal line.

CAMPINAS  
2015

Ficha catalográfica  
Universidade Estadual de Campinas  
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica  
Ana Regina Machado - CRB 8/5467

V976g Vulcani, Renata de Lacerda Martins, 1973-  
Grafos eulerianos e aplicações / Renata de Lacerda Martins Vulcani. –  
Campinas, SP : [s.n.], 2015.

Orientador: Celia Picinin de Mello.

Coorientador: Anamaria Gomide.

Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas,  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Teoria dos grafos. 2. Teoria dos grafos eulerianos. I. Mello, Celia Picinin  
de, 1950-. II. Gomide, Anamaria, 1949-. III. Universidade Estadual de Campinas.  
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Informações para Biblioteca Digital

**Título em outro idioma:** Eulerian graphs and applications

**Palavras-chave em inglês:**

Graph theory

Eulerian graph theory

**Área de concentração:** Matemática em Rede Nacional

**Titulação:** Mestra

**Banca examinadora:**

Celia Picinin de Mello [Orientador]

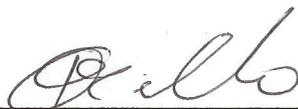
Claudina Izepe Rodrigues

Orlando Lee

**Data de defesa:** 25-02-2015

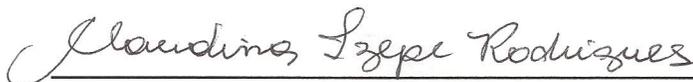
**Programa de Pós-Graduação:** Matemática em Rede Nacional

**Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 25 de fevereiro de 2015 e  
aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.**



---

**Prof.(a). Dr(a). CELIA PICININ DE MELLO**



---

**Prof.(a). Dr(a). CLAUDINA IZEPE RODRIGUES**



---

**Prof.(a). Dr(a). ORLANDO LEE**



## Abstract

In this work we present a brief introduction to graph theory, explaining some basic concepts and highlighting Eulerian graphs. We use the concept of Eulerian graphs to solve some well known puzzles and games. We finalize by presenting some applications involving graphs that are not necessarily Eulerian.

**Keywords:** graph, Eulerian graph, applications of Graph Theory.

## Resumo

Neste trabalho apresentamos uma breve introdução à teoria dos grafos, elucidando alguns conceitos básicos e destacando grafos eulerianos. Usamos o conceito de grafos eulerianos para resolver alguns passatempos e jogos conhecidos. Finalizamos apresentando algumas aplicações que envolvem grafos que não são necessariamente eulerianos.

**Palavras-chave:** grafos, grafos eulerianos, aplicações de grafos.



# Sumário

|   |           |
|---|-----------|
| Dedicatória   | xi        |
| Agradecimentos                                      | xiii      |
| <b>1 MOTIVAÇÃO</b>                                  | <b>3</b>  |
| 1.1 Exemplos . . . . .                              | 3         |
| <b>2 HISTÓRICO</b>                                  | <b>8</b>  |
| <b>3 CONCEITOS BÁSICOS</b>                          | <b>11</b> |
| 3.1 Grafos . . . . .                                | 11        |
| 3.2 Subgrafos . . . . .                             | 14        |
| 3.3 Grau de um vértice . . . . .                    | 14        |
| 3.4 Grafos regulares . . . . .                      | 16        |
| 3.5 Percursos em um grafo . . . . .                 | 20        |
| 3.6 Grafos conexos . . . . .                        | 22        |
| 3.7 Grafos bipartidos . . . . .                     | 24        |
| <b>4 ISOMORFISMO DE GRAFOS</b>                      | <b>29</b> |
| 4.1 Grafos isomorfos . . . . .                      | 29        |
| 4.2 Contagem de Grafos . . . . .                    | 33        |
| <b>5 GRAFOS EULERIANOS</b>                          | <b>34</b> |
| 5.1 Trilha euleriana fechada . . . . .              | 34        |
| <b>6 APLICAÇÕES DE GRAFOS EULERIANOS</b>            | <b>39</b> |
| 6.1 Desenhando sem tirar o lápis do papel . . . . . | 39        |
| 6.1.1 A casinha . . . . .                           | 39        |
| 6.2 Unindo pontos . . . . .                         | 41        |
| 6.3 O jogo de dominó . . . . .                      | 41        |
| 6.4 O problema chinês do carteiro. . . . .          | 45        |
| 6.5 Resolvendo o passatempo da seção 6.1. . . . .   | 47        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>7</b> | <b>OUTRAS APLICAÇÕES</b>                                      | <b>50</b> |
| 7.1      | O desafio dos quatro cubos (insanidade instantânea) . . . . . | 50        |
| 7.2      | O bode, a onça e o capim . . . . .                            | 54        |
| 7.3      | Os cavalos do xadrez . . . . .                                | 57        |
| 7.4      | Amizades e triângulos . . . . .                               | 59        |
|          | <b>Referências</b>  | <b>62</b> |

*Aos meus familiares e amigos.  
Para a honra e glória do nome de Jesus!*



# Agradecimentos

- A Deus, pela vida, por possibilitar que eu aprenda a cada dia, por iluminar e abençoar minha trajetória, me levantando quando caio e me dando forças quando enfraqueço. Sem Ele nada sou.
- Aos meus pais, Ozias e Odete, pelo incentivo e apoio constante em todas as etapas da minha vida, por me ensinarem o caminho a seguir.
- Ao meu amado esposo, Alessandro Vulcani, pelo amor, paciência, conselhos, força, incentivo, compreensão nas ausências em virtude dos estudos e por sempre acreditar em mim.
- Aos meus lindos e amados filhos Gabriel e Laura, por serem minha motivação para lutar sempre e por me compreenderem quando precisei me ausentar para estudar.
- Às queridas professoras Célia Picinin de Mello e Anamaria Gomide pela orientação, dedicação, paciência, incentivo, sabedoria e carinho, os quais foram fundamentais para a realização deste trabalho e servem de exemplo de como ser uma excelente professora.
- A todos os professores que participaram da minha vida acadêmica.
- Aos professores do PROFMAT - UNICAMP, que contribuíram com nosso desenvolvimento e enriqueceram nossos conhecimentos durante o percurso acadêmico.
- A UNICAMP, por ter abraçado o programa PROFMAT.
- A CAPES, pelo apoio financeiro.
- Aos colegas do PROFMAT - UNICAMP da turma 2012, pelo companheirismo, pelos momentos de estudo e aprendizado que foram tão importantes para todos e, principalmente, pela amizade construída durante o curso, a qual espero que dure para sempre. Aprendi a amar cada um de vocês!
- Enfim, a todos aqui citados e aqueles cujos nomes não aparecem, que me ensinaram, incentivaram e ajudaram, direta ou indiretamente, contribuindo assim, para que eu pudesse concluir mais esta etapa; meu muito obrigada.



# Lista de Ilustrações

|      |   |    |
|------|---|----|
| 1.1  | Grafo do campeonato de futebol. . . . .                     | 4  |
| 1.2  | Grafo dos estados brasileiros e suas fronteiras. . . . .    | 4  |
| 1.3  | Molécula de Água ( $H_2O$ ). . . . .                        | 5  |
| 1.4  | Butano $C_4H_{10}$ . . . . .                                | 5  |
| 1.5  | Cicloexano $C_6H_{12}$ . . . . .                            | 5  |
| 1.6  | Subconjuntos com cardinalidades decrescentes. . . . .       | 6  |
| 1.7  | Planta baixa de uma casa. . . . .                           | 6  |
| 1.8  | Grafo da conexão dos cômodos da casa da figura 1.7. . . . . | 7  |
|      |   |    |
| 2.1  | As Pontes de Königsberg. . . . .                            | 8  |
| 2.2  | Esquema de Euler para as pontes de Königsberg. . . . .      | 9  |
|      |   |    |
| 3.1  | Uma representação do grafo $G$ . . . . .                    | 12 |
| 3.2  | Outra representação do grafo $G$ . . . . .                  | 12 |
| 3.3  | Exemplo de grafo simples. . . . .                           | 14 |
| 3.4  | (a) Grafo $G$ , (b) e (c) Subgrafos de $G$ . . . . .        | 14 |
| 3.5  | Grafos 3-regulares ou cúbicos. . . . .                      | 16 |
| 3.6  | Exemplo de grafos completos. . . . .                        | 16 |
| 3.7  | Novo grafo do campeonato de futebol. . . . .                | 17 |
| 3.8  | Ciclo $C_6$ . . . . .                                       | 18 |
| 3.9  | $k$ -cubos . . . . .  | 18 |
| 3.10 | Os sólidos de Platão. . . . .                               | 19 |
| 3.11 | Os sólidos de Platão e os elementos do universo. . . . .    | 20 |
| 3.12 | Grafos platônicos . . . . .                                 | 20 |
| 3.13 | Exemplos de percursos . . . . .                             | 21 |
| 3.14 | Grafo $H$ . . . . .   | 22 |
| 3.15 | Grafos conexo e desconexo . . . . .                         | 22 |
| 3.16 | Grafo conexo . . . . .                                      | 23 |
| 3.17 | Grafo $G$ desconexo. . . . .                                | 24 |
| 3.18 | Componentes conexos do grafo $G$ . . . . .                  | 24 |
| 3.19 | Exemplos de grafos bipartidos. . . . .                      | 25 |
| 3.20 | Grafo não bipartido. . . . .                                | 25 |
| 3.21 | Exemplos de grafos bipartidos completos. . . . .            | 26 |
| 3.22 | Grafo bipartido e não completo. . . . .                     | 26 |

|      |   |    |
|------|---|----|
| 3.23 | O 3-cubo é bipartido. . . . .   | 27 |
| 3.24 | Caminhos de comprimento mínimo entre $u$ e $v$ e $v$ e $w$ . . . . .  | 28 |
| 4.1  | Os grafos $G$ e $H$ não são iguais. . . . .                           | 29 |
| 4.2  | Grafos isomorfos. . . . .   | 30 |
| 4.3  | Grafos simples isomorfos. . . . .                                     | 31 |
| 4.4  | Grafos não isomorfos. . . . .   | 31 |
| 4.5  | Conjunto dos grafos simples com três vértices. . . . .                | 32 |
| 4.6  | Grafos não rotulados com três vértices. . . . .                       | 32 |
| 5.1  | Grafo Euleriano. . . . .  | 34 |
| 5.2  | Grafo $G$ . . . . .   | 36 |
| 5.3  | Componentes conexos de $G$ . . . . .                                  | 37 |
| 6.1  | Diagrama de passatempo. . . . .                                       | 39 |
| 6.2  | Desenho da casinha. . . . .   | 40 |
| 6.3  | Trilha euleriana (aberta). . . . .                                    | 40 |
| 6.4  | Novo desenho da casinha. . . . .                                      | 41 |
| 6.5  | Exemplo da peça 1 – 3 do dominó. . . . .                              | 42 |
| 6.6  | Grafo formado pelo jogo de dominó. . . . .                            | 42 |
| 6.7  | Grafo formado pelo jogo de dominó contendo os duplos. . . . .         | 43 |
| 6.8  | Jogo de dominó fechado. . . . .                                       | 43 |
| 6.9  | Peças remanescentes. . . . .  | 44 |
| 6.10 | Jogo de dominó incompleto. . . . .                                    | 45 |
| 6.11 | Grafo do jogo de dominó incompleto. . . . .                           | 45 |
| 6.12 | Grafo $G$ do mapa do carteiro. . . . .                                | 46 |
| 6.13 | Grafo $G'$ do mapa do carteiro. . . . .                               | 47 |
| 6.14 | Grafo $G$ do diagrama da seção 6.1. . . . .                           | 48 |
| 6.15 | Grafo euleriano obtido de $G$ . . . . .                               | 48 |
| 6.16 | Grafo do diagrama com exatamente dois vértices de grau ímpar. . . . . | 49 |
| 7.1  | Jogo da Parkerk Brothers. . . . .                                     | 50 |
| 7.2  | Planificações dos quatro cubos. . . . .                               | 51 |
| 7.3  | Como empilhar os cubos? . . . . .                                     | 51 |
| 7.4  | Grafos correspondentes aos cubos. . . . .                             | 52 |
| 7.5  | Grafo $G$ . . . . .   | 52 |
| 7.6  | Grafo $G_1$ . . . . .   | 53 |
| 7.7  | Subgrafos de $G_1$ . . . . .  | 53 |
| 7.8  | Uma solução do problema dos quatro cubos. . . . .                     | 54 |
| 7.9  | Posições da onça, do bode e do capim. . . . .                         | 55 |
| 7.10 | Possibilidades de movimentos válidos. . . . .                         | 55 |
| 7.11 | Primeira solução. . . . .   | 56 |
| 7.12 | Segunda solução. . . . .  | 57 |
| 7.13 | Grafo com ciclo. . . . .  | 57 |

|  |    |
|--|----|
| 7.14 Problema do cavalo no jogo de xadrez. . . . . | 58 |
| 7.15 Enumerando as casas do tabuleiro. . . . .     | 58 |
| 7.16 Grafo dos movimentos do cavalo. . . . .       | 58 |
| 7.17 Grafos das posições 1 e 2. . . . .            | 59 |
| 7.18 Conhece ou não conhece? . . . . .             | 59 |



# Lista de Tabelas

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 3.1 | Lista de adjacências do grafo $G$ . . . . .         | 12 |
| 4.1 | Bijeções entre $L$ e $M$ . . . . .                  | 30 |
| 4.2 | Número de grafos simples com $n$ vértices . . . . . | 33 |



# INTRODUÇÃO

O tema deste trabalho é parte dos conteúdos de um ramo da Matemática conhecido como Matemática Discreta. A definição mais geral que se pode dar da palavra “discreta” é “aquilo que é feito de partes distintas”. Mas em Matemática este conceito é mais abstrato e o mais usual é definirmos, informalmente, a Matemática Discreta como sendo a que não é contínua. Assim, não estaríamos exagerando se disséssemos que os números reais estão para a Matemática Contínua, assim como os inteiros estão para a Matemática Discreta. Esta vem ganhando mais espaço desde o início do século *XX* em função do uso intenso de computadores, os quais trabalham com estruturas discretas.

A resolução de problemas tem um papel fundamental no ensino de Matemática desde as séries iniciais. O estudante deverá compreender que a interpretação de um problema pode ser transcrita através de uma modelagem antes de encontrar sua solução. A utilização de um desenho (grafo) para modelar problemas enriquece o conhecimento do aluno e oferece ferramentas adequadas para tomada de decisões na busca de uma solução, a qual pode ser obtida manualmente ou com o auxílio de um computador.

Apesar de não possuir nenhum conhecimento do assunto no início deste trabalho, aceitei o desafio de aprender algo novo e acabei me encantando com o tema, vislumbrando as várias possibilidades de aplicações. O objetivo deste trabalho é, portanto, fornecer um material de apoio a professores do Ensino Básico, que não possuam conhecimento sobre grafos e que desejem trabalhar o assunto em sala de aula, como apoio a algum conteúdo estudado ou, até mesmo, como forma de exercitar habilidades matemáticas e lógicas em oficinas pedagógicas.

Buscando atingir os objetivos descritos acima, organizamos nosso trabalho da seguinte forma:

- No capítulo 1 apresentamos alguns exemplos de utilização de grafos em vários ramos da ciência, destacando a relevância do assunto.
- No capítulo 2 fazemos um breve histórico do assunto, indo desde a história de Euler com as pontes de Königsberg até a conjectura do problema das quatro cores.
- No capítulo 3 esclarecemos alguns conceitos fundamentais e adotamos as definições necessárias. Também demonstramos alguns teoremas e corolários importantes.
- No capítulo 4 falamos sobre grafos isomorfos, suas aplicações e finalizamos com contagem de grafos. Aqui também são demonstrados alguns teoremas fundamentais.

- Podemos dizer que o capítulo 5 é o “coração” do nosso trabalho. Nele exploramos o conceito de grafos eulerianos, demonstramos alguns teoremas e apresentamos um algoritmo que nos diz se um grafo é ou não euleriano.
- No capítulo 6 listamos algumas aplicações para grafos eulerianos com brincadeiras de desenhar sem tirar o lápis do papel, o jogo de dominó e o problema chinês do carteiro.
- Finalmente, no capítulo 7 mostramos algumas outras aplicações para grafos nas quais não é relevante o fato de serem eulerianos ou não. Tais aplicações vão desde passatempos conhecidos como o jogo dos quatro cubos, o desafio do bode, da onça e do capim, até problemas apresentados em olimpíadas de matemática.

Assim, esperamos que o trabalho auxilie na capacitação de alunos e professores da Educação Básica a expressarem suas ideias para resolverem problemas através da teoria dos grafos.

# Capítulo 1

## MOTIVAÇÃO

Um grafo é um modelo matemático usado para representar uma coleção de objetos chamados vértices, que são ligados aos pares por outra coleção de objetos chamados arestas. Grafos são estruturas interessantes que contam com diversas aplicações, em diferentes áreas da ciência, tais como geografia, química, educação, engenharia etc, conforme [1].

Inicialmente, apresentaremos alguns exemplos do uso de grafos para modelar problemas.

### 1.1 Exemplos

**Exemplo 1.1.1.** Numa escola, algumas turmas resolveram realizar um torneio de futebol. Participaram do torneio as turmas 6A, 6B, 7A, 7B, 8A e 8B. Os jogos realizados até agora são:

- 6A jogou contra 7A, 7B, 8B;
- 6B jogou contra 7A, 8A, 8B;
- 7A jogou contra 6A, 6B;
- 7B jogou contra 6A, 8A, 8B;
- 8A jogou contra 6B, 7B, 8B;
- 8B jogou contra 6A, 6B, 7B, 8A.

Uma maneira de representar estes jogos é através de um grafo, onde as turmas são representadas por pontos (vértices) e os jogos são representados por linhas (arestas). O desenho na Figura 1.1 representa esta estrutura.

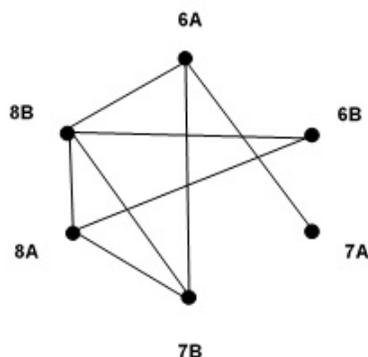


Figura 1.1: Grafo do campeonato de futebol.

**Exemplo 1.1.2.** Em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, a professora propôs aos alunos que relacionassem os estados do Brasil através de suas fronteiras. Uma forma de apresentar a solução do problema proposto é associar a cada estado um ponto e unir dois pontos se os estados correspondentes têm fronteira comum, obtendo assim um grafo.

A Figura 1.2 exibe este grafo, onde os vértices são os estados e as arestas são definidas pela função "faz fronteira com...".

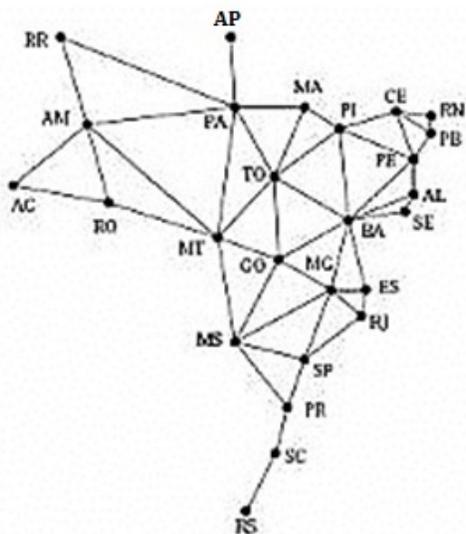


Figura 1.2: Grafo dos estados brasileiros e suas fronteiras.

**Exemplo 1.1.3.** Em Química, usamos diagramas para retratar moléculas. Esses diagramas também são grafos.

Nos grafos exibidos nas figuras 1.3, 1.4 e 1.5 os vértices são os átomos (cátions ou ânions) e as arestas são as ligações covalentes entre eles. Por exemplo, o oxigênio ( $O^{-2}$ ) precisa de 2 cátions para se estabilizar, logo ele faz duas ligações covalentes com o hidrogênio ( $H^{+1}$ ), formando a molécula de água (Figura 1.3).

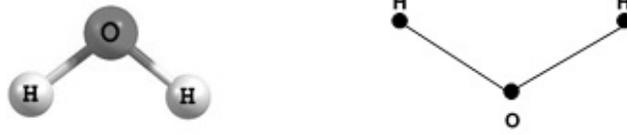


Figura 1.3: Molécula de Água ( $H_2O$ ).

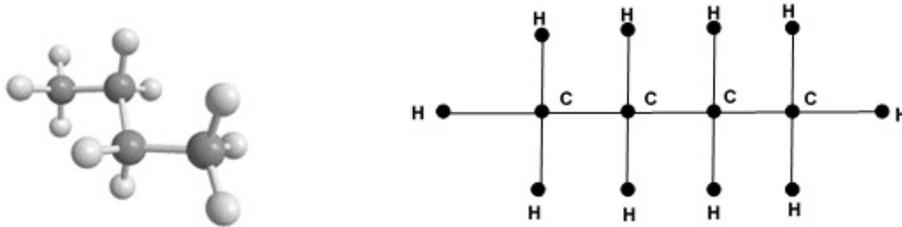


Figura 1.4: Butano  $C_4H_{10}$ .

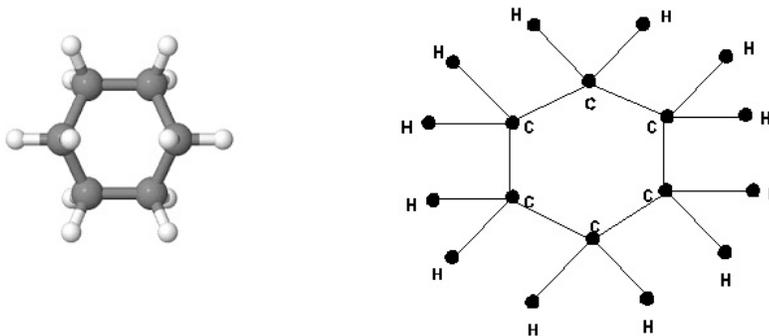


Figura 1.5: Cicloexano  $C_6H_{12}$ .

**Exemplo 1.1.4.** Os subconjuntos de um conjunto também podem ser representados como grafos. A Figura 1.6 mostra todos os subconjuntos do conjunto  $\{a, b, c, d\}$ . Cada subconjunto é representado por um vértice e uma aresta une dois subconjuntos se um é derivado de outro pela retirada de um elemento.

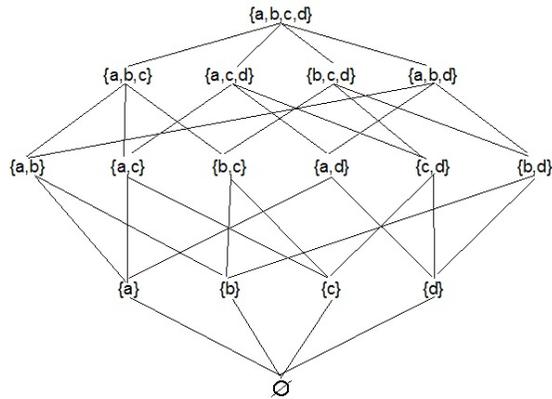


Figura 1.6: Subconjuntos com cardinalidades decrescentes.

**Exemplo 1.1.5.** Para pequenas plantas como a mostrada na figura 1.7, um diagrama é muito útil para mostrar quais cômodos têm acesso mútuo, onde os vértices representam os cômodos e as arestas, as conexões existentes entre eles. Tais diagramas são conhecidos pelos arquitetos como *diagramas de circulação*, pois são usados para analisar a movimentação de pessoas em grandes construções. Em particular, têm sido usados em projetos de aeroportos e planejamento de “layout” de supermercados, por exemplo.

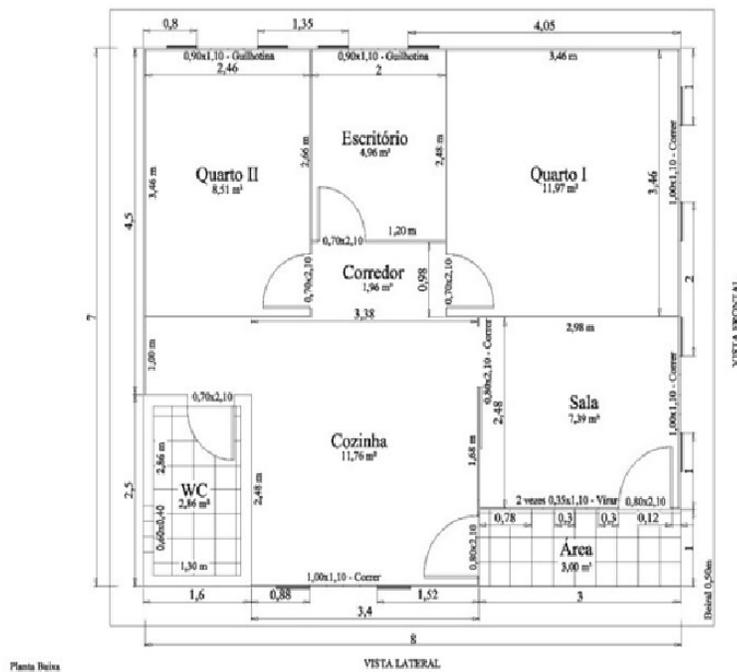


Figura 1.7: Planta baixa de uma casa.

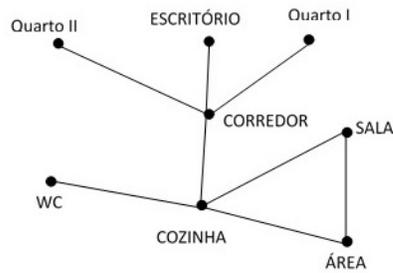


Figura 1.8: Grafo da conexão dos cômodos da casa da figura 1.7.

Neste trabalho estudaremos os grafos eulerianos e algumas aplicações que podem ser utilizadas tanto em sala de aula com alunos de Ensinos Fundamental e Médio, quanto como entretenimento em uma roda de amigos.

Existem diversos livros que tratam sobre teoria dos grafos. Para o desenvolvimento dos tópicos dos capítulos a seguir, nos concentramos nos seguintes: Graph Theory with Applications [1], Graphs: an Introductory Approach [2], Introduction to Graph Theory [3], Graph Theory [4], entre outros.

## Capítulo 2

# HISTÓRICO

Em 1736, o matemático suíço, Leonhard Euler (1707-1783) deu o “pontapé inicial” na Teoria dos Grafos solucionando o problema das sete pontes de Königsberg [5], [6] . Vamos conhecer um pouco mais sobre esse problema. Königsberg era uma pequena cidade da antiga Prússia, hoje chamada Kaliningrado, na atual Rússia. Havia sete pontes interligando as partes da cidade que era cortada por vertentes do rio Pregel, formando duas ilhas na parte central, como mostra a Figura 2.1.

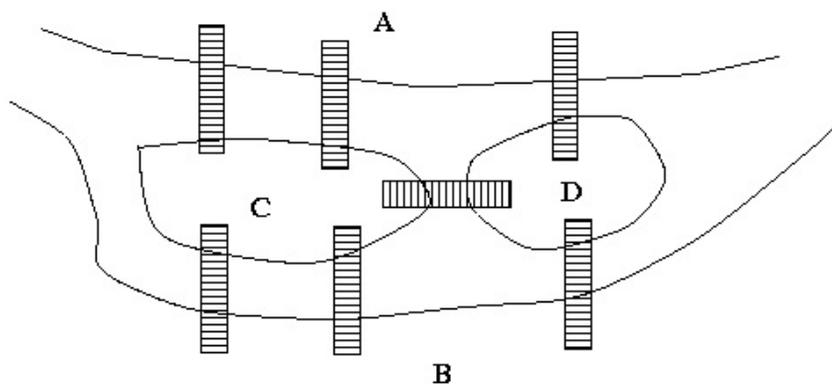


Figura 2.1: As Pontes de Königsberg.

Os moradores dessa cidade viviam se perguntando se haveria um modo de alguém, partindo de uma das margens ou de qualquer das ilhas, percorrer todas as pontes sem passar mais de uma vez por qualquer uma delas e retornar ao ponto de partida.

Ao passar pela cidade, Euler foi desafiado a resolver tal problema. Diferente dos habitantes da cidade, que usavam a questão como diversão, Euler decidiu pensar no problema de maneira mais profunda. A primeira coisa que fez foi se livrar do que estava sobrando, como casas, prédios, árvores etc.

Euler percebeu que poderia simplificar ainda mais essa representação, visualizando as margens e as ilhas como se fossem pontos A, B, C, D e as pontes como sendo arcos que unem tais pontos.

Enfim, tudo se resumiu então, em se analisar o diagrama representado pela figura 2.2, onde os arcos ligam os pontos, de acordo com a disposição das pontes dada no enunciado do problema.

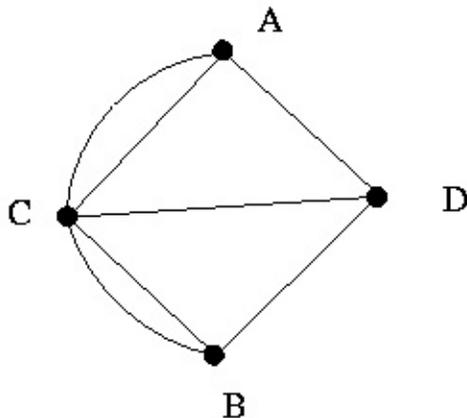


Figura 2.2: Esquema de Euler para as pontes de Königsberg.

O desenho da figura 2.2 é, provavelmente, o primeiro exemplo de um grafo a ocorrer como modelo matemático para resolver um problema. Este problema agora pode ser expresso da seguinte forma: partindo de um vértice A, B, C ou D, achar um trajeto que percorra todo o grafo sem passar mais de uma vez pela mesma aresta, retornando ao vértice inicial.

Euler chegou à conclusão de que era impossível realizar a façanha proposta. A solução do problema das pontes de Königsberg foi publicada por Euler em 1736. O título deste artigo traduzido para o português é: “A solução de um problema relacionado com a geometria da posição.” Este artigo é hoje considerado o primeiro em teoria dos grafos.

Em 1847, Gustav Robert Kirchhoff (1824 – 1887), um físico alemão, propôs a teoria de árvores (subconjunto da teoria de grafos) para resolver problemas de circuitos elétricos. Em 1857, Arthur Cayley (1821–1895), um matemático britânico, apresentou um método de enumeração de hidrocarburetos alifáticos. Em 1869, Jordan, apresentou a teoria de árvores como modelagem estritamente matemática.

Um problema muito famoso também na teoria dos grafos é o Problema das Quatro Cores, o qual data de 1852, quando Francis Guthrie, na época, estudante de liceu, estava colorindo um mapa dos condados da Inglaterra. Guthrie constatou que, com algum esforço, conseguia colorir-lo usando apenas 4 cores diferentes com a condição de que condados contíguos tivessem cores distintas. Intrigado, foi perguntar ao irmão mais velho, Frederick, já na universidade, se isto se passava com qualquer mapa.

Frederick Guthrie não conseguiu responder e foi perguntar ao seu eminente professor em Cambridge, o célebre Augustus De Morgan, se sabia resolver o problema. De Morgan pensou, pensou... e a resposta era não. Tinha nascido o problema das quatro cores.

Foi apenas em 1976 que a conjectura foi finalmente demonstrada por Kenneth Appel e Wolfgang Haken da Universidade de Illinois. Quando isto aconteceu, reza a história que muitos professores de matemática teriam interrompido as suas aulas para abrir uma garrafa de champanhe. No

entanto, muitos matemáticos não ficaram contentes por duas razões: a descoberta tinha sido feita usando três supercomputadores durante mais de 1000 horas e a parte da prova que não fez uso dos supercomputadores consistia de 400 páginas de detalhes a serem avaliados.

Em 1994 foi produzida uma prova mais simples, ainda usando computador, por Paul Seymour, Neil Robertson, Daniel Sanders e Robin Thomas, porém continua o problema de demonstrar o teorema sem recorrer a um computador.

# Capítulo 3

## CONCEITOS BÁSICOS

### 3.1 Grafos

Há várias maneiras diferentes de formalizar o conceito de grafos em matemática. Cada autor pode adotar uma notação diferente, porém, para sabermos qual delas é melhor, depende da aplicação. Neste trabalho usaremos as notações de [1].

Um **grafo**  $G$  é uma tripla da forma  $(V(G), E(G), \varphi_G)$ , que consiste de um conjunto não vazio  $V(G)$  de **vértices**, um conjunto  $E(G)$  de **arestas** e uma **função de incidência**  $\varphi_G$ , a qual associa a cada aresta de  $E(G)$  um par de vértices de  $V(G)$ , não necessariamente distintos. Se  $e$  é uma aresta e  $u$  e  $v$  são vértices tal que  $\varphi_G(e) = uv$ , então  $e$  **une** os vértices  $u$  e  $v$ , os quais são chamados de **extremos** de  $e$ .

Não devemos confundir um grafo com suas **representações gráficas**, nas quais os vértices são geralmente representados por pontos e as arestas por linhas contínuas. É tão usual representar grafos desta maneira que muitas vezes tratamos o desenho por “grafo”, o que é aceito, desde que não haja confusão. Considere o grafo  $G = (V(G), E(G), \varphi_G)$ , onde  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ ,  $E(G) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$  e  $\varphi_G$  definida como:

$$\begin{array}{ll} \varphi_G(e_1) = v_1 v_2; & \varphi_G(e_2) = v_2 v_3; \\ \varphi_G(e_3) = v_3 v_3; & \varphi_G(e_4) = v_3 v_4; \\ \varphi_G(e_5) = v_2 v_4; & \varphi_G(e_6) = v_4 v_5; \\ \varphi_G(e_7) = v_1 v_5; & \varphi_G(e_8) = v_1 v_5. \end{array}$$

Uma representação de  $G$  é mostrada na figura 3.1.

Um mesmo grafo pode ser representado de maneiras diferentes. A posição no plano dos pontos que representam os vértices e das linhas que representam as arestas não é importante. Note que a figura 3.2 também representa o grafo  $G$ .

Se um vértice  $v$  de  $G$  é um dos extremos de alguma aresta  $e$  de  $G$ , dizemos que  $e$  **incide** em  $v$  e vice-versa. Dizemos também que dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  são **adjacentes** ou **vizinhos** se existe uma aresta de  $G$  cujos extremos são  $u$  e  $v$ . Note que, na figura 3.3, a aresta  $e_1$  incide em  $v_1$  e em  $v_2$ , logo os vértices  $v_1$  e  $v_2$  são **adjacentes**.

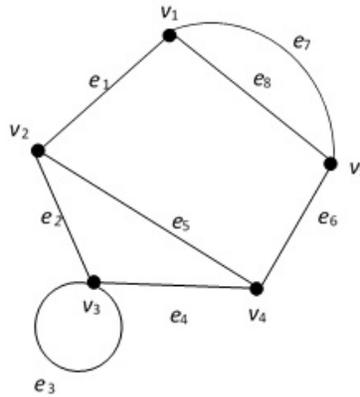


Figura 3.1: Uma representação do grafo  $G$ .

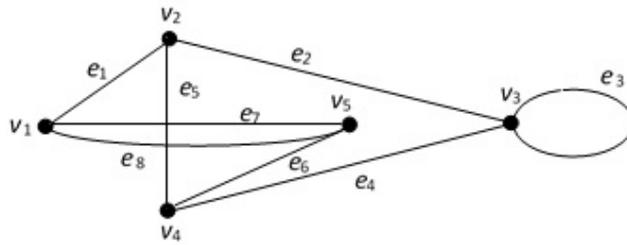


Figura 3.2: Outra representação do grafo  $G$ .

Para manuseio computacional, entretanto, é conveniente contar com outras representações, pois a representação gráfica não fornece a um computador a forma numérica com a qual ele possa trabalhar. Inclusive, a variedade, em termos de dimensão e de complexidade dos problemas de grafos, tem levado à definição de diversas formas de representação (estruturas de armazenamentos) que procuram, em alguns casos, atender às necessidades algébricas, combinatórias ou ainda, de busca ou armazenamento de caráter essencialmente algorítmico. A seguir mostraremos três representações de grafos comumente usadas em algoritmos.

Uma forma de representarmos o grafo  $G$  é a **lista de adjacências**, onde para cada vértice, listamos os vértices que lhe são adjacentes. A tabela 3.1 nos mostra a lista de adjacências dos vértices de  $G$ .

|       |                 |
|-------|-----------------|
| $v_1$ | $v_2, v_5$      |
| $v_2$ | $v_1, v_3, v_4$ |
| $v_3$ | $v_2, v_3, v_4$ |
| $v_4$ | $v_2, v_3, v_5$ |
| $v_5$ | $v_1, v_4$      |

Tabela 3.1: Lista de adjacências do grafo  $G$ .

O grafo  $G$  também pode ser representado através de uma matriz de adjacência. A **matriz de adjacência**,  $A(G)$ , de um grafo  $G$ , com  $n$  vértices, é uma matriz de ordem  $n$ , na qual se associa cada linha e cada coluna a um vértice, onde cada elemento  $a_{ij} = 1$  corresponde ao número de arestas que unem os vértices  $v_i$  e  $v_j$ . Logo, a matriz de adjacência do grafo  $G$  é:

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Uma outra maneira de representarmos um grafo matricialmente é através da **matriz de incidência**, que é uma matriz  $M_{n \times m}$ , onde  $n$  corresponde ao número de vértices do grafo e  $m$  ao número de arestas. O elemento da linha  $i$  e da coluna  $j$  é igual ao número de vezes que a aresta  $j$  inside no vértice  $i$ . Vejamos a matriz de incidência  $M_{5 \times 8}$  do grafo  $G$  da figura 3.1:

$$M(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Um grafo que possui infinitos vértices e/ou infinitas arestas é um **grafo infinito** [7]. Neste trabalho, entretanto, trataremos apenas de **grafos finitos**, onde os conjuntos de seus vértices e de suas arestas são finitos e nos referimos a eles apenas como grafos.

Seja  $G$  um grafo. Por definição,  $V(G)$  é não vazio. No entanto,  $E(G)$  pode ser vazio e, neste caso, a função de incidência  $\varphi_G$  é vazia. Quando  $G$  possui um único vértice e não possui arestas,  $G$  é um **grafo trivial**. Se ambos os extremos de uma aresta  $e$  são iguais, dizemos que  $e$  é um **laço**. Duas arestas distintas são **paralelas** se possuem os mesmos extremos. Um grafo  $G$  é **simples** se não possui laços nem arestas paralelas. Na figura 3.1, a aresta  $e_3$  é um laço, pois une o vértice  $v_3$  a ele mesmo; as arestas  $e_7$  e  $e_8$  são paralelas, pois  $\varphi_G(e_7) = v_1 v_5$  e  $\varphi_G(e_8) = v_1 v_5$ , ou seja, as arestas  $e_7$  e  $e_8$  possuem os mesmos extremos. O grafo da figura 3.3 é simples e o da figura 3.1 não é simples.

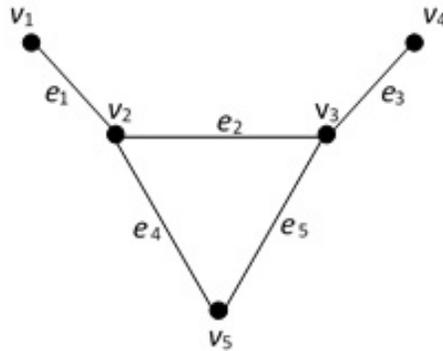


Figura 3.3: Exemplo de grafo simples.

## 3.2 Subgrafos

Sejam  $G$  e  $H$  grafos. O grafo  $H$  é **subgrafo** (escrevemos  $H \subseteq G$ ) de  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$ ,  $E(H) \subseteq E(G)$  e  $\varphi_H$  é a restrição de  $\varphi_G$  para  $E(H)$ . Quando  $H \subseteq G$  mas  $H \neq G$ , escrevemos  $H \subset G$  e chamamos  $H$  de **subgrafo próprio** de  $G$ . A figura 3.4 nos mostra um grafo e dois de seus subgrafos.

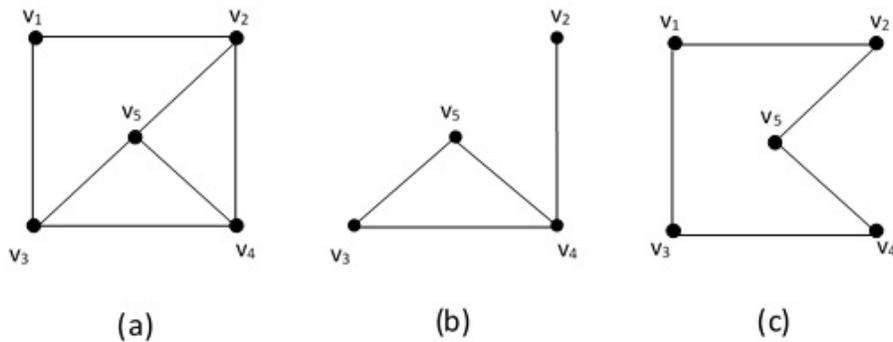


Figura 3.4: (a) Grafo  $G$ , (b) e (c) Subgrafos de  $G$ .

## 3.3 Grau de um vértice

O **grau** de um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é o número de arestas de  $G$  incidentes em  $v$ , laços contados duas vezes. Denotamos o grau de  $v$  por  $d_G(v)$ , sendo que omitimos o subscrito “ $G$ ” quando o grafo  $G$  estiver claro no contexto. Na figura 3.1,  $d(v_1) = 3$ ,  $d(v_2) = 3$ ,  $d(v_3) = 4$ ,  $d(v_4) = 3$  e  $d(v_5) = 3$ .

**Teorema 3.3.1.** Em qualquer grafo  $G$ , a soma dos graus de todos os vértices é igual ao dobro do número de arestas. Isto é,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

*Demonstração.* Cada aresta (laço ou não) contribui duas unidades na soma dos graus. □

O grafo  $G$  da figura 3.1 tem 8 arestas. De fato,

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 16.$$

Logo,

$$2|E(G)| = 16 \Rightarrow |E(G)| = 8.$$

**Corolário 3.3.2.** O número de vértices de grau ímpar em um grafo é par.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo e  $V_P$  e  $V_I$  os conjuntos dos vértices de  $G$  cujos graus são pares e ímpares, respectivamente. Pelo teorema 3.3.1, temos:

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = 2|E(G)|.$$

Logo,

$$\sum_{v \in V(G)} d_G(v) = \sum_{v \in V_P} d_G(v) + \sum_{v \in V_I} d_G(v) = 2|E(G)|$$

ou seja,

$$\sum_{v \in V_I} d_G(v) = 2|E(G)| - \sum_{v \in V_P} d_G(v).$$

Observe que o lado direito dessa equação é par, pois  $2|E(G)|$  é claramente um número par e a soma de parcelas de números pares é par. Portanto  $\sum_{v \in V_I} d_G(v)$  é par. Para que uma soma de números ímpares seja par, é necessário que o número de parcelas seja par. Logo  $|V_I|$  é par, ou seja, o número de vértices de grau ímpar de  $G$  é par. □

### 3.4 Grafos regulares

Um grafo é **regular** se todos os seus vértices possuem o mesmo grau. Se o grau de cada vértice de um grafo regular  $G$  for igual a  $k$ , dizemos que  $G$  é  **$k$ -regular**. A figura 3.5 exibe grafos 3- regulares. Grafos 3- regulares são chamados também de **cúbicos**.

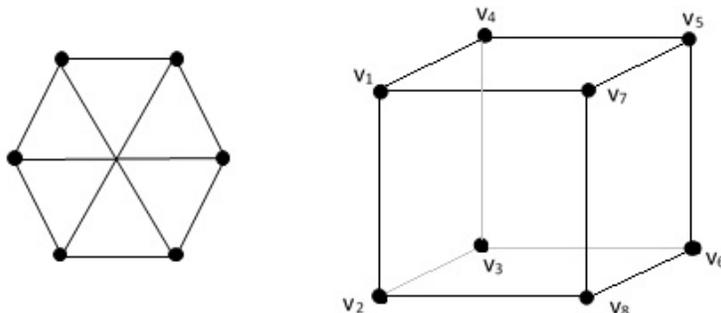


Figura 3.5: Grafos 3- regulares ou cúbicos.

O teorema 3.3.1 nos permite contar o número de arestas de um grafo  $k$ -regular com  $n$  vértices. De fato, seja  $G$  um grafo  $k$ -regular com  $n$  vértices. Como para  $v \in V(G)$ ,  $d_G(v) = k$  temos que,

$$2|E(G)| = \sum_{v \in V(G)} d_G(v) = k.n.$$

Logo,

$$|E(G)| = \frac{k.n}{2}.$$

**Grafo completo:** Um grafo simples é **completo** se, para quaisquer dois vértices, existe uma aresta que os une. Um grafo completo com  $n$  vértices,  $n \geq 1$  é denotado por  $K_n$ . Alguns exemplos de grafos completos são exibidos na figura 3.6.

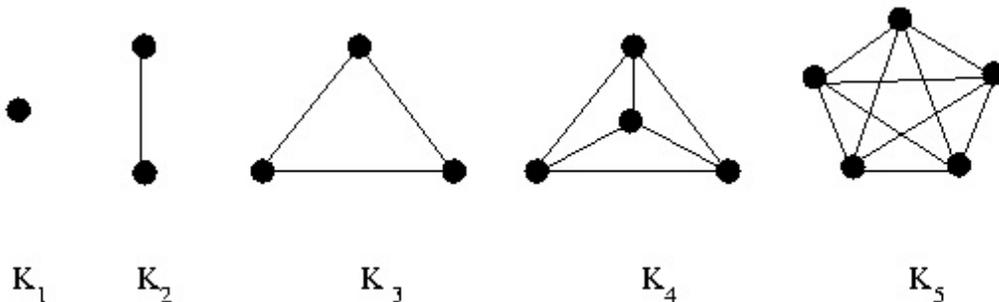


Figura 3.6: Exemplo de grafos completos.

Observe que um grafo completo  $K_n$  é  $(n - 1)$ -regular. Então o número de arestas de  $K_n$  é dado por

$$|E(K_n)| = \frac{k \cdot n}{2} = \frac{(n - 1) \cdot n}{2} = \binom{n}{2}.$$

Note que um grafo completo é um grafo simples que contém o número máximo de arestas.

No exemplo 1.1.1, poderíamos considerar a hipótese de que todas as seis turmas jogaram entre si. Neste caso, o grafo que representa os jogos do campeonato é um  $K_6$ , como mostra a figura 3.7. Se quisermos saber quantos jogos foram realizados, sem contarmos as arestas do grafo da 3.7 basta calcularmos

$$\binom{6}{2} = \frac{6!}{4!2!} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15.$$

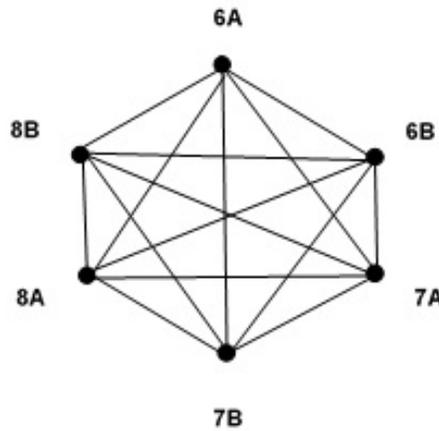


Figura 3.7: Novo grafo do campeonato de futebol.

Uma outra maneira de fazer essa contagem é usando o teorema 3.3.1.

$$2|E(K_6)| = \sum_{v \in V(K_6)} d_{K_6}(v) = 30.$$

Logo,

$$2|E(K_6)| = 30$$

e portanto,

$$|E(K_6)| = 15.$$

De ambas as formas, concluímos que o grafo da figura 3.6 possui 15 arestas, ou seja, foram realizados 15 jogos no campeonato da escola.

**Ciclo:** Um *ciclo* é um grafo, denotado por  $C_n$ , com  $n \geq 3$ , definido por:  $V(C_n) = \{v_0, v_1, \dots, v_{n-1}\}$  e  $E(C_n) = \{v_0v_1, v_1v_2, \dots, v_{n-2}v_{n-1}, v_{n-1}v_0\}$ . A figura 3.8 exibe um exemplo de ciclo, o  $C_6$ .

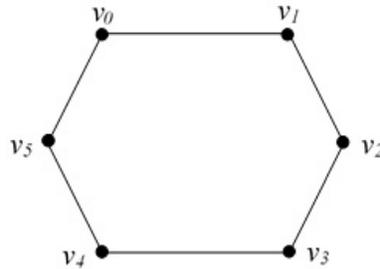


Figura 3.8: Ciclo  $C_6$

Note que todo ciclo  $C_n$ , com  $n \geq 3$ , é um grafo 2-regular e possui

$$|V(C_n)| = n \text{ e } |E(C_n)| = \frac{2n}{2} = n.$$

**$k$ -cubo:** Um  $k$ -cubo, denotado por  $Q_k$ , com  $k \geq 1$ , é um grafo simples cujos vértices são as  $k$ -uplas ordenadas do conjunto  $\{0, 1\}$  e dois vértices são adjacentes se diferem em exatamente uma coordenada. Por exemplo, se  $k = 1$ , temos  $\{0, 1\}$ ; se  $k = 2$ , temos  $\{00, 10, 01, 11\}$ ; se  $k = 3$ , temos  $\{000, 100, 010, 110, 001, 101, 011, 111\}$  e se  $k = 4$ , temos  $\{0000, 1000, 0100, 1100, 0010, 1010, 0110, 1110, 0001, 1001, 0101, 1101, 0011, 1011, 0111, 1111\}$ . Os elementos desses conjuntos são os vértices de  $Q_1$ ,  $Q_2$ ,  $Q_3$  e  $Q_4$  respectivamente, representados na figura 3.9.

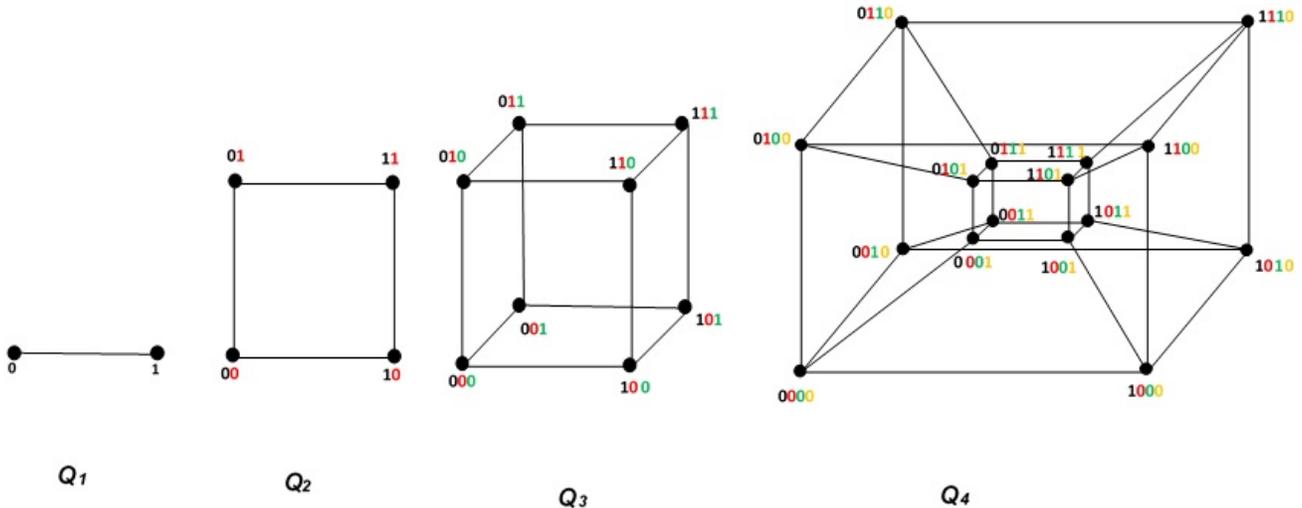


Figura 3.9:  $k$ -cubos

Note que o grafo  $Q_k$  possui  $2^k$  vértices pois, o número de vértices de um  $k$ -cubo, corresponde ao número de sequências binárias de comprimento  $k$ . O grafo  $Q_k$  é regular de grau  $k$ , pois cada

vértice é uma  $k$ -upla e, por definição, há uma aresta entre dois vértices se as  $k$ -uplas correspondentes diferirem de exatamente uma coordenada.

Portanto, pelo teorema 3.3.1 o número de arestas de  $Q_k$  é dado por:

$$2|E(Q_k)| = \sum_{v \in V(Q_k)} d_{Q_k}(v) = k \cdot 2^k$$

Logo,

$$|E(Q_k)| = \frac{k \cdot 2^k}{2} = k \cdot 2^{(k-1)}.$$

**Grafos platônicos:** Os sólidos platônicos (em homenagem ao filósofo Platão) são figuras tridimensionais nas quais todas as faces são polígonos regulares congruentes, tal que cada vértice possui o mesmo número de faces incidentes. Existem somente cinco sólidos platônicos os quais estão representados na figura 3.10. Platão associou cada sólido com um dos elementos que acreditava serem a composição de tudo no universo (figura 3.11): tetraedro (fogo); cubo (terra); octaedro (ar); dodecaedro (universo); icosaedro (água).



Figura 3.10: Os sólidos de Platão.

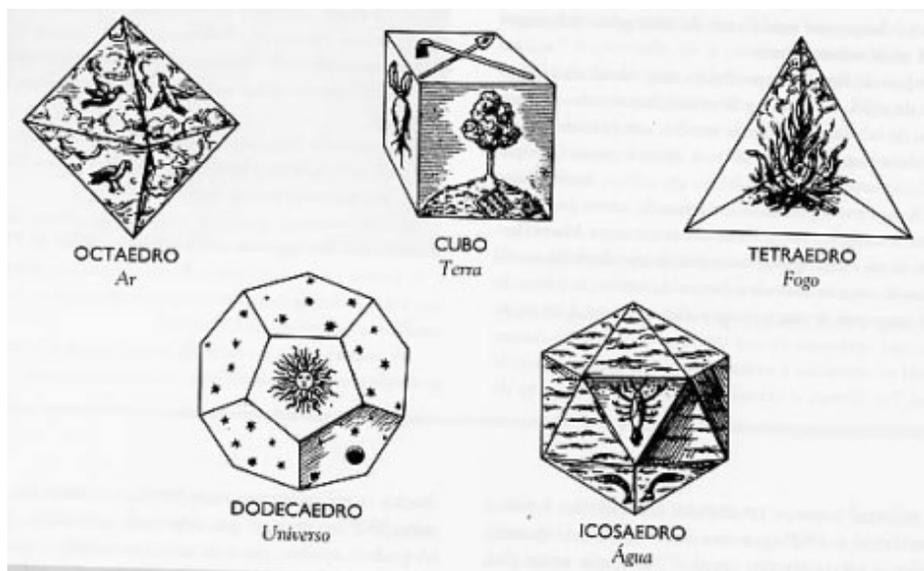


Figura 3.11: Os sólidos de Platão e os elementos do universo.

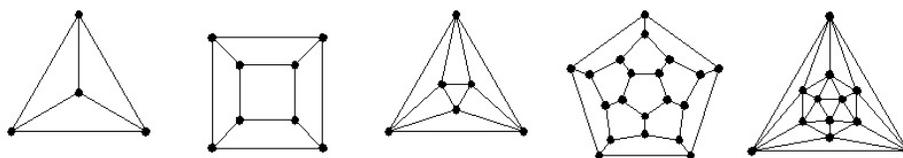


Figura 3.12: Grafos platônicos

Os grafos obtidos pela projeção dos sólidos de Platão no plano são conhecidos como **grafos platônicos** e estão exibidos na figura 3.12. Note que são grafos regulares.

### 3.5 Percursos em um grafo

Para resolvermos o problema das pontes de Königsberg e muitos outros que envolvem grafos, precisamos dos seguintes conceitos: passeio, trilha e caminho, os quais definem percursos em um grafo.

Um **passeio**,  $P$ , é uma sequência finita e não vazia  $(v_0, e_1, v_1, e_2, \dots, e_k, v_k)$ , cujos elementos são alternadamente vértices e arestas tal que, para todo  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ ,  $v_{i-1}$  e  $v_i$  são os extremos de  $e_i$ . Dizemos que o passeio  $P$  é de  $v_0$  a  $v_k$ . O **comprimento**,  $|P|$ , de  $P$  é  $k$ . Se  $k = 0$ , o passeio é **degenerado**. Se as arestas  $e_1, e_2, \dots, e_k$  são duas a duas distintas,  $P$  é uma **trilha**. Se, além disso, os vértices  $v_0, v_1, \dots, v_k$ , são dois a dois distintos,  $P$  é um **caminho**.

Na figura 3.13,  $P_1 = (v_5, e_8, v_2, e_{10}, v_6, e_{10}, v_2, e_2, v_3)$  é um passeio;  $P_2 = (v_6, e_6, v_5, e_5, v_4, e_9, v_6, e_{10}, v_2, e_2, v_3)$  é uma trilha e  $P_3 = (v_1, e_3, v_3, e_2, v_2, e_{10}, v_6, e_9, v_4, e_5, v_5)$  é um caminho, de comprimentos iguais a 4, 5 e 5, respectivamente.

Note que uma trilha pode repetir vértices, mas não arestas e um caminho não repete vértices, e conseqüentemente, não repete arestas. Logo, por definição, todo caminho é uma trilha e toda trilha é um passeio, porém a recíproca destas afirmações não é verdadeira. Considere o passeio  $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_2, v_2, e_1, v_1, e_4, v_4, e_4, v_1, e_4, v_4, e_5, v_5)$ , a seguinte trilha  $T = (v_2, e_2, v_3, e_3, v_1, e_4, v_4, e_9, v_6, e_7, v_1)$  do grafo da figura 3.13. Note que  $P$  não é uma trilha, pois repete arestas e  $T$  não é um caminho, pois repete vértices.

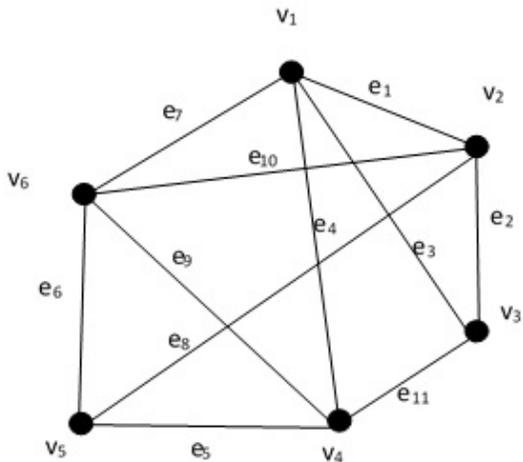


Figura 3.13: Exemplos de percursos

Seja  $P$  um passeio ou uma trilha. Se  $|P| > 0$  e  $v_0 = v_k$ , então  $P$  é um **passeio fechado** ou uma **trilha fechada**, respectivamente. Por exemplo, no grafo  $H$  da figura 3.14, o passeio  $P = (v_1, e_7, v_2, e_2, v_0, e_3, v_3, e_4, v_3, e_5, v_2, e_6, v_1, e_7, v_2, e_6, v_1)$  é um passeio fechado e a trilha  $T = (v_1, e_7, v_2, e_2, v_0, e_3, v_3, e_5, v_2, e_6, v_1)$  é uma trilha fechada. Note que não tem sentido falarmos de caminho fechado, pois pela definição de caminho, os vértices devem ser distintos, logo  $v_0 \neq v_k$ .

Se  $P$  é uma trilha fechada com os vértices  $v_1, v_2, \dots, v_k$  dois a dois distintos, então  $P$  é um **circuito**. Um exemplo de circuito, ainda utilizando o grafo  $H$  da figura 3.14 é  $P = (v_1, e_1, v_0, e_3, v_3, e_5, v_2, e_6, v_1)$ . Observe que se  $C = (v_0, e_1, v_1, \dots, v_{k-1}, v_0)$  é um circuito, então a sequência  $(v_0, e_1, \dots, v_{k-1})$  é um caminho.

Um **pedaço** de um passeio  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$  é um passeio que é uma subsequência  $(v_i, e_{i+1}, v_{i+1}, \dots, e_j, v_j)$  de termos consecutivos de  $P$ . Analogamente, definimos pedaço se  $P$  for uma trilha ou um caminho.

Dizemos que um passeio **passa** pela aresta, **visita** o vértice, que  $v_0$  é o **início** do passeio,  $v_1, v_2, \dots, v_{k-1}$  são vértices **internos** ao passeio e que  $v_k$  é o **término** do passeio.

Sejam  $P = (v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k)$  e  $Q = (w_0, f_1, w_1, \dots, f_k, w_k)$  dois passeios em um grafo  $G$ , tais

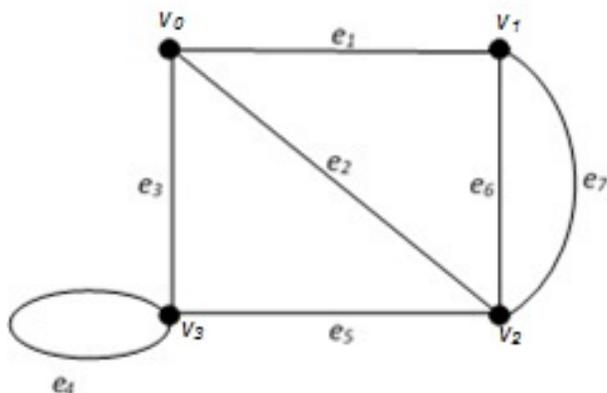


Figura 3.14: Grafo H.

que o término  $v_k$  de  $P$  coincide com o início  $w_0$  de  $Q$ . Nesse caso definimos a **concatenação** de  $P$  com  $Q$  como sendo a sequência  $(v_0, e_1, v_1, \dots, e_k, v_k, f_1, w_1, \dots, f_k, w_k)$ , que denotaremos por  $PQ$ . É fácil ver que  $PQ$  também é um passeio em  $G$ . Se o término de  $P$  não coincide com o início de  $Q$ , a concatenação  $PQ$  não é definida. Por exemplo, na figura 3.13, sejam  $P = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3)$  e  $Q = (v_3, e_{11}, v_4, e_9, v_6, e_6, v_5)$ . Então  $PQ = (v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_{11}, v_4, e_9, v_6, e_6, v_5)$ . Um exemplo de um pedaço de  $PQ$  é  $(v_2, e_2, v_3, e_{11}, v_4, e_9, v_6)$ .

### 3.6 Grafos conexos

A seguir definiremos componentes conexos de um grafo. Intuitivamente, os componentes conexos de um grafo são os “pedaços” conexos do grafo.

Seja  $G$  um grafo, dizemos que  $G$  é **conexo** se para quaisquer dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  existe um passeio de  $u$  a  $v$  em  $G$ , caso contrário,  $G$  é **desconexo**.

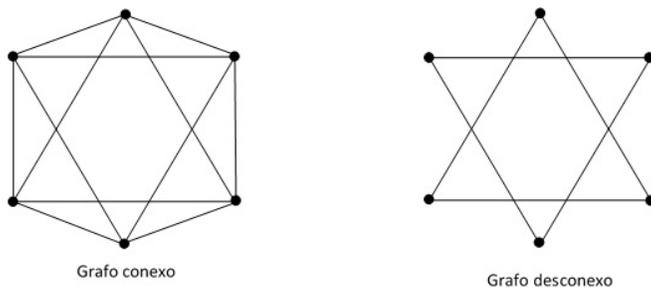


Figura 3.15: Grafos conexo e desconexo

Seja  $G$  um grafo e  $v \in V(G)$ . Dizemos que um vértice  $u \in V(G)$  é **alcançado** a partir de  $v$ , se existe um passeio de  $u$  a  $v$  em  $G$ . Considere agora o conjunto  $W$  dos vértices de  $G$  alcançados a partir de  $v$ . O subgrafo  $H$  de  $G$  cujo conjunto de vértices é  $W$  e cujas arestas são as arestas de

$G$  com ambos os extremos em  $W$  é um **conexo** de  $G$ . Denotamos  $H$  por  $G[W]$ . Esta definição origina um método para encontrar todos os componentes conexos de um grafo  $G$ .

Primeiro, considere um vértice  $v$  de  $G$  e encontre o conjunto  $W_1$  dos vértices alcançados a partir de  $v$ . Se  $V(G) \setminus W_1 \neq \emptyset$ , seja  $u \in V(G) \setminus W_1$  e encontre o conjunto  $W_2$  dos vértices alcançados a partir de  $u$ . Repita esse procedimento até que  $V(G) \setminus (W_1 \cup W_2 \cup \dots \cup W_p) = \emptyset$ . Os subgrafos  $G[W_1], G[W_2], \dots, G[W_p]$  são os componentes conexos de  $G$ . Note que se  $p = 1$ , o grafo  $G$  é conexo.

**Exemplo 3.6.1.** Considere o grafo  $G$  representado pelo diagrama da figura 3.16. Seja  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  o conjunto dos vértices de  $G$ . Ao iniciarmos um passeio qualquer por qualquer um dos seis vértices de  $G$  verificamos que todos os outros cinco vértices do grafo são alcançados pelo vértice inicial do passeio, temos então  $W_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ , que é o conjunto dos vértices do subgrafo  $G[W_1]$  obtido pelos vértices alcançados pelo vértice inicial do passeio. Como  $V(G) \setminus W_1 = \emptyset$ , temos que  $G[W_1] \cong G$ . Logo,  $G$  é conexo.

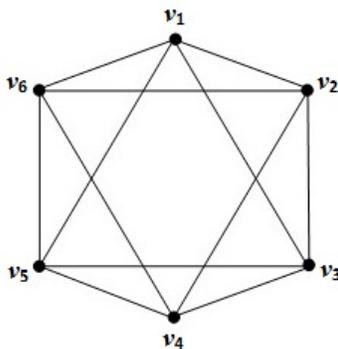


Figura 3.16: Grafo conexo

**Exemplo 3.6.2.** Considere o grafo  $G$  da figura 3.17, com  $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8, v_9, v_{10}\}$ . Tomando o vértice  $v_1$  como início de um passeio, verificamos que os vértices  $v_4$  e  $v_7$  são alcançados a partir dele. Temos então  $W_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$  o conjunto dos vértices e  $E_1 = \{v_1v_4, v_1v_7, v_4v_7\}$  o conjunto das arestas que formam o subgrafo  $G[W_1]$ . Como  $V(G) \setminus W_1 = \{v_2, v_3, v_5, v_6, v_8, v_9, v_{10}\}$ , tomemos  $v_2$  e verificamos quais são os vértices alcançados por ele. Encontramos então  $v_5$  e  $v_8$ . Então  $W_2 = \{v_2, v_5, v_8\}$  e  $E_2 = \{v_2v_5, v_5v_8, v_2v_8\}$ , formam o subgrafo  $G[W_2]$  de  $G$ . Verificamos que  $V(G) \setminus (W_1 \cup W_2) = \{v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$ . Tomando o vértice  $v_3$  como vértice de partida, verificamos que os vértices  $v_6, v_9$  e  $v_{10}$  são alcançados a partir dele. Obtemos assim um outro subgrafo  $G[W_3]$  de  $G$ , com  $W_3 = \{v_3, v_6, v_9, v_{10}\}$  e  $E_3 = \{v_3v_6, v_3v_{10}, v_6v_9, v_9v_{10}, v_6v_{10}\}$ . Como  $V(G) \setminus (W_1 \cup W_2 \cup W_3) = \emptyset$ , o processo termina e os subgrafos  $G[W_1], G[W_2]$  e  $G[W_3]$  constituem os **componentes conexos** de  $G$ . Neste exemplo, o grafo  $G$  é desconexo. A figura 3.18 mostra os três componentes conexos do grafo  $G$  separadamente.

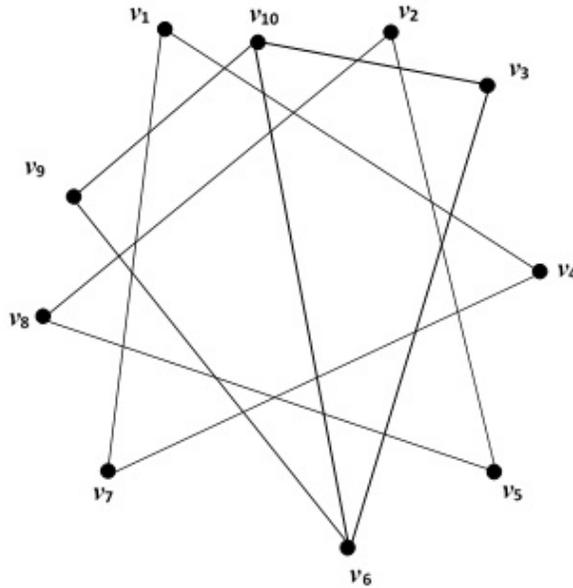


Figura 3.17: Grafo  $G$  desconexo.

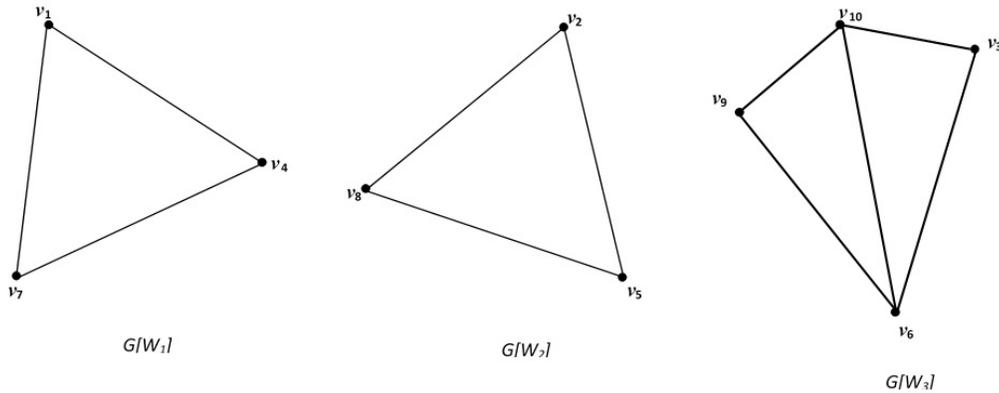


Figura 3.18: Componentes conexos do grafo  $G$ .

### 3.7 Grafos bipartidos

Uma classe de grafos muito estudada e que têm importantes aplicações em teoria dos grafos é a dos grafos bipartidos. Um grafo  $G$  é **bipartido** se o conjunto de seus vértices admite uma partição<sup>1</sup> em dois conjuntos  $X$  e  $Y$ , e cada aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ . A partição  $(X, Y)$  é denominada **bipartição** de  $G$ . Uma forma de determinar se um grafo  $G$  é bipartido é pintar seus vértices com duas cores, branco e preto, por exemplo, e verificar se toda

<sup>1</sup>Uma família  $F$  de subconjuntos de um conjunto  $A$  é uma partição de  $A$  se os elementos de  $F$  são não vazios, disjuntos dois a dois e a união de todos os elementos de  $F$  é  $A$ .

aresta de  $G$  tem um extremo branco e outro preto. A figura 3.19 exibe três exemplos de grafos bipartidos, onde  $X$  contém os vértices pretos e  $Y$ , os vértices brancos.

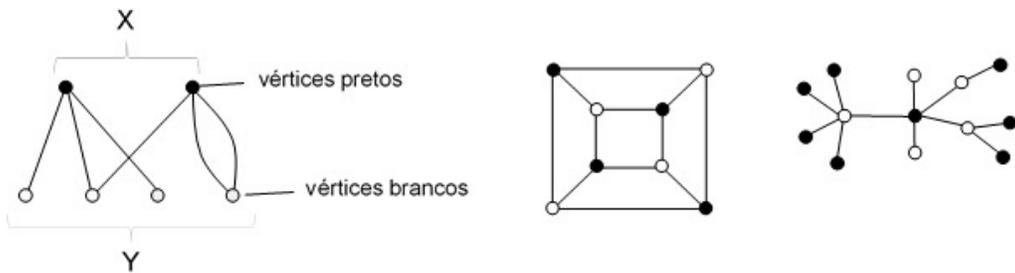


Figura 3.19: Exemplos de grafos bipartidos.

O grafo  $C_5$  da figura 3.20 não é bipartido. De fato, suponhamos que haja uma bipartição de  $C_5$ . Como  $C_5$  tem cinco vértices e nós temos duas cores para pintar tais vértices, pelo princípio da casa dos pombos<sup>2</sup>, temos que pelo menos três vértices terão a mesma cor, digamos preta. Logo, dois vértices pretos serão necessariamente adjacentes.

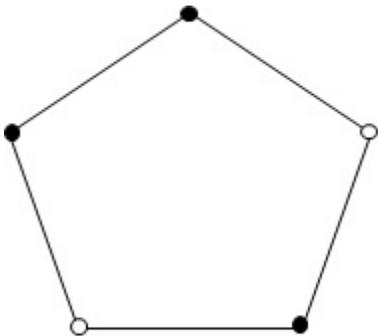


Figura 3.20: Grafo não bipartido.

Um **grafo bipartido completo** é um grafo bipartido simples com bipartição  $(X, Y)$  em que cada vértice de  $X$  está unido a todos os vértices de  $Y$ . Se  $|X|=p$  e  $|Y|=q$ , o grafo correspondente é denotado por  $K_{p,q}$ . A figura 3.21 apresenta alguns exemplos de grafos bipartidos completos.

<sup>2</sup> Princípio da casa dos pombos: se em  $n$  casas,  $n \geq 1$ , colocarmos  $m$  pombos,  $m > n$ , então alguma casa conterà pelo menos dois pombos.

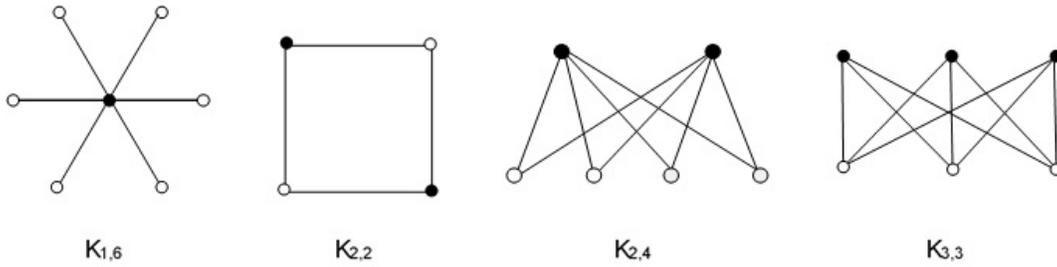


Figura 3.21: Exemplos de grafos bipartidos completos.

Considere o grafo bipartido  $K_{p,q}$  com  $|X|=p$  e  $|Y|=q$ . Por definição,  $K_{p,q}$ , possui  $p+q$  vértices, pois  $(X, Y)$  é uma partição de  $V(K_{p,q})$ . Se  $v \in X$ , então  $d_{K_{p,q}}(v) = |Y|=q$  e se  $v \in Y$ , então  $d_{K_{p,q}}(v) = |X|=p$ . Logo,  $K_{p,q}$  possui  $p$  vértices de grau  $q$  e  $q$  vértices de grau  $p$ . Portanto, podemos determinar o número de arestas de um grafo bipartido completo  $K_{p,q}$  utilizando o teorema 3.3.1, como vemos a seguir:

$$2|E(K_{p,q})| = \sum_{v \in V(K_{p,q})} d_{K_{p,q}}(v) = \sum_{v \in X} d_{K_{p,q}}(v) + \sum_{v \in Y} d_{K_{p,q}}(v) = p \cdot q + q \cdot p = 2pq.$$

Logo,  $|E(K_{p,q})| = pq$ .

Exemplos de grafos bipartidos dentre os estudados:

- $C_n$ , com  $n$  par. Seja  $V(C_n) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ ,  $n$  par, Os subconjuntos  $X$  e  $Y$  de  $V(C_n)$  definidos por  $X = \{v_i, i \text{ é par}\}$  e  $Y = \{v_i, i \text{ é ímpar}\}$  é uma bipartição de  $C_n$ . A figura 3.22 mostra esta bipartição para  $C_6$ .

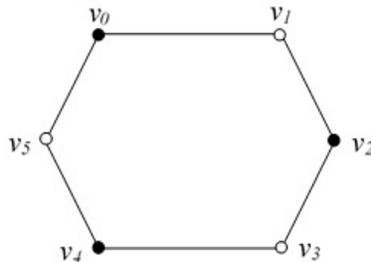


Figura 3.22: Grafo bipartido e não completo.

- $k$ -cubo,  $Q_k$ . Uma bipartição possível,  $(X, Y)$  é:

$$X = \{a_1 a_2 \dots a_k, \sum_{i=1}^k a_i \text{ é par}\}$$

e

$$Y = \{a_1 a_2 \dots a_k, \sum_{i=1}^k a_i \text{ é ímpar}\}.$$

Observe que,  $X \neq \emptyset$  e  $Y \neq \emptyset$ , pois  $k \geq 1$ ;  $X \cup Y = V(Q_k)$ . Sejam  $u$  e  $v$ ,  $u \neq v$ , dois vértices de  $X$ . Por definição de  $X$ , temos que o número de 1's de  $u$  difere de pelo menos duas unidades do número de 1's de  $v$ . Logo,  $u$  e  $v$  não são adjacentes, pela construção de  $Q_k$ . Esse mesmo aplica-se a  $Y$ . Logo,  $(X, Y)$  é uma bipartição de  $Q_k$ .

A figura 3.23 exhibe esta bipartição para o 3-cubo.

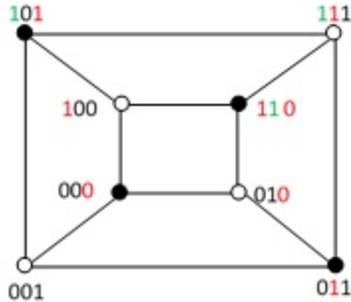


Figura 3.23: O 3-cubo é bipartido.

Como vimos nesta seção o  $C_5$  não é bipartido, e o teorema a seguir nos mostra que o mesmo vale para todo circuito de comprimento ímpar.

**Teorema 3.7.1.** Um grafo  $G$  é bipartido se, e somente se, não contiver circuitos de comprimento ímpar.

*Demonstração.* Sejam  $G$  um grafo bipartido,  $(X, Y)$  uma bipartição de  $G$  e  $C = (v_0, v_1, \dots, v_k, v_0)$  um circuito em  $G$ . Sem perda de generalidade podemos supor  $v_0 \in X$ . Como  $v_0 v_1 \in E(G)$  e  $G$  é bipartido, então  $v_1 \in Y$ . Analogamente,  $v_2 \in X$ . Assim,  $v_{2i} \in X$  e  $v_{2i+1} \in Y$ . Logo  $k = 2j + 1$  para algum inteiro  $j$ . Portanto,  $|C|$  é par. Como o circuito  $C$  é arbitrário, concluímos que  $G$  não contém circuitos ímpares.

Suponhamos que  $G$  não contém circuitos de comprimento ímpar. É suficiente provar para grafos conexos, pois caso contrário, consideramos os seus componentes conexos.

Seja o vértice  $u \in V(G)$ . Definimos os subconjuntos  $X$  e  $Y$  de  $V(G)$  da seguinte maneira:

$$X = \{x \in V(G) \mid d(u, x) \text{ é par}\}$$

$$Y = \{y \in V(G) \mid d(u, y) \text{ é ímpar.}\}$$

(Denotamos por  $d(u, v)$  ao comprimento do menor caminho de  $u$  a  $v$  em  $G$ ).

Vamos mostrar que  $(X, Y)$  é uma bipartição de  $V(G)$ . Da construção de  $X$  e  $Y$  e da conexidade de  $G$ , temos que  $X \cup Y = V(G)$ ,  $X \cap Y = \emptyset$ ,  $X \neq \emptyset$  e  $Y \neq \emptyset$ . Falta portanto mostrar que toda aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ .

Suponhamos  $v$  e  $w$  dois vértices de  $X$ . Seja  $P$  o menor caminho de  $u$  a  $v$  e  $Q$  o menor caminho de  $u$  a  $w$ . Seja  $u_1$  o último vértice comum a  $P$  e  $Q$ . A existência de  $u_1$  é garantida, pois o próprio  $u$  satisfaz.

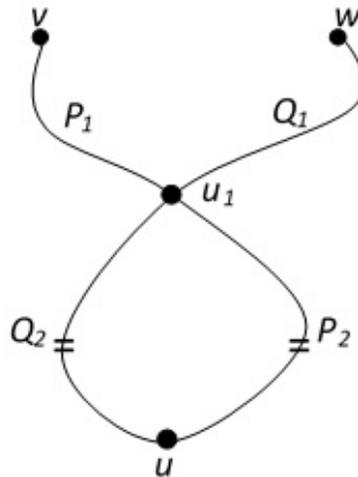


Figura 3.24: Caminhos de comprimento mínimo entre  $u$  e  $v$  e  $v$  e  $w$ .

Sejam  $P_1$  e  $P_2$  pedaços de  $P$  e  $Q_1$  e  $Q_2$ , pedaços de  $Q$ , conforme mostra a figura 3.24. Temos que  $P_2$  e  $Q_2$  têm o mesmo comprimento, pois ambos são caminhos de distância mínima entre  $u$  e  $u_1$ . Como  $v$  e  $w$  pertencem a  $X$ , os comprimentos de  $P$  e  $Q$  são pares, portanto  $P_1$  e  $Q_1$  têm a mesma paridade. Logo, o caminho  $P_1^{-1}Q_1$ , onde  $P_1^{-1}$  é o caminho em sentido oposto ao de  $P_1$ , tem comprimento par. Portanto, se existir uma aresta unindo os vértices  $v$  e  $w$ , teremos um circuito de comprimento ímpar, uma contradição. Logo, os vértices pertencentes a  $X$  não são adjacentes entre si. Analogamente, os vértices pertencentes a  $Y$  também não são adjacentes entre si. Logo, toda aresta de  $G$  tem um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ . Portanto,  $(X, Y)$  é uma bipartição de  $G$ .  $\square$

O teorema acima afirma que o único impedimento para que um grafo seja bipartido é possuir circuitos de comprimento ímpar. Portanto, vê-se facilmente que dentre os grafos platônicos da figura 3.12, apenas o cubo é bipartido.

# Capítulo 4

## ISOMORFISMO DE GRAFOS

### 4.1 Grafos isomorfos

Dois grafos  $G$  e  $H$  são **iguais** se  $V(G) = V(H)$ ,  $E(G) = E(H)$  e  $\varphi_G = \varphi_H$ . A figura 4.1 exibe dois grafos,  $G$  e  $H$ , tal que  $V(G) = V(H)$ ,  $E(G) = E(H)$ , mas  $\varphi_G \neq \varphi_H$ , pois  $\varphi_G(e_1) = v_1v_2$  e  $\varphi_H(e_1) = v_1v_5$ . Logo  $G$  e  $H$  não são iguais, mas são isomorfos.

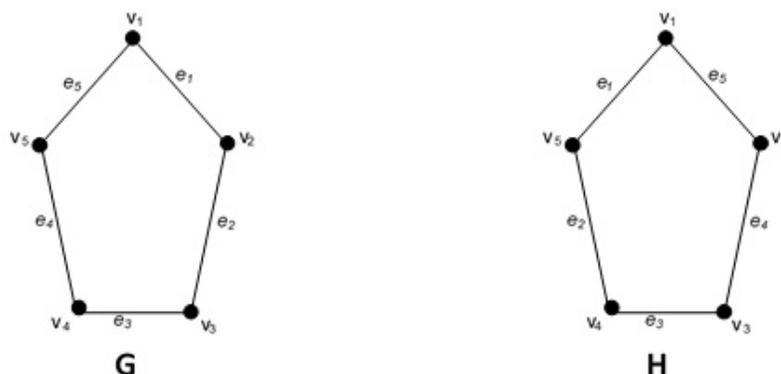


Figura 4.1: Os grafos  $G$  e  $H$  não são iguais.

Dizemos que dois grafos,  $G$  e  $H$  são **isomorfos** se existem bijeções  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  e  $g : E(G) \rightarrow E(H)$  tais que um vértice  $v$  é extremo de uma aresta  $e$  no grafo  $G$  se, e somente se,  $f(v)$  é extremo da aresta  $g(e)$  no grafo  $H$ . Observe que as funções  $f$  e  $g$  preservam as relações de incidência. Escrevemos  $G \cong H$  para indicar que  $G$  e  $H$  são isomorfos e dizemos que o par  $(f, g)$  é um **isomorfismo** entre eles.

Consideremos agora os grafos  $L$  e  $M$  da figura 4.2. Embora possuam representações diferentes, também são isomorfos, pois existem as bijeções  $f : V(L) \rightarrow V(M)$  e  $g : E(L) \rightarrow E(M)$ , satisfazendo as relações de incidência. A tabela 4.1 exibe essas bijeções. Observe que o vértice  $a$  de  $L$  é extremo da aresta  $e_2$  de  $L$  e  $f(a) = v_1$  é extremo da aresta  $g(e_2) = w$  no grafo  $M$ . Por inspeção verificamos que esta propriedade se mantém para os outros vértices de  $L$ . Note que grafos isomorfos podem ter representações distintas.

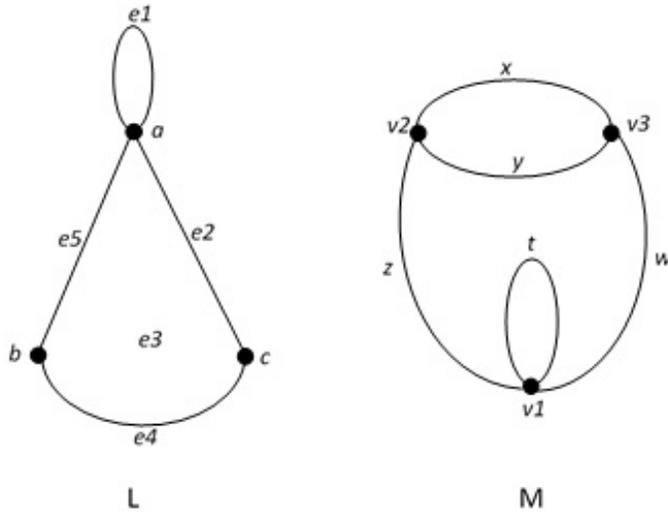


Figura 4.2: Grafos isomorfos.

| $f : V(L) \rightarrow V(M)$ | $g : E(L) \rightarrow E(M)$ |
|-----------------------------|-----------------------------|
| $a \rightarrow v_1$         | $e_1 \rightarrow t$         |
| $b \rightarrow v_2$         | $e_2 \rightarrow w$         |
| $c \rightarrow v_3$         | $e_3 \rightarrow y$         |
|                             | $e_4 \rightarrow x$         |
|                             | $e_5 \rightarrow z$         |

Tabela 4.1: Bijeções entre L e M

É claro que grafos iguais são isomorfos, basta tomarmos a função identidade tanto para  $f$  quanto para  $g$ . Quando os grafos  $G$  e  $H$  são isomorfos, qualquer propriedade de  $G$  também será uma propriedade de  $H$ . Isto mostra a importância deste conceito na teoria dos grafos.

Observe que na figura 4.2 temos arestas paralelas. Logo, existe uma outra bijeção  $g_1$  de  $E(L)$  em  $E(M)$ , distinta da bijeção  $g$ , exibida na tabela 4.1, onde  $g_1(e_3) = x$ ,  $g_1(e_4) = y$  e  $g_1$  coincide com  $g$  nas demais arestas. A bijeção  $g_1$  existe pois os grafos não são simples.

Sejam  $G$  e  $H$  grafos simples. Dizemos que  $G$  e  $H$  são isomorfos se existir uma bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  tal que  $uv$  é uma aresta de  $G$  se, e somente se,  $f(u)f(v)$  é uma aresta de  $H$ . De fato, sendo  $G$  e  $H$  simples, existe apenas uma aresta unindo um par de vértices. Logo, a bijeção  $f$ , que preserva adjacências, determina unicamente a bijeção  $g$ . A figura 4.3 exibe dois grafos simples e isomorfos, onde  $V(G) = \{a, b, c, d, e, f\}$  e  $V(H) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  e  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  dada por  $f(a) = v_1$ ,  $f(b) = v_3$ ,  $f(c) = v_5$ ,  $f(d) = v_2$ ,  $f(e) = v_4$ ,  $f(f) = v_6$ , é uma bijeção de  $V(G)$  em  $V(H)$ , que preserva as adjacências.

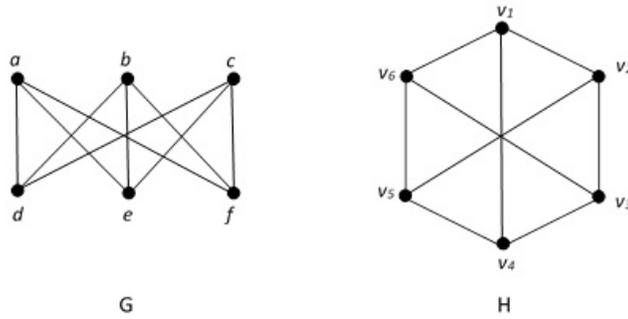


Figura 4.3: Grafos simples isomorfos.

Grafos que são isomorfos têm a mesma estrutura. Isto pode nos auxiliar a verificar quando dois grafos *não são* isomorfos. Por exemplo, é fácil ver que se  $G \cong H$ , então  $|V(G)| = |V(H)|$  e  $|E(G)| = |E(H)|$ . Porém, os grafos da figura 4.4 mostram que a recíproca não é verdadeira, pois o grafo  $L$  possui triângulos, ou seja, não é bipartido, e o grafo  $H$  é, apesar do número de vértices e de arestas serem os mesmos.

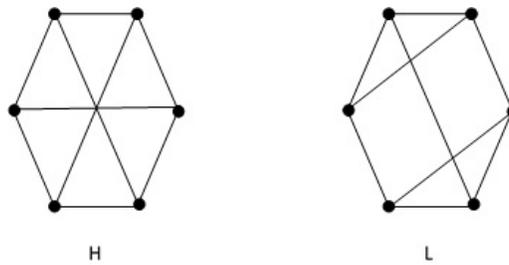


Figura 4.4: Grafos não isomorfos.

Isomorfismo é uma relação de equivalência sobre o conjunto dos grafos, isto é, tem as propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. O teorema 4.1.1 demonstra este fato para grafos simples.

**Teorema 4.1.1.** Seja  $\mathcal{G}$  o conjunto dos grafos simples. Isomorfismo é uma relação de equivalência sobre  $\mathcal{G}$ .

*Demonstração.* Sejam  $G, H, L \in \mathcal{G}$ .

- Reflexiva:  $G \cong G$ . Todo grafo é isomorfo a si mesmo, pois a *função identidade*,  $f : V(G) \rightarrow V(G)$  é uma bijeção que preserva as adjacências.
- Simétrica: Se  $G \cong H$  então  $H \cong G$ . Sendo  $G \cong H$ , existe a bijeção  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  que preserva as adjacências. Logo,  $f^{-1} : V(H) \rightarrow V(G)$  prova que  $H \cong G$ .
- Transitiva: Se  $G \cong H$  e  $H \cong L$  então  $G \cong L$ . Sendo  $G \cong H$  e  $H \cong L$  existem as bijeções  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  e  $g : V(H) \rightarrow V(L)$ , que preservam as adjacências. Logo a bijeção  $g \circ f : V(G) \rightarrow V(L)$  prova que  $G \cong L$ .

Portanto, isomorfismo é uma relação de equivalência sobre  $\mathcal{G}$ . □

Sendo uma relação de equivalência, o isomorfismo particiona o conjunto dos grafos em classes de equivalência. Dois grafos pertencentes à mesma classe de equivalência são isomorfos. Por exemplo, seja  $\mathcal{G}$  o conjunto dos grafos simples com exatamente três vértices. Existem oito grafos em  $\mathcal{G}$ , como mostra a figura 4.5. Note que os grafos (b), (c) e (d) são isomorfos entre si. O mesmo ocorre entre o grafos (e), (f) e (g). Logo  $\mathcal{G}$  é particionado em quatro classes de equivalência, representadas pelos quatro grafos não rotulados da figura 4.6.

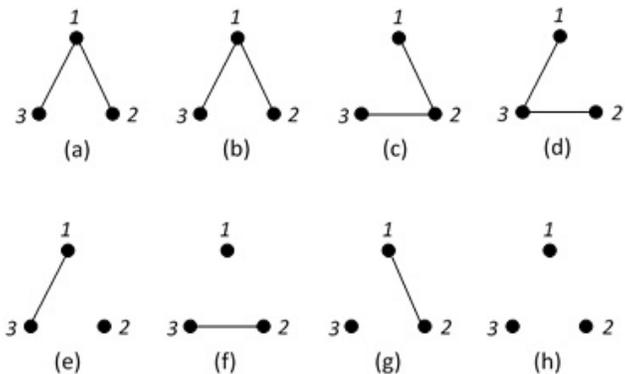


Figura 4.5: Conjunto dos grafos simples com três vértices.

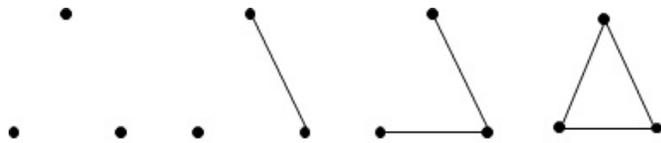


Figura 4.6: Grafos não rotulados com três vértices.

O teorema 4.1.1, nos permite concluir que, a menos de isomorfismos, existe um único grafo completo com  $n$  vértices ( $K_n$ ), um único bipartido completo com  $p$  e  $q$  vértices ( $K_{p,q}$ ) e um único ciclo com  $n$  vértices ( $C_n$ ).

Para verificar se dois grafos são isomorfos, é necessário encontrar um isomorfismo entre eles, o que geralmente é uma tarefa difícil. Uma maneira é analisar todas as bijeções entre seus vértices e verificar se alguma delas satisfaz a condição de isomorfismo. Mas o número de bijeções de dois grafos  $G$  e  $H$  com  $V(G) = V(H) = n$  é grande. De fato, para o primeiro vértice escolhido,  $v_1$ , existem  $n$  possibilidades para  $f(v_1)$ ; fixado  $f(v_1)$ , existem  $(n - 1)$  possibilidades para  $f(v_2)$  e assim sucessivamente. Logo existem  $n(n - 1)(n - 2)...1 = n!$  bijeções. Há maneiras mais eficientes, mas todos os métodos conhecidos podem ser muito demorados, mesmo para grafos relativamente pequenos.

## 4.2 Contagem de Grafos

Quantas moléculas existem com a fórmula  $C_8H_{18}$ ? Quantos sistemas de canais de irrigação são necessários para ligar cinco estações com quatro canais? Quantas plantas baixas de uma casa satisfazem determinadas propriedades? Como podemos ver, é possível reduzir muitos problemas similares a um determinado número de grafos com uma propriedade particular. Resolvendo problemas simples de contagem de grafos, encontramos soluções para situações mais complexas, como veremos a seguir.

Cada uma das classes de equivalência é chamada de **grafo não rotulado** e os grafos que vimos até agora podem então ser chamados de **grafos rotulados**. A figura 4.6 mostra todos os grafos simples não rotulados de três vértices. E a figura 4.5 mostra todos os grafos simples rotulados com vértices  $\{1, 2, 3\}$ .

Existem  $2^{n(n-1)/2}$  grafos simples com  $n$  vértices dados. Para justificar esta fórmula, basta observar que cada um dos  $\binom{n}{2} = n(n-1)/2$  pares de vértices pode ser ou não aresta do grafo.

Se levarmos em conta isomorfismos, isto é, se contarmos grafos simples não rotulados com  $n$  vértices, o número é bem menor. Veja tabela 4.2.

| $n$           | 0 | 1 | 2 | 3 | 4  | 5    | 6     | 7       | ... |
|---------------|---|---|---|---|----|------|-------|---------|-----|
| Rotulados     | 1 | 1 | 2 | 8 | 64 | 1024 | 32768 | 2097152 | ... |
| Não rotulados | 1 | 1 | 2 | 4 | 34 | 156  | 1044  | 12346   | ... |

Tabela 4.2: Número de grafos simples com  $n$  vértices

# Capítulo 5

## GRAFOS EULERIANOS

### 5.1 Trilha euleriana fechada

Uma **trilha euleriana** em um grafo  $G$  é um passeio que passa exatamente uma vez em cada uma das aresta de  $G$ . Um grafo conexo é **euleriano** se admite uma trilha euleriana fechada.

O grafo da figura 5.1 é um grafo euleriano pois possui a seguinte trilha euleriana fechada:  $T = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_3, v_7, v_6, v_5, v_7, v_2, v_6, v_1)$ , logo é um *grafo euleriano*.

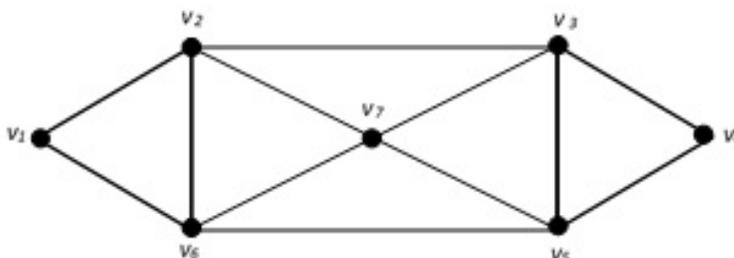


Figura 5.1: Grafo Euleriano.

O problema das pontes de Königsberg, enunciado no capítulo 2, se resume em encontrar uma trilha euleriana fechada. Porém, como podemos ver através do grafo da figura 2.2, desenhado por Euler, não existe tal trilha. No seu artigo de 1736, Euler fez mais do que resolver o problema das pontes, ele encontrou uma condição necessária e suficiente para que um grafo tenha uma trilha euleriana fechada.

Considere a trilha euleriana fechada  $T$  do exemplo da figura 5.1. O vértice  $v_3$ , por exemplo, aparece duas vezes em  $T$ . Se percorrermos a trilha  $T$  a partir de  $v_1$ , alcançamos  $v_3$  através da aresta  $v_2v_3$  e saímos de  $v_3$  através da aresta  $v_3v_4$ . Na outra ocorrência de  $v_3$ , chegamos a ele através da aresta  $v_5v_3$  e saímos através da aresta  $v_3v_7$ . Estas são todas as arestas de  $G$  que incidem em  $v_3$ . Logo,  $d_G(v_3)$  é quatro, ou seja, um número par. Observe que todos os vértices de  $G$  possuem esta mesma paridade. Esta propriedade é demonstrada no lema a seguir.

**Lema 5.1.1.** Se  $G$  é um grafo euleriano, então todo vértice de  $G$  possui grau par.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo euleriano. Então  $G$  contém uma trilha euleriana fechada  $T$ . Se  $v$  é um vértice de  $T$ , então a cada ocorrência de  $v$  em  $T$ , o grau de  $v$  é acrescido de duas unidades. Como  $T$  é uma trilha euleriana, toda aresta de  $G$  ocorre exatamente uma vez em  $T$ . Logo, a soma das contribuições de  $T$  ao grau de  $v$  é o grau de  $v$ . Portanto,  $d_G(v)$  é par.  $\square$

A condição descrita no lema 5.1.1 além de necessária, é também suficiente. Para a prova da suficiência, necessitamos do seguinte lema.

**Lema 5.1.2.** Seja  $G$  um grafo conexo. Se o grau de cada vértice é pelo menos dois, então  $G$  contém um circuito.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo tal que  $d_G(v) \geq 2$ ,  $v \in V(G)$ . Caso  $G$  tenha algum laço ou arestas paralelas, o resultado segue. Suponhamos então que  $G$  seja um grafo simples. Dado  $v_0 \in V(G)$ , construiremos um circuito da seguinte forma. Escolhemos  $v_1$  um vértice qualquer adjacente a  $v_0$ . Para cada  $i \geq 1$ , escolhemos  $v_{i+1}$  algum vértice diferente de  $v_{i-1}$  adjacente a  $v_i$ . Temos que a existência de tais vértices é garantida por hipótese, pois cada vértice é extremo de, no mínimo, duas arestas. Como  $G$  tem um número finito de vértices, em algum momento escolheremos um vértice  $v_k$  já escolhido anteriormente. Então o percurso entre as duas ocorrências de  $v_k$  é um circuito.  $\square$

**Lema 5.1.3.** Seja  $G$  um grafo conexo. Se todo vértice de  $G$  possui grau par, então  $G$  é euleriano.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo onde todos os vértices possuem grau par. Usaremos indução matemática no número  $m$  de arestas de  $G$  para provarmos que  $G$  é euleriano.

- Base:  $m = 0$ . Desde que  $G$  não possui arestas,  $G$  é isomorfo a  $K_1$ . Logo  $G$  é euleriano.
- Hipótese de Indução: Todo grafo conexo com  $k$  arestas,  $0 \leq k < m$ , tal que todos os vértices tenham grau par é euleriano.
- Passo: Seja  $G$  um grafo conexo com  $m$  arestas e com todos os seus vértice de grau par. Como  $m > 0$ , então o grau de todos os vértices de  $G$  é pelo menos dois. Logo, pelo lema 5.1.2,  $G$  contém um circuito. Seja  $C = \{v_1, v_2, \dots, v_p, v_1\}$  tal circuito.

Considere  $H$  o grafo obtido a partir de  $G$  ao retirarmos todas as arestas de  $C$ . Observe que o número de arestas de  $H$  é menor que  $m$ . Além disso, todos os vértices de  $H$  possuem grau par, pois a paridade dos graus dos vértices de um grafo não é alterada pela retirada de um circuito. Se  $E(H) = \emptyset$ , então  $G \cong C$ , isto é,  $G$  é euleriano. Seja  $E(H) \neq \emptyset$ . Note que o grafo  $H$  pode ser desconexo. Sejam  $H_i$  seus componentes conexos, com  $1 \leq i \leq p$ . Sabemos que os vértices de  $H_i$  possuem grau par, ou seja,  $\forall v, v \in V(H_i)$ ,  $d_H(v)$  é par. Além disso,  $|E(H_i)| < m$ , então pela hipótese de indução, cada componente  $H_i$  contém uma trilha euleriana fechada. Observe que, como  $G$  é conexo,  $V(H_i) \cap V(C) \neq \emptyset$ , com  $1 \leq i \leq p$ .

Construiremos uma trilha euleriana fechada  $T$  em  $G$  através do seguinte procedimento:

1. Seja  $T = C$ .
2. Para cada componente não trivial  $H_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , faça:
  - (a) encontre um vértice  $v_i \in V(T) \cap V(H_i)$ ;
  - (b) sejam  $T_1$  e  $T_2$  tais que  $T = T_1T_2$  e  $T_1$  terminando em  $v_i$ ;
  - (c) construa a trilha euleriana fechada  $P_i$  de  $H_i$  começando em  $v_i$ ;
  - (d) faça  $T = T_1P_iT_2$ .

Dessa forma,  $T$  é uma trilha euleriana, pois cada aresta de  $G$  foi considerada exatamente uma vez, e é fechada, pois retornou ao vértice inicial  $v$ . Logo,  $G$  é euleriano.  $\square$

Os lemas 5.1.1 e 5.1.3, provam o conhecido *Teorema de Euler*:

**Teorema 5.1.4.** Seja  $G$  um grafo conexo. O grafo  $G$  é euleriano se e somente se, todo vértice tem grau par.

**Exemplo:** Usando o grafo  $G$  da figura 5.2 como exemplo, sigamos os passos do procedimento acima para verificarmos se  $G$  é ou não euleriano.

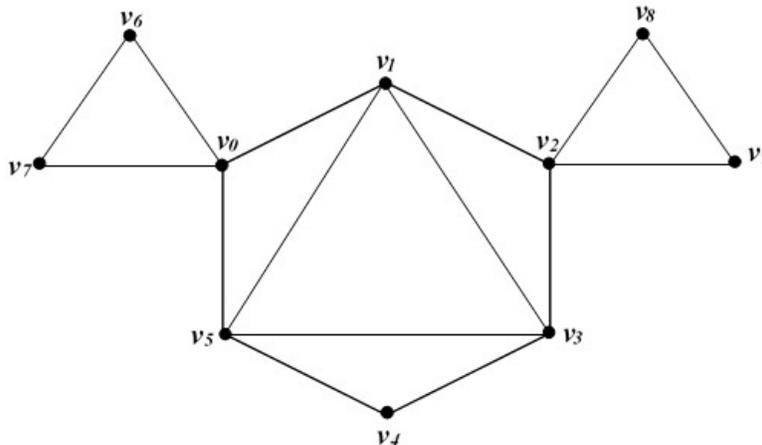


Figura 5.2: Grafo  $G$ .

Seja  $C = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$  o circuito escolhido, então o grafo  $H$  obtido retirando-se de  $G$  as arestas de  $C$  possui quatro componentes conexos exibidos na figura 5.3, sendo três não triviais.

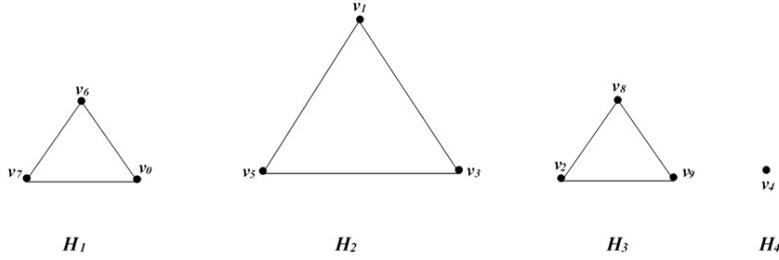


Figura 5.3: Componentes conexos de  $G$ .

1. Iniciamos fazendo  $T = C = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$ .
2. Para cada componente conexo não trivial,  $H_i$ , fazemos:
  - (a) Para  $H_1$  temos:
    - i.  $v_0 \in V(T) \cap V(H_1)$ ;
    - ii. Sejam  $T_1 = \{v_0\}$  e  $T_2 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$ ;
    - iii. Construímos a trilha euleriana fechada  $P_1 = \{v_0, v_6, v_7, v_0\}$  de  $H_1$ ;
    - iv. Fazemos  $T = T_1 P_1 T_2$ , ou seja,  $T = \{v_0, v_6, v_7, v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$
  - (b) Para  $H_2$ , temos:
    - i.  $v_1 \in V(T) \cap V(H_2)$ ;
    - ii. Sejam  $T_1 = \{v_0, v_6, v_7, v_0, v_1\}$  e  $T_2 = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$ ;
    - iii. Construímos a trilha euleriana fechada  $P_2 = \{v_1, v_5, v_3, v_1\}$ ;
    - iv. Fazemos  $T = T_1 P_2 T_2$ , ou seja,  $T = \{v_0, v_6, v_7, v_0, v_1, v_5, v_3, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$
  - (c) Para o componente conexo  $H_3$ , temos:
    - i.  $v_2 \in V(T) \cap V(H_3)$ ;
    - ii. Sejam  $T_1 = \{v_0, v_6, v_7, v_0, v_1, v_5, v_3, v_1, v_2\}$  e  $T_2 = \{v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$ ;
    - iii. Construímos a trilha euleriana fechada  $P_3 = \{v_2, v_9, v_8, v_2\}$ ;
    - iv. Fazemos  $T = T_1 P_3 T_2$ , ou seja,  $T = \{v_0, v_6, v_7, v_0, v_1, v_5, v_3, v_1, v_2, v_9, v_8, v_2, v_3, v_4, v_5, v_0\}$

Dessa forma,  $T$  é uma trilha euleriana fechada, pois cada aresta de  $G$  foi considerada exatamente uma vez, e é fechada, pois retornou ao vértice inicial  $v_0$ . Logo,  $G$  é euleriano.

Suponhamos que os cidadãos de Königsberg ainda estivessem interessados em cruzar cada uma das sete pontes exatamente uma vez, mas se contentassem em começar e terminar seu caminho em lugares diferentes. Existiria uma trilha que satisfizesse tais condições? Esta questão pode ser reformulada como: quando, em um grafo conexo, é possível percorrer todas suas arestas exatamente uma vez, sem a obrigatoriedade de retornar ao vértice inicial? O corolário 5.1.5 responde a esta questão.

**Corolário 5.1.5.** O grafo  $G$  contém uma trilha euleriana se, e somente se,  $G$  tem exatamente dois vértices de grau ímpar.

*Demonstração.* Seja  $G$  um grafo conexo. Suponha que  $G$  contenha uma trilha euleriana  $T$ . Sejam  $x$  e  $y$  os extremos desta trilha. Logo, todo vértice dessa trilha, exceto  $x$  e  $y$ , têm grau par.

Suponha que  $G$  tenha exatamente dois vértices de grau ímpar:  $x$  e  $y$ . Construa  $G'$  a partir de  $G$  acrescentando em  $E(G)$  a aresta  $xy$ . Então todo vértice de  $G'$  tem grau par. Logo, pelo lema 5.1.3,  $G'$  é euleriano e, portanto, contém uma trilha euleriana fechada  $T'$ . Logo,  $T = T' \setminus \{xy\}$  é uma trilha euleriana em  $G$ .  $\square$

Em relação ao problema das pontes de Königsberg (figura 2.2), podemos concluir que é impossível obter uma trilha euleriana no grafo representado pela figura 2.2. De fato, o número de vértices de grau ímpar neste grafo é maior que dois.

Existem várias aplicações simples das idéias acima que valem a pena mencionar. Estas variam de quebra-cabeças de natureza recreativa a um estudo das rotas de coleta de lixo em uma grande cidade. Algumas destas aplicações estão no próximo capítulo.

## Capítulo 6

# APLICAÇÕES DE GRAFOS EULERIANOS

### 6.1 Desenhando sem tirar o lápis do papel

Um tipo comum de problema em livros de passatempos é desenhar um dado diagrama com o menor número de traços possíveis, sem passar duas vezes pelo mesmo traço. Por exemplo, é possível desenhar o diagrama da figura 6.1 com quatro traços contínuos [2].

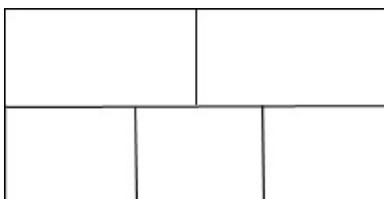


Figura 6.1: Diagrama de passatempo.

#### 6.1.1 A casinha

No desenho abaixo, uma criança diz ter posto a ponta do lápis numa das bolinhas e com movimentos contínuos (sem levantar e sem retroceder o lápis) traçou as linhas que formam o desenho da casa, percorrendo cada linha uma única vez.

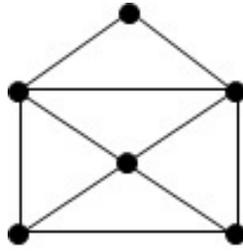


Figura 6.2: Desenho da casinha.

A mãe da criança acha que ela trapaceou pois não foi capaz de achar nenhuma sequência de linhas que pudesse produzir tal resultado. Você concorda com esta mãe?

Podemos acreditar na criança, pois segundo o corolário 5.1.5, o grafo representado pela figura desenhada pela criança possui uma trilha euleriana, pois há exatamente dois vértices de grau ímpar. A figura 6.3 mostra um modo possível de realizar tal desenho, onde o rótulo das arestas indica o percurso do lápis no papel. Note que a trilha percorrida é uma trilha euleriana aberta, pois os vértices de início e término possuem grau ímpar. Como a mãe não encontrou nenhuma trilha que satisfizesse a condição, ela provavelmente começou tal trilha por um vértice de grau par.

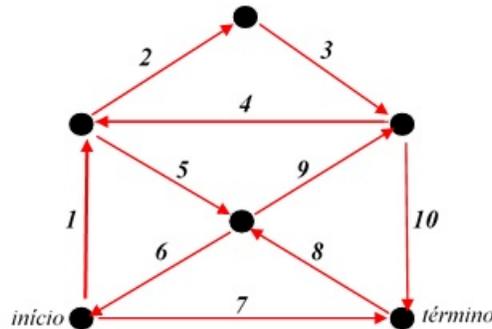


Figura 6.3: Trilha euleriana (aberta).

Acrescentando uma aresta entre os vértices de grau ímpar no grafo da figura 6.2, obtemos o grafo exibido na figura 6.4. Neste novo grafo é possível, partindo de um vértice, percorrer todo o desenho sem tirar o lápis do papel, passando por cada linha uma única vez e finalizando o desenho no mesmo ponto onde iniciamos?

Usando Teoria dos Grafos para responder tal questão, consideraremos que a possibilidade de acrescentarmos uma aresta unindo os vértices de grau ímpar faz com que estes passem a possuir grau par. A resposta à questão anterior é sim, pois ao acrescentarmos a nova aresta, obtivemos um grafo onde todos os vértices possuem grau par. Logo, pelo teorema 5.1.4, ele possui uma trilha euleriana fechada, sendo portanto, um grafo euleriano.

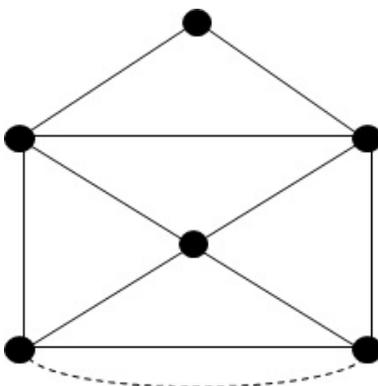


Figura 6.4: Novo desenho da casinha.

## 6.2 Unindo pontos

Marque  $n$ ,  $n > 2$ , pontos no plano e una cada um com todos os demais pontos. É possível desenhar a figura obtida sem tirar o lápis do papel, retornando ao ponto inicial?

Sabemos que cumprir o desafio será possível se e somente se o grafo formado for euleriano.

Observamos que a figura formada é um grafo completo com  $n$  vértices, ou seja, um  $K_n$ . Lembremos que grafos completos com  $n$  vértices ( $K_n$ ) são  $(n - 1)$ -regulares. Segue-se que,  $K_n$  é euleriano se e somente se  $n$  for ímpar.

## 6.3 O jogo de dominó

Existem várias versões que tentam decifrar de onde veio o jogo de dominó, mas nenhuma delas até hoje pode ser confirmada. Acredita-se, porém, que ele tenha surgido na China, inventado por um soldado chamado *Hung Ming*, que teria vivido de 243 a 181 a.C. Os primeiros indícios da presença do dominó na Europa são de meados do século XVIII, quando era jogado nas cortes de Veneza e Nápoles. As peças eram feitas de ébano, com pontos de marfim, representando os números. O antigo dominó chinês traz todas as 21 combinações que podem ser obtidas ao lançar dois dados, sugerindo que um jogo possa ter nascido do outro. Já na Europa, há sete peças a mais obtidas combinando esses números também com o zero. Alguns estudiosos sustentam até que, por ser extremamente simples, o jogo pode ter aparecido simultaneamente em várias partes do mundo.

O jogo europeu contém 28 peças, compostas por duas pontas, cada uma com um número, como ilustrado na figura 6.5 e é jogado quatro participantes, que formam duas duplas. São distribuídas sete peças de maneira aleatória para cada jogador. Aquele que tem a peça 6 – 6 inicia a partida, colocando-a no centro da mesa. A partir daí, no sentido anti-horário, cada jogador deve escolher entre as suas peças, uma que tenha alguma ponta em comum com uma das peças das extremidades do jogo, encaixando-as e passando a vez para o próximo jogador. A partida pode terminar em duas circunstâncias: quando um jogador consegue encaixar todas as suas peças, ou quando os jogadores não possuírem peça que encaixe em uma das extremidades.

Nosso interesse aqui não é o jogo propriamente dito, mas responder à seguinte questão: *é possível com todas as peças de um jogo de dominó formar um anel seguindo as regras do jogo?*

Podemos responder esta questão usando grafos. Inicialmente consideraremos o jogo de 21 peças, sem as peças chamadas **duplos**:  $0 - 0, 1 - 1, 2 - 2, 3 - 3, 4 - 4, 5 - 5, 6 - 6$ .

Definimos um grafo  $G$  da seguinte forma: o conjunto dos vértices de  $G$  são os números que aparecem nas pedras do dominó, ou seja,  $V(G) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . Cada pedra do dominó, representa uma aresta em  $G$ , ou seja,  $E(G) = \{01, 02, 03, 04, 05, 06, 12, 13, 14, 15, 16, 23, 24, 25, 26, 34, 35, 36, 45, 46, 56\}$ . Por exemplo, a aresta 13 (lê-se: um, três) corresponde à pedra representada na figura 6.5.

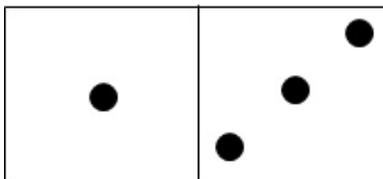


Figura 6.5: Exemplo da peça 1 – 3 do dominó.

Observe que  $G$  é um grafo completo com sete vértices, exibido na figura 6.6.

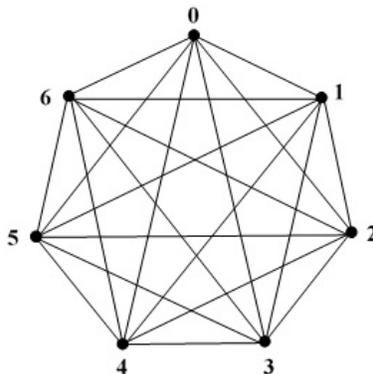


Figura 6.6: Grafo formado pelo jogo de dominó.

Note que  $G$  é o grafo completo  $K_7$ , que é euleriano e, portanto, admite uma trilha euleriana fechada. Uma possível trilha euleriana em  $G$  é a seguinte:

$$T_1 = (01, 12, 23, 34, 45, 56, 60, 02, 24, 46, 61, 13, 35, 50, 03, 36, 62, 25, 51, 14, 40).$$

Se considerarmos o dominó que contém também os duplos, obteremos um grafo  $G'$ , mostrado na figura 6.7 onde  $V(G') = V(G)$  e  $E(G') = E(G) \cup (00, 11, 22, 33, 44, 55, 66)$ . Cada duplo representa um laço em  $G'$ , onde cada vértice passa a possuir grau oito. Pelo teorema 5.1.4, temos que  $G'$  também é euleriano, logo contém uma trilha euleriana fechada,

$$T_2 = (00, 04, 43, 33, 31, 11, 14, 46, 60, 02, 24, 44, 45, 55, 51, 12, 23, 35, 50, 03, 36, 62, 22, 25, 56, 66, 61, 10)$$

como mostra a figura 6.8. Concluímos assim que, em ambos os casos, podemos formar um anel utilizando as pedras do dominó, seguindo as regras do jogo.

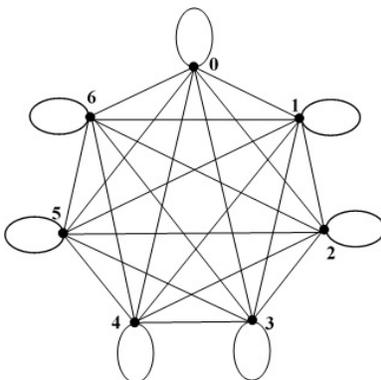


Figura 6.7: Grafo formado pelo jogo de dominó contendo os duplos.

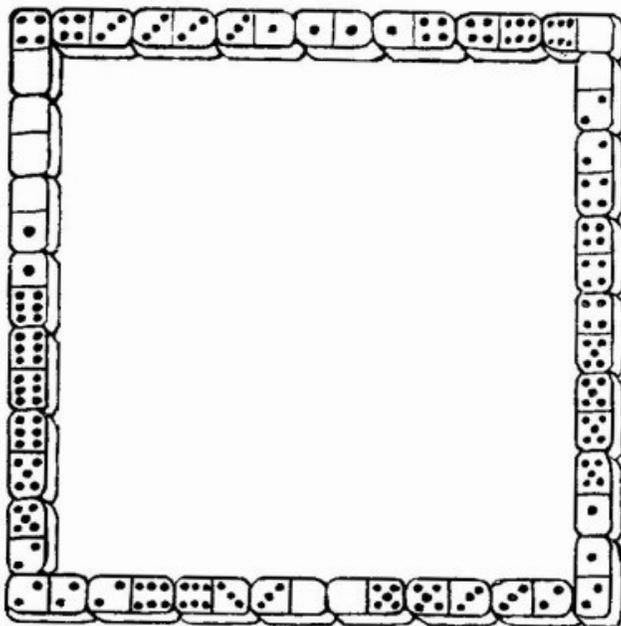


Figura 6.8: Jogo de dominó fechado.

Na trilha  $T_1$  existem três circuitos disjuntos nas arestas tal que,  $E(G) = E(C_1) \cup E(C_2) \cup E(C_3)$ . Os circuitos são:

- $C_1 = (01, 12, 23, 34, 45, 56, 60)$
- $C_2 = (02, 24, 46, 61, 13, 35, 50)$

- $C_3 = (03, 36, 62, 25, 51, 14, 40)$

E no grafo da figura 6.7 existem, além dos circuitos  $C_1, C_2$  e  $C_3$ , cada um dos sete laços, totalizando 10 circuitos disjuntos nas arestas.

Pode-se provar que todo grafo euleriano  $G$  admite uma decomposição em circuitos disjuntos nas arestas  $C_1, \dots, C_k$ , tal que  $E(G) = E(C_1) \cup \dots \cup E(C_k)$  [1].

**O dominó incompleto:** Em uma tarde chuvosa, sem poderem jogar bola, João e Pedro resolveram jogar dominó. Mas João se lembrou que seu irmãozinho havia perdido algumas peças do jogo. Foi então dizer a Pedro que eles não poderiam jogar pois estavam faltando algumas peças.

Pedro, que era muito bom em matemática e em raciocínio lógico pediu para ver quais peças ainda restaram. E João, embora desconfiado, abriu a caixinha e espalhou o que restava do jogo sobre a mesa. A figura 6.9 mostra as peças remanescentes do jogo de João.

|   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 2 | 2 | 2 | 3 | 3 | 3 | 5 |
| 2 | 3 | 5 | 6 | 1 | 3 | 4 | 5 | 6 | 2 | 3 | 5 | 4 | 5 | 6 | 5 |

Figura 6.9: Peças remanescentes.

Pedro correu e pegou lápis e papel. Então pediu a João que lhe ajudasse a contar quantas vezes aparece cada número. O resultado obtido foi: o zero aparece quatro vezes, o um seis vezes, o dois cinco vezes, o três seis vezes, o quatro duas vezes, o cinco seis vezes e o seis três vezes.

Pedro logo reparou que os números dois e seis apareciam um número ímpar de vezes, enquanto os demais apareciam um número par de vezes. Então falou alegremente:

\_Vai dar certo!

\_Como você sabe? Perguntou João.

\_Depois eu explico, mas já posso afirmar que quando terminarmos de jogar todas as peças, os números que estarão nas pontas serão o dois e o seis!

Muito intrigado, João embaralhou as peças e quis ser o primeiro a jogar. No final, logo viu que Pedro estava certo, pois a mesa estava como mostra a figura 6.10.

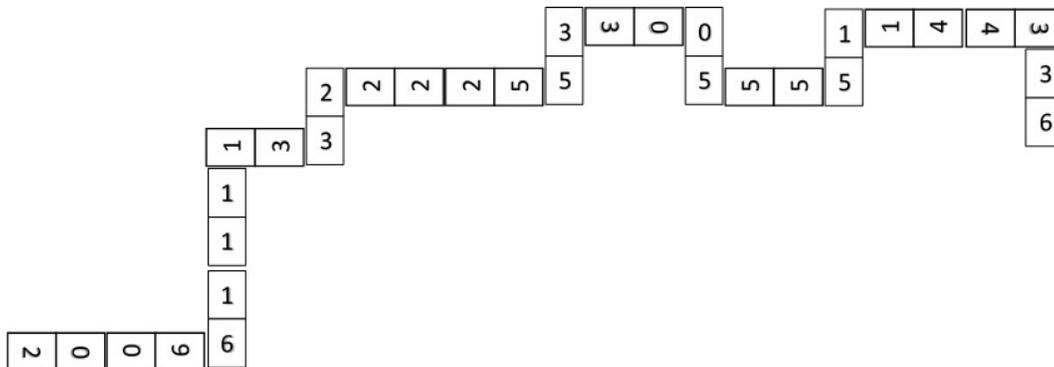


Figura 6.10: Jogo de dominó incompleto.

João ficou admirado!

—Como você sabia disso? Perguntou.

Mas antes que Pedro pudesse explicar, a mãe de João entrou no quarto trazendo um delicioso lanche.

Vamos então entender, através de grafos, como o jogo ainda deu certo mesmo estando faltando algumas peças.

Podemos concluir que a ausência de algumas peças do jogo significa a retirada de algumas arestas no grafo da figura 6.7. O novo grafo obtido está representado pela figura 6.11.

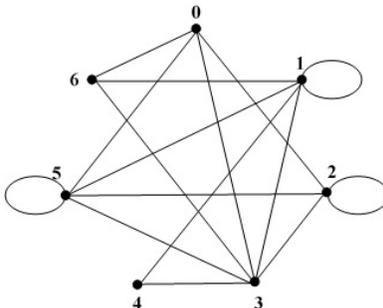


Figura 6.11: Grafo do jogo de dominó incompleto.

Note que o grafo da figura 6.11 é conexo e possui cinco vértices de grau par e dois vértices de grau ímpar. Logo, pelo corolário 5.1.5, podemos encontrar neste grafo uma trilha euleriana, a qual começa e termina nos vértices de grau ímpar. A disposição das peças na mesa conforme mostra a figura 6.10, nos fornece a trilha euleriana  $T = (20, 06, 61, 11, 13, 32, 22, 25, 53, 30, 05, 55, 51, 14, 43, 36)$ .

## 6.4 O problema chinês do carteiro.

As aplicações de grafos eulerianos, além dos passatempos já discutidos, relacionam-se também com problemas que envolvem atendimento sequencial, como por exemplo, entrega de correio,

coleta de lixo, etc. Em 1962, um matemático da Universidade Normal de Shangtun, Kwan Mei-Ko, quando de sua passagem como funcionário dos correios durante a revolução cultural chinesa, preocupou-se com uma situação semelhante à de Euler com as pontes de Königsberg, porém adequada ao percurso dos carteiros que atendiam ruas de sua cidade. Neste caso, Kwan mostrou-se interessado em definir além da travessia, a forma mais econômica de fazê-la, realizando com a menor distância possível o percurso. Kwan definiu assim o problema: "Um carteiro tem que entregar as correspondências recebidas em um posto do correio e distribuí-las em sua região de trabalho, antes de retornar ao posto. O problema é encontrar a menor distância percorrida para o carteiro." (Kwan, 1962; Gribkovskaia et al., 2007).

Podemos modelar tal problema usando um grafo  $G$ , associando suas arestas às ruas que devem ser percorridas pelo carteiro e os vértices aos cruzamentos de tais ruas.

Além disso, a cada aresta atribuiremos um inteiro  $i$  com  $i > 0$ , onde  $i$  é o comprimento, em metros, da rua correspondente. Dizemos que  $i$  é o **peso** da aresta e que  $G$  é **ponderado**.

O problema do carteiro se resume então, em encontrar uma trilha fechada de peso total mínimo, onde o peso total é a soma dos pesos das arestas percorridas pelo carteiro.

Se  $G$  for euleriano, a solução consiste simplesmente em achar uma trilha euleriana fechada em  $G$ .

Caso  $G$  seja um grafo não euleriano, temos uma solução mais interessante, como veremos a seguir.

Sabemos que se o grafo  $G$  não é euleriano,  $G$  possui vértices de grau ímpar, e pelo corolário 3.3.2, temos um número par destes vértices.

Neste trabalho, entretanto, exemplificaremos a solução do problema chinês do carteiro considerando um grafo com exatamente dois vértices de grau ímpar.

A figura 6.12 mostra um grafo  $G$  que representa a rota de um carteiro. Note que há cinco vértices de grau par e dois vértices de grau ímpar (vértices  $e$  e  $f$ ). Como  $G$  possui vértices de grau ímpar, o carteiro certamente terá de passar mais de uma vez por algumas ruas a fim de cumprir sua tarefa. Logo, para minimizarmos o trajeto total, o objetivo é encontrar um caminho entre os vértices  $e$  e  $f$  cuja soma dos pesos de suas arestas seja mínima. Um algoritmo eficiente que encontra tal caminho, foi proposto por Dijkstra em 1959 [8].

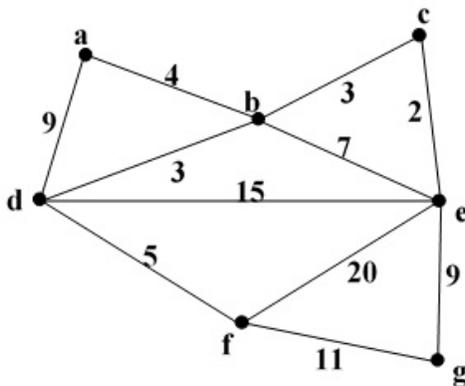


Figura 6.12: Grafo  $G$  do mapa do carteiro.

O caminho de peso mínimo entre  $e$  e  $f$  no grafo da figura 6.12 é claramente  $P = (ec, cb, bd, df)$ , com peso total  $2 + 3 + 3 + 5 = 13$ . A seguir, duplicaremos as arestas de  $P$ . **Duplicar** uma aresta  $e = uv$  de um grafo ponderado  $G$  é acrescentar a  $G$  uma nova aresta  $e_1$ , com extremos  $u$  e  $v$  e mesmo peso de  $e$ . A figura 6.13, exhibe o grafo  $G'$  obtido de  $G$  duplicando as arestas de  $P$ . Observe que, em  $G'$ , todo vértice tem grau par, logo  $G'$  é euleriano.

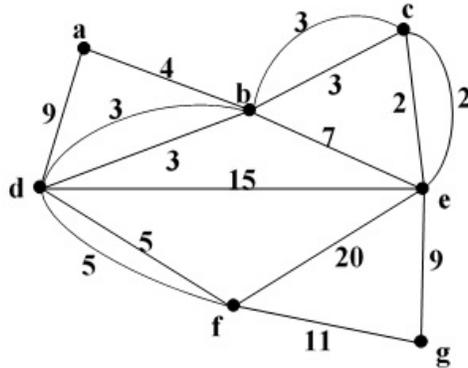


Figura 6.13: Grafo  $G'$  do mapa do carteiro.

A procurada rota de menor distância é obtida quando encontramos uma trilha euleriana fechada no grafo da figura 6.13. Um exemplo seria  $T = (fg, ge, ec, cb, ba, ad, db, bc, ce, eb, bd, de, ef, fd, df)$ . Note que as ruas as quais o carteiro precisa revisitar são aquelas que correspondem às arestas que foram duplicadas.

Um algoritmo eficiente para encontrar uma trilha euleriana é por exemplo, o algoritmo de Fleury [2].

Para grafos com mais de dois vértices de grau ímpar a resolução do problema é complexa, fugindo dos objetivos do nosso trabalho. Mesmo assim existem bons algoritmos para resolvê-lo [9].

## 6.5 Resolvendo o passatempo da seção 6.1.

A fim de respondermos à pergunta feita no início deste capítulo, representaremos a figura 6.1 como sendo um grafo  $G$  com os vértices rotulados de  $a$  a  $l$  e arestas, rotuladas de 1 a 16, conforme mostra a figura 6.14.

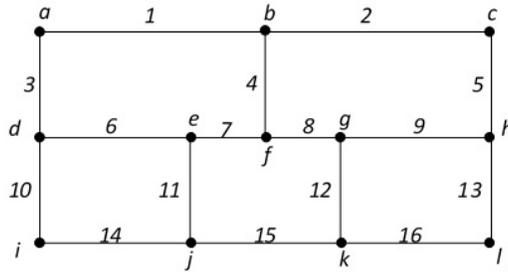


Figura 6.14: Grafo  $G$  do diagrama da seção 6.1.

Observamos que tal grafo possui oito vértices de grau ímpar e quatro vértices de grau par. Logo, pelo teorema 5.1.4,  $G$  não é euleriano, ou seja, não possui uma trilha euleriana fechada. Então já sabemos que seria impossível desenhar tal figura sem tirar o lápis do papel.

No entanto, se acrescentarmos arestas imaginárias entre os vértices de grau ímpar, mudamos a paridade de tais vértices, obtendo um grafo euleriano conforme mostra a figura 6.15. Ao percorrermos a trilha euleriana fechada deste novo grafo, temos que, cada vez que passamos por uma aresta imaginária, estamos "levantando" o lápis do papel. Observe que as arestas  $4'$ ,  $6'$ ,  $9'$  e  $15'$  são arestas acrescentadas.

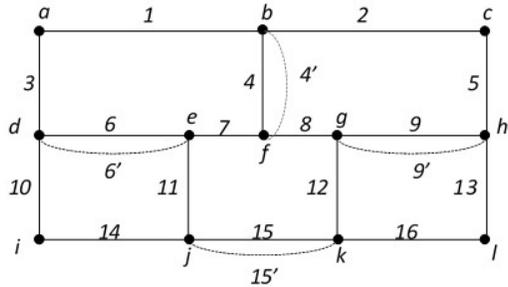


Figura 6.15: Grafo euleriano obtido de  $G$ .

Uma possível trilha euleriana fechada no grafo da figura 6.15 seria:

$$T_1 = (b, 2, c, 5, h, 9, g, 8, f, 7, e, 6, d, 6', e, 11, g, 15, k, 12, g, 9', h, 13, l, 16, k, 15', j, 14, i, 10, d, 3, a, 1, b, 4, f, 4', b).$$

Desconsiderando as arestas imaginárias  $4'$ ,  $6'$ ,  $9'$  e  $15'$  da trilha  $T_1$  temos quatro pedaços de  $T_1$ :

- $(b, 2, c, 5, h, 9, g, 8, f, 7, e, 6, d)$ ;
- $(e, 11, g, 15, k, 12, g)$ ;
- $(h, 13, l, 16, k)$ ;
- $(j, 14, i, 10, d, 3, a, 1, b, 4, f)$ .

Isso significa que para traçar o diagrama são necessários quatro traços contínuos. Logo, essa solução satisfaz o desafio proposto, que é conseguir desenhar o diagrama com apenas quatro traços contínuos.

Entretanto, sabemos pelo corolário 5.1.5 que se um grafo possuir exatamente dois vértices de grau ímpar, ele possui uma trilha euleriana, a qual inicia em um desses vértices e termina no outro. Se no grafo  $G$  acrescentarmos arestas imaginárias de forma que sobrem exatamente dois vértices de grau ímpar, ainda assim é possível desenhar a figura com quatro traços contínuos. A figura 6.16 exhibe o grafo obtido de  $G$  acrescentando as arestas imaginárias  $4'$ ,  $11'$  e  $12'$ .

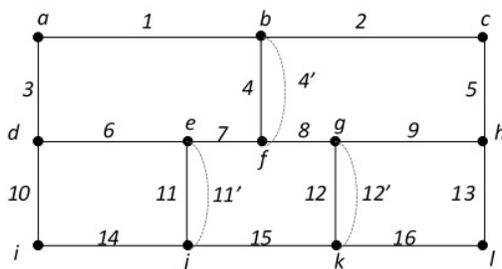


Figura 6.16: Grafo do diagrama com exatamente dois vértices de grau ímpar.

Temos que uma possível trilha euleriana no grafo da figura 6.16 é:

$$T_2 = (d, 3, a, 1, b, 4, f, 7, e, 6, d, 10, i, 14, j, 11, e, 11', j, 15, k, 12, g, 8, f, 4', b, 2, c, 5, h, 9, g, 12', h, 16, l, 13, h).$$

Desconsiderando as arestas imaginárias em  $T_2$ , temos os seguintes pedaços da trilha:

- $(d, 3, a, 1, b, 4, f, 7, e, 6)$ ;
- $(d, 10, i, 14, j, 11, e)$ ;
- $(j, 15, k, 12, g, 8, f)$ ;
- $(b, 2, c, 5, h, 9, g)$ ;
- $(h, 16, l, 13, h)$ .

Portanto, conseguimos desenhar o diagrama levantando o lápis do papel três vezes e utilizando quatro traços contínuos, como queríamos.

# Capítulo 7

## OUTRAS APLICAÇÕES

### 7.1 O desafio dos quatro cubos (insanidade instantânea)

Os quebra-cabeças são brincadeiras seculares e sempre desafiadoras para aqueles que gostam de passar horas em busca de suas soluções. Normalmente, quem aprecia este tipo de desafio procura encontrar alguma lógica na solução do problema, a fim de se desligar do processo desgastante e desestimulantes das tentativas aleatórias. É nesse contexto que apresentaremos a solução para o quebra-cabeça "Instant Insanity", da Parker Brothers Game Company, mostrado na figura 7.1, o qual consiste de quatro cubos multicoloridos, conforme mostra a figura 7.2. Cada face dos cubos é colorida com uma de quatro cores dadas: vermelho (V), branco (B), rosa (R) e azul (A). O objetivo do quebra-cabeça é empilhar estes cubos um sobre o outro, formando um prisma retangular, conforme mostra a figura 7.3, de forma que cada uma das cores apareça em cada uma das quatro faces do prisma [2].



Figura 7.1: Jogo da Parker Brothers.

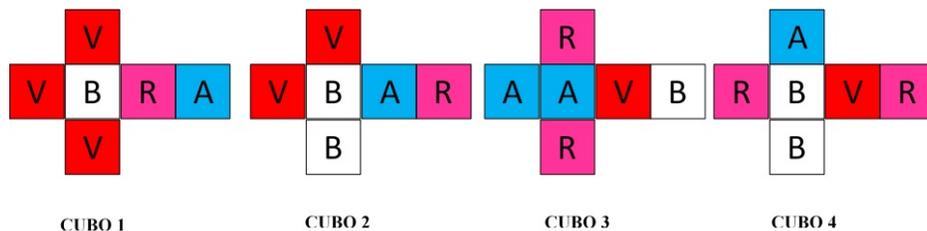


Figura 7.2: Planificações dos quatro cubos.

A primeira coisa que notamos sobre este problema é que uma abordagem de tentativa e erro seria inadmissível, uma vez que há mais de mil maneiras diferentes de empilhar os cubos. É fácil chegarmos a essa conclusão já que cada cubo pode ser posicionado de 24 modos diferentes (seis possibilidades para a face de cima, sendo que o cubo pode ser girado de forma a trazer qualquer um dos quatro lados para a frente). Logo o total de possibilidades de empilhamento é  $24^4 = 331776$ . Este número pode ser dividido por 4 se considerarmos duas pilhas como iguais ao girarmos uma para obtermos a outra. Temos ainda  $\frac{24^4}{4} = 82944$  possíveis pilhas diferentes. Precisamos, então, de um método sistemático que minimize a quantidade de “advinhações” envolvidas.

A segunda coisa a se considerar é que se uma face do cubo aparece em um lado da pilha, então a face oposta a esta no cubo, deve aparecer na face oposta da pilha. Segue-se daí que a nossa preocupação é com os pares opostos de faces dos cubos, isto é, devemos decidir para qual cubo que um par específico de faces, dentre os três existentes, deve aparecer de um certo lado da pilha.

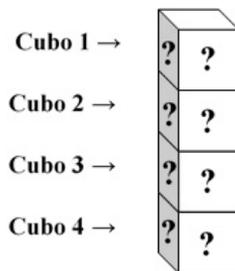


Figura 7.3: Como empilhar os cubos?

Para resolvermos este quebra-cabeça representaremos cada cubo por um grafo, o qual nos dirá quais pares de cores aparecem em faces opostas. Mais precisamente, o grafo de cada cubo possuirá quatro vértices, os quais correspondem às cores vermelho (V), branco (B), rosa (R) e azul (A) e, dois vértices são adjacentes se, e somente se, o cubo em questão possuir as cores correspondentes em faces opostas. Por exemplo, a figura 7.2 nos mostra que, no cubo 1, vermelho e rosa aparecem em faces opostas, logo os vértices  $V$  e  $R$  são unidos por uma aresta no grafo correspondente. Os quatro grafos mostrados na figura 7.4 são construídos a partir dos quatro cubos da figura 7.2.

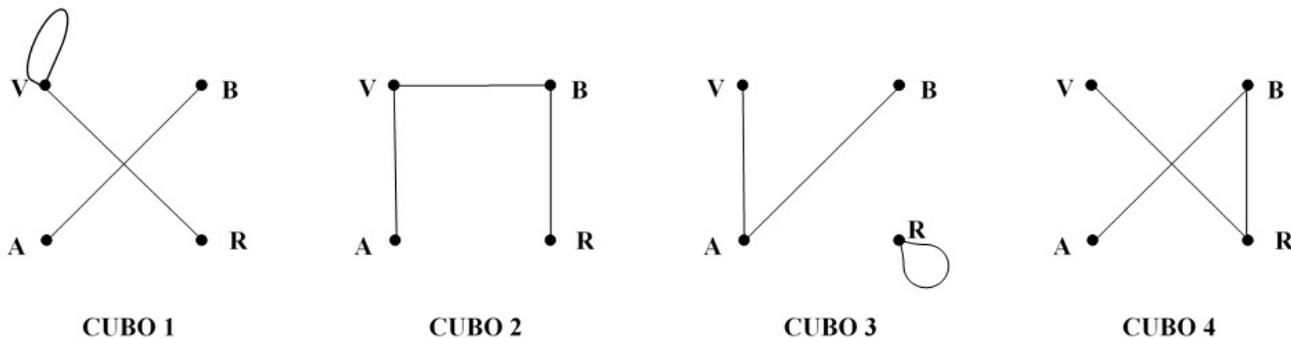


Figura 7.4: Grafos correspondentes aos cubos.

Inicialmente, rotulamos as arestas do grafo do cubo  $i$  da figura 7.4 com o inteiro  $i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ . Construímos então um novo grafo  $G$ , como o exibido na figura 7.5, cujos vértices são as cores existentes em cada face e as arestas correspondem às arestas de cada um dos cubos.

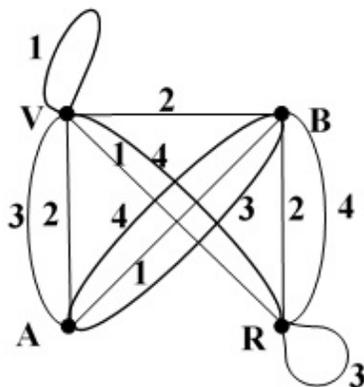


Figura 7.5: Grafo  $G$ .

Para resolver o problema dos quatro cubos precisamos verificar se existem dois subgrafos de  $G$ ,  $H_1$  e  $H_2$ , onde  $H_1$  nos diz quais pares de cores aparecem na face da frente e na face de trás de cada cubo, e  $H_2$  nos diz quais pares de cores aparecem nos lados direito e esquerdo de cada cubo. Tais subgrafos precisam satisfazer três propriedades fundamentais, que são:

- $P_1$  : Cada  $H_i$ ,  $i = 1, 2$ , contém exatamente uma aresta proveniente de um cubo.
- $P_2$  :  $H_1$  e  $H_2$  são regulares de grau dois.
- $P_3$  : Os conjuntos de arestas de  $H_1$  e  $H_2$  são disjuntos.

Vamos verificar para o grafo  $G$  da figura 7.5 se existem subgrafos,  $H_1$  e  $H_2$ , tendo as propriedades anteriores. Suponha  $H_1$  com o laço no vértice  $V$ . Então  $H_1$  não pode conter outra aresta incidente

em  $V$ , devido à  $P_2$ . De  $P_1$  segue-se que  $H_1$  obrigatoriamente contém a aresta do segundo cubo que une os vértices  $R$  e  $B$  e a aresta do terceiro cubo unindo os vértices  $A$  e  $B$ . Ainda de  $P_1$ , precisamos de uma aresta do cubo quatro, sendo que nenhuma delas satisfaz  $P_2$ . Logo, nenhum subgrafo de  $G$  que contenha o laço em  $V$ , satisfaz as três propriedades. A argumentação é semelhante para o caso em que  $H_1$  contenha o laço no vértice  $R$ . Portanto, nenhum subgrafo de  $G$  que contenha o laço em  $V$  ou em  $R$ , satisfaz as três propriedades.

Consideremos agora a aresta  $VB$  do cubo 2. Do cubo 1 poderíamos pegar tanto a aresta  $VR$  quanto a aresta  $AB$ . Se pegarmos a aresta  $VR$  do cubo 1, podemos pegar a aresta  $AB$  do cubo 3, o que confere grau dois aos vértices  $V$  e  $B$ , ou seja, não podemos pegar nenhuma aresta do cubo 4 que incida nesses dois vértices, o que seria impossível, pois as três arestas do grafo do cubo 4 incidem ou em  $V$  ou em  $B$ . Por outro lado, se escolhermos pegar a aresta  $AB$  do cubo 1, o vértice  $B$  passará a ter grau dois, ou seja, só nos resta pegar a aresta  $AV$  do cubo 3, o que confere grau dois aos vértices  $A$  e  $V$ , não nos deixando opção de aresta do cubo 4, pois qualquer uma que escolhessemos contrariaria  $P_2$ .

Temos então que os subgrafos de  $G$  que satisfazem  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  estão contidos no grafo  $G_1$  da figura 7.6. Note que  $G_1$  é obtido de  $G$  ao retirarmos os laços e a aresta  $VB$ .

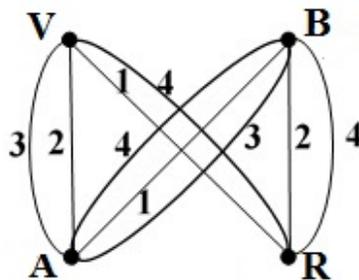


Figura 7.6: Grafo  $G_1$ .

A figura 7.7 exhibe os três possíveis subgrafos que satisfazem  $P_1$  e  $P_2$ .

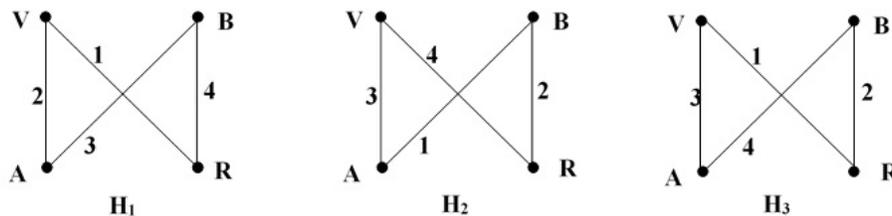


Figura 7.7: Subgrafos de  $G_1$ .

Entretanto, o subgrafo  $H_3$  não satisfaz a terceira propriedade, logo não pode ser usado na solução do problema.

A pilha resultante se dá a partir da combinação dos subgrafos  $H_1$  e  $H_2$ , na ordem em que os cubos aparecem. A figura 7.8 exibe uma possível solução para o desafio.

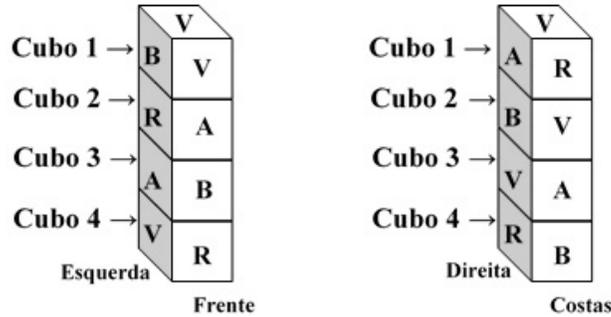


Figura 7.8: Uma solução do problema dos quatro cubos.

Assim, esgotamos todas as opções para a solução do problema dos cubos da figura 7.2.

## 7.2 O bode, a onça e o capim

Eis um problema clássico, retirado de [10] usado para testar a inteligência de crianças há muitos anos: um camponês criava uma onça e tinha também nas suas terras algumas criações de bode. Certo dia ele precisou atravessar o rio de canoa e levava com ele uma porção de capim, a onça e um bode, só que a capacidade da canoa só dava para atravessar o camponês e um dos animais ou o capim por vez, por conta do peso. É aí que estava o problema, não podia deixar o bode com o capim nem a onça com o bode para evitar que um comesse o outro, então a pergunta é a seguinte: você sabe dizer como o camponês atravessou tudo para o outro lado do rio?

Não é difícil resolver esse problema sem usar grafos, mas a resolução que descreveremos nos leva a uma formulação interessante em teoria de grafos. Primeiro precisamos adotar algumas notações para identificar a localização de cada animal e do capim em relação ao rio. Usaremos as letras  $O$ ,  $B$  e  $C$  para representar a onça, o bode e o capim, respectivamente. Na tripla ordenada  $(O, B, C)$ , cada elemento, será substituído por 0 ou 1, obedecendo a seguinte regra: 0 indica que o elemento correspondente encontra-se na posição inicial e o valor 1 indica que o elemento está na posição final, ou seja, na outra margem do rio. Então temos:

- $(0, 0, 0)$ : situação inicial, ou seja, nenhum dos três atravessou o rio.
- $(1, 0, 0)$ : a onça atravessou o rio, mas o bode e o capim ainda estão na margem inicial.
- $(0, 1, 0)$ : o bode atravessou o rio, mas a onça e o capim ainda estão na margem inicial.
- $(0, 0, 1)$ : o capim atravessou o rio, mas a onça e o bode ainda estão na margem inicial.
- $(1, 1, 0)$ : a onça e o bode atravessaram o rio, mas o capim ainda está na margem inicial.
- $(0, 1, 1)$ : o bode e o capim atravessaram o rio, mas a onça ainda está na margem inicial.

- $(1, 0, 1)$ : a onça e o capim atravessaram o rio, mas o bode ainda está na margem inicial.
- $(1, 1, 1)$ : todos atravessaram o rio.

Este problema pode ser representado por um grafo onde os vértices são as triplas ordenadas acima, e existe uma aresta entre dois vértices se houver a possibilidade de exatamente um dos elementos mudar de posição. Observe que este grafo é um 3-cubo, conforme mostra a figura 7.9. Nesta figura podemos fazer uma correspondência com o plano cartesiano  $R^3$  com coordenadas  $(x, y, z)$ , onde os movimentos da onça correspondem ao eixo  $x$ , os movimentos do bode ao eixo  $y$  e os do capim, ao eixo  $z$ .

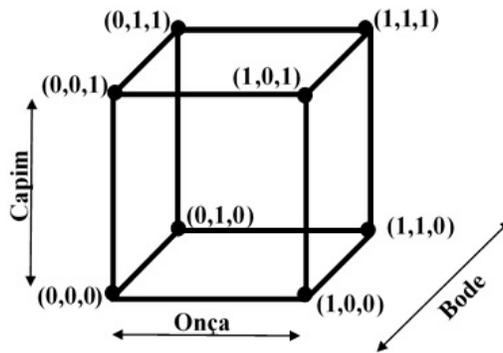


Figura 7.9: Posições da onça, do bode e do capim.

Para obter a solução deste problema, inicialmente desconsideramos as arestas que representam movimentos não válidos, ou seja, onde há a possibilidade de um elemento comer o outro. Obtemos desta forma, a configuração da figura 7.10.

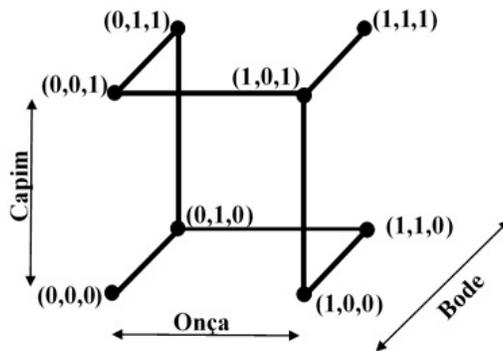


Figura 7.10: Possibilidades de movimentos válidos.

Agora, tudo o que precisamos é encontrar um caminho que comece em  $(0, 0, 0)$  e termine em  $(1, 1, 1)$ . Temos então duas possíveis soluções, mostradas nas figuras 7.11 e 7.12, respectivamente.

**Primeira solução:**

1. Transporte o bode para o outro lado;
2. Transporte o capim para o outro lado;
3. Transporte o bode de volta para a margem inicial;
4. Transporte a onça para o outro lado;
5. Transporte o bode para o outro lado.

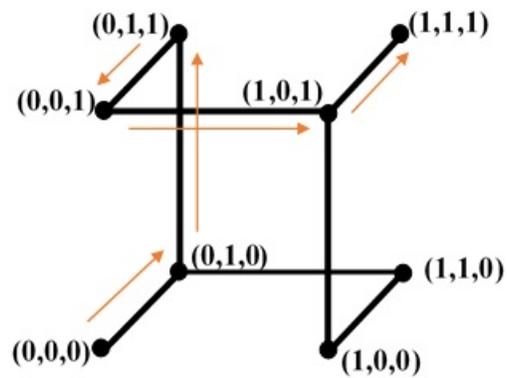


Figura 7.11: Primeira solução.

**Segunda solução:**

1. Transporte o bode para o outro lado;
2. Transporte a onça para o outro lado;
3. Transporte o bode de volta;
4. Transporte o capim para o outro lado;
5. Transporte o bode para o outro lado.

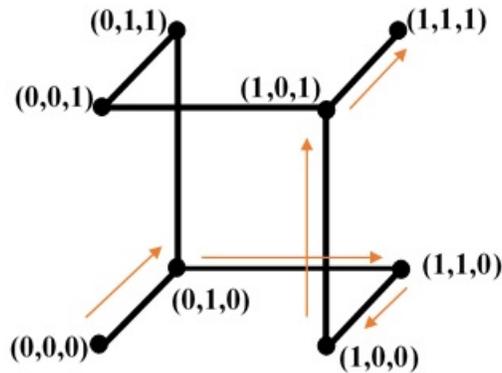


Figura 7.12: Segunda solução.

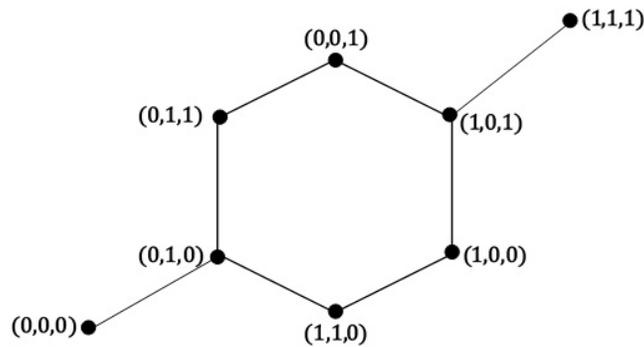


Figura 7.13: Grafo com ciclo.

Note que o grafo da figura 7.10 é isomorfo ao grafo da figura 7.13. Observando este grafo, vemos que para atingirmos o objetivo, que é partir do vértice  $(0, 0, 0)$  e chegar ao vértice  $(1, 1, 1)$ , temos apenas dois caminhos, que são  $P_1 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$  e  $P_2 = \{(0, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$ , os quais representam as duas soluções com o menor número de travessias, respectivamente.

### 7.3 Os cavalos do xadrez

O próximo problema é um dos mais famosos problemas de olimpíadas de matemática e foi retirado do material do Programa Olímpico de Treinamento, nível 2, aula 8, do professor Bruno Holanda [11]. Sabemos que a peça do cavalo no jogo de xadrez, se movimenta da seguinte forma: move-se duas casas na vertical ou horizontal e depois, uma casa na direção perpendicular à direção em que havia se movimentado antes. Sabendo disso, será que os cavalos da Posição 1 na figura 7.14, fiquem na posição 2 da mesma figura?

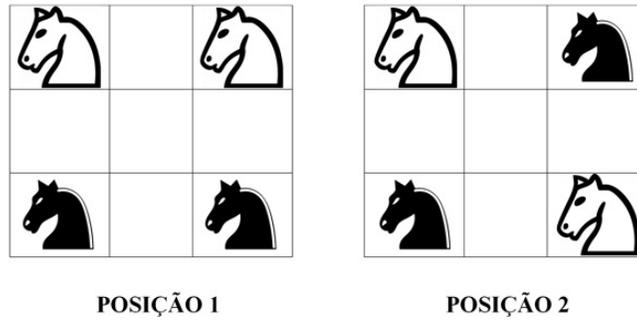


Figura 7.14: Problema do cavalo no jogo de xadrez.

Para responder tal questão, vamos enumerar as casas do tabuleiro, conforme mostra a figura 7.15.

|          |          |          |
|----------|----------|----------|
| <b>1</b> | <b>2</b> | <b>3</b> |
| <b>4</b> | <b>5</b> | <b>6</b> |
| <b>7</b> | <b>8</b> | <b>9</b> |

Figura 7.15: Enumerando as casas do tabuleiro.

Agora, construiremos um grafo  $G$ , onde os vértices correspondem às casas do tabuleiro, ou seja,  $V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$  e dois vértices,  $i$  e  $j$  são extremos de uma aresta se for possível que o cavalo vá da casa  $i$  até a casa  $j$  com apenas um movimento. O grafo  $G$  está representado na figura 7.16.

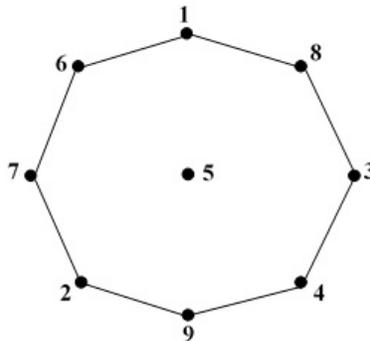


Figura 7.16: Grafo dos movimentos do cavalo.

Colocando os cavalos em suas respectivas casas nos grafos correspondentes às duas posições da figura 7.14, obtemos os dois grafos da figura 7.17.

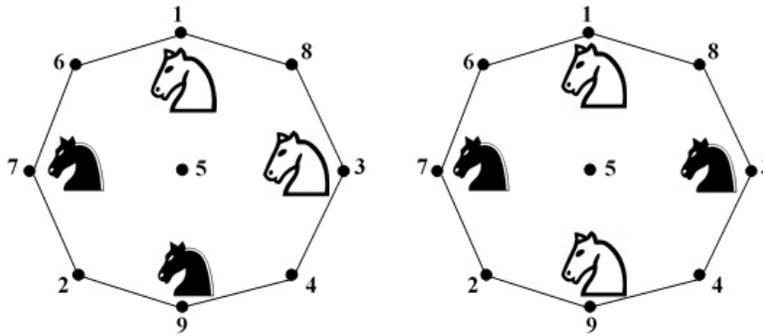


Figura 7.17: Grafos das posições 1 e 2.

Fica fácil então, de enxergarmos que é impossível ir de uma configuração à outra, pois não podemos alterar a ordem cíclica dos cavalos.

## 7.4 Amizades e triângulos

Seja uma pequena reunião com seis pessoas, a saber, Ana, Bernardo, Carla, Daniela, Eduardo e Fabio. Alguns deles se conhecem e outros não. O que podemos dizer do modo como estas pessoas se agrupam? Será que podemos dizer que necessariamente três deles se conhecem? Ou quatro? Existe um teorema que nos auxilia nesta questão [4].

**Teorema 7.4.1.** Em um grupo de seis pessoas sempre existem três que se conhecem mutuamente ou três que não se conhecem mutuamente.

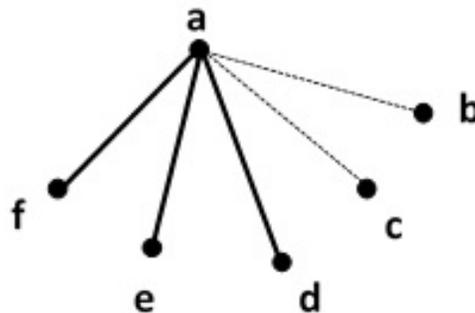


Figura 7.18: Conhece ou não conhece?

*Demonstração.* Usando grafos para responder tal questão, identificamos os vértices como as iniciais de cada nome ( $a, b, c, d, e, f$ ), como na figura 7.18. A função de incidência é *conhece ou não conhece*, sendo que, se Ana conhece Bernardo, Bernardo conhece Ana. Quando duas pessoas se conhecem, a aresta que os une é uma linha contínua e quando não se conhecem, uma linha intermitente. O

que queremos mostrar é que qualquer que seja o grafo, sempre haverá pelo menos um triângulo formado por linhas iguais.

Fixado o vértice  $a$ , sabemos que ele possui cinco arestas. Como só há dois tipos de aresta, um dos tipos foi usado pelo menos três vezes. Sem perda de generalidade, suponha que o tipo “contínua” foi escolhido três vezes. Agora, se houver uma aresta contínua unindo pelo menos dois dentre os vértices  $d, e$  e  $f$  teremos um triângulo de arestas contínuas, o que significa que três pessoas se conhecem mutuamente. Caso contrário, as três serão intermitentes. Neste caso, teremos um triângulo de arestas intermitentes, ou seja, três pessoas que não se conhecem mutuamente. Em qualquer caso, acabamos de mostrar que sempre haverá um triângulo de um mesmo tipo de aresta. Portanto, no grupo haverá sempre três pessoas que se conhecem mutuamente ou três que não se conhecem mutuamente.  $\square$

# CONCLUSÃO

Neste trabalho inicialmente introduzimos as noções elementares da teoria dos grafos e posteriormente nos concentramos no estudo de grafos eulerianos. Verificamos que a partir do conceito de trilha euleriana, podemos resolver vários problemas relacionados a desafios e jogos que envolvem raciocínio lógico. Foram apresentados também outros jogos que não envolviam, necessariamente, o conceito de grafos eulerianos.

Acreditamos que com este trabalho, alcançamos o objetivo proposto, que era o de elaborar um material de consulta para professores dos Ensinos Fundamental e Médio que desejem aplicar teoria de grafos em suas aulas ou oficinas. E também para que qualquer pessoa que se interesse pelo assunto, e que não possua conhecimento prévio, possa iniciar sua jornada.

Concluir este trabalho não significa, de maneira alguma, que encerramos os conteúdos possíveis sobre grafos e suas aplicações. Esperamos que esta dissertação seja uma motivação para que professores e estudantes de todos os níveis, passem pela teoria dos grafos, fazendo descobertas surpreendentemente divertidas.

# Referências Bibliográficas

- [1] BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. London: Macmillan, 1976.
- [2] WILSON, R. J.; WATKINS, J. J. *Graphs: an introductory approach: a first course in discrete mathematics*. New York: Wiley, 1990.
- [3] TRUDEAU, R. J. *Introduction to Graph Theory*. New York: Dover Publications, Inc., 1993.
- [4] BIN, X.; ZHONGYI, Z. *Graph Theory*. China: World Scientific, 2010.
- [5] LIMA, E. L. Alguns problemas clássicos sobre grafos. *Revista do Professor de Matemática*, v. 12, p. 36–42, 1988.
- [6] COSTA, P. P. da. *Teoria de Grafos e suas Aplicações*. Dissertação (Mestrado) — Universidade Estadual Paulista, 2011.
- [7] GOMIDE, A.; STOLFI, J. *Elementos de Matemática Discreta para Computação*. Campinas: <http://www.unicamp.br/~anamaria>, 2014.
- [8] AHO, A. V.; E., H. J.; ULLMAN, J. D. *The Design and Analysis of Computer Algorithms*. Mass.: Addison-Wesley, 1974.
- [9] EDMONDS, J.; JOHNSON, E. L. Matching, euler tours and the chinese postman. *Math. Programming*, v. 5, p. 88–124, 1973.
- [10] GRAPH Theory Puzzles to Try at Home. <http://www.maths.ed.ac.uk/~jcollins/OpenStudies/GraphPuzzlesSolutions.pdf>.
- [11] PINHEIRO, R. et al. Poti-material didático. 2012.