UFG
Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
PROFMAT
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem nxn

Ronaldo Caetano de Mendonça Junior

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR ELETRONICAMENTE OS TRABALHOS DE CONCLUSÃO DE CURSO NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: Trabalho de Conclusão de Curso de Mestrado Profissional

2. Identificação do Trabalho

Autor (a):	Ronaldo Caetano de Mendonça Junior
E-mail:	r.caetanojr@hotmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	
Agência de fomento:	Fundação de Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior — Sigla: CAPE
País: Brasil	UF: Go — CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:	Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem nxn
Palavras-chave:	Matriz, raiz N-ézima, Quadrada
Título em outra língua:	Square Root of nxn matrices Order
Palavras-chave em outra língua:	Square Root of nxn, matrices, Order
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa: (07/03/2014)	
Programa de Pós-Graduação:	Programa de Mestrado Profissional em Matemática Rede Nacional - PROFMAT/UFG
Orientador (a):	Prof. Dr. Mário José de Souza
E-mail:	mario_jose_souza@ufg.br
Co-orientador(a):*	--
E-mail:	--

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC do trabalho de conclusão de curso.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses, dissertações ou trabalhos de conclusão de curso, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Ronaldo C. de Mendonça Jr

Assinatura do (a) autor (a)

Data: 07_/ _03_ / __2014__

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Ronaldo Caetano de Mendonça Junior

Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem nxn

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza

Goiânia
2014

Dados Internacionais de Catalogação da Publicação (CIP)

Mendonça Junior, Ronaldo Caetano de.
M539r Raiz quadrada de matrizes de ordem nxn [manuscrito] / Ronaldo Caetano de Mendonça Junior. – 2014.
42 f. : 30 cm.

"Orientador: Prof. Dr. Mário José de Souza".
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, 2014.
Inclui referências bibliográficas.

1. Matrizes (Matemática). 2. Raízes numéricas. I. Título.

CDU 511(043)

Ronaldo Caetano de Mendonça Junior

Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem nxn

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 07 de março de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Mário José de Souza

Prof. Dr. Mário José de Souza
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Eudes Antonio da Costa
Matemática campus Arraias-UFT

Profª. Drª. Ivonildes Ribeiro Martins Dias
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Ronaldo Caetano de Mendonça Junior, graduou-se em Matemática pela **Universidade Federal de Goiás**.

Dedico este trabalho à minha amada esposa Patrícia e aos meus queridos filhos, Igor e Davi.

Agradecimentos

Agradeço à Deus, a Universidade Federal de Goiás, na pessoa do Prof. Jesus Mota, ao meu orientador Prof. Mário José, pela paciência, cordialidade e profissionalismo durante os encontros de orientação, aos meus grandes amigos Neydwan e Rogério Sulyvan, à CAPES pelo apoio financeiro e a minha Família, que sempre me apoiaram em todos os momentos.

Resumo

Os tópicos são apresentados com a preocupação de tornar menos abstrato determinados conteúdos não familiares para alunos do ensino médio. Para isso, criamos uma cronologia das operações e condições, que permitem e precedem o cálculo da Raiz Quadrada de Matrizes de Ordem nxn.

Inicialmente é feito um resumo de matrizes, no Capítulo 3, diagonalização de matrizes, se cria o ambiente inicial das condições para se calcular as raízes de matrizes, no Capítulo 4 , é definida e calculada a raiz quadrada de uma matriz de ordem 3, afim de que pelo exemplo número 12, oferecermos maior materialidade ao leitor, já no Capítulo 5 é iniciado o trabalho de generalização, onde definimos e calculamos a raiz quadrada de uma matriz de ordem n. Finalmente o Capítulo 6 aborda todos os conceitos construidos nas seções anteriores para a defnição e apresentação da metodologia para o cálculo da raiz n-ézima de uma matriz quadrada.

Palavras – chave

Matriz, Raiz N-ézima, Quadrada

Abstract

The topics are presented in the interest of making it less abstract certain unfamiliar content to middle school students . To do this , create a chronology of operations and conditions that precede and enable the calculation of the nth Root of a Square Matrix .

Initially a brief summary is made of arrays in Chapter 3 , diagonalization of matrices , creates this environment of initial conditions to calculate the roots of matrices , in Chapter 4 , is defined and calculated the square root of a matrix of order 3 , in order that by example number 13 , bring greater materiality to the reader , as in Chapter 5 started the work of generalization , where we define and calculate the square of a matrix of order n root . Finally Chapter 6, covers all concepts constructed in the previous sections for definition and presentation of the methodology for calculating the nth root of a square matrix .

Keywords
Matrix, N-Root, Square.

Sumário

1 Introdução

O trabalho que se segue tem o propósito de aprofundar os estudos de matrizes e de responder a seguinte questão:

Sabemos que no corpo dos números reais, $\mathbb{R}$, as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão dão origem à potenciação e radiciação. Será que no anel das matrizes as operações fundamentais poderiam também dar origem às operações com potências de números inteiros (potenciação) e ou com potências de números racionais (radiciação)?

O presente trabalho é estruturado em capítulos. O Capitulo 2 destina-se aos conceitos iniciais de matrizes. No Capitulo 3, nos concentramos aos cálculos de autovalores, o de autovetores e matrizes semelhantes a fim de definirmos a diagonalização de matrizes.

O Capítulo 4 é destinado ao cálculo de raiz quadrada da matriz de ordem 3, em seguida, no Capítulo 5, generalizamos para raiz quadrada de uma matriz de ordem N. No Capítulo 6 concluímos o trabalho com a generalização do conceito onde é apresentada a metodologia para o cálculo da raiz n-ézima de uma matriz quadrada, respondendo positivamente a questão principal do presente trabalho.

2 Matrizes

Neste capítulo são apresentados os principais tópicos de matrizes abordados no ensino médio. Para isto usamos a referência DANTE, LUIZ ROBERTO. *Contexto e Aplicações, Vol. 02*,Editora Àtica, 2010 e IEZZI, GELSON, HAZZAN, SAMUEL. Fundamentos de Matemática Elementar 4. Atual Editora, 1997.

Definição 1:

Denominamos matriz do tipo m x n (m ϵ $\mathbb{N}^*$ e n ϵ $\mathbb{N}^*$) a toda tabela composta por (m x n) elementos dispostos em m linhas e n colunas.

2.1 Elementos de uma Matriz:

Os elementos de uma matriz genérica A são localizados de acordo com a linha e coluna que compõem esta referida matriz . Desta forma foi adotada a letra minúscula a para designar o elemento e i e j para localizar a linha e coluna respectivamente, sendo i e j números naturais diferentes de zero. Logo, dada a matriz A, temos:

$A = (a_{ij})_{mxn}.$

Sendo:

· A = Matriz A.

· a_{ij} = elemento situado na linha i e coluna j ϵ $\mathbb{N}^*$.

· m x n = ordem da matriz.

2.2 Matriz Generalizada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Lê-se : Matriz A dos elementos a_{ij} de ordem m x n.

Observações

· Podemos também escrever A = $(a_{ij})_{mxn.}$ como A = $[a_{ij}]_{mxn.}$e A = $||a_{ij}||_{mxn}$.

· Sendo A = (a_{ij}), sendo a_{ij} é um elemento genérico de A, devemos ter $1\leq$ i $\leq$ m e $1\leq$ j $\leq$ n.

2.3 Classificação de Matrizes

a) **Matriz Linha**: São todas as matrizes da do tipo 1 x n.

b) **Matriz Coluna** : São todas as matrizes do tipo m x 1.

c) **Matriz Nula ($\mathbf{O}_{mxn.}$)**: São todas as matrizes A, m x n, onde qualquer a_{ij} é sempre igual a zero.

d) **Matriz Retângular**: São todas as matrizes A, m x n, onde m $\neq$ n.

e) **Matriz Quadrada**: São todas as matrizes A, m x n, onde m = n, neste caso dizemos que a matriz é de ordem n.

2.3.1 Matrizes Especiais

a) Matriz Diagonal: A matriz A = $(a_{ij})_{mxn.}$ é tal que a_{ij} = 0 para todo i $\neq$j , ou seja é aquela que tem todos os elementos nulos fora da diagonal principal.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Matriz Unidade ou Identidade : Matrize quadrada de orden n, indicada por $I_n = (a_{ij})_{nxn}$, de modo que os elementos da diagonal principal (i = j) são iguais a 1 (unidade) e todos os demais são nulos, ou seja ;

$$I_n = (a_{ij})_{nxn} = \begin{cases} 1, \text{ se i = j} \\ 0, \text{ se i } \neq \text{j} \end{cases}$$

2.3.2 Operações com Matrizes

Adição de Matrizes: Sejam duas matrizes, $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{ij})_{mxn}$. A soma destas matrizes resulta em uma matriz $C = (c_{ij})_{mxn}$ dado por $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, para todo

$1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Assim, temos;

$$C = A + B$$

Propriedades da Adição de Matrizes:

Sendo A, B e C matrizes de mesmo tipo (mxn), temos as seguintes propriedades da soma de matrizes.

a) **Comutividade:**

$$A + B = B + A$$

b) **Associatividade:**

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

c) **Elemento Neutro:**

$$O + A = A + O = A$$

d) **Elemento Oposto:**

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

Multiplicação de um número real por uma matriz:

Dado um número real k e uma matriz A do tipo m x n , o produto de k por A é uma matriz B, do tipo mxn, obtida pela multiplicação de cada elemento de A por k, ou seja, $b_{ij} = ka_{ij}$.

$$B = k \cdot A$$

Exemplo 1. *:*

$$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 7 & 6 & 5 \\ 6 & 5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 8 \\ 14 & 12 & 10 \\ 12 & 10 & 2 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de Matrizes: Dadas duas matrizes $A = (a_{ij})_{mxn}$ e $B = (b_{jk})_{nxp}$, a multiplicação de A por B, resulta na matriz $C = (c_{ik})_{nxp}$, de modo que cada elemento

$$\begin{aligned} c_{ik} &= a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + a_{i3} \cdot b_{3k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}, \text{assim} \\ C &= A \cdot B \end{aligned}$$

Exemplo 2. *: Sejam* $A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $B \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, *determine a matriz* $C = A \cdot B$

$$\begin{aligned} C &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 3 + 3 \cdot (-2) \end{bmatrix} \\ C &= \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Propriedades da multiplicação de matrizes:

Associativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.

Distributiva da Multiplicação com relação à adição: $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$.

Elemento Neutro :A$\cdot$I$_n$ =I$_n\cdot$A = A, sendo I$_n$ é a matriz identidade de ordem n.

Matriz Inversa: Dada uma matriz A quadrada, de ordem n, se existir um matriz A^{-1}, de mesma ordem, tal que A$\cdot$A^{-1} =A$^{-1}\cdot$A = I$_n$. Então A^{-1}é a matriz inversa de A.

Observação: Só existe a inversa de A (A^{-1}) quando o determinante de A é diferente de zero (det(A)$\neq$ 0).

2.3.3 Determinantes:

Neste capítulo é apresentado o conceito de determinantes necessário para o desenvolvimento do trabalho .

Classe de uma permutação

Uma permutação das letras a, b e c do nosso alfabeto é a própria ordem

$$a \quad b \quad c$$

Definição 2: *Seja* $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ *o conjunto de inteiros de* 1 *a* n, *ordenados de maneira ascendente. A reordenação* $j_1 j_2 \ldots j_n$ *dos elementos de* S *é chamada de permutação de* S. *Podemos considerar uma permutação de* S *como sendo uma função bijetora de* S *em si mesmo.*

Podemos colocar qualquer um dos n elementos de S na primeira posição, qualquer um dos $n-1$ elementos remanescentes na segunda posição, qualquer um dos $n-2$ elementos remanescentes na terceira posição, e assim até a $n - ésima$ posição, que pode ser preenchida pelo último elemento. Dessa maneira, há $n(n-1)(n-2)\ldots 2 \cdot 1 = n!$ permutações de S. Representamos o conjunto de todas as permutações de S por S_n. Diz-se que dois elementos de uma permutação formam uma inversão se estão em ordem inversa à da permutação principal. Assim, na permutação dada acb, os elementos c e b formam uma inversão. Daí, uma permutação é de classe par ou de classe ímpar, conforme apresente um número par ou ímpar de inversões. Portanto, acb é de classe impar, pois possui apenas uma inversão. Se uma permutação é de classe par atribuiremos a ela o sinal de + e se ela for de classe ímpar o sinal de $-$.

Exemplo 3. S_1 *tem apenas uma permutação, logo é par pois não há inversões.*

Exemplo 4. *Na permutação de 4321 em S_4, 4 precede 3, 4 precede 1, 4 precede 2, 3 precede 1 e 3 precede 2 e 2 precede 1. Dessa maneira, o número de inversões nessa permutação é 6, que é par.*

Tabelas de permutações

Tabela referente às permutações dos números 1 e 2

O total de permutações dos números 1 e 2 é $P_2 = 2! = 2$. Logo, podemos formar a Tabela 1.

Tabela referente às permutações dos números 1, 2 e 3

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
12	12	0	par	+
12	21	1	ímpar	−

Tabela 1: Permutações dos números 1 e 2.

O total de permutações dos números 1, 2 e 3 é $P_3 = 3! = 6$. Logo, podemos formar a Tabela 2.

Permutação Principal	Permutação	Inversões	Classe	Sinal
123	123	0	par	+
123	132	1	ímpar	−
123	312	2	par	+
123	213	1	ímpar	−
123	231	2	par	+
123	321	3	ímpar	−

Tabela 2: Permutações dos números 1, 2 e 3.

Chama-se determinante de uma matriz quadrada à soma algébrica dos produtos que se obtém efetuando todas as permutações dos segundos índices dos elementos da diagonal principal da matriz, fixados os primeiros, e fazendo-se preceder os produtos do sinal + ou −, conforme a permutação dos segundos índices seja de classe par ou de classe ímpar. De maneira formal, temos

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz quadrada de ordem n. Define-se o determinante de A por

$$Det\,(A) = \sum (\pm)\, a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n}$$

em que o somatório envolve todas as permutações $j_1 j_2 \dots j_n$ do conjunto $S = \{1, 2, \dots, n\}$. O sinal de $(a_{1j_1} a_{2j_2} \dots a_{nj_n})$ é + ou − conforme a permutação $j_1 j_2 \dots j_n$ é par ou ímpar.

Exemplo 5. *Se A é a matriz de ordem 1, $A = [a_{11}]$, teremos somente a permutação principal. Assim, $Det\,(A) = a_{11}$.*

Exemplo 6. *Se A é a matriz de ordem 2, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, temos duas permutações em $S_2 : j_1$ e j_2, sendo que a primeira é par e a segunda é ímpar, conforme a Tabela 1. Assim, vamos proceder da seguinte forma:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1 e 2 conforme Tabela 1.

$$a_1 \ \ a_2 \qquad\qquad a_1 \ \ a_2$$

2º) Colocar nas duas expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 12 e 21, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$a_{11} \ \ a_{22} \qquad\qquad a_{12} \ \ a_{21}$$

3º) Fazer preceder cada um dos dois produtos assim formados dos sinais + ou −, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 1.

$$+a_{11} \ \ a_{22} \qquad\qquad - a_{12} \ \ a_{21}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$Det\,(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Exemplo 7. *Se A é a matriz de ordem 3,* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$, *temos seis permutações em S_3 : $j_1, j_2, j_3, j_4, j_5, j_6$, com seus respectivos sinais, conforme a Tabela 2. Procedendo de forma análoga ao exemplo anterior, temos:*

1º) Escrever os elementos que compõem a diagonal principal, um após o outro, somente com os primeiros índices (deixando lugar para colocar depois os segundos índices), tantas vezes quantas forem as permutações dos números 1, 2 e 3 conforme Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} a_1 \quad a_2 \quad a_3 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \\ a_1 \quad a_2 \quad a_3 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 & a_1 \quad a_2 \quad a_3 \end{array}$$

2º) Colocar, nas seis expressões anteriores, como segundos índices, as permutações 123, 132, 312, 213, 231 e 321, uma permutação em cada expressão e não necessariamente nessa ordem.

$$\begin{array}{ccc} a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} & a_{11} \quad a_{23} \quad a_{32} & a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32} \\ a_{12} \quad a_{21} \quad a_{33} & a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} & a_{13} \quad a_{22} \quad a_{31} \end{array}$$

3º) Fazer preceder cada um dos seis produtos assim formados dos sinais $+$ ou $-$, conforme a permutação dos segundos índices for de classe par ou de classe ímpar de acordo com a Tabela 2.

$$\begin{array}{ccc} +a_{11} \quad a_{22} \quad a_{33} & -a_{11} \quad a_{23} \quad a_{32} & +a_{13} \quad a_{21} \quad a_{32} \\ -a_{12} \quad a_{21} \quad a_{33} & +a_{12} \quad a_{23} \quad a_{31} & -a_{13} \quad a_{22} \quad a_{31} \end{array}$$

4º) Efetuar a soma algébrica dos produtos assim obtidos, onde se terá:

$$Det\,(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

que pode ser escrita como

$$Det\,(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

3 Diagonalização de Matrizes

Uma relação entre matrizes que é muito importante no estudo de operadores lineares e também no estudo de autovalores é relação de semelhança de matrizes.

Definição 3 : Sejam A e B matrizes n x n. Dizemos que B é semelhante a A, se existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.

Definição 4 : Uma matriz A_{nxn} é dita diagonalizável se for semelhante a uma matriz diagonal.

Sgue da definição 4, uma matriz A_{nxn} é diagonalizável se existem matrizes P_{nxn} (invertível) e D_{nxn} (diagonal) tais que $A = PDP^{-1}$.

$$P = [v_1 \; v_2 \cdots v_n] \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

como,

$$A = PDP^{-1}$$

multiplicando P em ambos os lados, teremos

$$AP = PDP^{-1}P$$

como,

$$P^{-1}P = I$$

e I é o elemento neutro da multiplicação de matrizes, temos

$$\begin{aligned} AP &= PD \\ A \cdot [v_1\ v_2 \cdots v_n] &= [v_1\ v_2 \cdots v_n] \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \\ [Av_1\ \ Av_2\ \cdots\ Av_n] &= [\lambda_1 v_1\ \ \lambda_2 v_2\ \cdots\ \lambda_n v_n] \end{aligned}$$

igualando,

$$\begin{aligned} Av_1 &= \lambda_1 v_1 \\ Av_2 &= \lambda_2 v_2 \\ &\vdots \\ Av_n &= \lambda_n v_n \end{aligned}$$

Dada uma matriz A_{nxn}, um escalar λ é chamado autovalor e um vetor não nulo $v \in R^n$ é chamado autovetor de A se $Av = \lambda v$.

Assim, mostramos que se uma matriz A_{nxn} é diagonalizável, ou seja, se existem matrizes P e D tal que $A = PDP^{-1}$ então as colunas de P são autovetores linearmente independentes (LI), pois P é invertível, associados aos autovalores λ_n, que são os elementos da diagonal de D.

Portanto, para determinar se uma matriz A é diagonalizável, precisamos determinar primeiramente seus autovalores e isso pode ser feito da seguinte maneira:

Resolver a equação

$$Av = \lambda v$$

que é equivalente a,

$$Av = \lambda I v$$

ou ainda,

$$Av - \lambda I v = 0 \Rightarrow (A - \lambda I)v = 0.$$

Assim, λ será um autovalor de A, se e somente se, o sistema homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$ possuir soluções não triviais. Mas isso acontecerá, quando, $\det(A - \lambda I) = 0$, que é um polinômio de grau n em λ.

Logo como os autovalores de A são exatamente as raízes deste polinômio, também conhecido por polinômio característico de A, o qual denotamos por $P_A(x)$.

Teorema 1 *: Sejam A e B matrizes semelhantes. Então A e B têm o mesmo polinômio característico e, consequentemente, os mesmos autovalores.*

Demonstração: *Sendo A e B matrizes semelhantes, isto é existe uma matriz invertível P tal que $B = PAP^{-1}$.*

Assim,

$$\begin{aligned} P_B(x). &= \det(xI - B), \text{com } I = PP^{-1} \\ &= \det\left(xPIP^{-1} - PAP^{-1}\right) \\ &= \det(P(xI - A)(P^{-1}) \\ &= \det(P)\det(xI - A)\det(P^{-1}) \\ &= \det(xI - A) \\ &= P_A(x). \end{aligned}$$

Sendo os polinômios característicos iguais e como os autovalores são as raízes desse polinômio, segue que A e B têm os mesmos autovalores. O conceito de diagonalização de matrizes, será usado mais a frente para cálculo de potências de matrizes.

Exemplo 8. . *Vamos determinar os autovalores da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução: Para essa matriz o polinômio característico é

$$p(\lambda) = det(A - \lambda I_2) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

Como os autovaloes de A são as raízes de $p(\lambda)$, *teremos* $p(\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ *então os autovalores de A são:* $\lambda_1 = 3$ *e* $\lambda_2 = -1$.

Uma vez encontrados os autovalores da matriz, para encontrar os autovetores basta resolver o sistema linear homogêneo $(A - \lambda I)X = 0$. *Assim,*

para $\lambda_1 = 3$ *temos*

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2x - y \\ -4x - 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

equivalente ao sistema linear;

$$\begin{cases} -2x - y = 0 \\ -4x - 2y = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é

$$v_1 = \{(\alpha, -2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}.$$

que é o conjunto de todos os autovetores associados a $\lambda_1 = 3$. *Analogamente, fazendo o mesmo para* $\lambda_2 = -1$, *encontramos* $v_2 = \{(\alpha, 2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$, *que é o conjunto de todos os autovetores associados a* $\lambda_2 = -1$.

Agora que já sabemos encontrar os autovelores e os autovetores de uma matriz, podemos enunciar o seguinte teorema.

Teorema 2 : *Se uma matriz* A_{nxn} *tem* n *autovalores distintos, então ela é diagonalizável.*

E vale lembrar que a matriz diagonal

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

é formada pelos autovalores λ_n *de* A *em sua diagonal principal e a matriz*

$$P = [v_1 \; v_2 \cdots v_n]$$

é formada pelos autovetores associados aos autovalores λ_n.

Exemplo 9. . *Mostre que a matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável.*

Solução: Vamos verificar se a matriz A *tem três autovalores distintos, que pela definição 4, permite a matriz* A *ser diagonalizável.* .

Seu polinômio característico é dado por

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 9 & 4-\lambda & 6 \\ -8 & 0 & -3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3$$

Assim,

$$det\,(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0$$

resolvendo a equação, teremos

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1 \text{ e } \lambda_3 = 3$$

que são os autovalores distintos da matriz A. *Logo pela definição 3 a matriz* A *é diagonalizável e a matriz diagonal é dada por*

$$D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Para obtermos a matriz P tal que $A = PDP^{-1}$, precisamos encontrar os autovetores,

para $\lambda_1 = -1$, teremos:

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 6 \\ -8 & 0 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 9 & 5 & 6 \\ -8 & 0 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resolvendo o sistema, encontramos a solução geral $v = \{(\alpha, 3\alpha, -4\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$.

Logo, um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = -1$ é $v_1 = (1, 3, -4)$. Analogamente, para $\lambda_2 = 1$ e $\lambda_3 = 3$ encontramos respectivamente os autovetores $u = \{(\alpha, \alpha, -2\alpha)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\}$ e $w = \left\{\left(\alpha, -\alpha, \frac{-4\alpha}{3}\right)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}^*\right\}$ e assim um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$ será $u_1 = (1, 1, -2)$ e um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$ será $w_1 = (3, -3, -4)$.

Então teremos, que a matriz invertível é dada por

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 \\ -4 & -2 & -4 \end{bmatrix}.$$

Portanto a matriz A é diagonalizável e $A = PDP^{-1}$.

O Teorema 2, nos garante que se uma matriz A_{nxn} tem n autovalores distintos, então ela é diagonalizável. E se esses autovalores não forem distintos? A resposta está no seguinte teorema.

Teorema 3 : *Uma matriz A_{nxn} é diagonalizável, se e somente se, a matriz A tem n autovetores linearmente independentes (LI).*

Exemplo 10. . *Verifique que a matriz* $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável.*

Solução: Vamos determinar os autovalores de A. *Seu polinômio característico e dado por*

$$p(\lambda) = det\,(A - \lambda I_3) = \det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -4 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1.$$

Assim,

$$det\,(A - \lambda I_3) = 0 \Rightarrow -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$$

Logo, os autovalores são: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ *(com multiplicidade 2) e* $\lambda_3 = 1$. *Agora, vamos encontrar os autovetores, para isso basta resolver* $(A - \lambda I)X = 0$.

Para $\lambda_1 = -1$, *teremos:*

$$\left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

daí,

$$\begin{cases} -2x + 2z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ -4x + 4z = 0 \end{cases}$$

resolvendo o sistema, encontramos a solução geral

$$v = \{(\beta, \alpha, \beta) = \alpha\,(0,1,0) + \beta\,(1,0,1)\,;\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}\,.$$

Logo $v_1 = (1,0,1)$ *e* $v_2 = (0,1,0)$ *são vetores linearmente independentes (LI) associados ao autovalor* $\lambda_1 = -1$.

Analogamente, para $\lambda_3 = 1$, *encontraremos a solução geral*

$$w = \{(\alpha, \alpha, 2\alpha) = \alpha\,(1,1,2)\,;\ \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Assim, $w_1 = (1,1,2)$ *é um autovetor associado ao autovalor* $\lambda_3 = 1$.

Portanto, a matriz A *é diagonalizável e as matrizes*

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

são tais que, $A = PDP^{-1}$.

4 Raiz Quadrada de uma Matriz de Ordem 3

Nesta seção calcularemos a raíz quadrada de uma matriz de ordem 3, para posteriormente generalizarmos a raiz n-énezima de uma matriz quadrada.

Sabemos que nem todo número real admite uma raiz quadrada em $\mathbb{R}$. De modo semelhante, podemos afirmar o mesmo sobre uma matriz, isto é, nem toda matriz admite uma raiz quadrada com entradas em $\mathbb{R}$.

Se A e B são matrizes quadradas de ordem 3, tais que $B = A^2$, então em $\det(B) = (\det(A))^2$.

Tal resultado é importante, para concluirmos que se uma matriz A possui raiz quadrada, então o seu determinante deve ser um número real não-negativo.

Teorema 4 .: Seja A uma matriz diagonal de ordem 3

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Se todos os elementos da diagonal principal são números reais não-negativos, então a raiz quadrada de A, denotada por$\sqrt{A}$, é uma das matrizes.

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix} \ \sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A} = \begin{bmatrix} -\sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{c} \end{bmatrix}.$$

Demonstração: *Nesta demonstração será utilizada a primeira matriz;*

$$\begin{aligned}
\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{c} \end{bmatrix} \\
\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} (\sqrt{a}) \cdot (\sqrt{a}) & 0 & 0 \\ 0 & (\sqrt{b}) \cdot (\sqrt{b}) & 0 \\ 0 & 0 & (\sqrt{c}) \cdot (\sqrt{c}) \end{bmatrix} \\
\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} &= \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = A.
\end{aligned}$$

A demonstração para as demais matrizes acontece de maneira análoga.

Exemplo 11. :*Seja a matriz diagonal* $A=\begin{bmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 49 \end{bmatrix}$, *determine* $\sqrt{A}$.

O determinante da matriz acima é positivo, logo a matriz tem raiz quadrada.

$$\sqrt{A}=\begin{bmatrix} \sqrt{9} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{16} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{49} \end{bmatrix}$$

Logo, a soluções são:

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A}=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ ou } \sqrt{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \text{ ou} \sqrt{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Teorema 5 : *Seja A uma matriz nula de ordem 3, então há infinitas matrizes que são raízes quadradas da matriz A.*

Seja $A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $\sqrt{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, *sendo os elementos de* $\sqrt{A}$, *são números reais.Como* $A = \sqrt{A} \cdot \sqrt{A}$,*temos;*

$$\sqrt{A}\cdot\sqrt{A} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$\sqrt{A}\cdot\sqrt{A} = \begin{bmatrix} a^2+bd+cg & ab+be+ch & ac+bf+ci \\ ad+ed+fg & db+e^2+fh & dc+ef+fi \\ ga+hd+ig & gb+he+ih & gc+hf+i^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Depois de alguns cálculos, não complicados mas extensos, observa-se que o produto $\sqrt{A}\cdot\sqrt{A}$, *fornece um sitema linear homogêneo de infinitas soluções.*

Teorema 6 : *Se* A, B *e* P *são matrizes quadradas de ordem 3, onde* $B = P\cdot A\cdot P^{-1}$,*e* $f(t)$, *uma equação onde os autovalores de* A *são sua solução, então:*

$$f(B) = P\cdot f(A)\cdot P^{-1}$$

Demonstração: *Se as matrizes* A *e* B *são semelhantes, temos que elas possuem o mesmo polinômio característico. Assim, se* $p(t)$ *é uma interpolação polinomial para* $f(t)$ *para todos os autovalores da matriz* A, *que também passa a ser uma interpolação polinomial de* $f(t)$ *para todos os autovalores de* B. *Com isso temos que:*

$$f(A) = p(A)$$
$$f(B) = p(B)$$
$$p(B) = P\cdot p(A)\cdot P^{-1}$$

Logo $f(B) = P\cdot f(A)\cdot P^{-1}$.

Exemplo 12. : *Calcule a raiz quadrada da Matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Para calcular os autovalores temos que det (A-λI) = 0

$$det(A-\lambda\cdot I) = \left|\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}\right| = 0$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= 0 \\ (1-\lambda)^2\cdot(3-\lambda) - 2\cdot(3-\lambda) - (1-\lambda) &= 0 \\ -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda &= 0 \\ (\lambda-4)(\lambda-1)\lambda &= 0, \end{aligned}$$

Portanto os autovalores são: $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 1$ *e* $\lambda_3 = 0$

Para calcular os autovetores, temos que, resolver (A-λI)$\cdot X = 0$, para cada um dos autovalores encontrados;

$$X=\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = 4$, *temos;*

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x + 2y + z = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2x + y + -3z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se soluções do tipo (α, α, α). *Podemos portanto descrever o primeiro vetor como (1,1,1).*

Para $\lambda = 1$, *temos;*

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtém-se soluções do tipo $(\alpha, -2\alpha, 4\alpha)$. *Podemos portanto descrever o segundo vetor como (1.-2.4).*

Para $\lambda = 0$, *temos;*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema obtém-se soluções do tipo $(\alpha, \alpha, -3\alpha)$. *Podemos portanto descrever o terceiro vetor como (-1,-1.3).*

Logo a matriz P formada pelos seu autovetores será:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \text{ e } P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

A partir dos autovalores determinaremos a matriz $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Logo pelo Teorema 6,temos que:

$$\sqrt{A} = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}$$

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Logo, uma das raízes de A é, $\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{5}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{11}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$

5 Raiz Quadrada de uma Matriz de Ordem N

Como mostramos nos capítulos anteriores, se A é uma matriz diagonalizavel, então , existe uma matriz P e sua inversa P^{-1},tal que $P \cdot A \cdot P^{-1} = D$, sendo D é uma matriz diagonal de ordem n, isto é

$$P \cdot A \cdot P^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} = D$$

Desse modo,

$$\sqrt{A} = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}.$$

De fato: Como $\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = (P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}) \cdot (P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1})$, temos;

Parte I:

$\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = (P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1})(P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}) =$

$= P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1} \cdot P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}$

$= P \cdot \sqrt{D} \cdot \sqrt{D} \cdot I \cdot P^{-1}$

$= P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Parte II: Multiplicando P a direita e P^{-1} a esguerda temos:

$P \cdot A \cdot P^{-1} = D$

$P^{-1} \cdot P \cdot A \cdot P^{-1} \cdot P = P^{-1} \cdot D \cdot P$

$I \cdot A \cdot I = P^{-1} \cdot D \cdot P$

$A = P^{-1} \cdot D \cdot P$

de I e II temos que $\sqrt{A} = P \cdot \sqrt{D} \cdot P^{-1}$.

Ou seja, dada uma matriz diagonal,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Se $a_{nn} \geqslant 0$, para todo n $\in$ {1,2, ...,n} então a matriz,

$$\sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix}$$, é uma raiz quadrada da matriz A.

Logo:

$$\sqrt{A} \cdot \sqrt{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\sqrt{A}\cdot\sqrt{A} &= \begin{bmatrix} \sqrt{a_{11}}\cdot\sqrt{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a_{22}}\cdot\sqrt{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{a_{nn}}\cdot\sqrt{a_{nn}} \end{bmatrix} \\
A &\equiv \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

6 Raiz n-ézima de uma Matriz Quadrada

Neste capítulo calcularemos a raiz n-ézima de uma matriz de ordem n. Para isso consideraremos uma matriz A diagonalizável e todos os seus autovalores não negativos.

$$\sqrt[n]{A} = P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}$$

De fato

$(\sqrt[n]{A})^n = (P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1})^n$

$= (P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}) \cdot \underset{n-vezes}{\cdots} \cdot (P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}) =$

$= P \cdot [\sqrt[n]{D} \underset{n-vezes}{\cdots} \sqrt[n]{D}] \cdot [(P^{-1} \cdot P) \underset{n-vezes}{\cdots} (P^{-1} \cdot P)] \cdot P^{-1} =$

$= P \cdot [(\sqrt[n]{D})^n] \cdot [I \underset{n-vezes}{\cdots} I] \cdot P^{-1} = P \cdot D \cdot P^{-1}$.Logo;

$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$.

Para o caso em que o índice da raiz n é par será necessário que a_{nn} seja maior ou igual a zero, então a matriz:

$$\sqrt[n]{A} = \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix}$$, é a raíz n-ézima da matriz A.

De fato:

$\sqrt[n]{A} \cdot \underset{n-vezes}{\cdots} \cdot \sqrt[n]{A} =$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix} \cdot \underset{n-vezes}{\cdots} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$= \sqrt[n]{A} \cdot \underset{n-vezes}{\cdots} \cdot \sqrt[n]{A} =$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt[n]{a_{11}} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{a_{11}} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt[n]{a_{22}} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{a_{22}} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt[n]{a_{nn}} \cdot ... \cdot \sqrt[n]{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Logo,

$$\sqrt[n]{A} = P \cdot \sqrt[n]{D} \cdot P^{-1}$$

7 Considerações Finais

Os estudos realizados para o desenvolvimento deste trabalho nos garantiram a obtenção de ganhos significativos relacionados à extração da raíz n-ézima de uma matriz de ordem n. Apresentam - nos a importância do desenvolvimento de métodos que possibilitam um professor de matemática a trabalhar com a raiz n-ézima de matriz, com auxílio da Álgebra Linear, oportunizando melhor entendimento por parte dos alunos do ensino médio e superior, uma vez que os mesmos encontram-se habituados com cálculos algébricos.

O processo de elaboração nos leva a acreditar que os conceitos foram construidos a fim de melhorar o entendimento dos alunos e portanto, podemos doar um tempo maior para o planejamento de atividades em que a aprendizagem seja efetiva.

Referências

[1] BOLDRINI, JOSE LUIS. *Algebra Linear.* Editora Harbra, 1980.

[2] DANTE, LUIZ ROBERTO. *Contexto e Aplicações. Vol. 02.* Editora Àtica, 2010.

[3] GORDON, CRYSTAL. MONTERZ. *The Square Root Function of Matrix.* Georgia State University, 2007.

[4] IEZZI, GELSON. HAZZAN, SAMUEL. Fundamentos de Matemática Elementar 4. Atual Editora, 1997.

[5] LEITHOLD, LUIS. *O Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 01,* Editora Harbra, 1977.

[6] STEINBRUCH, ALFREDO, *Winterle, Paulo, Introdução a Àlgebra Linear.* Pearson Educacion do Brasil, 1997.