Universidade Federal do Piauí
Centro de Ciências da Natureza
Curso de Pós-graduação em Matemática

Ricardo Ribeiro Alcântara

Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios

Teresina

2014

Ricardo Ribeiro Alcântara

Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Orientador: Jefferson Cruz dos Santos Leite

Doutor em Matemática - UFPI

Teresina

2014

Alcântara, Ricardo

Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios / Ricardo Alcântara - 2014

xx.p

1.Modelagem Matemática 2. Matemática Discreta. I.Título.

CDU 536.21

Ricardo Ribeiro Alcântara

Probabilidade Geométrica em Lançamentos Aleatórios

Dissertação apresentada ao Curso de Matemática da UFPI, como requisito para a obtenção parcial do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 03 de Junho de 2014

BANCA EXAMINADORA

Jefferson Cruz dos Santos Leite

Doutor em Matemática - UFPI

Isaías Pereira de Jesus

Doutor em Matemática - UFPI

Alessandro Wilk Silva Almeida

Mestre em Matemática - UESPI

"Dedico com muito carinho este trabalho aos meus familiares pelo apoio que me deram na realização deste mestrado. Aos amigos, pelo apoio e companheirismo".

Agradecimentos

A Deus, por iluminar e trilhar o meu caminho e está sempre presente em minha vida.

Aos meus pais, pelo estímulo, carinho e dedicação.

À minha namorada Michelle Castro pelo o apoio e compreensão.

À minha família por sempre esta presente e apoiando minhas decisões.

Ao professor Jefferson Leite pela orientação, amizade e principalmente pela paciência, sem a qual este trabalho não se realizaria.

Aos professores do PROFMAT pelos seus ensinamentos repassados com louvor durante esses dois anos, que contribuíram de algum modo para o nosso enriquecimento pessoal e profissional.

À CAPES pelo apoio financeiro, pois sem esse auxílio não seria possível.

Por fim, aos meus amigos de mestrado Walter Júnior e Veríssimo Ducarmo, pelos inúmeros dias de estudos afincos, em que houve muitas dificuldades, mas superadas pelo apoio que um dava ao outro.

"Enquanto seres humanos talvez não possamos mudar as pessoas do mundo, mas enquanto educadores podemos transformar o mundo das pessoas ".

(Autor desconhecido)

Resumo

Essa dissertação apresenta alguns conceitos matemáticos pertinentes à probabilidade geométrica, dando ênfase ao jogo dos discos, onde se concentra a maioria dos problemas contextualizados. O objetivo desse trabalho é explicitar algumas de suas aplicações com soluções bem elaboradas sobre probabilidade geométrica, visando uma fácil compreensão para os alunos de ensino médio, como também para os alunos de graduação e pós-graduação. Foram apresentadas algumas estratégias para a resolução do problema do jogo dos discos deixando bem claro os casos dos pisos com rejunte e sem rejunte. Finalmente, trabalhamos as fórmulas referente as soluções, deixando-as mais objetivas na montagem das soluções dos problemas sobre o jogo dos discos.

Palavras-chave: Probabilidade Geométrica, Jogo dos Discos, Rejunte.

Abstract

This dissertation presents some mathematical concepts in relation to the geometric probability, with emphasis to the disk's game, which concentrates the majority of contextualized problems. The aim of this study is to clarify some of its applications with its elaborate solutions on geometric probability, seeking to an easy understanding for medium school students, but also for students of degree and postgraduate courses. Some strategies for solving the problem of disk's game were presented, making clear case of floors with grout and grout without. Finally, the formulas work related solutions, leaving them more objective in assembling solutions of problems on disk's game.

Keywords: geometric probability, disk's game, grout.

Sumário

1 Introdução **8**

2 Histórico Sobre a Probabilidade Geométrica **10**

2.1 Probabilidade Geométrica 11

2.2 Probabilidade Geométrica Usando Comprimento 11

2.3 Probabilidade Geométrica Utilizando Áreas 12

2.4 Probabilidade Geométrica Utilizando Volume 14

3 Probabilidade no Ensino Básico **18**

3.1 Concepções Sobre o Ensino de Probabilidade 18

3.2 O Jogo Como Recurso Educacional 20

4 Levantamento Histórico sobre Buffon e o Jogo dos Ladrilhos **21**

4.1 Calculando a Probabilidade Numa Pavimentação Formada por Quadrados 23

4.2 Cálculo do Diâmetro de um Disco Conhecendo a Probabilidade 26

4.3 Abordando Outra Situação Específica 28

5 Lançamento do Disco em uma Superfície Formanda Por Triângulos Equiláteros ou Hexágonos Regulares **30**

5.1 1º Caso: Calculando a Probabilidade Numa Pavimentação Formada por Triângulos Equiláteros 30

5.1.1 Cálculo do Diâmetro de um Disco Conhecendo a Probabilidade . . 32

5.1.2 Abordando Outra Situação Específica 33

5.2 2º Caso: Calculando a Probabilidade Numa Pavimentação Formada por Hexágonos Regulares 35

5.2.1 Cálculo do Diâmetro de um Disco Conhecendo a Probabilidade . . 37
5.2.2 Abordando Outra Situação Específica 38

6 Conclusão **41**

Referências Bibliográficas **42**

1 Introdução

O presente estudo sobre a atividade prática denominada "jogo dos discos", que é um experimento muito atraente para os estudantes do ensino médio, envolve o lançamento aleatório de discos em uma superfície formada por polígonos regulares iguais. Este jogo era conhecido antigamente como jogo dos ladrilhos ou problema dos ladrilhos.

Este estudo consiste em mostrar que neste jogo podemos usar qualquer polígono regular como superfície, assim iremos nos restringir apenas aos polígonos regulares: triângulo equilátero, quadrado e ao hexágono regular.

O jogo dos discos aborda o tema probabilidade geométrica e constitui uma oportunidade para o estudante do ensino médio refletir sobre conceitos de probabilidade, obtenção de dados a partir de um experimento, ajuste de curvas e modelagem de dados através de uma função.

A contextualização de uma questão, levando-a ao cotidiano do aluno, se faz necessária uma vez que objetivamos abordar atividades que os façam interagir em grupos e adquirir conhecimento de forma autônoma. Entendemos que o professor deve interagir como mediador nesse processo, mostrando os caminhos, mas deixando o aluno caminhar por eles.

No problema do jogo dos discos podemos considerar pavimentações de outros tipos para o piso onde serão lançados os discos, fazendo conexões com outras áreas da Matemática.

Em resumo, o trabalho está dividido da seguinte forma:

No capítulo 1, é discutida uma introdução sobre o tema em questão, onde foi explicitado a problemática do jogo dos discos.

No capítulo 2, abordaremos os aspectos históricos, desde o surgimento, o desenvolvimento e a evolução do estudo da probabilidade geométrica.

No capítulo 3, explanaremos sobre o ensino de probabilidade no ensino básico, baseando nosso estudo nos Parâmetros Curriculares Nacionais.

No capítulo 4, daremos enfoque aos conceitos de probabilidade geométrica, levando em conta, principalmente, a atividade prática "jogo dos discos".

O Capítulo 5, consistirá na demonstração de como se obter a probabilidade de um disco, após um lançamento aleatório, cair inteiramente dentro de um piso formado por triângulos regulares ou hexágonos regulares.

Finalmente no capítulo 6, estão dispostas as conclusões deste trabalho e as recomendações para trabalhos futuros.

2 Histórico Sobre a Probabilidade Geométrica

O termo **probabilidade** deriva do latim *probare* (provar ou testar), e representa uma parcela da Matemática que tem por objetivo a formulação de modelos teóricos, para o tratamento matemático da ocorrência (ou não ocorrência) de fenômenos aleatórios.

A teoria da probabilidade é uma área de relevante importância na Matemática, abrangendo situações nas quais não é possível prever resultados e ainda, com o uso dos conceitos probabilísticos, é possível explorar variadas aplicações reais. A forma mais comum de utilização do tema probabilidade é para modelar experimentos ou eventos cujos resultados não conhecemos com precisão.

Quanto à probabilidade geométrica, temos que seu início se deu através de Georges-Louis Leclerc, conhecido como Conde de Buffon (França, 1707 - 1788), com o conhecido problema da Agulha de Buffon [11]. Nesse problema o objetivo é calcular a probabilidade de uma agulha de comprimento $\boldsymbol{l}$, lançada num plano marcado por linhas paralelas, tocar numa destas linhas marcadas. Essas linhas estão separadas por uma distância $\mathbf{d}$, com $\boldsymbol{l} \leq \mathbf{d}$. Mantendo constantes os valores de $\boldsymbol{l}$ e lançando a agulha, queremos saber se houve, ou não, o contato entre essa agulha e alguma das linhas.

A fim de calcularmos a probabilidade dessa agulha tocar uma das linhas, devemos seguir os seguintes passos: calculamos as possibilidades da agulha encostar em uma das linhas, ou seja, calculamos as possibilidades favoráveis; em seguida, calculamos as possibilidades totais de a agulha tocar ou não umas das linhas, ou seja, possibilidades totais; finalizamos calculando a probabilidade da agulha tocar uma das linhas, utilizando a definição de probabilidade (divisão dos casos favoráveis pelos casos possíveis).

Um ponto interessante da solução desse problema é que, ao repetirmos o experimento várias vezes, o valor da probabilidade se aproximará do número π.

Concluímos que esse ramo da matemática, desenvolvido a partir do século XVI, é de importância inestimável para a sociedade, uma vez que é através de seus cálculos e definições que podemos realizar cálculos de estimativas, tomada de decisões, avaliação de riscos, entre tantas outras aplicabilidades.

2.1 Probabilidade Geométrica

O conceito de Probabilidade Geométrica é pouco trabalhado no Ensino Médio. Na escola, frequentemente o ensino de probabilidade se restringe apenas à contagem de casos favoráveis e casos possíveis. Porém, o trabalho com Probabilidade Geométrica pode ser muito interessante para que os alunos associem estudos de probabilidade e conhecimentos geométricos. Portanto, definiremos como é feito o cálculo de probabilidade quando se tratam de problemas geométricos. Para isso, usaremos como base os textos [1], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] e [13].

A probabilidade geométrica é uma parte do estudo de probabilidade na qual, para resolver problemas probabilísticos, faz-se necessário o uso de geometria. As noções geométricas mais utilizadas na resolução desses problemas são as noções de comprimento, área e volume.

2.2 Probabilidade Geométrica Usando Comprimento

Em diversos problemas precisaremos escolher um ponto de uma determinada "linha", ou seja, necessitaremos da noção de segmentos para a resolução.

Sejam X e Y pontos de um segmento (linha) de extremos A e B.

Figura 2.1: Cálculo de probabilidade envolvento comprimento

Adotaremos que a probabilidade de que um ponto da linha AB (segmento AB) pertença à linha XY (contida em AB) é proporcional ao comprimento de XY e não depende da posição dos pontos X e Y sobre AB. Portanto, selecionado um ponto de AB, a probabilidade de que ele pertença a XY será de:

$$p(XY)=\frac{\textit{Medida do Comprimento } XY}{\textit{Medida do Comprimento } AB} \tag{2.1}$$

Exemplo 2.2.1. Qual a probabilidade de, em uma corda de comprimento $2m$, um ponto pertencer exatamente aos $10cm$ iniciais?

Solução: Primeiro, converteremos todos os dados a mesma unidade de medida. Assim, em uma corda de $200cm$, queremos calcular a probabilidade de um ponto pertencer aos $10cm$ iniciais.

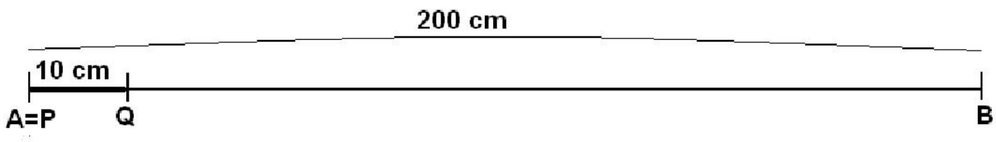


Figura 2.2: Representação dada no exemplo

Assim, a probabilidade pedida é a de um ponto do segmento AB, de $200cm$, pertencer ao segmento PQ, de $10cm$. Logo,

$$p(PQ) = \frac{Medida\ do\ Comprimento\ PQ}{Medida\ do\ Comprimento\ AB}$$

$$p(PQ) = \frac{10}{200} = \frac{1}{20} = 0,05$$

Portanto, a chance de que o ponto pertença aos 10 cmentímetros iniciais é de 5%.

2.3 Probabilidade Geométrica Utilizando Áreas

A maioria dos problemas de probabilidade geométrica utiliza em sua resolução as noções básicas de área de figuras planas.

Consideremos uma região X do plano, contida em uma região A.

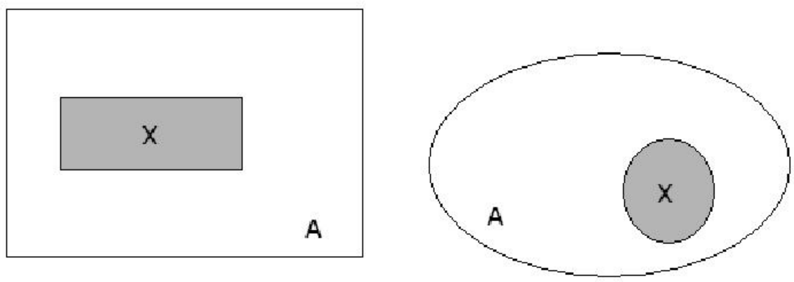


Figura 2.3: Áreas genéricas

Adotaremos que a probabilidade de que um ponto da região A (área A) pertença a região X (área X) é proporcional área de X e não depende da posição que X ocupa em A. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de A, a probabilidade de que ele pertença a X será de:

$$\boldsymbol{p(X)} = \frac{\boldsymbol{Medida\ da\ \acute{A}rea\ de\ X}}{\boldsymbol{Medida\ da\ \acute{A}rea\ de\ A}} \tag{2.2}$$

Exemplo 2.3.1. Um construtor está vendendo uma casa para um cliente, feita em um terreno de forma retangular, com $24m$ de largura por $40m$ de comprimento. A única exigência imposta pelo comprador e que a casa fique a uma distancia de $3m$ de cada muro. Qual a probabilidade de a casa cumprir essa exigência?

Solução: Temos que a probabilidade de a casa cumprir a exigência feita pelo comprador é dada pelo quociente entre a área de um retângulo de lados $18m$ por $34m$ e a área do terreno citado. Temos que a área do retângulo de comprimento de $40m$ e largura de $24m$ é $960m^2$.

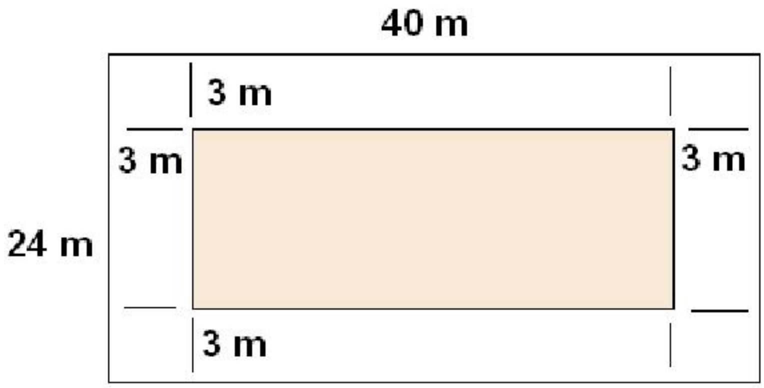


Figura 2.4: Representação do exemplo

Assim, observando a figura e calculando os lados do retângulo interior, temos que este retângulo possui $18m$ de largura por $34m$ de comprimento. Logo, sua área é de $612m^2$.

Assim, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{\acute{a}rea\ do\ ret\hat{a}ngulo\ inscrito}{\acute{a}rea\ do\ terreno}$$

$$p = \frac{612}{960} = \frac{51}{80} = 0,6375$$

Portanto, a chance de o construtor ter a casa que cumpra as exigências é de $63,75\%$.

2.4 Probabilidade Geométrica Utilizando Volume

São poucos os problemas probabilísticos conhecidos que utilizam a noção de volume de um corpo. Mas não são menos importantes.

Suponhamos um corpo V' no espaço, contido em um corpo V.

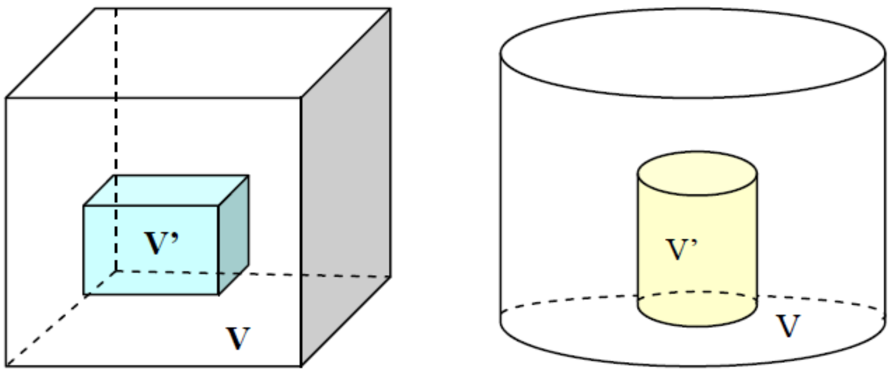


Figura 2.5: Volumes genéricos

Admitiremos que a probabilidade de que um ponto do corpo de V (volume V) pertença ao corpo V' (volume V') é proporcional ao volume de V' e não depende da posição que V' ocupa em V. Portanto, selecionado ao acaso um ponto de V, a probabilidade de que ele pertença a V' será de:

$$\boldsymbol{p(V')} = \frac{\textbf{\textit{Medida do Volume de V'}}}{\textbf{\textit{Medida do Volume de V}}} \tag{2.3}$$

Exemplo 2.4.1. Em um paralelepípedo retangular de $12cm$ de comprimento por $10cm$ de largura por $12cm$ de altura, temos uma pirâmide retangular inscrita, como mostra a figura a seguir:

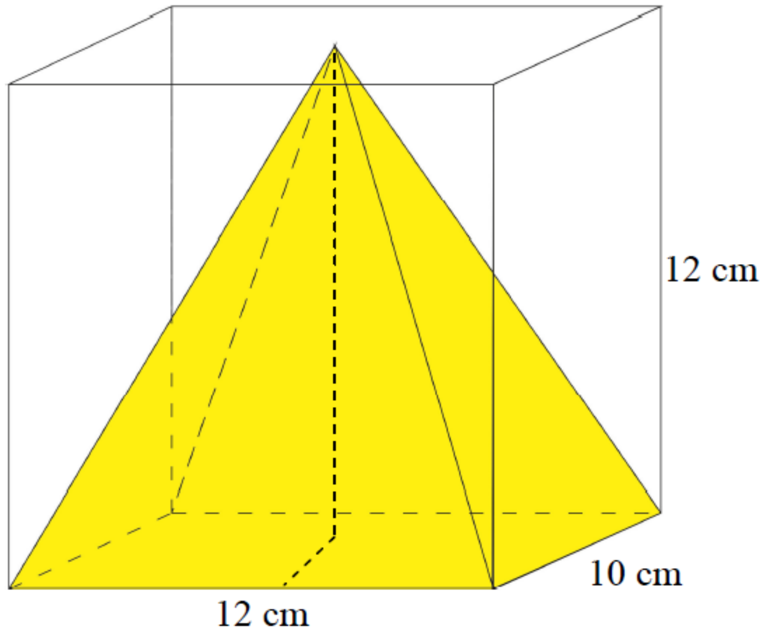


Figura 2.6: Representação do exemplo

Qual a probabilidade de, ao pegarmos um ponto ao acaso no interior do paralelepípedo, esse ponto pertencer à pirâmide?

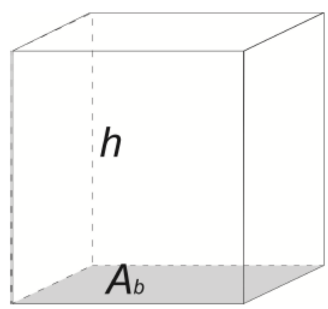
Solução: Para resolvermos esse problema, temos que saber como calculamos o volume do paralelepípedo retangular e da pirâmide.

O volume de um paralelepípedo é dado em função da área de sua base e da altura h, de acordo com a fórmula abaixo:

$$V = A_b.h$$

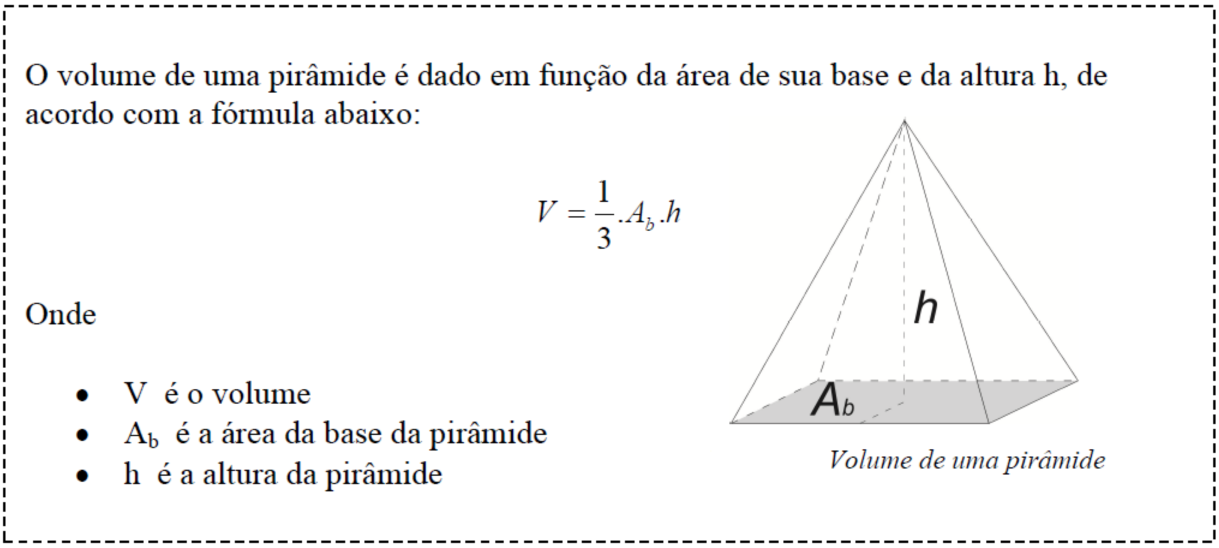
Onde

- V é o volume
- A_b é a área da base do paralelepípedo
- h é a altura do paralelepípedo



Volume de um paralelepípedo

Figura 2.7: Volume do paralelepípedo


O volume de uma pirâmide é dado em função da área de sua base e da altura h, de acordo com a fórmula abaixo:

$$V = \frac{1}{3}.A_b.h$$

Onde

- V é o volume
- A_b é a área da base da pirâmide
- h é a altura da pirâmide

Figura 2.8: Volume da pirâmide

Assim, o volume do paralelepípedo retângulo dado no exemplo **3.0.2** é:

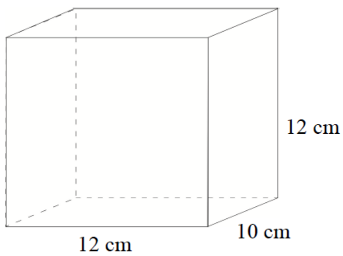


Figura 2.9: Paralelepídedo do exemplo dado

$$V = A_b \cdot h$$
$$V = 12 \cdot 10 \cdot 12$$
$$V = 1440cm^3.$$

Por outro lado, o volume da pirâmide dada no exemplo **3.0.2** é:

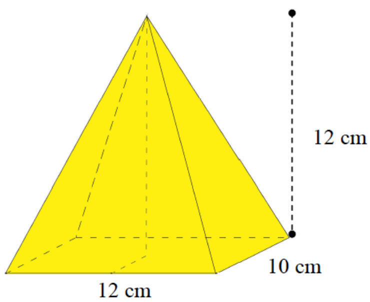


Figura 2.10: Pirâmide do exemplo dado

$$V = \frac{1}{3} \cdot A_b \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 10 \cdot 12$$
$$V = 480cm^3$$

Logo, a probabilidade pedida é:

$$p = \frac{Volume\ da\ pir\hat{a}mide}{Volume\ do\ paralelep\acute{\imath}pedo}$$

$$p = \frac{480}{1440} = \frac{1}{3} = 0,333...$$

Portanto, a chance de, escolhido um ponto ao acaso no paralelepípedo retângulo, ele pertencer à pirâmide é de $33,33\%$.

3 Probabilidade no Ensino Básico

3.1 Concepções Sobre o Ensino de Probabilidade

Nossa abordagem neste estudo visa apresentar ao aluno a atividade prática conhecida como "jogo dos discos", envolvendo experimentos práticos e a utilização da probabilidade geométrica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) [3] recomendam que se abordem, desde o Ensino Fundamental, noções básicas de Probabilidade e Estatística, a fim de que o aluno desenvolva, desde cedo, o pensamento probabilístico, que envolve desde a coleta de dados e interpretação de uma situação-problema até o entendimento de uma solução encontrada.

Ainda,

> *"Com relação à probabilidade, a principal finalidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (em espaços equiprováveis)." (PCN, 1998, pag.52)*

Deseja-se que, ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental (6º ao 9º anos), o estudante seja confrontado com situações concretas de análise de dados através de gráficos e/ou tabelas, introduzindo conceitos fundamentais para a compreensão dos fenômenos do dia a dia, fortalecendo assim a idéia da importância da coleta de dados e do raciocínio probabilístico. Além da análise de gráficos e tabelas, prioriza-se também que os alunos adquiram conhecimentos através da realização de experimentos práticos, explorando a noção do acaso e da aleatoriedade, a fim de que se desenvolvam as noções primordiais nas quais a teoria de probabilidade está centrada.

Assim, ao fim do Ensino Fundamental, espera-se que o aluno já tenha certo grau de compreensão relativo ao tema probabilidade e que já tenha desenvolvido meios para resolver situações-problema que envolva o raciocínio combinatório e a determinação da probabilidade de sucesso de um determinado evento por meio de uma razão [3].

Ao adentrarmos ao Ensino Médio, devemos ter como referencial para o início da abordagem, os conhecimentos já adquiridos pelos alunos no Ensino Fundamental, uma vez que o conhecimento prévio dos alunos é particularmente relevante para o aprendizado científico e matemático (PCNEM, 2000, pag.52)[2].

A partir da análise desses conhecimentos prévios, podemos então continuar com o estudo de Probabilidade, aprofundando os conceitos, explorando a teoria e mostrando as aplicações inerentes a esse tema.

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)[2], o estudo de Probabilidade tem como enfoque principal,

> *"Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculo de probabilidades." (PCNEM, 2000, pag.12)*

Além disso, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM)[2], em seu adendo intitulado "Orientações Educacionais Complementares (PCN+)", traz em seu texto, objetivos tidos como primordiais no estudo de Probabilidade. São eles: reconhecer o caráter aleatório de fenômenos e eventos naturais, científico-tecnológicos ou sociais, compreendendo o significado e a importância da probabilidade como meio de prever resultados; quantificar e fazer previsões em situações aplicadas à diferentes áreas do conhecimento e da vida cotidiana que envolva o pensamento probabilístico e identificar em diferentes áreas científicas e outras atividades práticas modelos e problemas que fazem uso de estatísticas e probabilidades [4].

Portanto, baseado nas diretrizes apontadas pelo PCN, PCNEM e pelo PCN+, iremos abordar, nesse estudo, a atividade prática "jogo dos discos" que visam atingir os objetivos já relatados, a fim de que, o aluno tenha conhecimento sólido sobre o tema Probabilidade e Probabilidade Geométrica.

3.2 O Jogo Como Recurso Educacional

Dentro do universo dos saberes matemáticos, é relevante a necessidade de se adotarem métodos de aprendizado ativo e interativo (jogos, experimentos, debates, etc.)[2].

Assim, entendemos que há necessidade da utilização de materiais concretos e de jogos, em todos os níveis de ensino, uma vez que esses estimulam o desenvolvimento dos alunos, pois dinamizam a aula e transmitem o conhecimento de maneira não formal e na qual o aluno atua como personagem central na aquisição do conhecimento.

Ainda, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino Médio (PCNEM)[2], temos que:

> *"Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, (...), dando ao aluno oportunidade de construir modelos explicativos, linhas de argumentação e instrumentos de verificação, (...), criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as atividades coletivas que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo atividades lúdicas, nos quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes. " (PCNEM, 2000, pag.52)*

Nesse contexto, nosso estudo tem como base, a exploração da atividade prática "jogo dos discos" que possue, em seu desenvolvimento, experimentos práticos e jogos, levando o aluno a interagir, explorar situações novas e adquirir conhecimentos de maneiras diversas.

4 Levantamento Histórico sobre Buffon e o Jogo dos Ladrilhos

Figura 4.1: Georges Louis Leclerc, Conde de Buffon

Nasceu em 7 de setembro de 1707, em Montbard, na França, e morreu em 16 de abril de 1788, em Paris. Buffon estudou Medicina e Direito. Mostrou interesse pela Matemática, tendo descoberto sozinho a Fórmula do Binômio e mantido correspondência com Cramer sobre Mecânica, Geometria, Probabilidade, Teoria dos Números e Cálculo Diferencial e Integral. Mas era a natureza a sua paixão. Dedicou-se principalmente à História Natural, tendo sido o maior responsável pelo crescimento do interesse pela História Natural na Europa, no século XVIII.

No século XVIII acreditava-se que Deus havia criado as espécies separadamente, isto é, de modo independente umas das outras, e que a idade da Terra seria de no máximo 6000 anos.

Em sua História Natural, uma enciclopédia que continha todo o conhecimento da época sobre a natureza, Buffon apontava, 100 anos antes de Darwin, as semelhanças entre homens e macacos e até mesmo sugeria a existência de um ancestral comum. Em As Épocas da Natureza (1788), sugeria que a idade da Terra era muito maior que os 6000 anos até então a ela atribuídos.

O Jogo dos Discos era conhecido no Século XVIII, na França, como o jogo do ladrilho, e muito apreciado pelas crianças. O 4º volume do Suplemento à História

Natural, publicado em 1777, tem 3 de suas 35 seções dedicadas ao Cálculo das Probabilidades. Uma delas é Sur le jeu de franc-carreau (Sobre o jogo do ladrilho), na qual Buffon discute o jogo do ladrilho e apresenta o Problema da Agulha. Esse foi o primeiro tratado conhecido sobre Probabilidade Geométrica.

O jogo do ladrilho era bastante jogado pelas crianças francesas no século XVIII. Uma pequena moeda de raio $\boldsymbol{r}$ é lançada ao acaso em um chão coberto por ladrilhos quadrados de lado $\boldsymbol{l}$ ($\boldsymbol{l}$>2$\boldsymbol{r}$). As crianças apostavam que a moeda cairia inteiramente dentro de um ladrilho ou que a moeda cairia atravessando o lado de algum ladrilho [4].

Buffon notou que a probabilidade de a moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho era a probabilidade de o centro da moeda cair dentro de um quadrado de lado $\boldsymbol{l}-2\boldsymbol{r}=\boldsymbol{l}-\boldsymbol{d}$, onde $\boldsymbol{d}=2\boldsymbol{r}$.

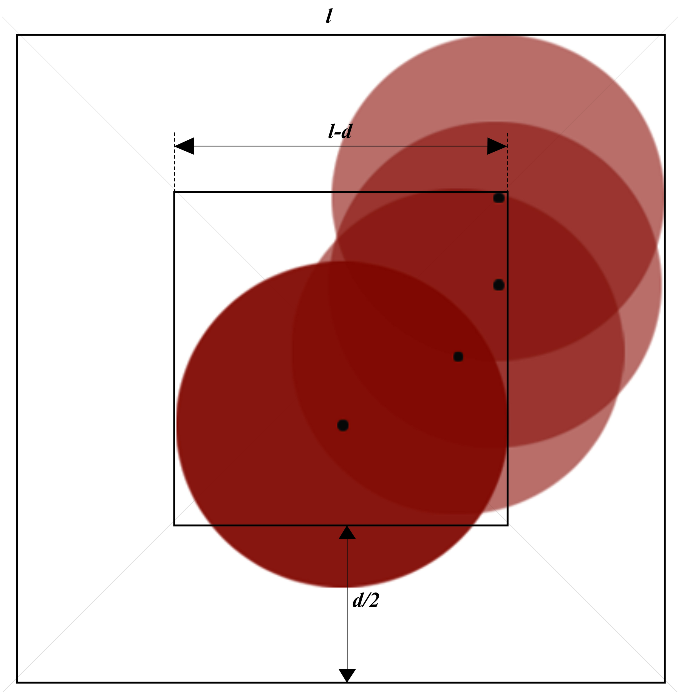


Figura 4.2: Quadrados semelhantes

Essa probabilidade é a razão entre as áreas do quadrado e do ladrilho, pois a probabilidade de o centro da moeda cair em uma região é proporcional à área dessa região.

Portanto, a probabilidade da moeda cair inteiramente dentro de um ladrilho é:

$$p = \frac{(l-2r)^2}{l^2},$$

ou seja,

$$\boldsymbol{p} = \left(\mathbf{1}-\frac{\mathbf{2}\boldsymbol{r}}{\boldsymbol{l}}\right)^{\mathbf{2}}.$$

4.1 Calculando a Probabilidade Numa Pavimentação Formada por Quadrados

Enunciando o problema: Em um plano pavimentado com quadrados de lado $\boldsymbol{l}$ é lançado aleatoriamente um disco de diâmetro $\boldsymbol{d}$. Qual a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de quadrado algum?

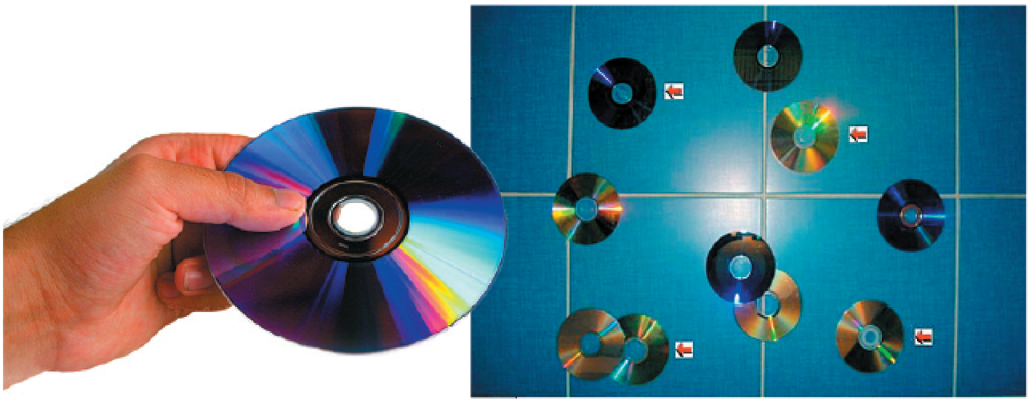


Figura 4.3: As setas indicam os eventos favoráveis

Então, se $\boldsymbol{d} \geq \boldsymbol{l}$, a probabilidade de ocorrer um evento favorável é zero.

Fica claro, portanto, que os valores interessantes para o diâmetro $\boldsymbol{d}$ estão no intervalo $0 \leq \boldsymbol{d} < \boldsymbol{l}$.

Assumimos $\boldsymbol{d} < \boldsymbol{l}$. Construindo um quadrado de lado $\boldsymbol{l} - \boldsymbol{d}$ simetricamente disposto dentro do quadrado de lado $\boldsymbol{l}$ (ver figura abaixo) vemos que o evento é favorável se o centro do disco cair no interior do quadrado de lado $\boldsymbol{l} - \boldsymbol{d}$.

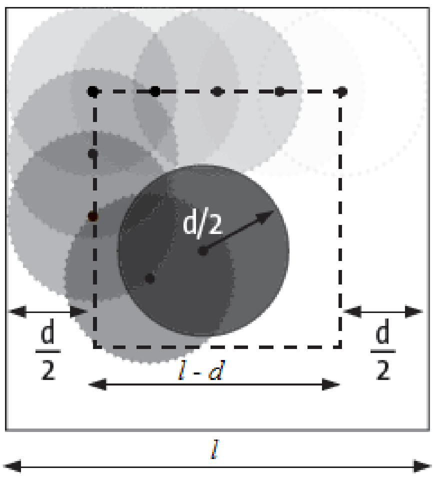


Figura 4.4: Quadrados semelhantes

Note que a distância entre o lado do quadrado menor e o lado paralelo mais próximo do quadrado maior tem a mesma medida do raio do disco, que é $\boldsymbol{\frac{d}{2}}$, e, portanto o lado do quadrado menor é:

$$\boldsymbol{l - \frac{d}{2} - \frac{d}{2} = l - d}.$$

Sob condições ideais podemos supor que lançar o disco aleatoriamente no piso é o mesmo que lançar seu centro aleatoriamente. Assim a probabilidade $\boldsymbol{p}$ do evento ser favorável é a mesma probabilidade de um ponto, lançado aleatoriamente dentro do quadrado de lado $\boldsymbol{l}$, cair dentro do quadrado de lado $\boldsymbol{l - d}$.

Da definição de probabilidade geométrica temos:

$$\boldsymbol{p(d) = \frac{\textit{área do quadrado menor}}{\textit{área do quadrado maior}}},$$

ou seja,

$$p(d) = \frac{(l-d)^2}{l^2}$$
$$p(d) = \frac{l^2 - 2ld + d^2}{l^2}$$
$$p(d) = \frac{1}{l^2}d^2 - \frac{2}{l}d + 1.$$

Obtemos assim a função quadrática $p(d) = \frac{1}{l^2}d^2 - \frac{2}{l}d + 1$ para $0 \leq d < l$.

Portanto, $p(d)$ é a probabilidade de um disco de diâmetro d, lançado aleatoriamente, cair inteiramente no interior de um quadrado de lado l.

Considerando que, se $d \geq l$, é zero a probabilidade de ocorrerem eventos favoráveis, e assim, temos:

$$p(d) = \begin{cases} \frac{1}{l^2}d^2 - \frac{2}{l}d + 1, \text{ se } 0 \leq d < l \\ 0 \qquad\qquad\quad , \text{ se } d \geq l \end{cases}. \tag{4.1}$$

No jogo dos discos, temos uma função quadrática na variável $\boldsymbol{d}$:

$$p(d) = \frac{1}{l^2}d^2 - \frac{2}{l}d + 1$$
$$p(d) = \frac{1}{l^2}(l-d)^2, \text{ com } p(0) = 1 \text{ e } p(l) = 0.$$

Note que, se $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{l}$ então $\boldsymbol{l}$ é uma raiz dupla dessa função. Assim, o gráfico de $\boldsymbol{p(d)}$ é parte de uma parábola com concavidade voltada para cima e tangente ao eixo horizontal na abscissa $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{l}$.

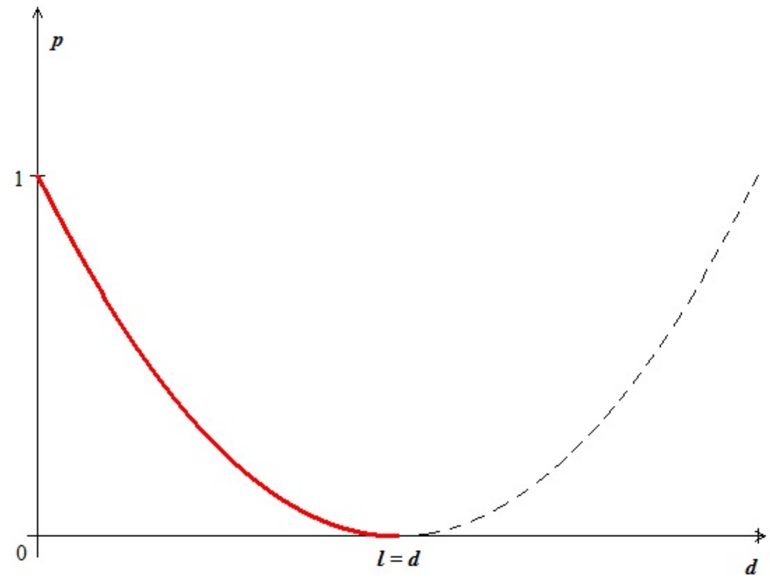


Figura 4.5: Gráfico de *p(d)*

Exemplo 4.1.1. Uma moeda de 10 centavos, com diâmetro de 2 cm, foi jogada aleatoriamente numa superfície formada por quadrados lado 3 cm. Qual o valor da probabilidade da moeda cair inteiramente no quadrado.

Figura 4.6: Pavimentação formada por quadrados

Solução: Utilizando a função que deduzimos anteriormente e considerando $l = 3$, obtemos:

$$p(d) = \frac{1}{l^2}d^2 - \frac{2}{l}d + 1$$
$$p(d) = \frac{1}{3^2}d^2 - \frac{2}{3}d + 1$$
$$p(d) = \frac{1}{9}d^2 - \frac{2}{3}d + 1.$$

Calculando o valor assumido por $p(d)$ quando $d = 2$, obtemos:

$$p(2) = \frac{1}{9} \cdot 2^2 - \frac{2}{3} \cdot 2 + 1$$
$$p(2) = \frac{1}{9} \cdot 4 - \frac{4}{3} + 1$$
$$p(2) = \frac{4}{9} - \frac{4}{3} + 1$$
$$p(2) = \frac{1}{9} \approx 0,11.$$

Portanto, para um disco com diâmetro de 2 cm e um quadriculado com quadrados de 3 cm de lado, a probabilidade de uma jogada favorável é exatamente $\frac{1}{9}$ (a cada 9 lançamentos, temos a probabilidade de 1 ser favorável), ou, aproximadamente 0,11. Em porcentagem, a probabilidade é de aproximadamente 11%.

4.2 Cálculo do Diâmetro de um Disco Conhecendo a Probabilidade

Enunciando o problema*:** Dado um plano pavimentado com quadrados de lado $\boldsymbol{l}$ e dada uma probabilidade ***p=p(d), isto é, dado um número $\boldsymbol{p}$ tal que $0 \leq p \leq 1$, pergunta-se qual o diâmetro $\boldsymbol{d}$ de um disco que, lançado aleatoriamente no piso, tem uma probabilidade $\boldsymbol{p}$ de cair inteiramente dentro de algum quadrado?

Para resolvermos esta situação-problema, temos que olhar a expressão obtida para ***p(d)***:

$$p(d) = \frac{1}{l^2}d^2 - \frac{2}{l}d + 1. \tag{4.2}$$

Isolando $\boldsymbol{d}$ em (4.2), podemos encontrar o diâmetro do disco a partir de uma dada probabilidade $\boldsymbol{p}$. Esta conta fica mais fácil se partimos da definição de probabilidade geométrica dada pelo quociente de áreas:

$$p = \frac{(l-d)^2}{l^2},$$

ou seja,

$$p \cdot l^2 = (l-d)^2. \tag{4.3}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados de (4.3), encontramos $l\sqrt{p} = l - d$. Finalmente, isolando o diâmetro d obtemos:

$$\boldsymbol{d = l(1\text{-}\sqrt{p})} \tag{4.4}$$

Esta é a fórmula do diâmetro do disco em função da probabilidade requerida, tendo como parâmetro o lado $\boldsymbol{l}$ do quadriculado.

Exemplo 4.2.1. Em uma sala de aula, os quadrados do piso desta sala têm lados iguais a 30 cm e a probabilidade do disco ser lançado aleatoriamente neste piso é 40%. Qual será o valor do diâmetro do disco lançado?

Figura 4.7: Piso formado por quadrados

Solução: Como sabemos que os quadrados do piso da sala de aula têm lados iguais a 30 cm e a probabilidade é de 40%, então o diâmetro é determinado por: $d = l(1-\sqrt{p})$. Substituindo os valores da probabilidade e do lado, temos:

$$d = 30(1-\sqrt{0,4})$$

$$d \approx 11,03cm.$$

Portanto, para um piso com quadrados de lado 30 cm e uma probabilidade de 40% devemos ter um disco com diâmetro aproximadamente 11,03 cm.

4.3 Abordando Outra Situação Específica

Até o momento, ao longo de nossos cálculos, desprezamos a espessura das linhas do quadriculado ou do rejunte dos ladrilhos, supondo que essa espessura era muito fina.

Figura 4.8: Piso com espaçamento entre os quadrados

Consideremos, por exemplo, o jogo dos discos em um ladrilhamento em que os ladrilhos são quadrados de lado $l = 30cm$ e estejam separados por $k = 2cm$ de rejunte.

A espessura do rejunte constitui uma área de eventos possíveis, mas não favoráveis.

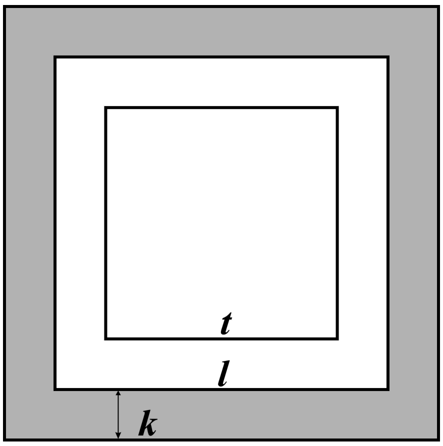


Figura 4.9: Quadrados semelhantes

Nesta situação, dados dois quadrados lado a lado, repartimos a espessura do rejunte meio a meio para cada quadrado.

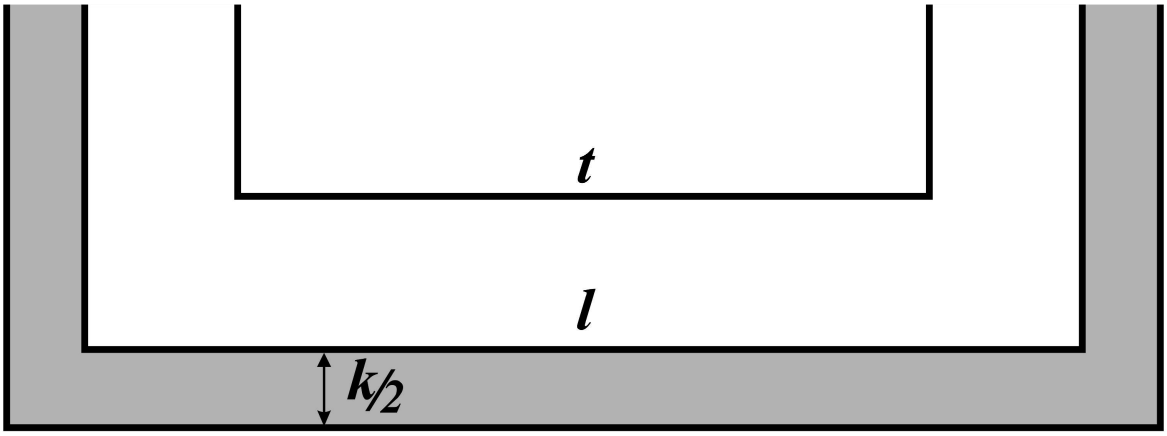


Figura 4.10: Quadrados semelhantes

Então, os quadrados em que os eventos são possíveis têm agora lado de 32 cm (1 cm adicional das duas pontas de cada lado). Mas o quadrado em que os eventos são favoráveis continua o mesmo que antes, isto é, tem lado $t = 30 - d$.

Assim, a função probabilidade tem agora a forma:

$$p(d) = \frac{(30 - d)^2}{32^2}$$

Generalizando,

$$\boldsymbol{p(d)} = \frac{\boldsymbol{(l - d)^2}}{\boldsymbol{(l + k)^2}}, \tag{4.5}$$

onde $\boldsymbol{k}$ é a espessura do rejunte.

5 Lançamento do Disco em uma Superfície Formanda Por Triângulos Equiláteros ou Hexágonos Regulares

Vamos aplicar o nosso jogo dos discos a outros tipos de pavimentações. O caso de pavimentações formadas por quadrados já foi estudado acima. Vejamos agora outros dois casos.

5.1 1º Caso: Calculando a Probabilidade Numa Pavimentação Formada por Triângulos Equiláteros

Suponhamos que o piso do jogo dos discos seja pavimentado com peças na forma de triângulos equiláteros de lado $\boldsymbol{l}$ e que a espessura do rejunte seja desprezível.

Figura 5.1: Piso formado por triângulos equiláteros

Lembrando que o apótema do triângulo equilátero (raio da circunferência inscrita) mede $\boldsymbol{a} = \dfrac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{6}}\boldsymbol{l}$, os discos devem ter diâmetro $\boldsymbol{d}$ tal que $0 \leq d < 2a$, ou $0 \leq d < \dfrac{\sqrt{3}}{3}l$, caso contrário a probabilidade é zero.

No interior do triângulo equilátero de lado $\boldsymbol{l}$ temos um triângulo equilátero menor de lado $\boldsymbol{t}$, com lados paralelos ao triângulo maior, de modo que a distância entre o lado do triângulo maior ao lado paralelo do triângulo menor seja $\boldsymbol{\frac{d}{2}}$ como mostra a figura abaixo.

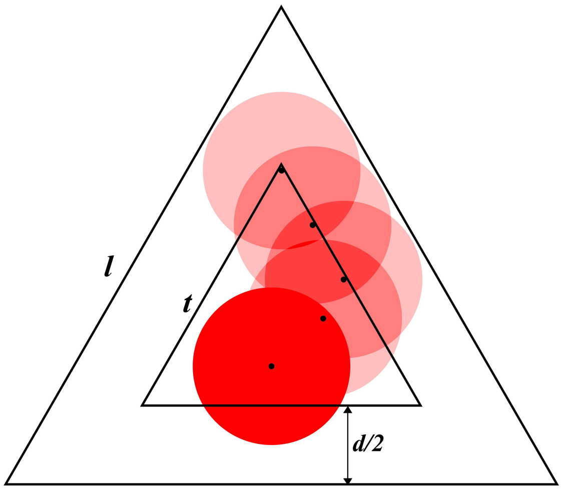


Figura 5.2: Triângulos semelhantes

Assim, temos que o apótema do triângulo maior é igual ao apótema do triângulo menor somado com a metade do diâmetro, ou seja,

$$\frac{\sqrt{3}}{6}l = \frac{\sqrt{3}}{6}t + \frac{d}{2}.$$

Portanto, podemos verificar que a relação entre l e t é $t = l - \sqrt{3}d$.

Lembremos que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual à razão entre os quadrados dos lados. Assim, a probabilidade de um disco de diâmetro d, lançado aleatoriamente no piso, cair inteiramente dentro do triângulo de lado l é:

$$p(d) = \frac{t^2}{l^2}$$

$$p(d) = \frac{(l - \sqrt{3}d)^2}{l^2}$$

$$p(d) = \frac{l^2 - 2\sqrt{3}ld + (\sqrt{3}d)^2}{l^2}$$

$$p(d) = \frac{3}{l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{l}d + 1.$$

Obtemos assim a função quadrática $p(d) = \frac{3}{l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{l}d + 1$ para $0 \leq d < \frac{\sqrt{3}}{3}l$.

Portanto, $p(d)$ é a probabilidade de um disco de diâmetro d, lançado aleatoriamente, cair inteiramente no interior de um triângulo equilátero de lado l.

Considerando que, se $d \geq \frac{\sqrt{3}}{3}l$, é zero a probabilidade de ocorrerem eventos favoráveis, e assim, temos:

$$p(d) = \begin{cases} \frac{3}{l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{l}d + 1, \text{ se } 0 \leq d < \frac{\sqrt{3}}{3}l \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \text{ se } d \geq \frac{\sqrt{3}}{3}l \end{cases}, \tag{5.1}$$

com $p(0) = 1$ e $p\left(\frac{\sqrt{3}}{3}l\right) = 0$.

Note que, se $d = \frac{\sqrt{3}}{3}l$, então $\frac{\sqrt{3}}{3}l$ é uma raiz dupla dessa função. Assim, o gráfico de *p(d)* também é parte de uma parábola com concavidade voltada para cima e tangente ao eixo horizontal na abscissa $d = \frac{\sqrt{3}}{3}l$.

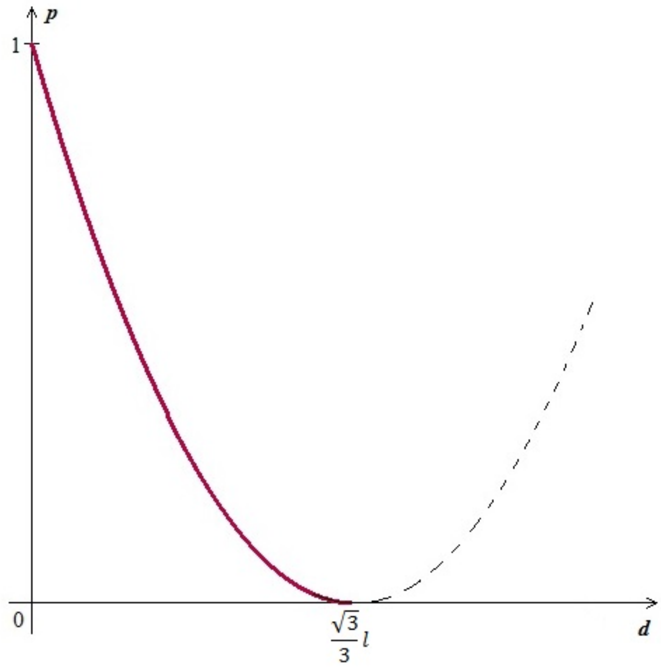


Figura 5.3: gráfico de *p(d)*

5.1.1 Cálculo do Diâmetro de um Disco Conhecendo a Probabilidade

Para resolvermos esta situação, olharemos para a expressão obtida para $p = p(d)$, a saber,

$$p(d) = \frac{3}{l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{l}d + 1. \tag{5.2}$$

Isolando $\boldsymbol{d}$ em (5.2), podemos encontrar o diâmetro do disco a partir de uma dada probabilidade $\boldsymbol{p}$. Se partimos da definição de probabilidade geométrica que é dada pelo quociente de áreas, essa conta fica mais fácil. Neste caso, relacionaremos os lados dos triângulos como sendo:

$$p = \frac{(l - \sqrt{3}d)^2}{l^2},$$

ou seja,

$$p \cdot l^2 = (l - \sqrt{3}d)^2. \tag{5.3}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados de (5.3), obtemos $l\sqrt{p} = l - \sqrt{3}d$. Finalmente, isolando o diâmetro d segue que:

$$d = \frac{l - l\sqrt{p}}{\sqrt{3}},$$

isto é,

$$\boldsymbol{d} = \frac{\sqrt{\mathbf{3}}}{\mathbf{3}}(\mathbf{1} - \sqrt{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{l}. \tag{5.4}$$

Esta é a fórmula do diâmetro do disco em função da probabilidade requerida, tendo como parâmetro o lado l do triângulo equilátero.

5.1.2 Abordando Outra Situação Específica

Figura 5.4: Piso com espaçamento entre os triângulos equiláteros

Até o momento, ao longo de nossos cálculos, desprezamos a espessura das linhas do rejunte $\boldsymbol{k}$ dos ladrilhos triangulares, supondo que essa espessura era muito fina.

A espessura do rejunte constitui uma área de eventos possíveis, mas não favoráveis.

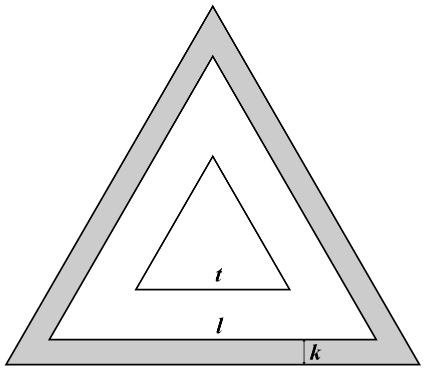


Figura 5.5: Triângulos semelhantes

Nesta situação, dados dois triângulos equiláteros lado a lado, repartimos a espessura do rejunte meio a meio para cada triângulo equilátero.

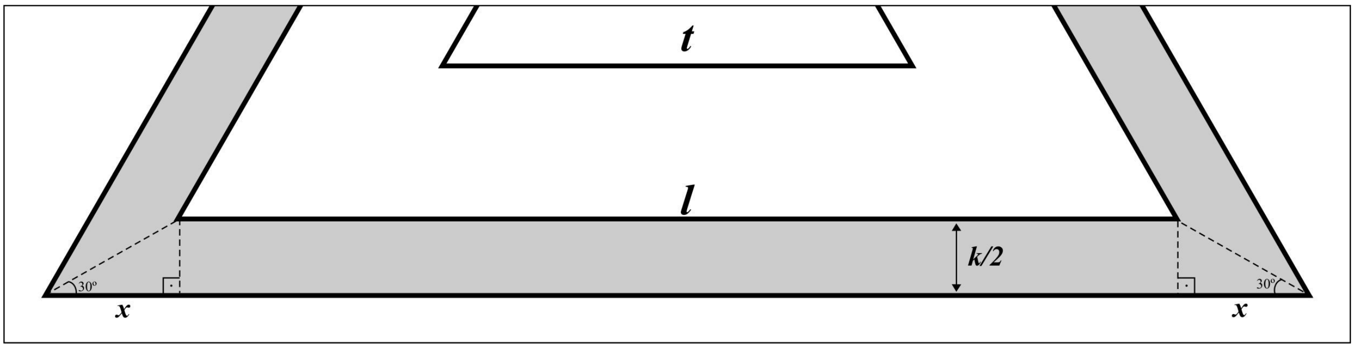


Figura 5.6: Triângulos semelhantes

Calculando a tangente de 30º no triângulo retângulo, obtemos:

$$tg(30^o) = \frac{k/2}{x}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{k/2}{x}$$

$$x = \frac{k\sqrt{3}}{2}.$$

Então, os triângulos equiláteros em que os eventos são possíveis têm agora lado $l + 2x = l + k\sqrt{3}$. Mas o triângulo equilátero em que os eventos são favoráveis continua o mesmo que antes, isto é, tem lado $t = l - \sqrt{3}d$.

Assim, a função probabilidade tem a seguinte forma:

$$p(d) = \frac{t^2}{(l + k\sqrt{3})^2},$$

isto é,

$$\boldsymbol{p(d) = \frac{(l - \sqrt{3}d)^2}{(l + k\sqrt{3})^2}}. \tag{5.5}$$

5.2 2º Caso: Calculando a Probabilidade Numa Pavimentação Formada por Hexágonos Regulares

Suponhamos agora que o piso do jogo dos discos seja pavimentado com peças na forma de hexágonos regulares equiláteros de lado l e que a espessura do rejunte seja desprezível.

Figura 5.7: Piso formado por hexágonos regulares

Lembremos que o hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros e que a altura desses triângulos (raio da circunferência inscrita) mede $h = \frac{\sqrt{3}}{2}l$. Os discos devem ter diâmetro d tal que $0 \leq d < 2h$, ou $0 \leq d < \sqrt{3}l$, caso contrário a probabilidade é zero.

No interior do hexágono regular de lado l temos um hexágono regular menor de lado t, com lados paralelos ao hexágono maior, de modo que a distância entre o lado do hexágono maior ao lado paralelo do hexágono menor seja $\frac{d}{2}$ como mostra a figura abaixo.

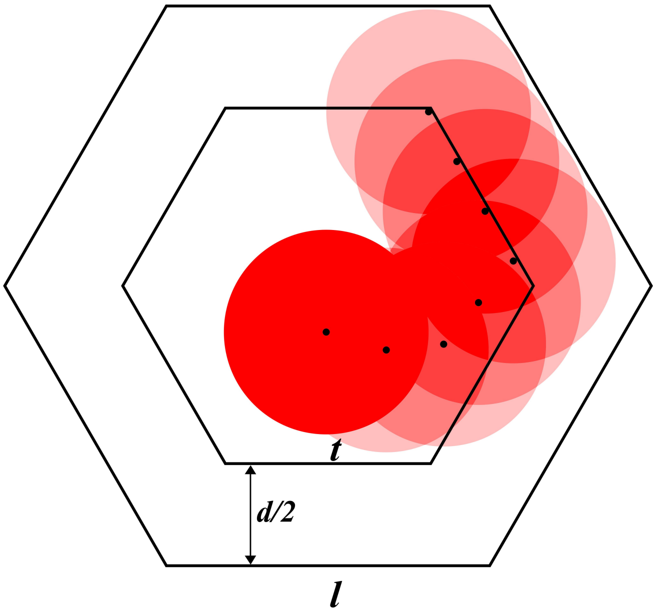


Figura 5.8: Hexágonos semelhantes

Assim, temos que a altura do triângulo equilátero maior menos a altura do triângulo equilátero menor é igual à metade do diâmetro, ou seja,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}l - \frac{\sqrt{3}}{2}t = \frac{d}{2}.$$

Portanto, podemos verificar que a relação entre l e t é $\boldsymbol{t = l - \frac{\sqrt{3}}{3}d}$.

Lembremos que a razão entre as áreas de duas figuras semelhantes é igual à razão entre os quadrados dos lados. Assim, a probabilidade de um disco de diâmetro d, lançado aleatoriamente no piso, cair inteiramente dentro do triângulo de lado l é:

$$p(d) = \frac{t^2}{l^2}$$

$$p(d) = \frac{\left(l - \frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2}{l^2}$$

$$p(d) = \frac{l^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}ld + \left(\frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2}{l^2}$$

$$p(d) = \frac{1}{3l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3l}d + 1.$$

Obtemos assim a função quadrática $p(d) = \frac{1}{3l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3l}d + 1$ para $0 \leq d < \sqrt{3}l$.

Portanto, $p(d)$ é a probabilidade de um disco de diâmetro d, lançado aleatoriamente, cair inteiramente no interior de um hexágono regular de lado l.

Assim, considerando que, se $d \geq \sqrt{3}l$, é zero a probabilidade de ocorrerem eventos favoráveis, e assim, temos:

$$p(d) = \begin{cases} \dfrac{1}{3l^2}d^2 - \dfrac{2\sqrt{3}}{3l}d + 1, \text{ se } 0 \leq d < \sqrt{3}l \\ 0 \qquad\qquad\qquad\quad , \text{ se } d \geq \sqrt{3}l \end{cases}, \tag{5.6}$$

com $p(0) = 1$ e $p(\sqrt{3}l) = 0$.

Note que, se $d = \sqrt{3}l$, então $\sqrt{3}l$ é uma raiz dupla dessa função. Assim, o gráfico de $p(d)$ também é parte de uma parábola com concavidade voltada para cima e tangente ao eixo horizontal na abscissa $d = \sqrt{3}l$.

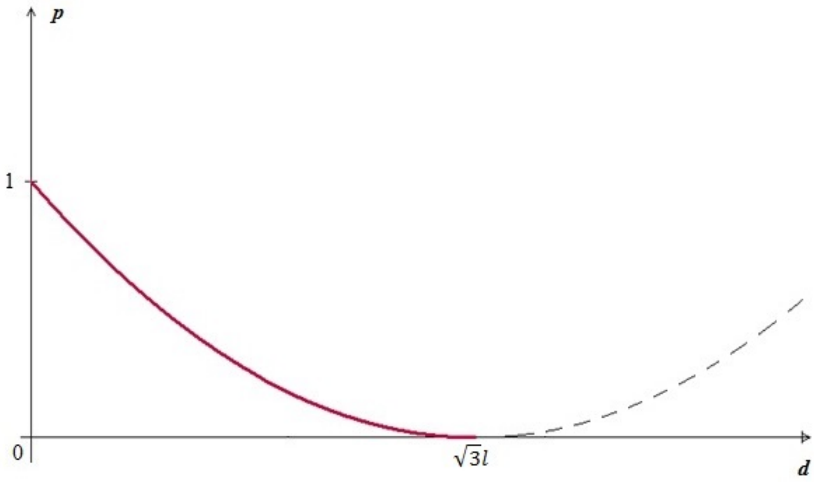


Figura 5.9: Gráfico de $p(d)$

5.2.1 Cálculo do Diâmetro de um Disco Conhecendo a Probabilidade

Para resolvermos esta situação, olharemos para a expressão obtida para $p = p(d)$, a saber,

$$p(d) = \frac{1}{3l^2}d^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3l}d + 1. \tag{5.7}$$

Isolando $\boldsymbol{d}$ em (5.7), podemos encontrar o diâmetro do disco a partir de uma dada probabilidade $\boldsymbol{p}$. Partindo da definição de probabilidade geométrica dada pelo quociente de áreas, que neste caso usaremos o lado dos hexágonos regulares, obteremos:

$$p(d) = \frac{\left(l - \dfrac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2}{l^2},$$

ou seja,

$$p \cdot l^2 = \left(l - \frac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2. \tag{5.8}$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados de (5.8), obtemos $l\sqrt{p} = l - \dfrac{\sqrt{3}}{3}d$. Finalmente, isolando o diâmetro d segue que:

$$d = \frac{3(l - l\sqrt{p})}{\sqrt{3}},$$

isto é,

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{\mathbf{3}}(\mathbf{1} - \sqrt{\boldsymbol{p}})\boldsymbol{l}. \tag{5.9}$$

Esta é a fórmula do diâmetro do disco em função da probabilidade requerida, tendo como parâmetro o lado l do hexágono regular.

5.2.2 Abordando Outra Situação Específica

Figura 5.10: Piso com espaçamento entre os hexágonos regulares

Até o momento, ao longo de nossos cálculos, desprezamos a espessura das linhas do rejunte $\boldsymbol{k}$ dos ladrilhos hexagonais, supondo que essa espessura era muito fina.

A espessura do rejunte constitui uma área de eventos possíveis, mas não favoráveis.

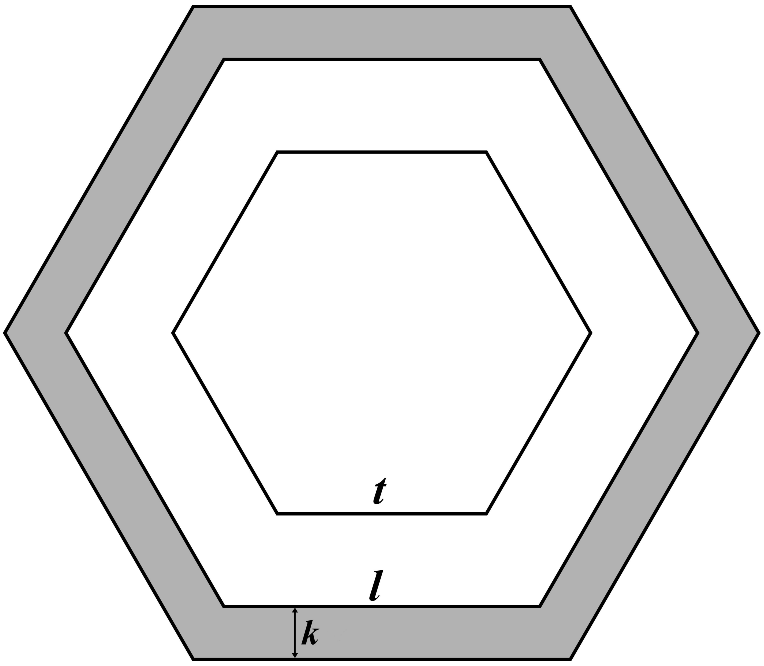


Figura 5.11: Hexágonos semelhantes

Nesta situação, dados dois hexágonos regulares lado a lado, repartimos a espessura do rejunte meio a meio para cada hexágono regular.

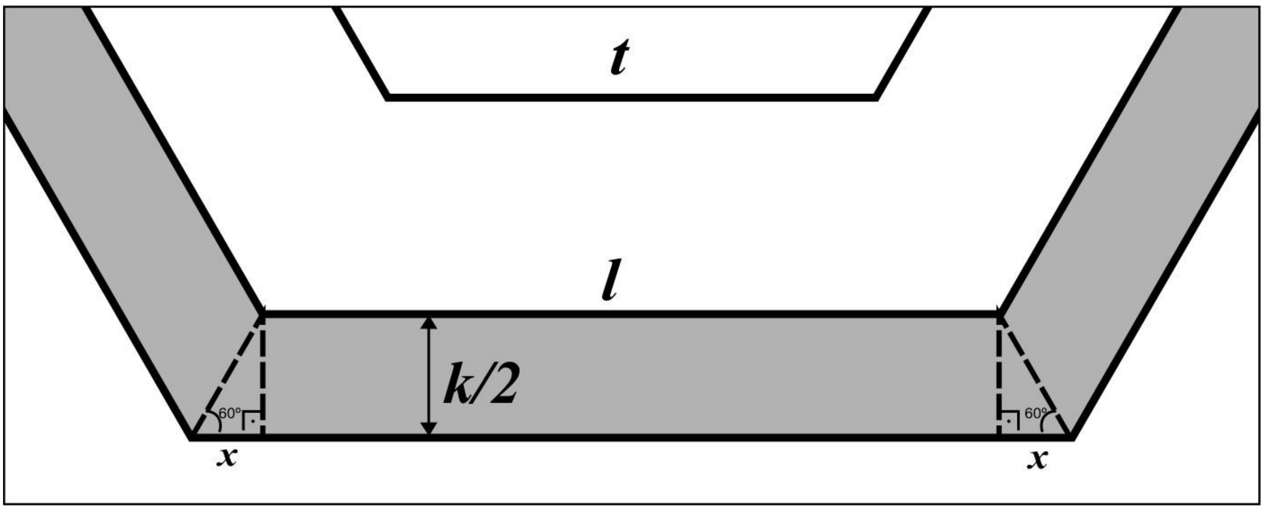


Figura 5.12: Hexágonos semelhantes

Calculando a tangente de 60º no triângulo retângulo obtemos:

$$tg(60^o) = \frac{k/2}{x}$$

$$\sqrt{3} = \frac{k/2}{x}$$

$$x = \frac{k\sqrt{3}}{6}.$$

Então, os hexágonos regulares em que os eventos são possíveis têm agora lado $l + 2x = l + \dfrac{k\sqrt{3}}{3}$. Mas o hexágono regular em que os eventos são favoráveis continua o mesmo que antes, isto é, tem lado $t = l - \dfrac{\sqrt{3}}{3}d$.

Assim, a função probabilidade tem a seguinte forma:

$$p(d) = \frac{t^2}{\left(l + \dfrac{k\sqrt{3}}{3}\right)^2},$$

isto é,

$$\boldsymbol{p(d) = \frac{\left(l - \dfrac{\sqrt{3}}{3}d\right)^2}{\left(l + \dfrac{k\sqrt{3}}{3}\right)^2}}. \tag{5.10}$$

6 Conclusão

O presente trabalho caracteriza-se pelo assunto probabilidade geométrica que foi abrangido durante seu desenvolvimento através do "jogo dos discos", integrando conceitos vistos em diversificadas disciplinas presente no curso de Mestrado em Matemática (*PROFMAT*), em especial a disciplina Matemática Discreta, pois nela foram concentrados o estudo principal deste trabalho.

A atividade evidenciou a importância do professor buscar melhores formas de abranger o conteúdo, ou seja, melhor metodologia, a criteriosa seleção dos recursos didáticos a serem utilizados durante a aplicação do conteúdo o qual propõe ensinar, pois nos exemplos contextualizados desta dissertação, foram envolvidos vários problemas no qual têm-se a necessidade de um material concreto, principalmente na parte que envolve a probabilidade geométrica, pois é de fácil visualização para os problemas que foram propostos.

No tocante à formação dos professores de matemática, vários são os aspetos a considerar, tendo em conta a exigência do papel do professor nos diferentes contextos profissionais. Sua formação envolve, na verdade, fatores diversificados.

A redação final do trabalho certamente tem um dos seus principais objetivos, definido no projeto do qual se originou: produzir um material introdutório que apresentasse os conceitos básicos de probabilidade geométrica levando em consideração os lançamentos aleatórios apresentados nos jogos dos discos de forma inteligível e detalhada, contendo alguns exemplos resolvidos, seções dedicadas às definições e demonstrações das probabilidades aplicadas aos jogos dos discos como também às aplicações em atividades que podem e devem ser trabalhadas em sala de aula. Em nenhum momento, procurou-se exaurir um determinado assunto, mas apresentar os conceitos fundamentais de cada tema, respeitando o nível de conhecimento prévio e a capacidade de assimilação do público alvo ao qual se destinou.

Esperamos que o material produzido possa ser uma opção de leitura ao colega professor que deseja introduzir o ensino da probabilidade geométrica em lançamentos aleatórios, em especial ao jogo dos discos, em suas aulas e que possa servir de estímulo para que os alunos consigam introduzir tais conhecimentos na sua vida pessoal e acadêmica.

Referências Bibliográficas

[1] AGOSTINO, R. F. W. Intuição e Probabilidade. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 27.

[2] BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio: Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000.

[3] _______. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. Parâmetros Curriculares Nacionais terceiros e quartos ciclos do ensino fundamental:Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[4] _________. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Básica. PCN+ Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC/SEF, 2000.

[5] DRUCK, S. (Org). Coleção Explorando o Ensino: Contagem, Probabilidade e Estatística. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica, Cap. 3, Vol. 3, 2004.

[6] GONDIM, F. H. Probabilidade e Probabilidade Geométrica: Conceitos e Exemplos Aplicáveis no Ensino Básico - Dissertação de Mestrado Profissional -Profmat-UFMS. 2013.

[7] HIPERTEXTO PITÁGORAS: artigos em matemática elementar. Disponível em <http://www.dm.ufscar.br/hp/hp153/hp153002/hp153002.html>.

[8] LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. A Matemática do Ensino Médio, Coleção do Professor de Matemática. vol. 4, 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.

[9] LOPES, J. M.; TEODORO, J. V.; REZENDE, J. C. Uma proposta para o estudo de probabilidade no ensino médio. Zetetiké. Campinas: FE/Unicamp, v.19, n. 36, p. 75-93, jul/dez 2011.

[10] PATERNELINI, R. O problema do jogo dos discos. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, n. 48.

[11] PORTAL DA PROBABILIDADE GEOMÉTRICA: História, Definição, Jogos e Questões. Disponível em < http://www.cin.ufpe.br/ reaf/TG/paginaPrincipal.swf>.

[12] TUNALA, N. Determinação de Probabilidades por Métodos Geométricos. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 20.

[13] WAGNER, E., Probabilidade Geométrica. Revista do Professor de Matemática. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, n. 34.