Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
Instituto de Geociências e Ciências Exatas
Campus de Rio Claro

Observações sobre Geometria Sintética

André Roberto Bassan

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional-PROFMAT como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre

Orientadora
Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi

2015

111 Bassan, André Roberto Bassan
X111x Observações sobre Geometria Sintética/ André Roberto Bassan- Rio Claro: [s.n.], 2015.
59 f.: fig., tab.

Dissertação (mestrado) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
Orientadora: Alice Kimie Miwa Libardi

1. Euclides. 2. Axiomas. 3. Geometria Sintética. 4. Métodos Matemáticos. I. Título

Ficha Catalográfica elaborada pela STATI - Biblioteca da UNESP
Campus de Rio Claro/SP

TERMO DE APROVAÇÃO

André Roberto Bassan

Observações sobre Geometria Sintética

Dissertação aprovada como requisito parcial para a obtenção do grau de Mestre no Curso de Pós-Graduação Mestrado Profissional em Matemática Universitária do Instituto de Geociências e Ciências Exatas da Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", pela seguinte banca examinadora:

Profa. Dra. Alice Kimie Miwa Libardi
Orientadora

Prof. Dr. Sergio Roberto Nobre
IGCE - Unesp/Rio Claro (SP)

Prof. Dr. Edson de Oliveira
UNICEP/São Carlos (SP)

Rio Claro, Janeiro de 2015

A Deus, Família e Amigos.

Agradecimentos

Os meus agradecimentos vão simplesmente àqueles que me ajudaram a realizar mais um sonho, um objetivo de vida.

A Deus, por me conceder paciência, sabedoria e discernimento.

A minha família pelo apoio e por sempre acreditar em mim.

Aos meus amigos, pela força, incentivos, momentos e viagens.

Aos coordenadores e responsáveis pelo PROFMAT, pois só por meio desta ação, consegui dar mais um passo na minha formação acadêmica.

A UNESP, campus de Rio Claro, por endossar este projeto.

E por fim, um agradecimento muito especial a minha orientadora, Dra Alice, por ter me guiado, ajudado, dado sugestões importantes, ter tido uma paciência infinita e além de tudo, ser muito atenciosa.

Meu muito obrigado a todos.

Às vezes dizem para não olharmos para trás...
Será que isso é sempre válido?
Talvez o rumo certo se baseie por um caminho já alcançado...
André Roberto Bassan

Resumo

O objetivo deste trabalho é apresentar alguns resultados da Geometria Euclidiana no plano, que são vistos no ensino fundamental e médio sob ponto de vista sintético, ou seja, não serão assumidos os axiomas métricos. Como aplicação faremos algumas construções, usando as ferramentas desenvolvidas.

Palavras-chave: Euclides, Axiomas, Geometria Sintética, Métodos Matemáticos.

Abstract

The objective of this work is to present some results of Euclidean geometry which are given in elementary and high school from the synthetic point of view, that is we will not assume the metric axioms. As an application we will make some constructions using the developed tools.

Keywords: Euclides, Axioms, Synthetic Geometry , Mathematical Methods.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

> As grandes civilizações da antiguidade baseavam-se em recursos matemáticos a fim de construirem suas habitações, seus meios de transporte e suas máquinas para cultivo. Há excelentes exemplos disso. Podemos citar as construções das grandes pirâmides do Egito e da América Central, as caravelas das grandes navegações, diques para a retenção de água da chuva para irrigação nos períodos de seca, observações astronômicas, entre tantas outras. O homem não mediu esforços para que pudesse atingir seus objetivos com a finalidade de aumentar a produção, prever fenômenos naturais, dar rigidez às habitações, entre outros. As grandes obras demonstram que foram feitas embasadas em grandes conhecimentos matemáticos, principalmente de ordem geométrica (DOMINGUES, 2011).

Como tudo sofre evoluções, principalmente quando existe a necessidade de transpor barreiras, com a geometria não foi diferente. Podemos dizer que incialmente a geometria era pura observação e consistia de tentativas de erro e acerto. Até que em um belo momento da história, uma pessoa resolveu reunir informações de ordem geométrica em livros. A grande obra escrita, que até hoje fazemos uso, se deve a Euclides, porém, muito pouco se sabe sobre a vida e sua personalidade, *"salvo que foi ele, segundo parece, o criador da famosa e duradoura escola de matemática de Alexandria da qual, sem dúvida, foi professor"* (DOMINGUES, 2011, p.167), cuja obra foi intitulada de *Os Elementos*. Os Elementos de Euclides é o livro didático mais bem sucedido e influente já escrito.

Os debates geométricos sempre foram colocados à tona. Grandes homens ao longo da história propuseram situações, a ponto de surgirem fórmulas, relações, comparações, proposições, teoremas, destacando-se entre estes itens, o famoso Teorema de Pitágoras, embora tal teorema já tivesse sido utilizado pelos babilônicos. Entre os séculos XVII e XIX, junto com as grandes revoluções (Revolução Inglesa, Revolução Francesa, Revolução Industrial, entre outras), a matemática sofreu grandes avanços, assim como a geometria. A organização de uma sociedade fundada no trabalho, na indústria, no comércio, fez com que houvessem novas necessidades. A Álgebra precisava ser transformada e, paralelamente a ela, a geometria fazia suas contribuições, assim como, sofria importantes impactos, que não abalavam em nada, as grandes ideias axiomáticas.

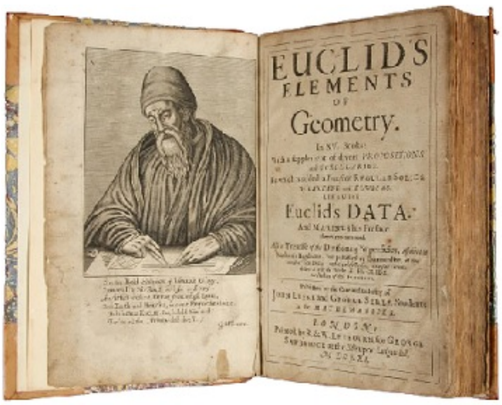

Figura 1.1: Representação de quem seria Euclides, realizando uma construção geométrica. (Fonte: https://alguimaraes.wordpress.com/2013/08/13/os-postulados-de-euclides-ideias-geniais-02/)

A morfologia da palavra geometria tem origem grega, cujo significado é: *geo* = *Terra* e *metria* = *ato de medir*. Basicamente geometria seria a arte de *medir tudo o que se encontra sobre a Terra*. Sendo assim, uma pergunta poderia se colocada em pauta. Seria possível fazer geometria no plano sem medir, sem dar valores numéricos para dar significado ao que se quer comparar, como comprimentos, áreas e medidas de ângulos? O presente trabalho tem como objetivo fazer um apanhado histórico breve da evolução da geometria, para por fim, fazer um tratamento geométrico desconsiderando a ideia de medida, representada simbolicamente por números. A este tipo de geometria damos o nome de **Geometria Sintética**.

Uma característica marcante deste tipo de geometria está no fato de como ela trata a geometria clássica, principalmente aos assuntos ligados as proposições dadas por Euclides em *Os elementos,* no tocante de dar ares de beleza e simplicidade na demonstração destes.

No Capítulo 2, faremos um breve histórico do desenvolvimento da geometria, num período que varia entre 590 - 300 a.C., e definiremos alguns termos que serão de extrema importância para a compreensão de alguns fatos geométricos.

Já no Capitulo 3, tomando como base os axiomas de Euclides, será feita a apresentação de seus principais axiomas, uma vez que estes são importantes para a compreensão, argumentação e desenvolvimento dos nossos objetivos: a Geometria Sintética.

No Capítulo 4, tiraremos o foco da geometria do campo algébrico e introduziremos a sintetização da geometria como a conhecemos. Aqui, teremos como principal objetivo, fazermos observações da geometria de tal forma, que poderemos ser capazes de definir entes geométricos sem a necessidade de nos apoiarmos em conceitos algébricos.

Por fim, no Capítulo 5, algumas aplicações geométricas utilizando-se apenas de recursos da geometria sintética. Dentre elas, a construção de um quadrado, a construção de um triângulo retângulo e a definição da desigualdade triangular.

Cabe aqui uma observação muito importante sobre as intenções deste trabalho:

o grande objetivo deste é excluir os axiomas sobre medidas e apresentar resultados conhecidos no ensino fundamental e médio com abordagem puramente geométrica, sem a preocupação de construir uma teoria axiomática.

2 Algumas Observações Sobre Geometrias

Os babilônios[1] eram muito avançados em geometria e aritmética. Além disso, eles conheciam o que conhecemos hoje como Teorema de Pitágoras, muito antes de Pitágoras nascer: em um triângulo retângulo o quadrado do comprimento da hipotenusa é igual a soma dos quadrados dos catetos.

Já entre os gregos, Tales de Mileto, insistiu que as demonstrações geométricas deviam ser estabelecidas pelo raciocínio dedutivo e não por tentativa e erro. Ele estava familiarizado com os cálculos não muito exatos feitos pelos matemáticos egípcios e babilônicos. Chegando a conclusão de que os resultados estavam corretos, ele desenvolveu a primeira geometria lógica, servindo de base para o desenvolvimento de teoremas ordenados para provar afirmações. Foi uma das características da matemática grega, sendo isto, totalmente novo.

Ao longo dos dois séculos seguintes, a sistematização desenvolvida por Tales foi mantida por Pitágoras e seus discípulos. Este era considerado por seus discípulos um profeta religioso, pregando a imortalidade da alma e a reencarnação, organizando uma irmandade, na qual tinha sua própria purificação e ritos de iniciação. Os pitagóricos diferiam de outras seitas religiosas, pois acreditavam que a elevação da alma e a união com Deus eram alcançadas pelo estudo da música e da matemática, sendo que na música, Pitágoras calculou as proporções corretas dos intervalos harmônicos e na matemática, ensinou as propriedades misteriosas e maravilhosas dos números.

> O historiador Proclus escreveu: *É sabido que os homens que primeiro divulgaram a teoria do irracional morreram em um naufrágio, a fim de que o inexprimível e inimaginável permanecesse sempre velado* (GREENBERG, 2008).

Os pitagóricos não consideravam $\sqrt{2}$ um número: mudaram sua álgebra para forma geométrica, a fim de representar $\sqrt{2}$ e outros comprimentos irracionais por segmentos.

[1]Este termo, *bailônio*, é usado por conveniência, pois muitos outros povos habitavam a região (DOMINGUES, 2011).

O quarto século a.C. viu o florescimento da Academia de Ciências e Filosofia de Platão (fundada cerca de 387 a.C.).

> Platão escreveu: *O estudo da matemática se desenvolve e põe em funcionamento um organismo mental, mais valioso do que mil olhos, porque através dele sozinho a verdade pode ser apreendida* (GREENBERG, 2008).

Platão ensinava que o universo de ideias é mais importante do que o mundo material dos sentidos, sendo este último apenas uma sombra do primeiro. O mundo material é uma caverna apagada cujas paredes podemos ver apenas sombras do mundo real, iluminado pelo sol do lado de fora. Os erros dos sentidos deve ser corrigido pelo pensamento concentrado, o que é melhor aprendido através do estudo de matemática. O método socrático de diálogo é essencialmente o de *"prova indireta, pelo qual uma afirmação mostra-se inválida se ela leva a uma contradição. Platão cita repetidamente a prova da irracionalidade do comprimento de uma diagonal do quadrado unitário como um método da ilustração da prova indireta* (o *reductio ad absurdum*)"(GREENBERG, 2008). O ponto é que essa irracionalidade de comprimento nunca poderia ter sido descoberto por medidas físicas, que sempre incluem uma pequena margem de erro.

Euclides era um *"discípulo da escola platônica"*(DOMINGUES, 2011). Cerca de 300 a.C. ele produziu o tratamento definitivo da geometria grega e teoria dos números em seus *Elementos*, volume XIII. Na elaboração destas obras-primas, Euclides os elaborou levando em conta a experiência e as realizações de seus predecessores nos séculos anteriores: os pitagóricos para livros I a IV, VII e IX, Archytas para o Livro VIII, Eudóxio os livros V , VI e XII e Theaetetus para livros X e XIII . Tão completas eram as obra de Euclides (fazendo referência aos *Os Elementos*) que substituiram as tentativas anteriores de apresentar geometria. É uma pena que os possíveis discípulos de Euclides não tenham sido capazes de coletar informações sobre o seu trabalho, pois ele é o autor mais lido na história da humanidade. Sua abordagem à geometria tem dominado o ensino do assunto por mais de dois mil anos. Além disso, o método axiomático usado por Euclides é o protótipo para o que hoje chamamos de *"matemática pura"* (GREENBERG, 2008). Os *Elementos de Euclides* é puro também, pois os trabalhos não incluem aplicações práticas. Claro que a geometria de Euclides teve um enorme número de aplicações para problemas práticos de engenharia, mas eles não são mencionados nos livros.

Segundo a lenda, um estudante iniciante em geometria de Euclides perguntou:

> *O que eu consigo aprendendo essas coisas ?* Euclides chamou um escravo, dizendo: *Dê-lhe uma moeda, uma vez que ele quer ganhar com o que ele aprende* (GREENBERG, 2008).

Surpreendentemente, como veremos mais adiante, a matemática pura, muitas vezes acaba por ter aplicações jamais sonhadas por seus criadores - as perspectivas *impraticáveis* dos matemáticos puros é basicamente útil para a sociedade. Além disso, as partes da matemática que não foram aplicadas também são importantes para a sociedade, seja como obras estéticas comparável à música e a arte, como contribuições para a expansão da consciência e do entendimento humano.

Os matemáticos podem fazer uso de tentativa e erro, cálculo de casos especiais, adivinhação, ou qualquer outra forma de descobrir teoremas. O método axiomático é um método de provar que os resultados estão corretos. Alguns dos resultados mais importantes da matemática foram originalmente dados por provas incompletas. Assim, provas nos dão a garantia de que os resultados estão corretos. Em muitos casos, eles também nos dão resultados mais gerais. Por exemplo, os egípcios e os hindus sabiam por experiência que, se um triângulo tem lados de comprimento 3, 4 e 5, é um triângulo retângulo. Já Euclides, dizia na Proposição 47 do Livro I, que *"Nos triângulos retângulos, o quadrado sobre o lado que se estende sob o ângulo reto é igual aos quadrados sobre os lados que contém o ângulo reto"* (EUCLIDES; BICUDO, 2009, p.132). Mas afinal, o que é um método axiomático?

> Imagine a seguinte situação: "Quero que você acredite num raciocínio que decorra logicamente de alguma outra afirmação na qual você já tenha condições de aceitá-la. No entanto, se você não aceitá-la, eu teria que mostrar a você que o raciocinio decorre de outras situações, podendo repetir este processo várias vezes até você aceitar sem que eu precise fazer justificativas. Essas declarações fazem o papel de um *axioma* ou *postulado*"(GREENBERG, 2008).

Cabe aqui também uma observação importante, pois eu posso chegar a uma afirmação na qual você não aceite como base de meu argumento, fazendo que seja obrigado a dar infinitas tentativas de explicações, gerando o que é conhecida como *regressão infinita*. Dessa forma, duas regras devem ser observadas para que possamos concordar que uma prova é correta:

1: Aceitação de certas afirmações chamadas *axiomas*, ou *postulados*, sem mais justificativas.

2: Convenção sobre como e quando uma afirmação segue logicamente de outra, ou seja, uma convenção sobre certas regras de raciocínio.

Até então, estamos discutindo o que é necessário para chegarmos a um acordo sobre se determinada prova está correta. Aqui tomaremos uma por consenso uma exigência: *compreensão mútua do significado das palavras e símbolos utilizados no discurso.*

Não deve haver nenhum problema em alcançar o entendimento mútuo, desde que usamos termos familiares, usando-os de forma consistente. Por exemplo, se eu usar um termo desconhecido, você tem o direito de exigir uma definição do termo. As definições não poderão ser dadas de forma arbitrária, pois elas estão sujeitas às regras de raciocínio referidos (mas não especificado) na Regra 2. Se, por exemplo, definir um ângulo *reto* como sendo um ângulo de 90^o e, em seguida, definir um ângulo de 90^o como sendo um ângulo *reto*, isto violaria a regra. Além disso, não podemos definir cada termo que usamos pois, a fim de definir um termo devemos utilizar outros termos, e para definir estes outros termos devemos usar ainda outros termos, e assim sucessivamente, recaindo na questão da regressão infinita.

Apontaremos aqui os cinco termos indefinidos da Geometria Euclidiana, que servirão de base para a definição de todos os outros termos da geometria plana de Euclides:

- **Ponto**;
- **Reta**;
- **Estar Entre (no sentido: *ponto C está entre os pontos A e B)***;
- **Estar sobre (no sentido: *dois pontos estão sobre uma única reta)***;
- **Congruente**.

Para a geometria espacial teríamos que introduzir um novo conceito indefinido, o conceito de *plano*, ampliando a relação *estar sobre* para pontos e retas no plano. No entanto, vamos nos restringir apenas a geometria plana, ou seja, a um único plano, definindo-o como o *conjunto de todas as retas e todos os pontos.*

Há expressões que são frequentemente utilizadas como sinônimo de *estar sobre.* Em vez de dizer *ponto P situa-se na reta l*, às vezes dizemos *l passa por P ou P é incidente com l*, denotando P_il. Se o ponto P encontra-se tanto na reta l como na reta m, dizemos que l e m tem o ponto P em comum ou que l e m se cruzam (ou se encontram) no ponto P.

Embora não esteja definido o termo *reta*, a sua utilização será restringida pelos axiomas da geometria plana. Por exemplo, um axioma afirma que dados dois pontos distinto, existe uma única reta que passa por eles. Assim, na figura 2.1, l e m, podem não representar retas na geometria plana, porém ambas passam pelos dois pontos dados.

Usaremos a palavra *conjunto*, visto que esta é fundamental para toda a matemática. Em termos de simplificação e entendimento, conjunto aqui será entendido como *coleção de objetos.* Em meio a isto, estão relacionadas duas outras noções: *pertencer a* e/ou *ser um elemento de* um conjunto, como por exemplo, convencionamos que todos os pontos e todas as retas pertecem a um plano α. Para dar sentido a algumas situações que envolvem noções de conjuntos deixaremos estabelecido que se todos os elementos de um conjunto A também são elementos de um conjunto B, este último contém o conjunto A. Em outras palavras, o conjunto A pode ser dito como subconjunto de B. Assim, temos agora uma referência para definirmos *segmento*, *raio*, *círculo*, entre outros elementos geométricos que são, em si, conjunto de pontos. Por fim, para facilitar nossa leitura, quando tivermos o interesse em representar um conjunto de pontos sobre a reta l, usaremos a notação $\{A, B, C, D, ...\}$.

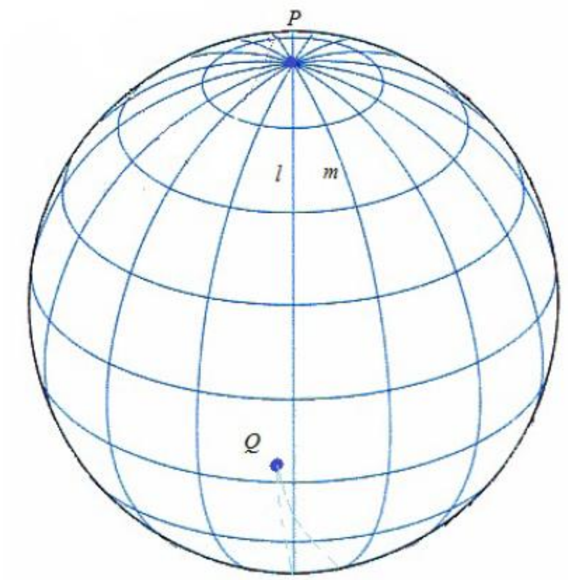

Figura 2.1: *Retas "curvas"* passando por dois pontos

Outra palavra que merece atenção especial é o uso da expressão *igual*. Dentro do nosso contexto geométrico usaremos um dos termos indefinidos citados: a *congruência*. Um bom exemplo para tal, seria o caso de considerarmos um triângulo ABC isósceles. Em vez de consideramos que os lados AB e AC são iguais, diremos que tais lados são **congruentes**. Deste modo, o fato de que AB é congruente a AC leva a implicação de que tal triângulo ABC é isósceles.

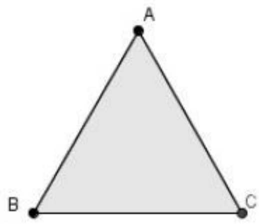

Figura 2.2: *Triângulo ABC isósceles*

3 Os primeiros axiomas (postulados) de Euclides

Para desenvolver sua geometria, Euclides se baseou em conceitos fundamentais, chamados de *Postulados* ou *Axiomas*, como conhecemos atualmente.

Axioma 3.1. *: Dados dois pontos P e Q distintos, existe uma única reta l que passa por P e Q.*

Para a representação de reta por dois pontos P e Q , usaremos a notação $\overleftrightarrow{PQ}$.

Antes de citarmos o próximo axioma, faremos nossas primeiras definições.

Definição 3.1. *Dizemos que dois segmentos de reta são congruentes se eles, quando sobrepostos, coincidem ponto a ponto, ou seja, fica definida uma* ***relação de equivalência****.*

Assim, a definição para congruência entre figuras planas decorre da mesma ideia, ou seja, da sobreposição.

Definição 3.2. *Dizemos que um ponto B está entre os pontos A e C se estes três pertencerem a uma mesma reta, de tal modo que A ou C esteja a esquerda de B e C ou A esteja a direita de B, respectivamente.*

Definição 3.3. *Dados dois pontos distintos A e B, o conjunto cujos elementos são os pontos A e B, e todos os pontos C que se encontram na reta $\overleftrightarrow{AB}$ e estão entre A e B é chamado segmento AB e denotado por $\overline{AB}$. Os pontos A e B são os pontos finais de $\overline{AB}$ (Figura 3.1).*

Figura 3.1: Segmento $\overline{AB}$

Axioma 3.2. *Para cada segmento $\overline{AB}$ e para cada segmento $\overline{CD}$, existe um único ponto E tal que B está entre A e E ou E entre A e B, e o segmento $\overline{CD}$ é congruente ao segmento $\overline{BE}$ (Figura 3.2).*

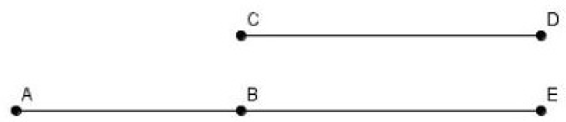

Figura 3.2: Os segmentos $\overline{CD}$ e $\overline{BE}$ são congruentes ($\overline{CD} \cong \overline{BE}$).

Observação: Como notação, usaremos o símbolo $\cong$ para identificar uma congruência.

Antes de enunciarmos o terceiro axioma, introduziremos outra definição.

Definição 3.4. *Considere dois pontos dados: O e A distintos. O conjunto de todos os pontos P tal que $\overline{OP}$ é congruente a $\overline{OA}$ é chamado de círculo, com centro em O e raio $\overline{OA}$.*

Axioma 3.3. *Dados O e A pontos distintos, existe um círculo de centro O e raio $\overline{OA}$ (Figura 3.3).*

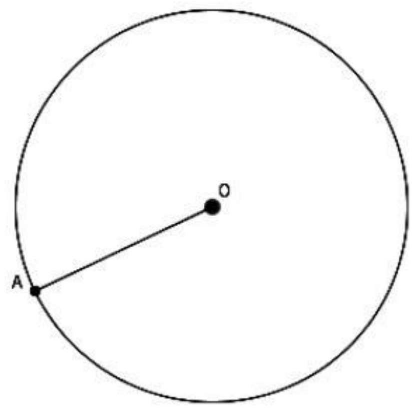

Figura 3.3: Círculo de centro O e raio $\overline{OA}$.

Definição 3.5. *Uma semirreta é um conjunto de pontos na reta $\overleftrightarrow{AB}$ dado pelo segmento $\overline{AB}$ e todos os pontos C que pertencem à reta $\overleftrightarrow{AB}$ e além disso, B está entre A e C. Neste caso, é uma* ***semirreta****, que parte do ponto A e passa pelo ponto B, sendo esta denotada por $\overrightarrow{AB}$ (Figura 3.4).*

Figura 3.4: Semirreta $\overrightarrow{AB}$.

Figura 3.5: Semirreta $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são *opostas*.

Definição 3.6. *Duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas se forem distintas, partirem do mesmo ponto A e forem partes da mesma reta $\overleftrightarrow{AB} = \overleftrightarrow{AC}$ (Figura 3.5).*

Definição 3.7. *Um ângulo com vértice no ponto A é formado por duas semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ distintas e não opostas (Figura 3.6).*

Denotaremos o ângulo A por $\sphericalangle A$, $\sphericalangle BAC$, $\sphericalangle CAB$, $B\widehat{A}C$, $C\widehat{A}B$ ou simplesmente por $\widehat{A}$. Esta última notação, geralmente a usaremos quando nos referenciarmos apenas a um ângulo genérico, ou seja, apenas para apontar o ângulo, sem levar ao pé da letra a definição apresentada. Uma vez que for levada a definição em conta, usaremos uma das outras denotações.

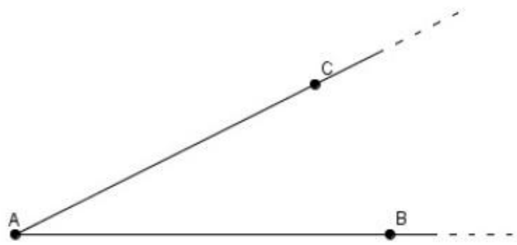

Figura 3.6: Ângulo com vértice em A.

Definição 3.8. *Se dois ângulos $\sphericalangle BAD$ e $\sphericalangle CAD$ têm em comum o lado $\overrightarrow{AD}$ e além disso $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são opostas, os ângulos são ditos suplementares um do outro (Figura 3.7).*

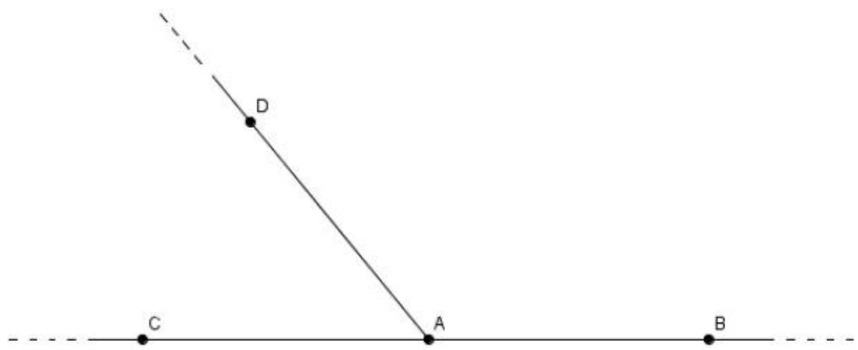

Figura 3.7: Ângulos $\sphericalangle CAD$ e $\sphericalangle BAD$ são suplementares

Definição 3.9. *Um ângulo $\sphericalangle BAD$ é dito reto se o seu suplementar for congruente a ele (Figura 3.8).*

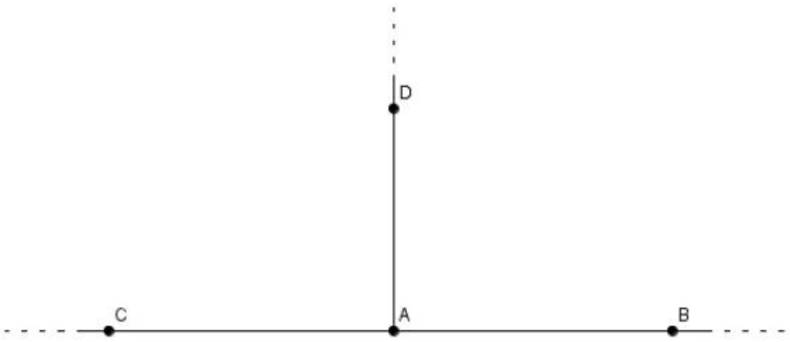

Figura 3.8: $\sphericalangle CAD \cong \sphericalangle BAD$

Note que definimos ângulo reto sem dizer a palavras "graus"e nem mencionar a palavra "medida".

Vale ressaltar, que mesmo não pertencendo a uma mesma reta, dois ângulos retos sempre serão congruentes.

Estes três axiomas apresentados foram sempre aceitos pelos matemáticos, sem restrição alguma. No entanto, o axioma de Euclides, conhecido como Axioma das Paralelas, foi altamente controverso. Tais controvérsias resultaram na criação de outras geometrias, conhecidas como *geometrias não euclidianas*.

Vamos indicar este axioma não em sua forma original como se encontra nos *Elementos*.

Ele será aqui escrito de uma forma simplificada, sendo esta conhecida como *Axioma de Playfair*, pois este axioma apareceu numa publicação de John Playfair, em 1795.

Definição 3.10. *Duas retas l e m são paralelas se elas não se cruzam, ou seja, se nenhum ponto pertence simultaneamente as duas retas consideradas.*

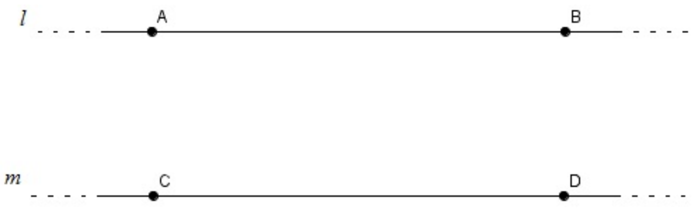

Figura 3.9: As retas l e m são paralelas.

Em termos de notação, usaremos $l \parallel m$ para representar um par de retas paralelas, que conforme mostra a figura 3.9, não apresentam pontos em comum.

Axioma 3.4. *Por um ponto não pertencente a uma reta dada, passa uma e somente uma reta paralela a reta dada (Figura 3.10).*

Mas por que este axioma gera tantas controvérsias? A resposta talvez resida no fato de que os outros três foram "testados"com régua e compasso. Este, por se tratar de

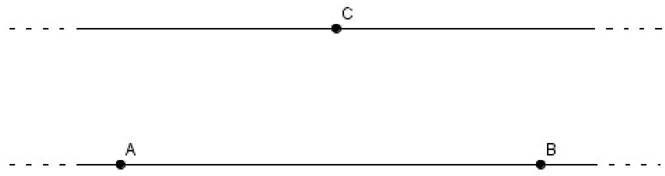

Figura 3.10: Reta $\overleftrightarrow{AB}$ dada e um ponto C fora dela: pelo qual passa uma única paralela a $\overleftrightarrow{AB}$.

retas e estas podem ser estendidas indefinidamente, não há como mostrar se de fato há ou não algum ponto comum entre duas retas paralelas. Desta forma, será necessário o uso de outros critérios. Mas enfim, qual critério adotar para mostrar que realmente as retas l e m são paralelas? Euclides sugeriu a construção de uma outra reta, sendo esta transversal (ou seja, uma reta t que intersectasse as retas l e m em pontos distintos) e fizesse a medição dos ângulos internos α e β formados pela interseção da reta t com as retas l e m, conforme mostra a figura 3.11.

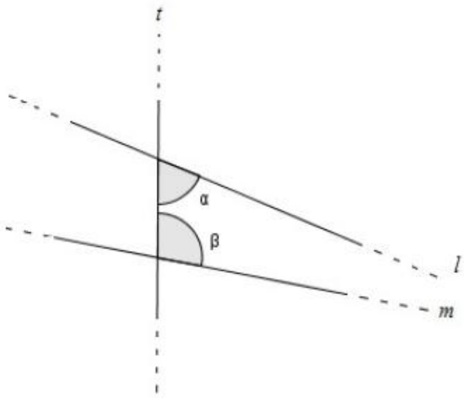

Figura 3.11: Ângulos α e β formados por t em l e m, internamente

Assim, Eclides afirmava que os ângulos α e β (como mostrados na figura anterior) têm uma soma menor que 180^o, ou seja, o problema recaía no próprio Axioma das Paralelas, não mostrando de fato que as retas l e m não se cruzam em algum ponto P. Dessa forma, ainda não poderemos usar desta afirmação para termos certeza da validade de tal axioma.

Posteriormente ocorreram várias outras tentativas de mostrar a validade do axioma em questão, entre elas podemos citar a do matemático francês Adrien Marie Legendre[1]. Porém, deixaremos claro aqui, que este não é o objetivo deste trabalho, e sim fazer um tratamento sobre a *Geometria Sintética*, ou seja, apresentaremos uma abordagem usando apenas o tratamento lógico-dedutivo, fazendo o uso de axiomas definidos inicialmente com o intuito de construir e demonstrar proposições lógicas. Assim, na nossa

[1] **Adrien Marie Legendre**, figura 3.12, nasceu e faleceu na França (1752-1833) (DOMINGUES, 2011).

abordagem não assumiremos os postulados que envolvem medidas (os axiomas sobre medidas não serão considerados).

Figura 3.12: Adrien Marie Legendre

4 Congruências definidas geometricamente

A geometria euclidiana baseada nos três primeiros axiomas de Euclides faz uso de recursos aritméticos, algébricos e construtivos por meio do uso de régua e compasso, entre outros instrumentos. Quando queremos construir um ângulo β de tal forma que ele seja congruente a um ângulo α dado, recorremos ao termo *medida angular*, por exemplo. O mesmo ocorre com a congrência entre segmentos, pois dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são conguentes se a *distância* entre os pares de pontos A e B, denotada por AB e a distância entre C e D for a mesma. Para tais ideias de congruência são assumidos:

1 - Se A, B e C são pontos distintos de uma reta qualquer, nesta ordem, então $AB + BC = AC$;

2 - $\overline{AB}$ é por definição a união dos pontos A, B e todos os pontos entre A e B;

3 - $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ significa que $AB = CD$;

4 - $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$ significa que a medida do ângulo A é igual a medida do ângulo B, ou seja, em termos de notação, $m\sphericalangle A = m\sphericalangle B$.

Com base nestas definições, quase todas propriedades básicas de congruência de segmentos e ângulos e intermediação (estar entre) de pontos poderiam ser provados via teoremas, a exceção ficou por conta do Postulado LAL, referente à congruência de triângulos, que será enunciado mais adiante.

A geometria como a conhecemos hoje nem sempre foi assim. Este modelo atual foi proposto no início do século XX por George David Birkhoff (1884-1944) (DOMINGUES, 2011). A geometria da forma clássica como foi apresentada nas obras de Euclides e mais recentemente por David Hilbert (1862-1943), matemático alemão, considerado como um dos *"maiores matemáticos do século XX"* (DOMINGUES, 2011), é diferente, pois Euclides escrevia sua geometria sem o auxílio dos números.

Dessa forma, esse tratamento dado à gemetria feita por Euclides ficou conhecido como *Tratamento Sintético.* O esquema usado por Birkhoff é chamado de *métrico*, uma vez que ele faz uso de processos de medições, além do uso frequente de números reais para representar essas medições (MOISE, 1974).

Para falarmos do método usado por Euclides e Hilbert, vamos imaginar que tudo que temos de estrutura para representar a geometria como a conhecemos (propriedades, relações, axiomas, funções que relacionam valores reais) passe por uma "transformação"onde excluímos o uso das funções (mencionadas a posteriori) que relacionam valores reais e incluímos as ideias de congruência e a relação de intermediação. Para esta nova estrutura há a necessidade de axiomas que descrevam suas propriedades. Os axiomas necessários a estas descrições foram separados em três grupos:

Axiomas de Intermediação

I_1 - Se B está entre A e C, então B está entre C e A. Usaremos a notação $A-B-C$ para dizer que B está entre A e C, nesta ordem.

I_2 - Dados quaisquer três pontos de uma reta, exatamente um está entre os outros dois.

I_3 - Quaisquer quatro pontos de uma reta podem ser nomeados por A, B, C, D, nesta ordem, de tal forma que B e C estejam entre A e D.

I_4 - Se A e B são quaisquer dois pontos, então existe um ponto C tal que B está entre A e C e um ponto D tal que D está entre A e B.

Axiomas de Congruência de Segmentos

CS_1 - Para segmentos, congruência é uma relação de equivalência.

CS_2 - *Axioma da construção de segmentos.* Como na figura 4.1, dado um segmento $\overline{AB}$ e uma semirreta $\overrightarrow{CD}$, há exatamente um ponto E de $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$.

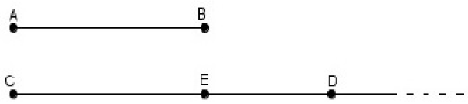

Figura 4.1: $\overline{AB} \cong \overline{CE}$

CS_3 - *O axioma da "adição"de segmentos.* Se o ponto B está entre os pontos A e C, o ponto B' está entre os pontos A' e C', com $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, então $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ (Figura 4.2).

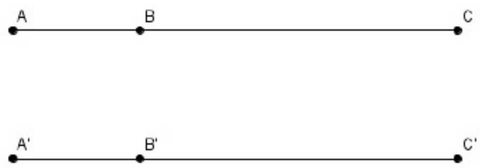

Figura 4.2: $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

CS_4 - *O axioma da "subtração"de segmentos.* Se o ponto B está entre os pontos A e C, o ponto B' está entre os pontos A' e C', com $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, então $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ (Figura 4.3).

CS_5 - Em cada segmento há exatamente um ponto médio. Isto é, para cada segmento AB, há exatamente um ponto C tal que o ponto C está entre os pontos A e B e $\overline{AC} \cong \overline{CB}$ (Figura 4.4).

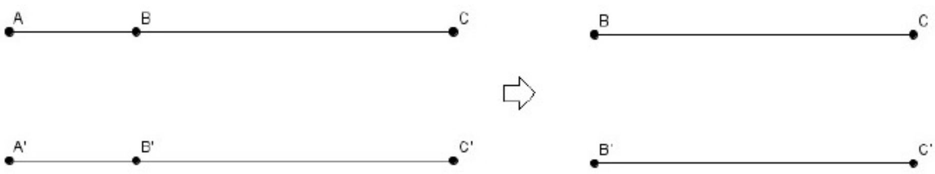

Figura 4.3: $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

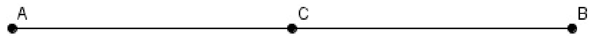

Figura 4.4: O ponto C é ponto médio do segmento $\overline{AB}$.

Definição 4.1. *Sejam l uma reta e A e B quaisquer pontos que não pertencem a l. Se $A = B$ ou se o segmento $\overline{AB}$ não contém nenhum ponto de l, dizemos que A e B estão no mesmo lado da reta l. Se $A \neq B$ e o segmento $\overline{AB}$ intersecta l, dizemos que A e B estão em lados opostos de l.*

Definição 4.2. *Um semiplano π é a parte de um plano σ, limitado por uma reta r, ou seja, é o conjunto de todos os pontos que estão de um mesmo lado da reta r e a própria reta r.*

Axiomas de Congruência para Ângulos

CA_1 - Para ângulos, congruência é uma relação de equivalência.

CA_2 - *O axioma da construção de ângulos.* Dados $\sphericalangle ABC$, uma semirreta $\overrightarrow{B'C'}$ e um semiplano π cuja origem contém $\overrightarrow{B'C'}$, então há exatamente uma semirreta $\overrightarrow{B'A'}$, com A' em π, tal que $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$ (Figura 4.5).

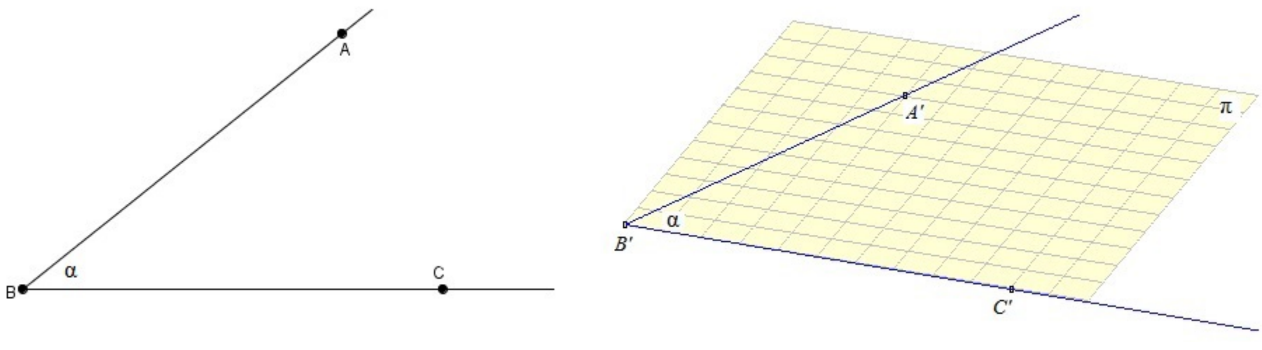

Figura 4.5: $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle A'B'C'$

Definição 4.3. *Dado um ângulo $\sphericalangle CAB$, dizemos que um ponto D está no interior de $\sphericalangle CAB$ se B e D estão do mesmo lado de $\overleftrightarrow{AC}$ e se, C e D também estão no mesmo lado de $\overleftrightarrow{AB}$.*

CA_3 - *O axioma da "adição"de ângulos.* Se D é um ponto interior do ângulo $\sphericalangle BAC$, D' é um ponto interior do ângulo $\sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle B'A'D'$ e $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle D'A'C'$, então $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$ (Figura 4.6).

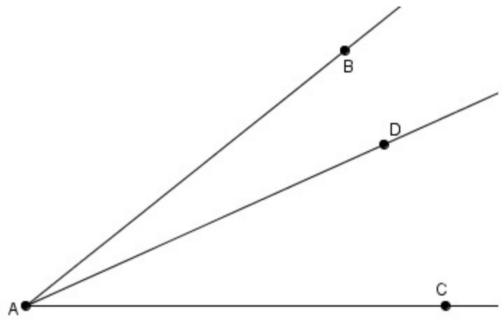

Figura 4.6: Axioma da Adição

CA_4 - *O axioma da "subtração"de ângulos.* Se D é um ponto interior do ângulo $\sphericalangle BAC$, D' é um ponto interior do ângulo $\sphericalangle B'A'C'$, $\sphericalangle BAD \cong \sphericalangle B'A'D'$ e $\sphericalangle BAC \cong \sphericalangle B'A'C'$, então $\sphericalangle DAC \cong \sphericalangle D'A'C'$ (Figura 4.7).

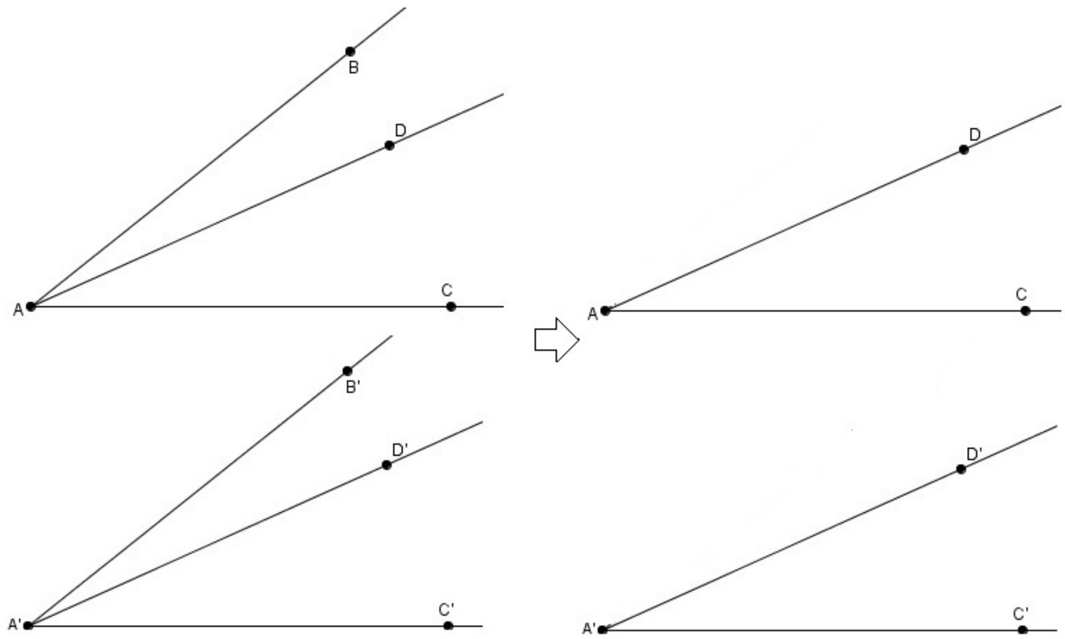

Figura 4.7: Axioma da Subtração

Definição 4.4. *Dois triângulos serão congruentes se eles puderem ser sobrepostos, ou seja, todos os pontos de um coincide com os pontos do outro.*

CA_5 - *O axioma da congruência de triângulos*(LAL). Se num triângulo, dois lados e o ângulo formado por eles, forem congruentes, respectivamente, a dois lados e o ângulo formado por eles, de outro triângulo, então os dois triângulos são congruentes.

Em quase momento nenhum fizemos referências as noções de medida de ângulos, assim como os axiomas de intermediação. Dessa forma, não há ainda porque fazermos coisas novas para entrarmos no campo da geometria sintética, ou seja, não usamos uma função que relacione as construções feitas com a ideia de medição para tal, simplesmente as fizemos com base em alguns axiomas que não fazem referências às medições. O tratamento sintético de congruência começa agora com um tratamento sintético das *desigualdades de segmentos*.

Faremos referência a um triângulo de vértices A, B e C, usando a notação $\triangle ABC$.

Observamos que o caso de congruência LAL é assumido como axioma e os demais casos podem ser demonstrados usando este axioma.

4.0.1 As leis de desigualdades para segmentos

Inicialmente vamos explicar como faremos para dizer que um segmento é mais curto ou mais comprido que outro sem tocarmos no assunto *distância*, assim como a comparação entre ângulos, verificando qual é maior ou menor que qual.

Definição 4.5. *$\overline{AB} < \overline{CD}$ significa que existe um ponto E entre C e D tal que $\overline{AB} \cong \overline{CE}$ (Figura 4.8).*

Observação: Algumas vezes faremos o uso da notação $\overline{CD} > \overline{AB}$ para indicar que $\overline{AB} < \overline{CD}$.

Figura 4.8: $\overline{AB} < \overline{CD}$

Vamos apontar a seguir as propriedades básicas da relação $<$, cujas demonstrações serão apresentadas abaixo:

S_1 - Para todo par de segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, exatamente uma das condições será satisfeita: $\overline{AB} < \overline{CD}$, $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, ou $\overline{CD} < \overline{AB}$.

S_2 - Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF}$, então $\overline{AB} < \overline{EF}$.

S_3 - Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, com $\overline{AB} < \overline{CD}$, então $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.

Teorema 4.1. *Se o ponto B está entre os pontos A e C e C está entre A e D, então B e C, nesta ordem, estão entre A e D, ou ainda, C e B, nesta ordem, estão entre D e A.*

Demonstração: Por hipótese, B está entre A e C, ou seja, $A{-}B{-}C$ (ou $C{-}B{-}A$) e também, C está entre B e D, ou seja, $B - C - D$ (ou $D - C - B$). Assim, B está entre A e D e C também fica entre A e D. Portanto, B e C ficam entre A e D, pois pela hipótese, B está entre A e C e C está entre B e D, ou seja, $A - B - C - D$ (ou $D - C - B - A$).

■

Teorema 4.2. *Se o ponto B está entre os pontos A e C e $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, então existe um ponto B' tal que B' está entre os pontos A' e C' e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$*

Demonstração: Para provarmos este teorema, vamos levar em consideração três hipóteses: o ponto B' está entre os pontos A' e C', ou B' coincide com C', ou C' está entre A' e B'. Mostraremos que a primeira condição é satisfeita e que as outras duas são condições falsas. Vamos considerar o axioma CS_2 (página 36) sobre a congruência de segmentos, donde sabemos que existe exatamente um ponto B' na semirreta $\overrightarrow{A'C'}$ tal que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$.

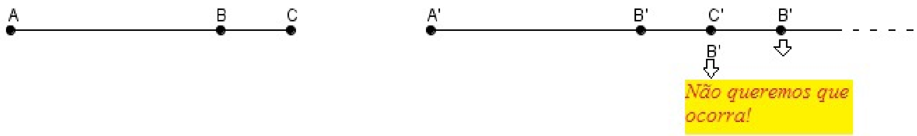

Figura 4.9: As três condições para B'

Suponha que B' coincida com C'. Então a semirreta $\overrightarrow{AC}$ contém *dois* pontos P, donde $P = B$ e $P = C$, tal que $\overline{AP} \cong \overline{A'C'}$. Este fato contraria o Axioma CS_2 (p. 34), visto que ele garante a existência de **exatamente um** ponto.

Vamos agora supor que o ponto C' esteja entre os pontos A' e B'. Pelo Axioma CS_2, há um ponto D na semirreta oposta à $\overrightarrow{CA}$, tal que $\overline{CD} \cong \overline{C'B'}$.

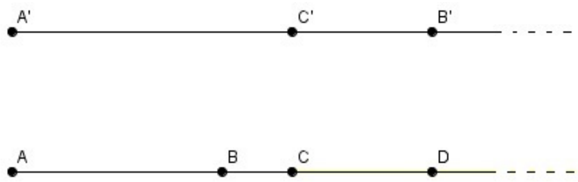

Figura 4.10: $\overline{CD} \cong \overline{C'B'}$

Assim, o ponto C está entre os pontos A e D, C' está entre A' e B', $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'B'}$. Portanto, pelo Axioma CS_3 (p. 34), temos que $\overline{AD} \cong \overline{A'B'}$. Uma vez que $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, temos uma contradição a respeito da unicidade do axioma CS_2 da construção de segmentos.

■

Teorema 4.3. *Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, então $\overline{AB} < \overline{C'D'}$.*

Demonstração: De acordo com a definição 4.5, como $\overline{AB} < \overline{CD}$, existe um ponto B' tal que B' está entre os pontos C e D e $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$. Pelo teorema 4.2, há um ponto B'' tal que B'' está entre os pontos C' e D' e $\overline{C'B''} \cong \overline{CB'}$. Mas $\overline{AB} \cong \overline{CB'}$. Portanto, $\overline{AB} \cong \overline{C'B''}$ e $\overline{AB} < \overline{C'D'}$, concluindo-se a nossa demonstração.

■

Teorema 4.4. *Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, então $\overline{A'B'} < \overline{CD}$.*

Demonstração: Visto que $\overline{AB} < \overline{CD}$, a definição 4.5 garante que existe um ponto B'' entre os pontos C e D tal que $\overline{CB''} \cong \overline{AB}$. Como $\overline{A'B'} \cong \overline{AB}$, temos que $\overline{A'B'} \cong \overline{CB''}$. Portanto, $\overline{A'B'} < \overline{CD}$, como queríamos demostrar.

■

Teorema 4.5. *Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$ e $\overline{AB} < \overline{CD}$, então $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$.*

Demostração: Desde que $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, vem do teorema 4.4 que $\overline{A'B'} < \overline{CD}$. Como por hipótese $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, decorre do teorema 4.3 que $\overline{A'B'} < \overline{CD}$ (Figura 4.11).

■

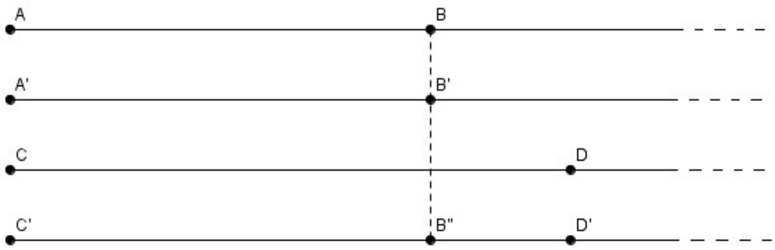

Figura 4.11: $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$

Teorema 4.6. *A relação $\overline{AB} < \overline{AB}$ nunca existirá, qualquer que seja o segmento $\overline{AB}$.*

Demonstração: De fato, se $\overline{AB} < \overline{AB}$, pela definição 4.5 teremos $\overline{AB} \cong \overline{AB'}$, para algum ponto B' entre os pontos A e B, o que contraria a unicidade do Axioma CS_2.

■

Teorema 4.7. *Se $\overline{AB} < \overline{CD}$ e $\overline{CD} < \overline{EF}$, então $\overline{AB} < \overline{EF}$.*

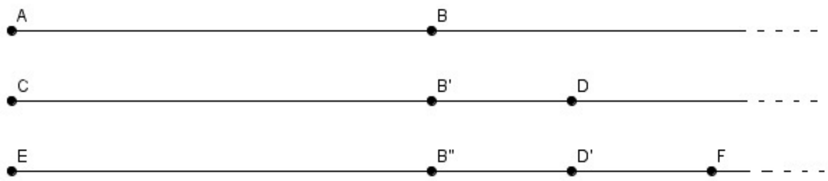

Figura 4.12: $\overline{AB} < \overline{EF}$

Demonstração: Desde que $\overline{CD} < \overline{EF}$ a definição garante a exitência de um ponto D' entre os pontos E e F tal que $\overline{ED'} \cong \overline{CD}$. Pelo Teorema 4.3, existe um ponto B'' tal que B'' está entre os pontos E e D' e $\overline{AB} \cong \overline{EB''}$. Se B'' está entre os pontos E e D' está entre os pontos E e F, resulta do Teorema 4.1 que B'' e D', nesta ordem, estão entre E e F, de modo que B'' está entre os pontos E e F. Portanto, $\overline{AB} < \overline{EF}$, como se queria provar.

■

Teorema 4.8. *Dado o par de segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{CD}$*, ocorre exatamente uma das condições:* $\overline{AB} < \overline{CD}$*,* $\overline{AB} = \overline{CD}$ *ou* $\overline{AB} > \overline{CD}$*.*

Demonstração: Do axioma da construção de segmentos decorre que existe um ponto B' de $\overrightarrow{CD}$ tal que $\overline{CB'} \cong \overline{AB}$. Se o ponto B' está entre os pontos C e D, segue do teorema 4.3 que ocorre a primeira condição. Se B' coincide com o ponto D, ocorre a segunda condição. E por fim, se D está entre os pontos C e B', pelo Teorema 4.2 há um ponto D' entre os pontos A e B tal que $\overline{AD'} \cong \overline{CD}$. Daí, pela definição 4.5, segue que $\overline{CD} < \overline{AB}$ e estes três casos estão ilustrados na figura 4.13.

■

Figura 4.13: As três condições dadas sobre os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$

4.0.2 As leis de desigualdades para ângulos

Definição 4.6. *Uma semirreta* $\overrightarrow{AD}$ *é interior a um dado ângulo* $B\widehat{A}C$ *se os ponto* D *e* B *estão do mesmo lado da semirreta* $\overrightarrow{AC}$ *e os pontos* D *e* C *estão do mesmo lado da semirreta* $\overrightarrow{AB}$*.*

Observação: Decorre das definições 4.3 e 4.6 que dadas as semirretas $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ambas com mesma origem em A, se $B\widehat{A}C$ é o ângulo formado por essas semirretas e se D é um ponto interior a este ângulo, então $\overrightarrow{AD}$ é uma **semirreta interior** ao ângulo $B\widehat{A}C$.

Note que faremos uso da notação $\widehat{B} > \widehat{A}$ para indicar também que $\widehat{A} < \widehat{B}$.

Definição 4.7. $M\widehat{B}N < P\widehat{A}Q$ *significa que há uma semirreta* $\overrightarrow{AR}$ *no interior do ângulo* $P\widehat{B}Q$ *tal que* $M\widehat{B}N \cong P\widehat{A}R$ *(Figura 4.14).*

O tratamento sintético para as desigualdades de ângulos é muito similiar ao tratamento sintético para segmentos, de tal forma que as propriedades básicas da relação $<$ são análogas. Veja:

A_1 - Dados quaisquer pares de ângulos, $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, exatamente uma das condições ocorre: $\widehat{A} < \widehat{B}$, $\widehat{A} \cong \widehat{B}$ ou $\widehat{A} > \widehat{B}$.

A_2 - Se $\widehat{A} < \widehat{B}$ e $\widehat{B} < \widehat{C}$, então $\widehat{A} < \widehat{C}$.

A_3 - Se $\widehat{A} \cong \widehat{A'}$, $\widehat{B} \cong \widehat{B'}$ e $\widehat{A} < \widehat{B}$, então $\widehat{A'} < \widehat{B'}$.

Figura 4.14: $M\widehat{B}N < P\widehat{A}Q$.

Embora as propriedades A_1, A_2 e A_3 pareçam ser óbvias, as demostrações não são tão simples.

Para tomar como base o estudo sintético para ângulos, vamos fazer considerações a respeito do ângulo reto, uma vez que já o definimos sem o recurso de medida.

4.0.3 Considerações sintéticas sobre ângulos retos

Para darmos início ao tratamento sintético aos ângulos retos, levaremos em consideração o seguinte fato: a demostração do teorema a seguir está muito relacionada ao Axioma CA_1, acerca de congruência para ângulos (página 37).

Teorema 4.9. *Se $B\widehat{A}C$ e $C\widehat{A}D$ formam um par de ângulos no plano, assim como $B'\widehat{A'}C'$ e $C'\widehat{A'}D'$, e além disso se $C\widehat{A}D \cong C'\widehat{A'}D'$, então $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$.*

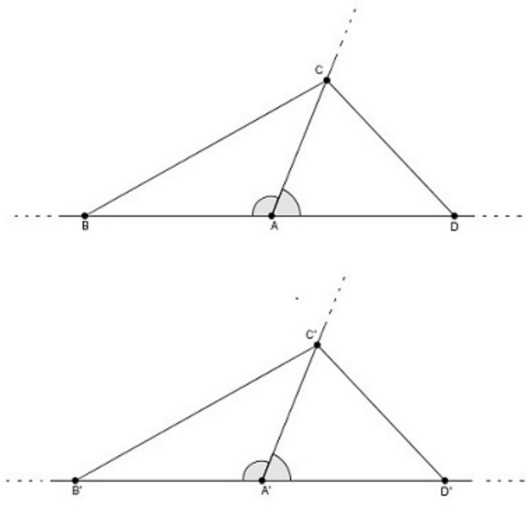

Figura 4.15: Pares de ângulos no planos

Demonstração: De acordo com a figura 4.15, assumiremos sem perda de generalidade, que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$ e $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, uma vez que os pontos B', C' e D' podem ser escolhidos do modo que isso ocorra. Assim, pelo critério LAL de congruência de triângulos, temos que $\triangle ADC \cong \triangle A'D'C'$, de onde decorre que $A\widehat{D}C \cong A'\widehat{D'}C'$.

Agora, como $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{AD} \cong \overline{A'D'}$, vem do axioma CS_3 da adição de segmentos que $\overline{BD} \cong \overline{B'D'}$. Daí, $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$, pelo caso de congruência LAL. Consequentemente, $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$, como ângulos correspondentes de triângulo congruentes, finalizando a demonstração.

■

Teorema 4.10. *Qualquer ângulo congruente a um ângulo reto também é ângulo reto.*

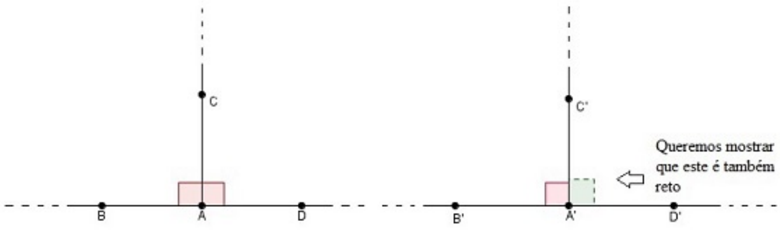

Figura 4.16: Ângulos retos congruentes

Demonstração: De acordo com a figura 4.16, admitamos que $B\widehat{A}C$ é um ângulo reto. Então $C\widehat{A}D$ e $B\widehat{A}C$ formam um par de ângulos no plano e $C\widehat{A}D \cong B\widehat{A}C$. Suponhamos que os ângulos $C'\widehat{A'}D'$ e $B'\widehat{A'}C'$ formam um par de ângulos no plano e que $B'\widehat{A'}C' \cong B\widehat{A}C$. Segue pelo teorema anterior que $C\widehat{A}D \cong C'\widehat{A'}D'$. Portanto $C'\widehat{A'}D' \cong B'\widehat{A'}C'$, de onde vem pela definição 3.9 (p. 29) que $B'\widehat{A'}C'$ é reto.

■

Teorema 4.11. *Todos os ângulos retos são congruentes.*

Demostração: Vamos supor que $B\widehat{A}C$ e $C\widehat{A}D$ formem um par de ângulos planos e congruentes, o mesmo ocorrendo com $B'\widehat{A'}C'$ e $C'\widehat{A'}D'$, conforme a figura 4.17. Provemos que $B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}C'$. Iniciaremos nossa prova tomando os pontos B' e D' de tal forma que $\overline{A'B'} \cong \overline{A'D'}$. Além disso, faremos uma construção complementar de modo que tenhamos o triângulo $B'C'D'$, conforme a figura a seguir.

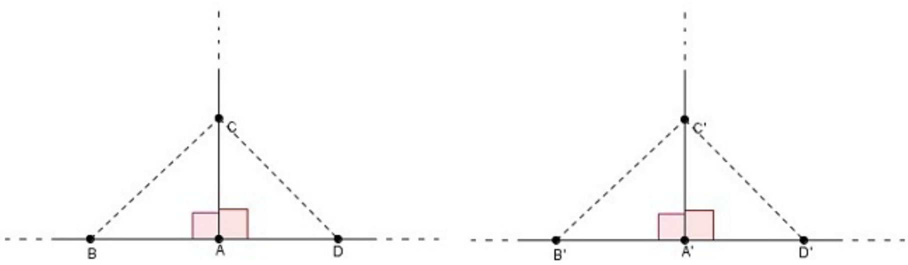

Figura 4.17: Triângulo $B'C'D'$

Resulta, pelo critério LAL de congruência de triângulos, que os triângulos $A'B'C'$ e $A'D'C'$ são congruentes, de modo que tenhamos $\widehat{B'} \cong \widehat{D'}$.

Neste triângulo, seja $\overrightarrow{A'E}$ uma semirreta com o ponto E do mesmo lado do ponto C' em relação a reta $A'D'$, tal que $B'\widehat{A'}E \cong B\widehat{A}C$.

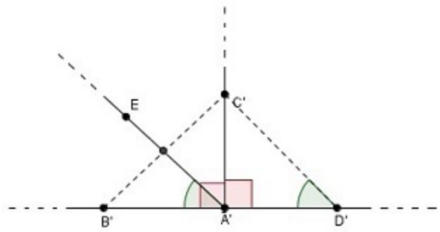

Figura 4.18: Ponto E, conforme enunciado

Precisamos provar que as semirretas $\overrightarrow{A'E}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ coincidem. Se as semirretas $\overrightarrow{A'E}$ e $\overrightarrow{A'C'}$ não são coincidentes, o ponto E está em algum lugar do interior do $B'\widehat{A'}C'$. Então $\overrightarrow{A'E}$ intersecta o segmento $\overline{B'C'}$ num ponto F, de tal modo que o ponto F esteja entre os pontos B' e C'.

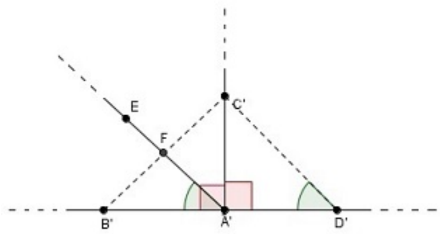

Figura 4.19: Ponto F, interseção da semirreta $\overrightarrow{A'E}$ com o segmento $\overline{B'C'}$.

Pela desigualdade de segmentos, temos que $\overline{B'F} < \overline{B'C'}$. Como $\overline{B'C'} \cong \overline{D'C'}$, resulta de S_3 (Terceira lei para a desigualdade de segmentos) que $\overline{B'F} < \overline{D'C'}$, o que implica que existe um ponto G tal que este ponto está entre os pontos D' e C' e além disso, $\overline{D'G} \cong \overline{B'F}$.

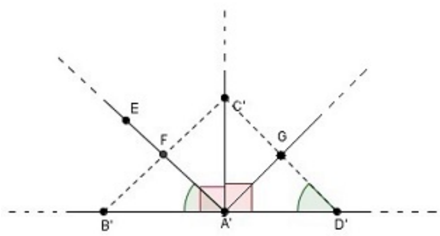

Figura 4.20: Ponto G sobre o segmento $\overline{D'C'}$.

Pelo critério LAL de congruência de triângulos, temos que os triângulos $B'A'F$ e $D'A'G$ são congruentes e que portanto, $B'\widehat{A'}F \cong D'\widehat{A'}G$. Porém, pelo Teorema 4.9, sabemos que $D'\widehat{A'}E \cong C\widehat{A}D$. Portanto, $D'\widehat{A'}E \cong C\widehat{A}D \cong B\widehat{A}C \cong B'\widehat{A'}E \cong D'\widehat{A'}G$.

Temos então que ambos os pontos E e G estão do lado da reta $\overleftrightarrow{A'D'}$ que contém o ponto C' e que os ângulos $D'\widehat{A'}E$ e $D'\widehat{A'}G$ são congruentes. Logo as semirretas $\overrightarrow{A'E}$ e $\overrightarrow{A'G}$ coincidem, decorrente da unicidade determinada pelas condições acima.

■

Observação: Quando duas retas distintas l e m se interceptam, são formados quatro ângulos, como indicado na figura 4.21.

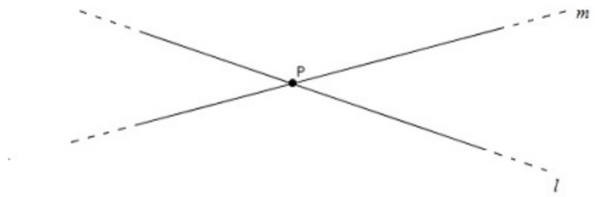

Figura 4.21: Interseção de duas retas, l e m.

Segue imediatamente da definição 3.9 e teorema 4.10 que se um deles é reto todos os outros também são.

Definição 4.8. *Duas retas l e m são perpendiculares se elas possuem um ponto P comum e um dos ângulos formados é reto (Figura 4.22).*

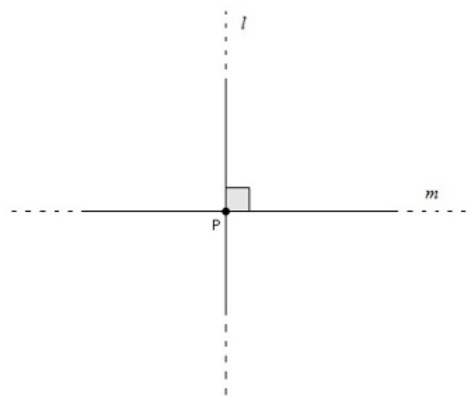

Figura 4.22: As retas l e m são perpendiculares.

Teorema 4.12. *Dados num plano α, uma reta l e um ponto A em l (se A não está em l também é válido!), existe exatamente uma reta neste plano que contém o ponto A e é perpendicular a reta l.*

Demonstração: Conforme figura 4.23, seja B um ponto qualquer da reta l, distinto do ponto A. Pelo axioma CA_2, página 37, existe um ponto C no plano α fora da reta l tal que $B\widehat{A}C$ é congruente a um ângulo reto. Pelo Teorema 4.10, isto significa que $B\widehat{A}C$ é reto e deste modo, a reta $\overleftrightarrow{AC}$ é perpendicular a reta l. Se existissem duas semirretas, por exemplo, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AC'}$, ambas perpendiculares a l, teríamos que

$B\widehat{A}C \cong B\widehat{A}C'$, pois todos os ângulos retos são congruentes. Porém isto é impossível, de acordo com CA_2.

■

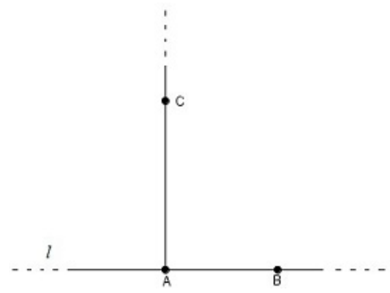

Figura 4.23: Reta $\overleftrightarrow{AC}$ perpendicular a l pelo ponto A de l.

Note que dentro do tratamento métrico verificamos imediatamente que um ângulo qualquer é reto se, e somente se, sua medida for de 90^o.

4.0.4 A forma sintética para desigualdade triangular. Classes de congruência e adição

Do mesmo modo que desenvolvemos a geometria sintética ligada as desigualdades tanto para segmentos quanto para ângulos, faremos algo parecido relacionada a Desigualdade Triangular.

Teorema 4.13. *Dado um triângulo ABC, existe um ponto A' tal que $\overline{A'B} \cong \overline{AB}$, o ponto B está entre os pontos A' e C e $\overline{A'C} > \overline{AC}$*

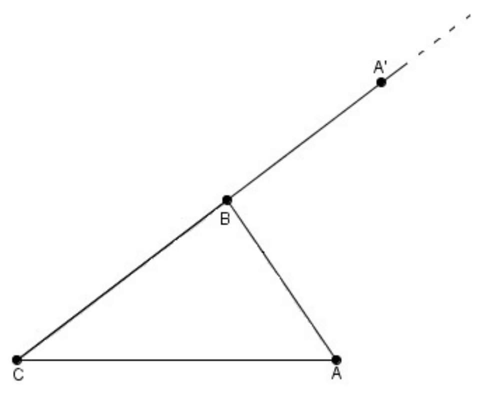

Figura 4.24: Triângulo ABC com o ponto A' fora do mesmo.

A figura 4.24 transmite muito bem esta ideia de modo intuitivo, pois basta colocar os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ de modo que o fim de um se una com o início do outro, para verificar que $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. A dificuldade em lidar com este teorema, reside no fato dele lidar com a adição de segmentos, uma vez que a adição se remete ao conhecimento de "distâncias", que neste caso, está fora do contexto da geometria sintética. Assim, neste caso, precisaremos dar outro sentido a esta "soma"de dois segmentos, considerando como sendo um único segmento, colocandos-os ponta com ponta conforme o esquema a seguir:

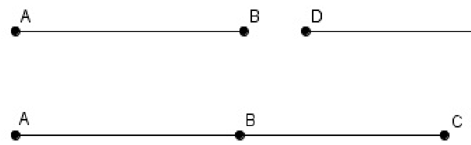

Figura 4.25: Considerando a "soma"de dois segmentos com sendo um segmento único.

Mesmo assim, surge um outro problema: o caso em que os segmentos a serem "somados"não estão alinhados, uma vez que o exemplo acima, os segmentos estão "alinhados", ficando simples a união de ponta com ponta.

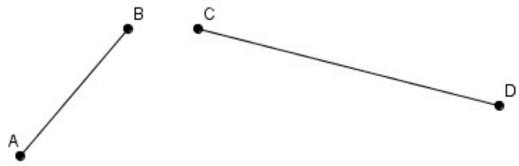

Figura 4.26: Dois segmentos não-alinhados.

Uma maneira de contornar este problema foi fazer a seguinte consideração: dado $\overline{AB}$, denotemos por $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ o conjunto de todos os segmentos que são congruentes ao segmento $\overline{AB}$, ou seja, a classe de equivalência determinada por esta relação. Certamente se $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, teremos $\lfloor\overline{AB}\rfloor = \lfloor\overline{CD}\rfloor$. Aos conjuntos $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ daremos o nome de *Classes de Congruência.*

Vamos supor agora que sejam dados $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ e três pontos M, N e P, tais que: o ponto N esteja entre os pontos M e P, $\overline{MN} \cong \overline{AB}$ e $\overline{NP} \cong \overline{CD}$. As observações a seguir são facilmente verificadas, tomando como base os axiomas de congruência.

Observação 1: Se M', N' e P' são quaisquer outros três pontos que satisfazem as mesmas condições, segue que pelo **axioma CS_3 de adição de segmentos (p.36)**, que $\overline{M'P'} \cong \overline{MP}$, isto é, a *classe de congruência $\lfloor\overline{MP}\rfloor$ é independente da escolha dos pontos M, N e P.*

Observação 2: Suponha que $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ e $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$. Seja os pontos M, N e P escolhidos em relação $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, como anteriormente, e sejam os pontos M', N' e P' escolhidos em relação $\overline{A'B'}$ e $\overline{C'D'}$. Então $\overline{MP} \cong \overline{M'P'}$. Isto é, *a classe de congruência $\lfloor\overline{MP}\rfloor$ depende somente da classe de congruência $\lfloor\overline{AB}\rfloor$* e $\lfloor\overline{CD}\rfloor$, ou seja, independe da escolha dos representantes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$.

Assim, a adição pode agora ser definida, não entre segmentos, mas entre classes de congruência. Dados $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ e $\lfloor\overline{CD}\rfloor$, tomaremos os pontos M, N e P, tais que o ponto N esteja entre os pontos M e P, $\overline{MN} \cong \overline{AB}$ e $\overline{NP} \cong \overline{CD}$. Então, por definição,$\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor = \lfloor\overline{MP}\rfloor$.

As duas observações que fizemos a pouco mostram que a definição faz sentito. A classe de congruência $\lfloor\overline{MP}\rfloor$ é independente da escolha dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, assim como dos pontos M, N e P. Ela depende apenas das classes de congruência $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ e de $\lfloor\overline{CD}\rfloor$.

Por fim, relembrando da lei de desigualdade de segmentos S_3 (p.39), temos que se $\overline{AB} < \overline{CD}$, então qualquer segmento de $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ é menor que qualquer segmento de $\lfloor\overline{CD}\rfloor$. Logo, podemos definir que $\lfloor\overline{AB}\rfloor < \lfloor\overline{CD}\rfloor$, no sentido de que todos segmentos congruentes a $\overline{AB}$ são menores que quaisquer segmentos congruentes a $\overline{CD}$.

Definição 4.9. *Para quaisquer triângulos ABC temos que a soma de dois lados quaisquer sempre será maior que o terceiro lado.*

Esta definição 4.9 é conhecida como **Desigualdade Triangular**.

Depois das observações realizadas, das análises das definições sobre classes de congruência, podemos dar uma ideia mais natural à desigualdade triangular em âmbito sintético, em forma de teorema.

Teorema 4.14. *Para qualquer triângulo ABC, temos que:*

$$\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{BC}\rfloor > \lfloor\overline{AC}\rfloor.$$

Demonstração: Se $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{CD} \cong \overline{C'D'}$, com $\overline{AB} < \overline{CD}$, temos por S_3 que $\overline{A'B'} < \overline{C'D'}$, ou seja, se $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ e $\lfloor\overline{CD}\rfloor$ são as classes de congruência dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, respectivamente, podemos dizer então que $\lfloor\overline{AB}\rfloor > \lfloor\overline{CD}\rfloor$, caso $\overline{AB} > \overline{CD}$. Também por definição de desigualdade triangular, dado um triângulo ABC qualquer vale $\overline{AB} + \overline{BC} > \overline{AC}$. Ora, se a desigualdade vale, podemos sem perdade de generalidades, supor que $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{XY}$ (*), ou seja, $\overline{XY} > \overline{AC}$. Assim, $\lfloor\overline{XY}\rfloor > \lfloor\overline{AC}\rfloor$. Portanto, de (*), $\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{BC}\rfloor > \lfloor\overline{AC}\rfloor$, como queríamos demostrar.

■

Observação: Entendemos que a notação $\lfloor\overline{AB} + \overline{BC}\rfloor$ seja equivalente a $\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{BC}\rfloor$ pelo fato de que estamos usando classes de congruência, uma vez que $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ e $\lfloor\overline{BC}\rfloor$, são os conjuntos de segmentos congruentes a $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, respectivamente.

4.0.5 Proporcionalidade sem números: um tratamento sintético

Dentro da geometria clássica, podemos definir congruência de segmentos em termos de distância dada por uma função $f : R \times R \to R$ satisfazendo determinadas condições. De modo simplificado, ocorrerá congruência entre dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ se a distância do ponto A ao ponto B for exatamente igual a distância do ponto C ao ponto D. As propriedades de congruência assim definidas, são provadas com auxílio de teoremas, porém fundamentadas na definição de métrica.

A abordagem sintética para segmentos traz consigo algumas ideias básicas, como congruências, embasadas por axiomas. Neste tratamento, a ideia de distância como estamos acostumados não aparece; de fato, os únicos números que aparecem são os números naturais. A semelhança de dois triângulos por exemplo, é feita de tal modo que a um triângulo ABC se faz corresponder um triângulo DEF, se os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais, no sentido de respeitarem a mesma constante de proporcionalidade[1].

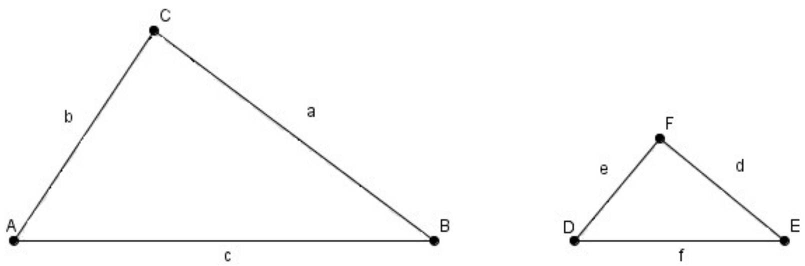

Figura 4.27: Triângulos semelhantes.

$$\widehat{A} \cong \widehat{D}, \widehat{B} \cong \widehat{E} \text{ e } \widehat{C} \cong \widehat{F},$$

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k, k \in R.$$

Neste caso, a indicação da divisão faz sentido, uma vez que a, b, c, d, e e f são números reais positivos e dizemos que os triângulos ABC e DEF são proporcionais (ou semelhantes) se os comprimentos dos lados correspondentes são proporcionais.

No entanto, como sabemos, não devemos utilizar as ideias de distâncias e muito menos de divisão, uma vez que por trás disso, há números reais. Existe uma dificuldade muito grande para explicar o que se entende por propocionalidade de segmentos no campo da geometria sintética, assim como trabalhar com este assunto. Porém, isto pode ser feito sem a utilização de quase nenhum número, com exceção dos números naturais.

Um exemplo disso é a forma como este assunto é lidado nos *Elementos de Euclides.*[2] As ideias matemáticas lá trabalhadas foram atribuídas a *"Eudoxo"* (DOMINGUES, 2011), astrônomo, matemático e filósofo grego, que viveu entre 390 e 338 a.C.

Com base no trabalho apresentado nos *Elementos*, há de se pensar em duas perguntas básicas:

1 - Quais seriam as ideias puramente sintéticas que Eudoxo usou para substituir a métrica?

[1]Há de ser dito que isto ocorre na geometria clássica, não na sintética.

[2]Proposição 4 do Livro V (EUCLIDES; BICUDO, 2009, p.210).

2 - Dada a geometria sintética, como poderíamos definir a função distância satisfazendo os axiomas?

São questionamentos muito pertinentes aos nossos interesses para a definição de proporcionalidade no campo da geometria sintética.

As ideias de Eudoxo tiveram muita importância no século XIX, quando Richard Dedekind, matemático alemão, que viveu de 1831 até início de 1916, descobriu que *"ideias eram necessárias para a criação de um sistema de números reais capaz de responder tais questionamentos"* (DOMINGUES, 2011).

Definição da proporcionalidade sintética de Eudoxo

Iniciaremos nosso trabalho indo em direção às concepções de Eudoxo de modo gradual, iniciando este assunto ainda utilizando-se de conceitos métricos e, com o desenrolar da situação, deixando de lado toda a álgebra envolvida. De início, vamos definir uma expressão para a representação de proporcionalidade.

Definição 4.10. *Sejam $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ segmentos de retas tais que:*

$$\overline{AB}/\overline{CD}//\overline{EF}/\overline{GH}$$ [3]

Assim, definiremos a proporcionalidade entre estes segmentos do seguinte modo:

$$\frac{EF}{AB} = \frac{GH}{CD} \textit{(1)}$$ [4]

Esta definição foi dada sem a menção de qualquer número, explicitamente, porém poderá acontecer que os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ sejam incomensuráveis e neste caso, a constante de proporcionalidade será irracional. Assim, nossa primeira precaução a tomar será a de expressar (1) na forma de números racionais. Baseando-se no teorema de comparação, faremos isto como segue.

a) Se $\frac{p}{q}$ é racional, e

$$\frac{p}{q} < \frac{EF}{AB},$$

então,

$$\frac{p}{q} < \frac{GH}{CD}.$$

Reciprocamente, se a segunda expressão se mantém, a primeira também se mantém. Este modo como acabamos de representar a comparação também é possível de ser feito sem o uso de uma divisão.

b) Se p e q são naturais, e

[3] Esta notação usaremos para representar a seguinte ideia: $\overline{AB}$ está para $\overline{CD}$ assim como $\overline{EF}$ está para $\overline{GH}$.

[4] AB, CD, EF e GH se remetem ao comprimento dos segmentos.

$$p \cdot \overline{AB} < q \cdot \overline{EF},$$

então,

$$p \cdot \overline{CD} < q \cdot \overline{GH}. \ (2)$$

Reciprocamente, se a segunda expressão se mantém, a primeira também se mantém.

Estamos perto de enunciar uma definição de segmentos proporcionais, visto que (2) se aproxima muito para algo parecido com a soma de classes de congruência, uma vez que esta soma pode ser definida. Mas qual o significado de $p.AB$?.

Recordemos que dado quaisquer dois segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, tomando-se os pontos M, N e P, tais que: o ponto N esteja entre os pontos M e P, $\overline{AB} \cong \overline{MN}$ e $\overline{CD} \cong \overline{NP}$, a soma $\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor$ é definida da seguinte forma:

$$\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor = \lfloor\overline{MP}\rfloor$$

Vimos anteriormente que esta soma depende somente das classes de congruência $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ e $\lfloor\overline{CD}\rfloor$, e é independente da escolha de A, B, C, D, M, N e P.

Quando $\overline{AB} \cong \overline{CD}$, escreveremos esta soma do seguinte modo:

$$\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor = \lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{AB}\rfloor = 2 \cdot \lfloor\overline{AB}\rfloor$$

De modo geral, para qualquer número natural n, teremos:

$$n\lfloor\overline{AB}\rfloor = \lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{AB}\rfloor + \cdots + \lfloor\overline{AB}\rfloor$$

Portanto, se escrevermos

$$n\lfloor\overline{AB}\rfloor = \lfloor\overline{MP}\rfloor,$$

significa que se tomarmos n cópias congruentes do segmento $\overline{AB}$ e colocarmos lado a lado, ponta com ponta estes segmentos sobre uma mesma reta, obteremos um segmento congruente ao segmento $\overline{MP}$.

Agora estamos com todas as ferramentas necessárias para dar sentido a formulação de Eudoxo (2) no campo da geometria sintética.

Sejam p e q quaisquer números naturais. Se

$$p\lfloor\overline{AB}\rfloor < q\lfloor\overline{EF}\rfloor,$$

então,

$$p\lfloor\overline{CD}\rfloor < q\lfloor\overline{GH}\rfloor.$$

Reciprocamente, se a segunda expressão se mantém, a primeira também se mantém.

Euclides usou, durante todas as passagens dos *Elementos*, esta noção, sempre que tocava no assunto proporcionalidade. Isto foi uma ótima "sacada", pois mesmo os teoremas mais simples, tornaram-se formidáveis a luz da geometria sintética, o mesmo ocorrendo com as complicadas definições do que ocorre quando se colocava segmentos congruentes lado a lado. Por exemplo, a Proposição 4 do Livro V dos *Elementos*, (EUCLIDES; BICUDO, 2009, pág. 210):

> **Proposição 4:** Caso uma primeira magnitude[5] tenha para uma segunda a mesma razão que uma terceira para uma quarta, também os mesmos múltiplos tanto da primeira quanto da terceira terão para os mesmos múltiplos da segunda e da quarta, segundo uma multiplicação qualquer, a mesma razão, tendo sido tomados correspondentes.

Em termos de geometria sintética, a proposição citada, pode ser assim enunciada:

Proposição 4': Se $\overline{AB}/\overline{CD}//\overline{EF}/\overline{GH}$, e p e q números naturais, então

$$p\overline{AB}/p\overline{EF}//q\overline{CD}/q\overline{GH}$$

Para a demonstração da **Proposição 4'** basta usarmos a definição 4.10.

Observe que aqui $p\overline{AB}$ denota qualquer segmento da classe de congruência $p\lfloor\overline{AB}\rfloor$ e assim por diante.

A seguir, temos o teorema algébrico correspondente, que é bem simples. Ele diz que:

"Se $\overline{AB}$ corresponde a $\overline{EF}$ e $\overline{CD}$ corresponde a $\overline{GH}$. Em notação, $\overline{AB}, \overline{CD} \sim \overline{EF}, \overline{GH}$, e p e q são quaisquer inteiros positivos, então, $p\overline{AB}, p\overline{EF} \sim q\overline{CD}, q\overline{GH}$".

Noutras palavras, teremos a seguinte proposição:

Proposição 4": Se $\dfrac{EF}{AB} = \dfrac{GH}{CD}(*)$ e p e q são inteiros, então $\dfrac{qCD}{pAB} = \dfrac{qGH}{pEF}(**)$.

Assim, de (*) temos que $EF \cdot CD = AB \cdot GH$ e de (**) temos que $pq \cdot CD \cdot EF = pq \cdot AB \cdot GH$.

A definição dada por Euclides para proporcionalidades (Proposição 4) pode então ser reescrita do seguinte modo:

"Sejam p e q quaisquer números naturais. Se

$$p\lfloor\overline{AB}\rfloor < q\lfloor\overline{EF}\rfloor,$$

então,

[5]Euclides usa a palavra *magnitude* para representar um comprimento.

$$p\lfloor\overline{CD}\rfloor < q\lfloor\overline{GH}\rfloor".$$

De modo geral, não faremos o desenvolvimento da teoria das proporções de Euclides. Apresentaremos apenas alguns fatos simples sobre a soma de classes de congruências.

Teorema 4.15. ***Propriedade Comutativa***

$$\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor = \lfloor\overline{CD}\rfloor + \lfloor\overline{AB}\rfloor$$

Este teorema decorre do axioma de "adição"de segmentos, axioma CS_3, página 36.

Teorema 4.16. ***Propriedade Associativa***

$$(\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor) + \lfloor\overline{EF}\rfloor = \lfloor\overline{AB}\rfloor + (\lfloor\overline{CD}\rfloor + \lfloor\overline{EF}\rfloor)$$

Demonstração: Considere a soma das classes de congruência $\lfloor\overline{AB}\rfloor$ e $\lfloor\overline{CD}\rfloor$, de tal modo que $\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor = \lfloor\overline{AD}\rfloor$. De modo análogo, $\lfloor\overline{AD}\rfloor + \lfloor\overline{EF}\rfloor = \lfloor\overline{AF}\rfloor$ e $\lfloor\overline{CD}\rfloor + \lfloor\overline{EF}\rfloor = \lfloor\overline{CF}\rfloor$. Então, $\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CF}\rfloor = \lfloor\overline{AF}\rfloor$, concluindo a demonstração.
■

Teorema 4.17. ***Propriedade Distributiva***

$$n(\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor) = n\lfloor\overline{AB}\rfloor + n\lfloor\overline{CD}\rfloor$$

Demonstração: Faremos a demonstração deste teorema usando o *Princípio da Indução Finita*. Considere $n \in N$. Se $n = 1$, a afirmação é verdadeira. Vamos supor que valha para $n = p$, então provaremos que também vale para $n = p + 1$.

Usando as propriedades comutativa e associativa acima provadas e a hipótese de indução, temos:

$$\begin{gathered}
(p+1)(\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor = \\
= p(\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor) + (\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor \\
= (p\lfloor\overline{AB}\rfloor + p\lfloor\overline{CD}\rfloor) + (\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor = (p\lfloor\overline{AB}\rfloor + p\lfloor\overline{CD}\rfloor) + (\lfloor\overline{CD}\rfloor + \lfloor\overline{AB}\rfloor \\
= p\lfloor\overline{AB}\rfloor + ((p\lfloor\overline{CD}\rfloor + \lfloor\overline{CD}\rfloor) + \lfloor\overline{AB}\rfloor) \\
= p\lfloor\overline{AB}\rfloor + ((p+1)\lfloor\overline{CD}\rfloor + \lfloor\overline{AB}\rfloor) = p\lfloor\overline{AB}\rfloor + (\lfloor\overline{AB}\rfloor + (p+1)\lfloor\overline{CD}\rfloor) \\
= (p\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{AB}\rfloor) + (p+1)\lfloor\overline{CD}\rfloor = (p+1)\lfloor\overline{AB}\rfloor + (p+1)\lfloor\overline{CD}\rfloor
\end{gathered}$$

■

Teorema 4.18. ***Preservação de Ordem***
Se

$$\lfloor\overline{AB}\rfloor > \lfloor\overline{CD}\rfloor$$

então

$$n\lfloor\overline{AB}\rfloor > n\lfloor\overline{CD}\rfloor$$

para todo natural n.

Demonstração: Se $\lfloor \overline{AB} \rfloor > \lfloor \overline{CD} \rfloor$, então podemos escrever $\lfloor \overline{AB} \rfloor$ de tal modo que $\lfloor \overline{AB} \rfloor = \lfloor \overline{CD} \rfloor + \lfloor \overline{EF} \rfloor$, para algum segmento $\overline{EF}$ da classe de conguência $\lfloor \overline{EF} \rfloor$.[6] Assim, pelo teorema anterior, temos que $n\lfloor \overline{AB} \rfloor = n\lfloor \overline{CD} \rfloor + n\lfloor \overline{EF} \rfloor$, ou seja, $n\lfloor \overline{AB} \rfloor > n\lfloor \overline{CD} \rfloor$, como queríamos demonstrar.

■

Teorema 4.19. *Se*

$$n\lfloor \overline{AB} \rfloor > n\lfloor \overline{CD} \rfloor,$$

para algum n natural, então

$$\lfloor \overline{AB} \rfloor > \lfloor \overline{CD} \rfloor.$$

Demonstração: Suponhamos que $\lfloor \overline{CD} \rfloor > \lfloor \overline{AB} \rfloor$. Do teorema 4.18 segue que $n\lfloor \overline{CD} \rfloor > n\lfloor \overline{AB} \rfloor$, o que contradiz a hipótese. Da mesma forma, se $\lfloor \overline{CD} \rfloor = \lfloor \overline{AB} \rfloor$, temos que $n\lfloor \overline{CD} \rfloor = n\lfloor \overline{AB} \rfloor$, pois tanto $\overline{AB}$ como $\overline{CD}$ pertencem a mesma classe de congruência, contradizendo a hipótese. Por fim, já que nenhuma condição anterior foi satisfeita, por exclusão se $n\lfloor \overline{AB} \rfloor > n\lfloor \overline{CD} \rfloor$ somente se $\lfloor \overline{AB} \rfloor > \lfloor \overline{CD} \rfloor$, concluindo a demonstração.

Teorema 4.20. *Se $A - B - C$, então*

$$n\lfloor \overline{AC} \rfloor > n\lfloor \overline{AB} \rfloor,$$

para todo n natural.

Demonstração: Como $A - B - C$ então $\overline{AC} > \overline{AB}$. Logo pelo teorema 4.8, temos que $\lfloor \overline{AC} \rfloor > \lfloor \overline{AB} \rfloor$. Assim, segue do teorema 4.18 que $n\lfloor \overline{AC} \rfloor > n\lfloor \overline{AB} \rfloor$, para todo natural n.

■

Teorema 4.21. *Se $\lfloor \overline{AB} \rfloor < \lfloor \overline{CD} \rfloor$, então,$\lfloor \overline{AB} \rfloor + \lfloor \overline{EF} \rfloor < \lfloor \overline{CD} \rfloor + \lfloor \overline{EF} \rfloor$.*

Demonstração: Sejam M, N e P pontos de uma mesma reta, de modo que $M - N - P$, $\overline{MN} \cong \overline{EF}$ e $\overline{NP} \cong \overline{CD}$. Uma vez que $\lfloor \overline{AB} \rfloor < \lfloor \overline{CD} \rfloor$, há um ponto Q tal que $N - Q - P$ e $\overline{NQ} \cong \overline{AB}$. Logo, $\lfloor \overline{AB} \rfloor + \lfloor \overline{EF} \rfloor = \lfloor \overline{MQ} \rfloor$ e $\lfloor \overline{CD} \rfloor + \lfloor \overline{EF} \rfloor = \lfloor \overline{MP} \rfloor$. Como $M - N - P$ e $N - Q - P$, temos que $M - Q - P$. Portanto, $\lfloor \overline{MQ} \rfloor < \lfloor \overline{MP} \rfloor$, como queríamos demonstrar.

■

[6] Isto acaba recaindo na definição de desigualdade para classes de congruência.

5 Aplicações da Geometria Sintética

5.0.6 A definição e a construção de um quadrado pela geometria sintética

Uma criança na escola primária aprende que quadrado é uma figura de quatro lados iguais, justamente pelo fato dela não ter ideia do que seja *"congruente"*, muito menos um *"ângulo reto"*(Embora essa informação seja um tanto impactante ao mais esclarecidos, este fato ocorreu durante uma palestra, numa escola da cidade de Botucatu-SP, quando professores foram perguntados de como definiam quadrado às crianças).

Da geometria euclidiana sabemos que um quadrado é um quadrilátero formado por quatro lados congruentes, cujos ângulos internos são todos retos. Ora, note que esta definição não menciona *"comprimentos"* nem *"medidas de ângulos"*. Porém, qualquer leitor leigo que a interprete, pensará quase instantaneamente em medidas de comprimento e medidas de ângulo, justamente pelo fato da associação com medidas, aprendidas no período escolar.

5.0.7 Descrição da construção de um quadrado

Considere três retas r,s e t, de modo que $r \| s$ e t seja perpendicular as retas r e s. Assim, existe um único ponto A comum às retas r e t e um único ponto B comum às retas s e t. Considere também o segmeto $\overline{AB}$. Além disso, denotemos por $\lfloor \overline{AB} \rfloor$ a classe de congruência cujos elementos são congruentes ao segmento $\overline{AB}$. Tome mais três elementos dessa classe de congruência: $\overline{BC}, \overline{CD}$ e $\overline{DA}$. Fazendo coincidir *"ponta com ponta"* cada um desses segmentos, temos um quadrado $ABCD$, pois todos os segmentos que os forma são elementos de $\lfloor \overline{AB} \rfloor$ e todos seus ângulos são retos.

Desse modo, um quadrado no campo da geometria sintética fica assim definido:

Definição 5.1. *Um quadrado é o quadrilátero cujos ângulos internos*[1] *são todos retos e seus quatro lados pertencem a uma mesma classe de congruência.*

[1] Ângulos que estão dentro da região formada pelo polígono.

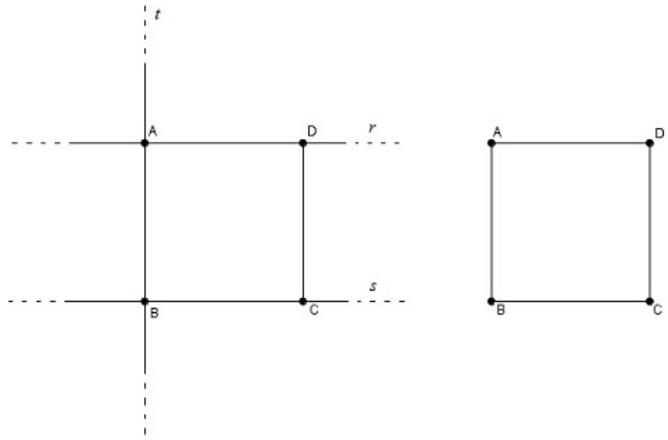

Figura 5.1: Quadrado construído segundo a descrição dada.

5.0.8 Desigualdade triangular

Uma vez definida uma classe de congruência, podemos estender este conceito para outros tantos entes geométricos. Aqui, definiremos a *desiguldade triangular* aos "olhos"da geometria sintética.

Definição 5.2. *Para quaisquer três classes de congruência* $\lfloor\overline{AB}\rfloor, \lfloor\overline{BC}\rfloor$ *e* $\lfloor\overline{AC}\rfloor$*, teremos um triângulo, se e somente se,* $\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{BC}\rfloor > \lfloor\overline{AC}\rfloor$*,* $\lfloor\overline{AB}\rfloor + \lfloor\overline{AC}\rfloor > \lfloor\overline{BC}\rfloor$ *e* $\lfloor\overline{AC}\rfloor + \lfloor\overline{BC}\rfloor > \lfloor\overline{AB}\rfloor$[2]*, simultaneamente.*

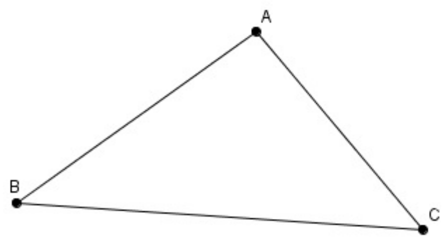

Figura 5.2: Um triângulo ABC, conforme definição 5.2.

5.0.9 Triângulo Retângulo isósceles

Uma vez definido um *ângulo reto*, podemos aplicar este conceito para definirmos e construírmos um triângulo retângulo isósceles.

Definição 5.3. *Um triângulo é um triângulo retângulo isósceles se um de seus ângulos internos for reto e pelo menos dois de seus lados pertencerem a uma mesma classe de congruência.*

[2]De acordo com o Teorema 4.14

Construção: Considere as retas r e s, perpendiculares entre si. Estas retas possuem o ponto A comum. Tome os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$, ambos de uma mesma classe de congruência, de modo que B seja um ponto da reta r e C seja um ponto da reta s, pois necessariamente os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ deverão estar contidos nas retas r e s.

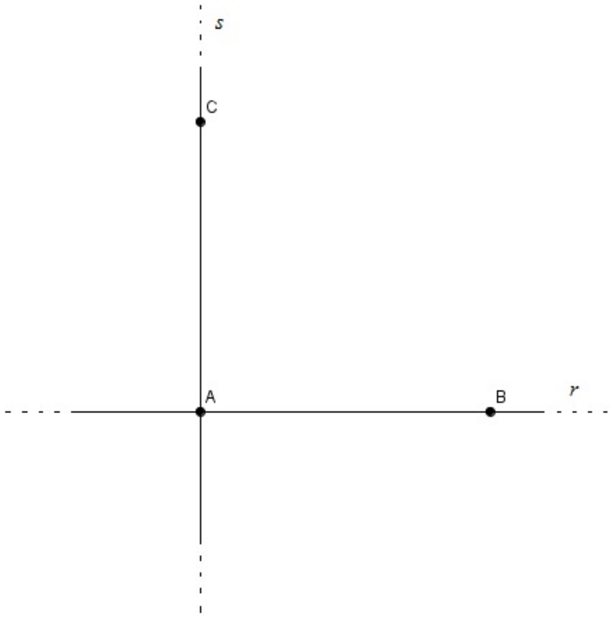

Figura 5.3: Retas r e s perpendiculares.

Por fim, considere o segmento $\overline{BC}$, cujos pontos "finais"são os pontos B e C e que $\overline{BC}$ pertença a classe de congruência $\lfloor\overline{BC}\rfloor$. Desse modo, temos um triângulo ABC cujo ângulo $\widehat{A}$ é reto e os lados $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ pertecem a uma mesma classe de equivalência, ou seja, ABC é um **triângulo retângulo isósceles**.

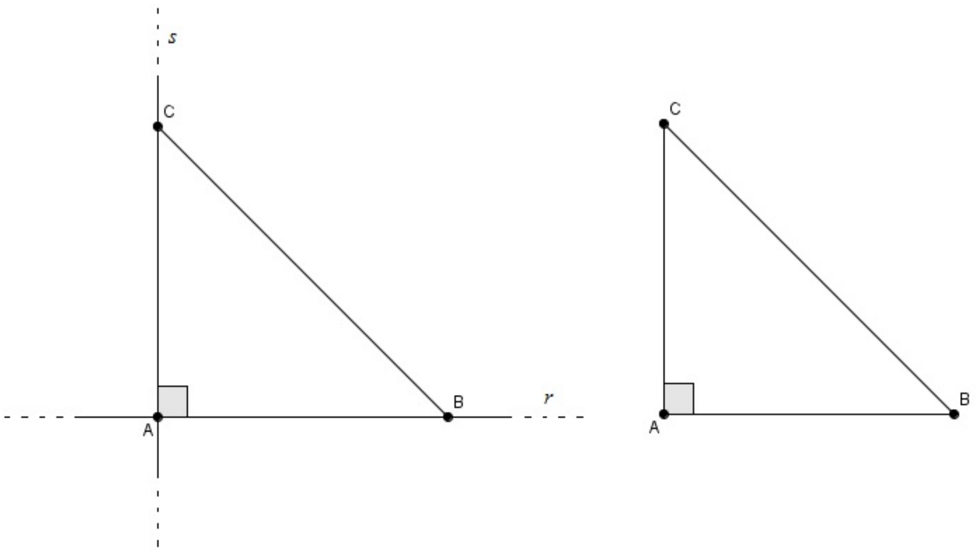

Figura 5.4: Triângulo retângulo isósceles ABC.

Porém, se a ideia for a construção de um triângulo retângulo qualquer, devemos levar em conta algumas considerações:

I - A construção deste far-se-á de modo análogo ao triângulo retângulo isósceles;

II - Os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ poderão ser de classes de congruências distintas;

III - Seja respeitada a definição 5.2.

Assim, garantimos a definição e a construção de triângulos retângulos quaisquer sob a ótica da geometria sintética.

Referências

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. **Geometria Euclidiana Plana**. ed. 11. Rio de Janeiro: SBM, 2012. 273 p.

[2] EUCLIDES. **Os Elementos/Euclides**. Tradução e introdução de Irineu Bicudo. ed. 1. São Paulo: Editora UNESP, 2009. 600 p.

[3] EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. ed. 5. Campinas, SP: Editora Unicamp, 2011. 848 p.

[4] GREENBERG, Marvin Jay. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries: Development and History**. ed. 4. New York, N.Y.: W. H. Freeman and Company, 2008. 637 p.

[5] MOISE, Edwin E.. **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**. ed. 2. New York, N.Y.: Addison-Wesley, 1974. 425 p.