



**UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA**

RONDINELI CARNEIRO LOUREIRO

EXPERIMENTANDO A MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS BOLHAS DE SABÃO

**BELÉM – PARÁ
2014**

RONDINELI CARNEIRO LOUREIRO

EXPERIMENTANDO A MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS BOLHAS DE SABÃO

Monografia apresentada à Comissão Examinadora do curso de Pós-Graduação da Universidade Federal do Pará - UFPA, como instrumento parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Antônio Moraes Vilhena

**BELÉM – PA
2014**

Dados Internacionais de Catalogação-na-Publicação (CIP)
Sistema de Bibliotecas da UFPA

Loureiro, Rondineli Carneiro, 1981-
Experimentando a matemática através das bolhas de
sabão / Rondineli Carneiro Loureiro. - 2014.

Orientador: José Antônio Moraes Vilhena.
Dissertação (Mestrado) - Universidade
Federal do Pará, Instituto de Ciências Exatas e
Naturais, Programa de Pós-Graduação em
Matemática (Mestrado Profissional), Belém, 2014.

1. Geometria. 2. Geometria diferencial. 3.
Superfícies mínimas. 4. Problema de Platô. I.
Título.

CDD 22. ed. 516

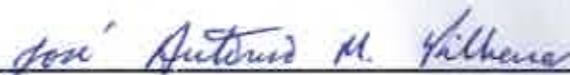
TERMO DE APROVAÇÃO

RONDINELI CARNEIRO LOUREIRO

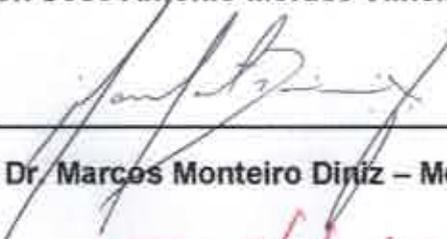
EXPERIMENTANDO A MATEMÁTICA ATRAVÉS DAS BOLHAS DE SABÃO

Monografia apresentada à Comissão Examinadora do curso de Pós-Graduação da Universidade Federal do Pará - UFPA, como instrumento parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

BANCA EXAMINADORA:



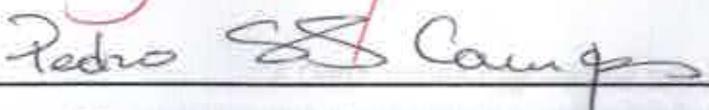
Prof. Dr. José Antônio Moraes Vilhena – Orientador - UFPA



Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz – Membro Interno - UFPA



Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma – Membro Interno - UFPA



Prof. Dr. Pedro Silvestre da Silva Campos – Membro Externo - UFPA

CONCEITO: APROVADO

Belém – PA, 02 DE DEZEMBRO DE 2014

*À Deus, minha esposa que sempre me apoiou
nos meus projetos, pais e irmãos.*

AGRADECIMENTOS

À Deus todo Poderoso, por sua sabedoria e benevolência, e a Nossa Senhora de Nazaré por sua interseção junto a Nosso Senhor Jesus Cristo.

À minha amada esposa Carla Gisele Loureiro, por toda paciência para comigo.

Aos meus pais, Alfredo e Iralde pelo apoio aos meus estudos. Aos meus irmãos que sempre me apoiaram.

Ao meu orientador por sua paciência e suas críticas construtivas.

Aos meus amigos do PROFMAT, pela amizade e companheirismo.

A todos os professores da Pós-graduação.

A Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), por oportunizar o PROFMAT, programa que nos proporcionou imensurável crescimento intelectual.

A Universidade Federal do Pará (UFPA), por nos proporcionar sua estrutura física e intelectual.

A CAPES, pelo reconhecimento e investimento que viabilizaram este projeto.

RESUMO

O nosso trabalho descreve o roteiro de uma atividade experimental, a qual pôde ser desenvolvida com os alunos do ensino básico, através do estudo das propriedades geométricas das películas e bolhas de sabão. Inicialmente o trabalho faz um breve estudo da teoria local das superfícies, em seguida apresentamos a estrutura molecular das películas e bolhas de sabão e os efeitos da tensão superficial presentes nelas, terminando a teoria com as leis Plateau, na parte prática o trabalho apresenta dez experimentos práticos que irão ajuda a ilustrar e entender as propriedades anteriormente definidas.

Palavras-chave: Bolhas de Sabão, Películas de Sabão, Superfícies Mínimas, Geometria, Geometria diferencial, Plateau

ABSTRACT

Our work describes the script for an experimental activity, which could be developed with students of basic education through the study of the geometrical properties of the films and soap bubbles. Initially work makes a brief study of the local theory of surfaces, then we present the molecular structure of the films and soap bubbles and the effects of surface tension present in them, finishing the theory with the Plateau laws in practice part of the work presents ten experiments practical that will help illustrate and understand the properties defined above.

Keywords: soap bubbles, soap films, Minimal Surfaces, Geometry, differential geometry, Plateau

SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO	10
INTRODUÇÃO	11
BREVE HISTÓRICO	13
METODOLOGIA	16
3. TEORIA LOCAL DAS SUPERFÍCIES	17
3.1. SUPERFÍCIE PARAMETRIZADA REGULAR	17
3.2. PLANO TANGENTE; VETOR NORMAL.....	19
3.3. PRIMEIRA FORMA QUADRÁTICA	20
3.4. SEGUNDA FORMA QUADRÁTICA	21
3.5. CURVATURA NORMAL.....	22
3.6. CURVATURAS PRINCIPAIS; CURVATURA DE GAUSS; CURVATURA MÉDIA.....	22
BOLHAS E PELÍCULAS DE SABÃO	25
4.1. COMO SE FORMAM AS BOLHAS DE SABÃO?	25
4.2. TENSÃO SUPERFICIAL	26
4.3. EQUAÇÃO DE LAPLACE-YOUNG	27
4.4. LEIS DE PLATEAU	31
5. EXPERIMENTOS COM PELÍCULAS DE SABÃO	33
BOLHAS DE SABÃO	60
CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	63
REFERENCIAS.....	64
ANEXOS.....	66

APRESENTAÇÃO

Quem de nós nunca brincou de fazer bolhas de sabão? Para alguns o simples fato de soprar bolhas de sabão, constituem objeto de admiração que dificilmente deixamos de manifestar algum tipo de contemplação quando tomamos contato com uma. À parte sua intrigante beleza, o mundo das bolhas de sabão revela problemas de grande interesse matemático e físico.

INTRODUÇÃO

Na natureza diversos fenômenos acontecem a todo momento e todos eles apresentam o princípio da energia mínima, ou seja, é a natureza buscando sempre minimizar e otimizar o gasto energético. Portanto o autor desse trabalho focou suas pesquisas em explorar um tema que é trabalhado com alunos das séries finais do ensino fundamental e início do ensino médio, máximos e mínimos, seja na forma funcional ou geométrica, com a abordagem de um tema em que todos nós temos alguma familiaridade, o processo de obtenção de bolhas de sabão.

Apesar de ser uma atividade simples, este trabalho propõe aos alunos uma maneira de relacionar e aprofundar os conhecimentos de matemática com as observações do cotidiano. Mesmo que o assunto não faça parte do currículo do ensino básico, ele pode ser trabalhado como forma de estimular os alunos à pesquisa e a experimentação, já que o mesmo utiliza os conhecimentos de Geometria do ensino básico.

Sendo assim podemos mostrar que a Matemática está além das operações elementares com números e outras ideias abstratas presentes no currículo da disciplina, as quais muitas vezes o aluno nem consegue compreender e muitos menos relacioná-las com outras ciências.

Usar um tema tão simples aparenta uma brincadeira de criança para alunos do ensino médio, mas o assunto se revela uma estimulante maneira de apresentar conceitos dessa ciência de uma maneira que desperte o interesse no aprendizado a partir da observação e análise do meio em que vivem e da compreensão nas formas de interagir e transformar esse meio. Então quanto à questão de estimular os alunos deve-se considerar a afirmação de Polya (2006)

Um professor de Matemática tem assim, uma grande oportunidade. Se ele preenche o tempo que lhe é concedido a exercitar seus alunos em operações rotineiras, aniquila o interesse e tolhe o desenvolvimento intelectual dos estudantes, desperdiçando, dessa maneira, a sua oportunidade. Mas se ele desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independente e proporcionar-lhes certos meios para alcançar este objetivo.

Vemos que não é uma tarefa fácil para o professor, hoje, no contexto atual em que o aluno possui tanto acesso à informação, tornar a Matemática interessante e

desafiadora. Utilizar problemas estimulantes, que desafiem sua curiosidade e sua capacidade de raciocínio pode ser uma forma de aumentar o interesse pela aprendizagem em Matemática. Com a experiência de sala de aula e baseados nas literaturas o presente trabalho expõe um projeto que descreve a construção de modelos simples que permitem realizar pequenos experimentos com bolhas de sabão que nos ajudam a compreender problemas de otimização.

Devido à complexidade matemática que permeiam os problemas das superfícies mínimas e caminhos mínimos, a natureza dos experimentos torna o assunto mais atrativo aos alunos, já que se trata de um trabalho parte experimental, e possui um caráter investigativo, pois em alguns casos a demonstração analítica é uma forma desafiadora de resolver e confirmar os resultados obtidos na prática experimental, usando elementos da geometria do ensino básico, sendo que o trabalho descreve o roteiro da realização do experimento.

Inicialmente o trabalho apresenta uma breve introdução à Teoria das Superfícies, já que as bolhas e as películas de sabão são casos particulares da teoria das superfícies, que pode ser omitido sem perda para os alunos, o capítulo seguinte contribui para entendimento de como se formam as bolhas de sabão e como a tensão superficial interfere na forma tomada pelas superfícies de sabão explicando a propriedade fundamental de torná-las superfícies mínimas.

A seguir temos a equação de Laplace-Young e sua relação com a curvatura média das superfícies, o tópico seguinte aborda as Leis de Plateau, cujos experimentos descritos no capítulo seguinte, serão regidos por essas três leis.

CAPÍTULO 1

1. BREVE HISTÓRICO

Ao longo da história as bolhas de sabão sempre causaram admiração e fascínio. O estudo científico das películas de sabão datam do século XV e dois grupos se destacaram em campos distintos, um dos grupos tinham físicos, químicos, biólogos que estudaram as propriedades macroscópicas e moleculares das superfícies, em outro grupo estavam matemáticos centrados em problemas que requeriam minimização da área de uma superfície contida num limite fixo e entre outros problemas relacionados. A compreensão dos vários tipos de padrões formados pelas superfícies de sabão está ligada ao cálculo das variações e vários princípios de minimização. Por isso, talvez devamos começar com Maupertuis (1698-1759), onde declarou seu princípio geral de que:

“se houver alguma mudança que ocorre na natureza, a quantidade de ações necessárias para esta alteração, tem de ser tão pequena quanto possível”.

A minimização da energia de uma película de sabão é outro aspecto do teorema, e é a natureza geral do teorema originalmente proposto por Maupertuis que permite que filmes de sabão sejam usados para tais extensas ilustrações de outros aspectos da física. A ideia de que a natureza sempre minimiza a ação, é outra forma de expressar esse princípio. Precedido pelo trabalho de Maupertuis, Pierre de Fermat (1601-1665) foi capaz de explicar as leis da reflexão e da refração, além de propor e justificar o uso da minimização do tempo gasto para a luz se propagar de um ponto a outro, acreditando na ideia de que “a natureza faz seus movimentos pelas vias mais simples ou sempre atua pelo caminho mais curto”

As primeiras ideias de superfície mínima datam de 1760, com um problema proposto por Lagrange: dada uma curva fechada simples, qual a menor superfície que tem esta curva como fronteira?

Em 1762 Lagrange desenvolveu um método (que denominou cálculo das variações), que deu lugar ao que hoje conhecemos por equação diferencial de Euler-Lagrange, a qual se tratava de encontrar uma superfície de área mínima com contorno pré-fixado e como consequência estabeleceu a equação que minimiza a área localmente e cujas soluções definem o que conhecemos por superfícies de curvatura média constante, identicamente nula para o caso das Superfícies Mínimas,

ou seja, as superfícies mínimas se chamam assim porque minimizam a superfície para um determinado volume dado.

Como o interesse maior era em questões teóricas, Lagrange não se preocupou em encontrar soluções concretas não triviais. Euler foi o primeiro que rotacionou a curva chamada catenária para obter uma superfície mínima que chamou de alysseide, posteriormente foi denominada catenóide. A solução para a superfície de área mínima limitada por dois anéis coaxiais continua a ser uma das poucas soluções analíticas disponível neste campo. O mais extenso trabalho inicial prático foi realizado pelo físico belga Antoine Ferdinand Plateau (1802-1883), o qual realizou experiências, em meados do século XIX, que deram uma nova importância às superfícies mínimas, Plateau mostrou que a solução tanto para o problema proposto por Lagrange e outros que requerem minimização poderiam ser obtidos com a imersão de estruturas de arame moldados na forma de curvas espaciais em uma solução de água, sabão e glicerina, assim Plateau percebeu que as superfícies formadas pela fina película numa determinada curva era a de menor área possível, por ser a superfície que apresentava a menor energia potencial, resultado das interações entre suas moléculas (DO CARMO, 2005).

Desde então o problema proposto por Lagrange ficou conhecido como o Problema de Plateau. Um fato importante é que nesse período Plateau já estava completamente cego.

Josiah Willard Gibbs (1839-1903), bem conhecido por suas contribuições à termodinâmica e a mecânica estatística, investigou a drenagem e afinamento das películas de sabão. Mas o nome mais conhecido no campo é de Sir Charles Vernon Boys (1855-1944) que deu aulas-demonstrações sobre o assunto e escreveu isto em um livro (1890, reeditado 1959), o título mais recente do livro é *Bolhas de Sabão - suas cores e as forças que as moldam*. Sir James Dewar (1842-1923) também pesquisou sobre as películas de sabão, e os resultados de seu trabalho é melhor descrito por seu assistente ASC Lawrence no texto mais popular que escreveu, intitulado *Películas de Sabão, um estudo da individualidade Molecular*.

A partir desses resultados experimentais obtidos por Plateau, vários matemáticos começaram a procurar por novos métodos analíticos que podiam provar a existência de propriedades geométricas associadas às superfícies mínimas e resolver assim problemas de área mínima, mas eles visavam explicitar uma solução. Porém, no século XX mudou-se este ponto de vista, ou seja, não visavam

mais soluções explícitas, mas primeiro provar a existência de soluções e daí mostrar outras propriedades relevantes. Para Isenberg (1992) foi o trabalho de Jesse Douglas que foram dados passos importantes nesse tema.

Em seu trabalho, Douglas (1931) expõe que “o problema de Plateau é provar a existência de uma superfície mínima atrelada a um dado contorno” e seu texto traz “a primeira solução para este problema com o tipo de contorno mais geral: uma curva de Jordan no espaço euclidiano n -dimensional”.

Em 1976, com a publicação do artigo *A Geometria das películas e Bolhas de Sabão* (Scientific American 235: 82–93), Taylor e Almgren comprovam, os postulados de Plateau numa série de experimentos com películas de sabão conectadas a diferentes limites ou frames. A publicação corroborou os princípios de áreas mínimas, e que segundo Emmer (1996), apresenta uma notável coleção de figuras que comparam a geometria das bolhas e películas com estruturas naturais.

CAPÍTULO 2

2. METODOLOGIA

Definido o tema de estudo, foi necessária uma ampla pesquisa em várias fontes, de modo a investigar todos os aspectos teóricos envolvidos, a partir daí pensou-se numa forma de apresentação aos alunos do ensino básico sobre as superfícies mínimas e qual a relação com as bolhas e películas de sabão.

Após a pesquisa, escreveu-se um roteiro para expor aos alunos do ensino médio o tema como uma atividade teórica e prática, que integrasse os conhecimentos de sala de aula, com as superfícies de sabão, sendo que a atividade proposta seria meramente uma forma visualizar os conhecimentos da matemática sendo aplicados em situações reais.

Na realização do projeto foi exposto um breve histórico de como se deu o avanço das pesquisas nesse ramo, as propriedades geométricas e físicas das películas e bolhas de sabão na forma de aula expositiva dialogada. Após esse momento iniciou-se a parte prática do tema abordado, onde os alunos tiveram contato com os materiais que seriam utilizados na parte experimental. Nesse momento procurou-se interligar os conhecimentos teóricos previamente aprendidos com os experimentos realizados.

Foi estudado com os alunos, juntamente com a parte experimental, as demonstrações analíticas de alguns experimentos propostos no presente trabalho, demonstrações estas, que usavam elementos do currículo do ensino médio. Mas o fato de terem contato com um tema, permeado de complexidades, foi bastante proveitoso, pois foi abordado de uma maneira tão natural e simples.

CAPÍTULO 3

3. TEORIA LOCAL DAS SUPERFÍCIES

3.1. SUPERFÍCIE PARAMETRIZADA REGULAR

Consideremos que temos um sistema de coordenadas cartesianas x, y, z em \mathbb{R}^3 e seja uma função

$$X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

De duas variáveis u, v que variam em um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Para cada $(u, v) \in U$, $X(u, v)$ determina um ponto de \mathbb{R}^3 .

Definição 3.1. Uma *superfície parametrizada regular* ou simplesmente uma *superfície* é uma aplicação $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde U é um aberto de \mathbb{R}^2 , tal que:

- X é diferenciável de classe C^∞ ;
- para todo $q = (u, v) \in U$, a diferencial de X em q , $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é injetora.

As variáveis u, v são os *parâmetros da superfície*. O subconjunto S de \mathbb{R}^3 obtido pela imagem da aplicação X é denominado *traço* de X .

Vamos analisar o que a definição nos diz sobre o comportamento de uma superfície. A condição (a) impõe que a aplicação $X(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ é diferenciável de classe C^∞ quando as funções x, y, z têm derivadas parciais de todas as ordens e são contínuas. A condição (b) vai garantir a existência de plano tangente em cada ponto da superfície. Vejamos algumas formas equivalentes de expressar essa condição. Sejam e_1, e_2 a base canônica de \mathbb{R}^2 e $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ a base canônica do \mathbb{R}^3 . Para cada $q = (u_0, v_0) \in U$, sabemos que a matriz associada a dX_q nas bases canônicas é a matriz jacobiana.

$$J(u_0, v_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \end{pmatrix},$$

pois

$$dX_q(e_1) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0) \right),$$

$$dX_q(e_2) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0) \right).$$

Denotando esses dois vetores por $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$ respectivamente, observamos que as seguintes afirmações são equivalentes:

- b.1. dX_q é injetora;
- b.2. A matriz $J(u_0, v_0)$ tem posto 2;
- b.3. os vetores $X_u(u_0, v_0)$, $X_v(u_0, v_0)$ são linearmente independentes;
- b.4. $X_u(u_0, v_0) \times X_v(u_0, v_0) \neq 0$.

Proposição 3.2. Seja $\alpha(u) = (f(u), 0, g(u))$, $u \in I \subset \mathbb{R}$, uma curva regular, isto é, $\alpha'(u) \neq 0 \quad \forall u \in I$, tal que $f(u) \neq 0$. Então, a aplicação

$$X(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u)),$$

onde $u \in I$ e $v \in \mathbb{R}$ é uma superfície parametrizada regular.

Demonstração. Como α é uma aplicação diferenciável, temos que as funções coordenadas de X são diferenciáveis. Os vetores

$$X_u = (f'(u) \cos(v), f'(u) \sin(v), g'(u)),$$

$$X_v = (-f(u) \sin(v), f(u) \cos(v), 0),$$

são linearmente independentes, pois

$$|X_u \times X_v|^2 = f^2(u)[(g')^2 + (f')^2] \neq 0,$$

já que α é uma curva regular e f não se anula. Portanto, concluímos que X é uma superfície parametrizada regular.

A aplicação X da Proposição 1.2 é denominada superfície de rotação da curva α em torno do eixo Oz, sendo que o eixo Oz não intercepta a curva α pois $f(u) \neq 0$.

3.2. PLANO TANGENTE; VETOR NORMAL

Definição 3.3. Se $X(u, v)$ é uma superfície parametrizada regular, dizemos que um vetor w de \mathbb{R}^3 é um *vetor tangente a X em $q = (u_0, v_0)$* se $w = \alpha'(t_0)$, onde $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0)$.

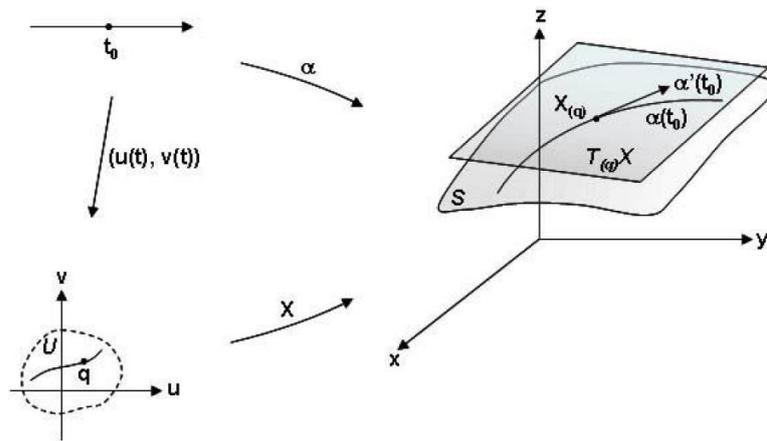


FIGURA 1: Plano tangente a X em $q = (u_0, v_0)$

Definição 3.4. O *plano tangente a X em (u_0, v_0)* é o conjunto de todos os vetores tangentes a X em (u_0, v_0) , que denotamos por $T_q X$, onde $q = (u_0, v_0)$.

Proposição 3.5. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. Então $T_q X$ é o conjunto de vetores obtidos como combinação linear de $X_u(u_0, v_0)$ e $X_v(u_0, v_0)$.

Por definição de superfície parametrizada regular, X_u e X_v são vetores linearmente independentes. Portanto, segue-se da proposição anterior que $T_q X$ é um plano do \mathbb{R}^3 , gerado por X_u e X_v . Observamos que, em geral, X_u e X_v não são ortogonais, nem unitários.

Definição 3.6. Se $X(u, v)$ é uma superfície e $q = (u_0, v_0)$, dizemos que um vetor de \mathbb{R}^3 é *normal* a X em q se é ortogonal a $T_q X$, isto é, é ortogonal a todos os vetores tangentes a X em q .

Dado um plano tangente $T_q X$, existe um única direção normal a este plano e, portanto, existem exatamente dois vetores unitários normais a X em q . Daqui por diante, vamos fixar o vetor unitário normal a X em q como sendo o vetor

$$N(q) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(q).$$

Se o domínio da superfície X é um aberto $U \subset \mathbb{R}^2$, então, variando (u, v) , temos uma aplicação diferenciável $N: U \rightarrow S^2 \subset \mathbb{R}^3$, denominada *aplicação normal de Gauss*, definida por

$$N(u, v) = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(u, v).$$

Cuja imagem está contida na esfera unitária, centrada na origem.

3.3. PRIMEIRA FORMA QUADRÁTICA

Definição 3.7. Seja $X: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular, $\forall q \in U$, a aplicação

$$\begin{aligned} I_q: T_q X &\rightarrow \mathbb{R} \\ w &\rightarrow I_q(w) = \langle w, w \rangle = |w|^2. \end{aligned}$$

É denominada a *primeira forma quadrática* de X em q .

Consideremos uma superfície dada por $X(u, v)$ e um ponto $q = (u_0, v_0)$. Então, um vetor $w \in T_q X$ é da forma

$$w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0),$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$I_q(w) = a^2 \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0).$$

Usando notação

$$E(u_0, v_0) = \langle X_u, X_u \rangle(u_0, v_0),$$

$$F(u_0, v_0) = \langle X_u, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

$$G(u_0, v_0) = \langle X_v, X_v \rangle(u_0, v_0),$$

Temos que

$$I_q(w) = a^2 E(u_0, v_0) + 2ab F(u_0, v_0) + b^2 G(u_0, v_0).$$

Variando (u, v) , temos funções $E(u, v)$, $F(u, v)$ e $G(u, v)$ diferenciáveis, que são denominadas *coeficientes da primeira forma quadrática*.

3.4. SEGUNDA FORMA QUADRÁTICA

Definição 3.8. Seja $X : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma superfície parametrizada regular. Fixado $q = (u_0, v_0) \in U$, a *segunda forma quadrática* de X em q é uma aplicação $II_q : T_q X \rightarrow \mathbb{R}$, que para cada vetor $w \in T_q X$ associa $II_q(w)$ da seguinte forma: se $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ é uma curva diferenciável da superfície, tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t_0) = w$, então definimos $II_q = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle$, onde N é o vetor normal a X .

Vamos verificar que $II_q(w)$ não depende da curva escolhida. Seja $w = aX_u(u_0, v_0) + bX_v(u_0, v_0)$, e consideremos uma curva $\alpha(t) = X(u(t), v(t))$ tal que $(u(t_0), v(t_0)) = q$ e $\alpha'(t) = w$, isto é,

$$(u(t_0), v(t_0)) = (u_0, v_0), (u'(t_0), v'(t_0)) = (a, b).$$

Como

$$\alpha'(t) = u'(t)X_u(u(t), v(t)) + v'(t)X_v(u(t), v(t))$$

e

$$\begin{aligned} \alpha''(t) = & u''(t)X_u(u(t), v(t)) + (u'(t))^2 X_{uu}(u(t), v(t)) + 2u'(t)v'(t)X_{uv}(u(t), v(t)) + \\ & (v'(t))^2 X_{vv}(u(t), v(t)) + v''(t)X_v(u(t), v(t)), \end{aligned}$$

temos que

$$II_q(w) = \langle \alpha''(t_0), N(u_0, v_0) \rangle =$$

$$II_q(w) = a^2 \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0) + 2ab \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0) + b^2 \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0)$$

onde a expressão acima não depende da curva α .

Usando notação

$$\begin{aligned} e(u_0, v_0) &= \langle X_{uu}, N \rangle(u_0, v_0), \\ f(u_0, v_0) &= \langle X_{uv}, N \rangle(u_0, v_0), \\ g(u_0, v_0) &= \langle X_{vv}, N \rangle(u_0, v_0), \end{aligned}$$

Temos que

$$II_q(w) = a^2 e(u_0, v_0) + 2ab f(u_0, v_0) + b^2 g(u_0, v_0).$$

Variando (u, v) , temos funções $e(u, v)$, $f(u, v)$ e $g(u, v)$ diferenciáveis, que são denominadas *coeficientes da segunda forma quadrática* da superfície parametrizada X .

3.5. CURVATURA NORMAL

Definição 3.9. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e $q = (u_0, v_0)$. A *função curvatura normal* em q é uma aplicação $k_n : T_q X - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ que, para cada vetor $w \in T_q X$ não-nulo, associa

$$k_n(w) = \frac{II_q(w)}{I_q(w)}.$$

3.6. CURVATURAS PRINCIPAIS; CURVATURA DE GAUSS; CURVATURA MÉDIA

Definição 3.10. Sejam $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular e k_n a função curvatura normal de X em $q = (u_0, v_0)$. Então, existem valores unitários e ortogonais w_1 e $w_2 \in T_q X$, tais que $k_1 = k_n(w_1)$ e $k_2 = k_n(w_2)$ são valores mínimos e máximos da função k_n .

Com a notação da proposição anterior w_1 e w_2 são chamados *vetores principais* de X em q e as curvaturas k_1 e k_2 são denominadas *curvaturas principais* de X em q . As direções de $T_q X$ determinados pelos vetores principais são chamadas de *direções principais*.

O produto das curvaturas principais $K(q) = k_1 \cdot k_2$ denomina-se *curvatura gaussiana* de X em q e a semissoma de k_1 e k_2 , $H(q) = \frac{k_1 + k_2}{2}$, é chamada de *curvatura média* X em q .

Dentre as superfícies de \mathbb{R}^3 , destacam-se as que têm a curvatura gaussiana constante, e as que têm curvatura média nula. Uma superfície que tem curvatura média identicamente nula é denominada de *superfície mínima*.

Proposição 3.11. Seja $X(u, v)$ uma superfície parametrizada regular. Se $q = (u_0, v_0)$, então

$$H(q) = \frac{1}{2} \frac{e_0 g_0 - 2f_0 F_0 + E_0 G_0}{E_0 G_0 - F_0^2},$$

$$K(q) = \frac{e_0 g_0 - f_0^2}{E_0 G_0 - F_0^2}.$$

Exemplos 3.12.

(i) Considere a superfície

$$X(u, v) = (a \cos(v), a \sin(v) \cos(u), a \sin(v) \sin(u)),$$

$a > 0$, $u \in \mathbb{R}$, $0 < v < \pi$, que descreve a esfera de raio a . Como todas as secções normais são circunferências de raio a e o vetor normal

$$N(u, v) = (-\cos(v) \cos(u), -\cos(v) \sin(u), -\sin(v))$$

aponta para o interior da esfera, concluímos que a curvatura normal é constante

igual a $\frac{1}{a}$ e a segunda forma quadrática $II_q(w)$ é igual a $\frac{|w|^2}{a}$, para todo $q = (u, v)$ e

$w \in T_q X$. Portanto todo vetor unitário tangente é um vetor principal e as curvaturas

principais são $k_1 = k_2 = \frac{1}{a}$. Concluímos que $K \equiv \frac{1}{a^2}$ e $H \equiv \frac{1}{a}$.

(ii) Considere a superfície parametrizada (superfície de Enneper)

$$X(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right),$$

Temos que as curvaturas principais são $k_1 = -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$ e $k_2 = \frac{2}{(1+u^2+v^2)^2}$. Daí

temos que $K \equiv -\frac{2}{(1+u^2+v^2)^4}$ e $H \equiv 0$

Definição 3.13. Considerando a superfície

$$X(u, v) = (x, y, f(x, y)),$$

que descreve o gráfico de uma função diferenciável $f(x, y)$, a condição para que X seja uma superfície mínima é:

$$(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} = 0,$$

onde $f_x = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$, $f_{xy} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \right]$ e $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

CAPÍTULO 4

BOLHAS E PELÍCULAS DE SABÃO

4.1. COMO SE FORMAM AS BOLHAS DE SABÃO?

A maioria de nós já brincou com bolhas de sabão, o que não nos ocorre é que o comportamento das bolhas e películas de sabão é governado por regras matemáticas, então antes de entrarmos no fascinante mundo das bolhas de sabão, primeiro devemos conhecê-las e entendê-las.

Para criar uma película de sabão é preciso primeiro produzir uma solução de sabão que consiste em moléculas de sabão e as moléculas de água. Quando sabão ou detergente é misturado à água, uma parte se distribui pela superfície do líquido, com as extremidades hidrófilas (íons negativos) voltadas para dentro dele, interagindo com a água, e com as cadeias hidrófobas voltada para fora, interagindo umas com as outras.

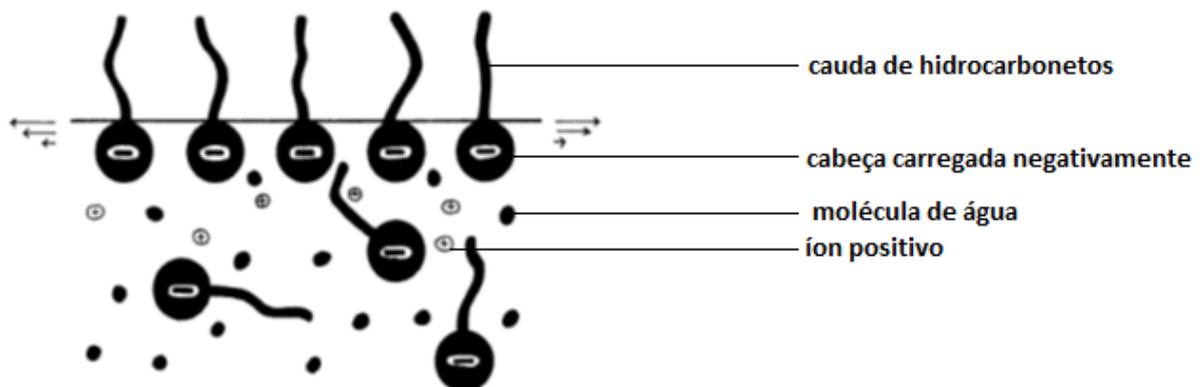


FIGURA 2: íons negativos de sabão na superfície de uma solução de água e sabão

Todos os líquidos têm uma propriedade chamada tensão superficial, que expressa a resistência oferecida pela superfície de um líquido a ser perfurada ou deformada. A água apresenta elevada tensão superficial porque suas moléculas atraem-se muito intensamente. A presença de uma camada de moléculas de sabão na superfície da água reduz significativamente a tensão superficial. Por isso, diz-se que os sabões ou detergentes são **agentes tensoativos ou surfactantes**.

Surge agora a questão como se formam as bolhas de sabão? Quando mergulhamos uma argola em água com sabão e a retiramos, uma película do líquido permanece na argola. É uma camada de água líquida com moléculas de sabão em ambas as superfícies.

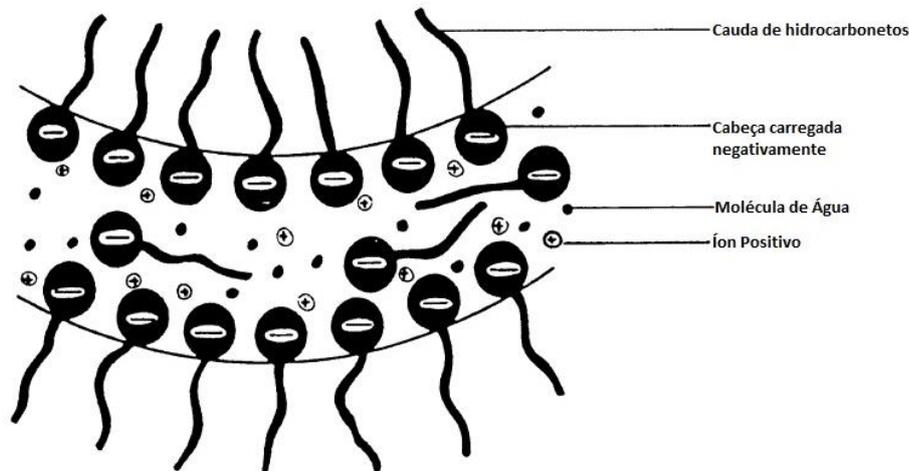


FIGURA 3: Estrutura de uma película de sabão

Se assoprarmos delicadamente essa película cada bolha obtida nada mais é do que uma porção de ar envolta por uma película de água contendo moléculas de sabão tanto na superfície interna como externa. Se a bolha fosse de água pura, a elevada tensão superficial faria a bolha colapsar. A presença do sabão reduz a tensão superficial e estabiliza a bolha.

4.2. TENSÃO SUPERFICIAL

Algumas vezes acostumamos a comparar a superfície livre de um líquido com a de uma membrana elástica sujeita a uma tensão uniforme em todas as direções. Com alguns experimentos é possível concluir que há uma estreita analogia entre o comportamento físico de uma membrana elástica com a superfície livre de um líquido. Esta analogia foi proposta pela primeira vez por J. A. von Segner (1704-1777) (*Traité de Physique*, Tomo I, Fasc. 3^o, 1907) em meados do século XVIII, mas cinquenta anos depois é que a respectiva teoria foi desenvolvida pelo físico inglês Young (1773-1829).

Tensão Superficial é a força na superfície de um fluido que age em cada lado de uma linha, desenhada nessa superfície, por unidade de comprimento. O resultado mais familiar da tensão superficial da água é a capacidade de manter

pequenos objetos presentes na superfície. Por exemplo, se colocarmos cuidadosamente em sua superfície uma lâmina de barbear, uma agulha de aço ou mesmo um clipe de papel, verifica-se que os objetos são mantidos à tona e não afundam. Se você olhar atentamente para a superfície, horizontalmente, vemos que a mesma é deformada e permanece um pouco afundada se comportando como uma rede elástica (FIGURA 4), mas se a superfície é agitada o objeto acabará afundando.



FIGURA 4: Tensão superficial

Uma película de sabão só tem uma força, a tensão superficial, é a força que faz com que as moléculas de sabão se atraiam, reduzindo a área da superfície da bolha de sabão. A película de sabão é a superfície que tem menor área para um determinado contorno, por isso as películas de sabão são superfícies mínimas.

4.3. EQUAÇÃO DE LAPLACE-YOUNG

Vamos considerar que uma pequena superfície $ABCD$ sofra um deslocamento δu , normal à superfície, pelo excesso de pressão p .

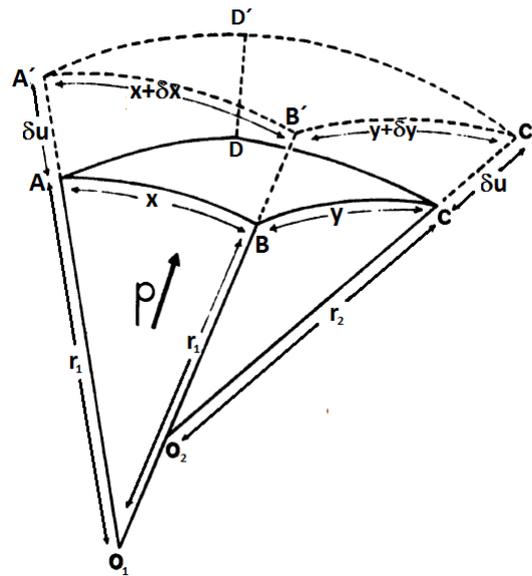


FIGURA 5: Expansão da área superficial

O Trabalho realizado para esse um pequeno aumento na superfície é dado por

$$W = F \cdot \delta u, \quad (4.1)$$

podemos expressar o trabalho em função da tensão superficial,

$$W = \sigma \cdot \Delta S \quad (4.2)$$

onde σ é a tensão superficial e da película e ΔS é pequeno incremento da área após a expansão em relação a área inicial. Temos que pressão

$$p = \frac{F}{S} \Leftrightarrow F = p \cdot S \quad (4.3)$$

onde S é a área considerada, então reescrevendo a equação (3.1), temos.

$$W = p \cdot S \cdot \delta u, \quad (4.4)$$

observe que

$$\Delta S = (x + \delta x) \cdot (y + \delta y) - x \cdot y, \quad (4.5)$$

estudando geometricamente esse problema podemos observar que os triângulos $O_1A'B'$ e O_1AB são semelhantes, assim:

$$\frac{x}{r_1} = \frac{x + \delta x}{r_1 + \delta u} \quad (4.6)$$

analogamente para y . Daí temos as expressões

$$x + \delta x = x \cdot \left(1 + \frac{\delta u}{r_1} \right) \quad (4.7)$$

$$y + \delta y = y \cdot \left(1 + \frac{\delta u}{r_2} \right), \quad (4.8)$$

substituindo as expressões (3.7) e (3.8) em (3.5) obtemos

$$\begin{aligned} \Delta S &= (x + \delta x) \cdot (y + \delta y) - xy \\ &= x \cdot \left(1 + \frac{\delta u}{r_1} \right) \cdot y \cdot \left(1 + \frac{\delta u}{r_2} \right) - xy \\ \Delta S &= xy \delta u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) + xy \frac{(\delta u)^2}{r_1 \cdot r_2}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

como δu é suficiente pequeno então

$$\Delta S = xy \delta u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad (4.10)$$

relacionando (3.10) com (3.2) e (3.4) segue que

$$\begin{aligned} W &= \sigma \cdot \Delta S \\ p \cdot S \cdot \delta u &= \sigma \cdot xy \delta u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \\ p \cdot x \cdot y \cdot \delta u &= \sigma \cdot x \cdot y \cdot \delta u \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \\ p &= \sigma \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Percebe-se que uma diferença de pressão em ambos os lados de uma bolha ou película é dado pelo produto da tensão superficial σ da bolha ou película e da quantidade que está claramente relacionada com a forma da bolha ou película. Na verdade, note que a única exigência (implicitamente) inserida no nosso pedaço infinitesimal de área era que as curvas se encontram em ângulos retos. As

quantidades $\frac{1}{r_1}$ e $\frac{1}{r_2}$ são as curvaturas normais da superfície nessas direções perpendiculares (Assim $S \approx x \cdot y$).

A curvatura Média de uma superfície regular é dado por $H = \frac{1}{2} \cdot (k_1 + k_2)$, sendo k_1 e k_2 as curvaturas normais mínima e máxima da superfície, para o pedaço infinitesimal considerado anteriormente, temos que $k_1 = \frac{1}{r_1}$ e $k_2 = \frac{1}{r_2}$, segue que

$$H = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \text{ a seguir } \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} = 2H$$

$$p = 2 \cdot H \cdot \sigma. \quad (4.12)$$

Podemos verificar que em uma superfície mínima em todos os seus pontos $H = 0$, então conseqüentemente a pressão em toda superfície de uma película de sabão é igual a zero.

Nota-se que para uma bolha de sabão perfeitamente esférica temos que $\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r_2} = \frac{1}{r}$, temos que $H = \frac{1}{r}$, daí temos que a pressão numa bolha é expressa por

$$p = 2 \cdot \sigma \cdot \frac{1}{r}, \quad (4.13)$$

pela equação (3.13) observamos que para duas bolhas esfericas de raios r_1 e r_2 , com $r_1 > r_2$, temos que

$$\frac{1}{r_1} < \frac{1}{r_2},$$

multiplicando ambos os lados pela constante positiva $2 \cdot \sigma$, segue que

$$2 \cdot \sigma \cdot \frac{1}{r_1} < 2 \cdot \sigma \cdot \frac{1}{r_2}$$

então

$$p_1 < p_2.$$

Note que quanto menor a bolha maior será sua pressão, portanto quando uma bolha pequena encontra uma grande, a superfície da menor curva-se para dentro da maior.

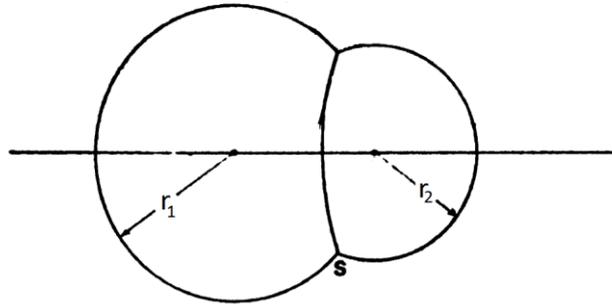


FIGURA 6: Bolas de sabão de diferentes tamanhos

Agora voltando ao caso de uma superfície que possui curvatura média constante $\frac{1}{r}$, segue que tomando r suficiente grande para essa superfície teremos que $H = 0$, essa superfície tomaria a forma de um plano, que é a superfície mínima mais trivial que temos, com isso a pressão em ambos os lados da superfície da película é igual a zero.

4.4. LEIS DE PLATEAU

LEI 1: Quando uma película de sabão se apoia numa superfície, a película de sabão é perpendicular à superfície.



FIGURA 7: Bolha de sabão perpendicular a uma superfície

LEI 2: Quando películas de sabão se encontram, elas o fazem de três em três ao longo de uma linha singular, formando um ângulo de 120° .



FIGURA 8: bolha dupla de mesmo tamanho

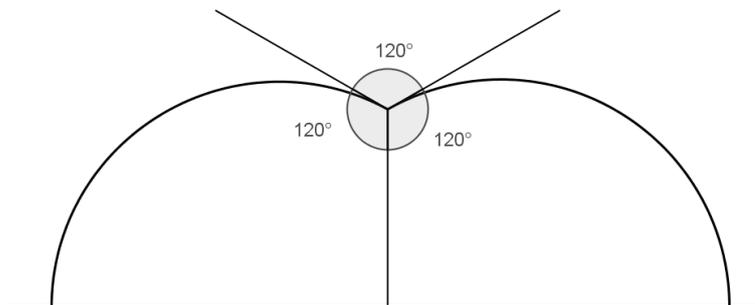


FIGURA 9: Ângulo entre as películas de sabão

LEI 3: Quatro linhas, cada uma destas formadas pela interseção de três películas, encontram-se em um ponto e o ângulo entre um par de linhas adjacentes é $109^\circ 28'$.

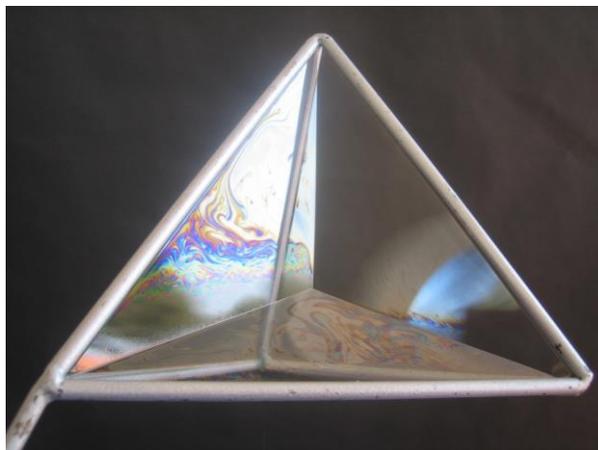


FIGURA 10: Ângulo entre o par de linhas adjacentes

A obtenção desse resultado será feito mais adiante.

CAPÍTULO 5

5. EXPERIMENTOS COM PELÍCULAS DE SABÃO

Neste capítulo apresentamos dez experimentos com películas de sabão que irão ilustrar o que foi discutido anteriormente, uma vez que os estudantes tiveram um pequeno contato com a teoria das superfícies mínimas, tensão superficial e as Leis de Plateau, os mesmos através da orientação do professor poderão construir e executar os experimentos descritos no trabalho, de forma que possam visualizar o que foi estudado anteriormente, é interessante aos alunos que antes de mergulhar as estruturas de arame na solução de água e sabão, o professor deve aguçar a criatividade dos mesmos, questionando como irão se comportar as superfícies das películas de sabão nas estruturas de arames.

1º Experimento: Comprovar que as películas de sabão formam superfícies mínimas

A tendência das películas de sabão para formar, superfícies mínimas pode ser visto claramente através da experiência que se segue:

Viramos um pedaço de arame até o formato de um arco de circunferência, deixando uma abertura nos extremos que amarraremos um pedaço de fio nas duas extremidades (FIGURA 11). Mergulhando este dispositivo numa solução de água e sabão irá observar que o fio é puxado para dentro da ferradura, isto é, o líquido em cima do fio tem a tendência de reduzir ao máximo a superfície interna, portanto temos uma película de sabão que tem a menor área.



FIGURA 11: película de sabão diminuindo sua área devido a tensão superficial

Se com os dedos, puxamos o fio aumentando a área da película de sabão e, em seguida, soltar, o que observamos é que automaticamente a película de sabão tende novamente a ocupar a área mínima.

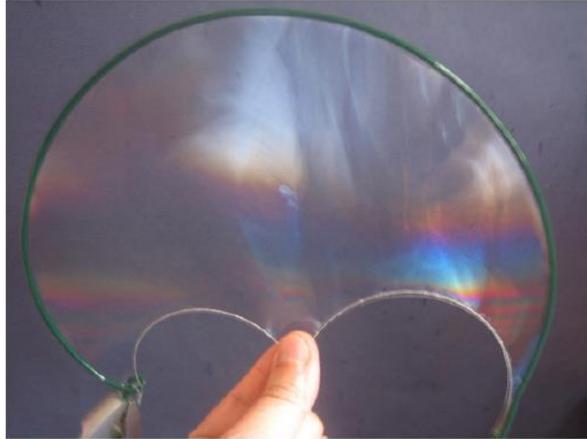


FIGURA 12: aumentando a área da película de sabão

2º Experimento: Obter a superfície de maior área limitado por um perímetro fixo.

Fazendo um laço com um pedaço de barbante, e em seguida, prende-se este perímetro a um anel de arame. Mergulhando e retirando o anel da solução de água e sabão, obtêm-se duas películas separadas pelo perímetro do barbante (FIGURA 13).



FIGURA 13: Duas películas planas separadas pelo perímetro do barbante

Rompendo a película interna ao barbante, a película de sabão externa minimiza sua área que por sua vez torna a área dentro do perímetro do barbante torna-se máxima, note que a figura formada pelo barbante é uma circunferência (FIGURA 14). Confirmando assim o Teorema da Desigualdade Isoperimétrica, onde

para toda curva fechada de comprimento p engloba uma área menor ou igual a $\frac{p^2}{4\pi}$.

Além disso, este valor só é alcançado para o círculo de raio $\frac{p}{2\pi}$.



FIGURA 14: Após o rompimento da película interna, o perímetro do barbante torna-se uma circunferência

3º Experimento: Obter o caminho mais curto ligando três pontos no plano euclidiano

Consideremos então um plano que contém três pontos não colineares.

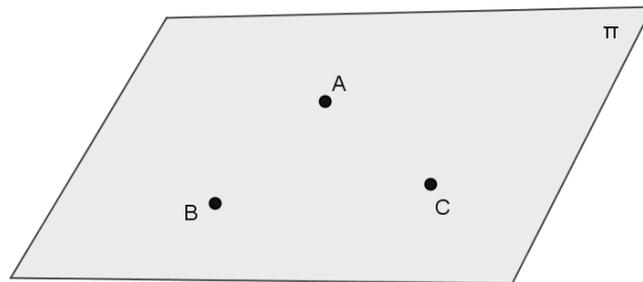


FIGURA 15: Três pontos coplanares

Antes de demonstrarmos o resultado geral para a obtenção do menor caminho que liga três pontos no plano euclidiano, podemos mostrar alguns possíveis caminhos aos alunos e pedir para que escolham qual deles é a solução do problema, vejamos alguns exemplos.

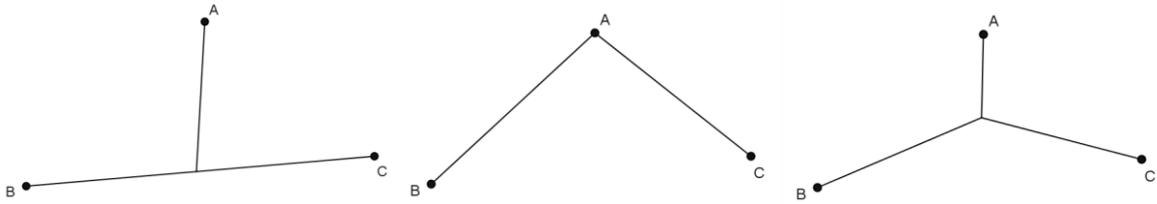


FIGURA 16: caminhos ligando três pontos

Fica a pergunta, qual deles é o menor caminho?

Para a mostrarmos o resultado geral do problema vamos lembrar algumas propriedades da elipse.

Seja uma elipse de focos A e B (FIGURA 17) então para qualquer ponto P pertencente à elipse, temos que

$$AP + PB = l \quad (5.1)$$

em que l é constante. Seja também uma reta TT' tangente a alipse em P temos que

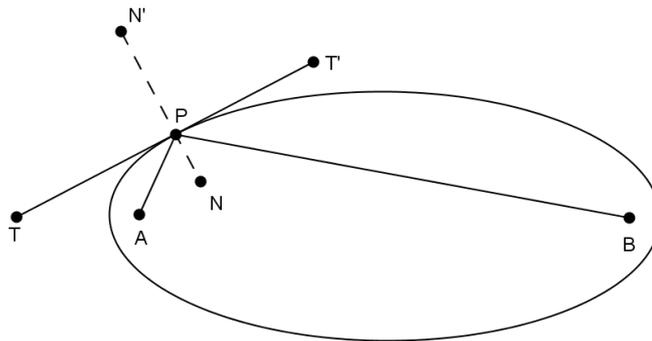
$$\hat{TPA} = \hat{T'PB},$$

E seja a reta normal NN' em P , temos

$$\hat{APN} = \hat{BPN},$$

ou

$$\hat{APN'} = \hat{BPN'}. \quad (5.2)$$

FIGURA 17: elipse com focos em A e B

Agora consideremos duas elipses cofocais, com focos em A e B e dois pontos P_1 e P_2 , cada um pertencente a uma elipse (FIGURA 18).

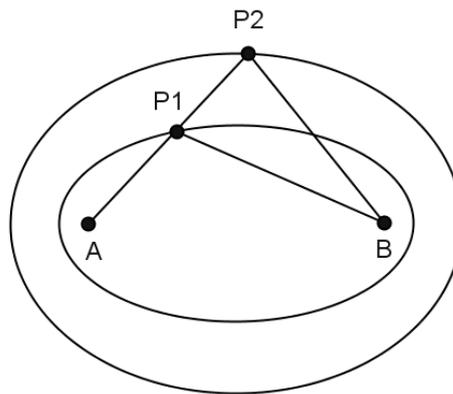


FIGURA 18: elipses cofocais em A e B

Pela equação (5.1) temos que $AP_1 + BP_1 = l_1$ e $AP_2 + BP_2 = l_2$, então considerando o triângulo P_1P_2B (FIGURA 18), pela desigualdade triangular temos

$$P_1P_2 + P_2B > P_1B, \quad (5.3)$$

adicionando AP_1 em ambos os lados, temos

$$AP_1 + P_1P_2 + P_2B > AP_1 + P_1B \quad (5.4)$$

Isto é,

$$AP_2 + P_2B > AP_1 + P_1B \quad (5.5)$$

o que nos dá

$$l_2 > l_1. \quad (5.6)$$

Agora vamos considerar o problema de encontrar o caminho mínimo que liga os três pontos A , B e C . Seja P o ponto de interseção das linhas retas que unem A , B e C (FIGURA 19), que representam o menor caminho que liga A , B e C . O menor caminho não pode consistir em linhas curvas, pois as mesmas podem ser substituídas por retas de menor comprimento. É possível que P possa coincidir com um dos vértices do triângulo ABC . Se caso aconteça isso, P deve coincidir com o vértice do ângulo maior, por exemplo, C , pois $AC + BC$ seria o menor caminho, em relação a soma de qualquer outro par dos lados do triângulo.

Estudaremos agora o caso em que P não coincide com um dos vértices, e depois faremos uma comparação analítica entre os dois resultados.

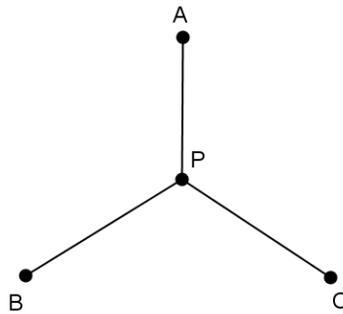


FIGURA 19: Os três pontos A, B e C são ligados para o ponto P para dar o percurso total mínimo.

Primeiramente vamos considerar um círculo de centro C e raio CP (FIGURA 20) e também que A e B estão fora do círculo. Seja X um ponto qualquer do plano e assumindo um ponto $X = P$ que minimiza $AX + BX + CX$. Assim, qualquer ponto da circunferência, no círculo de raio CP , como P' (FIGURA 20) deve satisfazer

$$AP' + BP' + CP' \geq AP + BP + CP \quad (5.7)$$

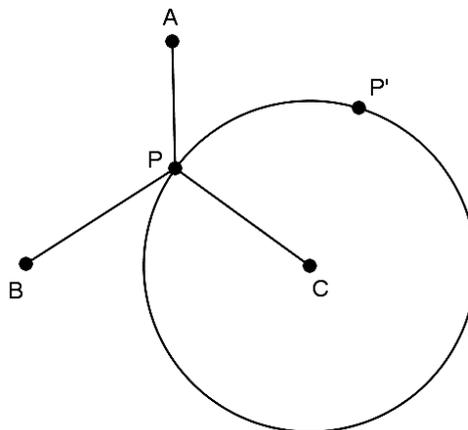


FIGURA 20: P' encontra-se no círculo de raio CP .

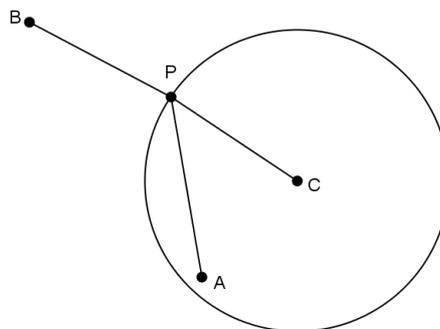


FIGURA 21: A está dentro do raio do círculo CP .

Como $CP = CP'$, são ambos os comprimentos do raio do círculo,

$$AP' + BP' \geq AP + BP, \quad (5.8)$$

assim $AP' + BP'$ terá o menor valor possível quando o menor caminho for escolhido, note que a partir de (5.7) o ponto P é único.

Então considerando um conjunto de elipses com focos em A e B que cruzam o círculo de centro C (Figura 22).

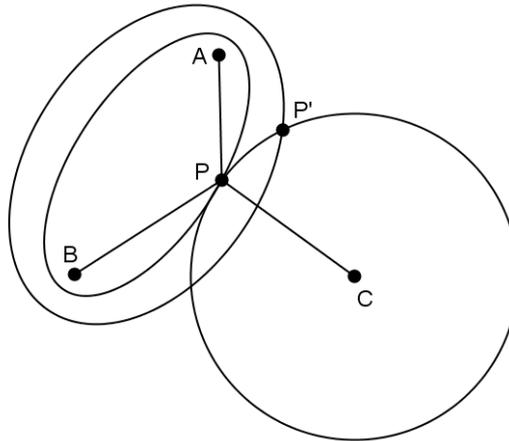


FIGURA 22: elipses cofocais com focos em A e B intersectando o círculo de centro C

A elipse que tangencia o círculo terá o menor valor da constante $AP + BP$. Qualquer elipse que cruza o círculo em dois diferentes pontos terá um valor maior dessa constante, equação (5.5). Portanto P deve coincidir com o ponto em que a elipse tangencia o círculo. Por esta elipse, a partir de (5.2),

$$\widehat{APC} = \widehat{BPC}, \quad (5.9)$$

pois PC é normal à tangente em P .

Analogamente usando o mesmo argumento para o círculo de centro em A e raio AP temos

$$\widehat{APB} = \widehat{APC} \quad (5.10)$$

A partir de (5.9) e (5.10)

$$\widehat{APC} = \widehat{APB} = \widehat{BPC}. \quad (5.11)$$

Como estes ângulos devem somar 360° então são todos iguais a 120° .

Os resultados obtidos anteriormente têm considerado que A e B estão fora do centro do círculo em C para o caso em que P não coincide com um vértice. Se pelo menos um dos pontos, digamos A , estiver dentro ou sobre o centro do círculo C , em seguida, a partir da FIGURA 21,

$$AP + BP \geq AB \quad (5.12)$$

temos também que

$$CP \geq AC \quad (5.13)$$

pois CP é o raio do círculo e o ponto A se encontra no interior do círculo. Adicionando (5.12) e (5.13),

$$AP + BP + CP \geq AB + AC, \quad (5.14)$$

isto implica que o caminho mais curto $AP + BP + CP$ serão obtidos se P coincide com A . O que contraria nossa hipótese de que P não coincide com um vértice. Analogamente esta conclusão é também aplicável quando ambos A e B são considerados dentro do círculo. Então, A ou B , ou ambos, não pode estar dentro do círculo. Consequentemente ambos estão fora do círculo. Estas conclusões também se aplicam a círculos com centros A e B .

No entanto há dois pontos a esclarecer. Um deles é: o argumento da elipse encolhido acima só funciona se P não está sobre o segmento AB , para que seja, então as elipses encolhidas para o segmento de linha teriam ângulo nulo. Para evitar isso, vamos supor que o ponto P está no segmento de linha e vamos considerar o segmento CP , ele deve encontrar AB a 90° para fazer $AP + BP + CP$ o menor caminho (FIGURA 23).

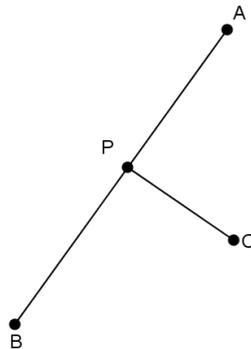


FIGURA 23: Ponto P sobre o segmento AB

Então, vamos fazer a discussão com elipses com focos B e C tangente ao círculo com centro em A . A linha tangente em P encontra AB a 90° , mas o mesmo acontece com CP (FIGURA 24).

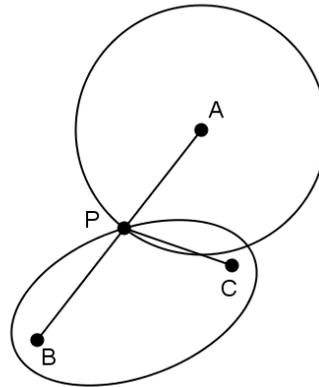


FIGURA 24: elipse com focos em B e C intersectando a circunferência de centro A

Assim, eles são o mesmo segmento. Isso é impossível, já que CP o segmento do foco C e a tangente nunca vai para dentro das cônicas. Portanto esta contradição diz que P não pode ficar entre dois vértices do triângulo. Finalmente para concluir nossa demonstração falta mostrar que $AP + BP + CP$ será efetivamente menor aqui do que se P coincidissem com um dos vértices, uma vez que demonstramos apenas que P fornece um mínimo se o menor caminho total não for alcançado em um dos vértices. Agora de modo correspondente devemos mostrar que $AP + BP + CP$ é menor que a soma de dois lados quaisquer, ou, por exemplo, menor do que $AB + BC$. Faremos isso prolongando os segmentos BP e CP (FIGURA 25) e a partir daí projetar o ponto A em cada prolongamento, obtendo os pontos D e E , respectivamente. Sendo $\angle APD = 60^\circ$ o comprimento da projeção

$$PD = \frac{1}{2}AP \quad (5.15)$$

como BD é projeção de AB então $BD < AB$. Se

$$BD = BP + \frac{1}{2}AP \quad (5.16)$$

então

$$BP + \frac{1}{2}AP < AB \quad (5.17)$$

Analogamente para a projeção de A no prolongamento CP , temos que

$$PC + \frac{1}{2}AP < AC \quad (5.18)$$

adicionando as equações (16) e (17), obtemos a desigualdade

$$AP + BP + CP < AB + AC \quad (5.19)$$

portanto P é efetivamente o ponto no qual $AP + BP + CP$ é mínimo.

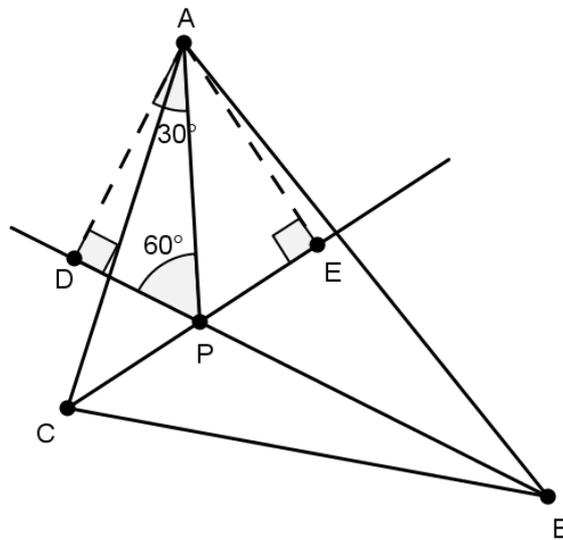


FIGURA 25: projeção do ponto A sobre o prolongamento dos segmentos BP e CP

Caso os três pontos considerados estejam no vértice de um triângulo onde um dos ângulos é maior que 120° , então o ponto coincide com esse vértice.

O problema que acabamos de resolver analiticamente também pode ser solucionado com o auxílio das superfícies de sabão. Considere um dispositivo formado por duas placas de vidro paralelas fixadas por três pinos, ao retirarmos o dispositivo da solução de água com sabão a película de sabão que será formada terá superfície mínima, o que equivale no plano bidimensional a solução do problema.

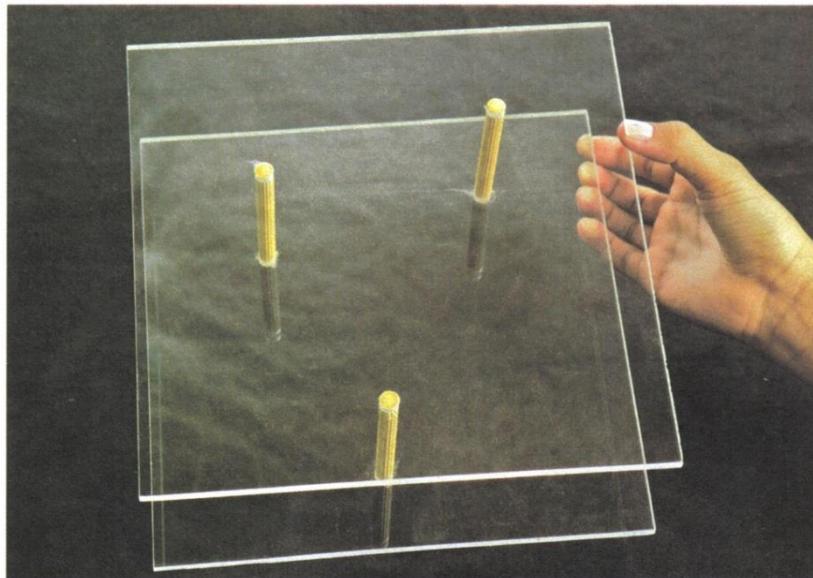


FIGURA 26: dispositivo com três pinos nos vértices de um triângulo



FIGURA 27: mergulhando o dispositivo em água e sabão

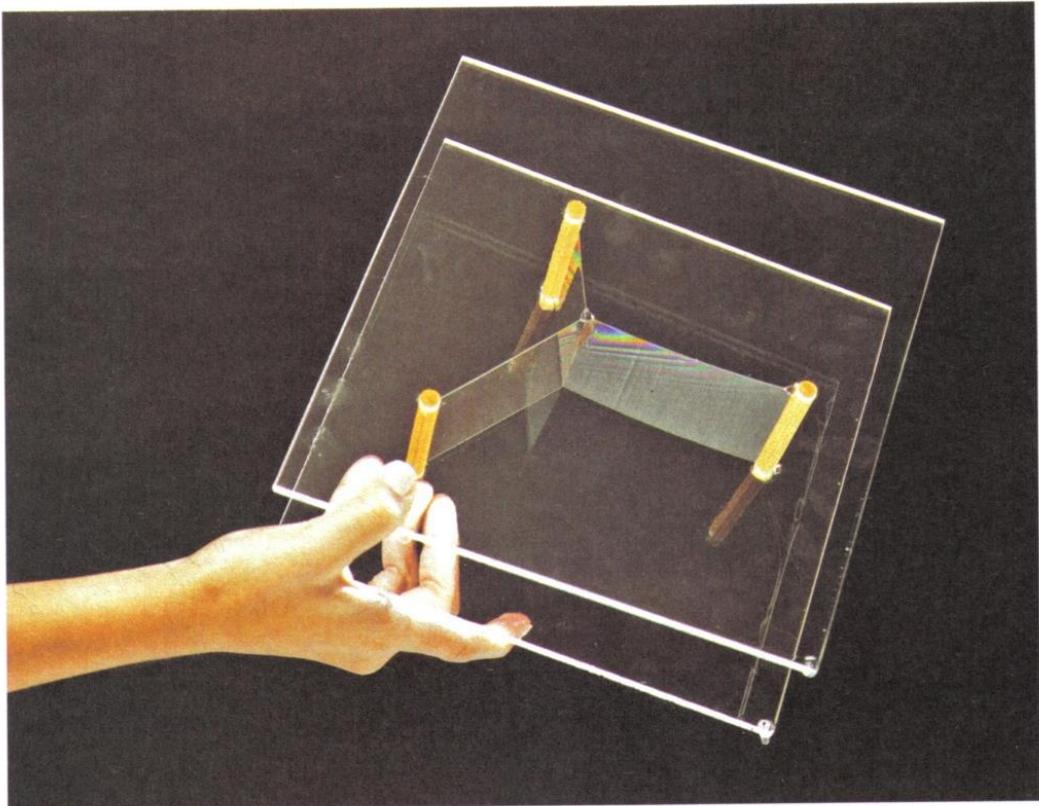


FIGURA 28: Situação de equilíbrio da película após a retirada do dispositivo da solução de água e sabão

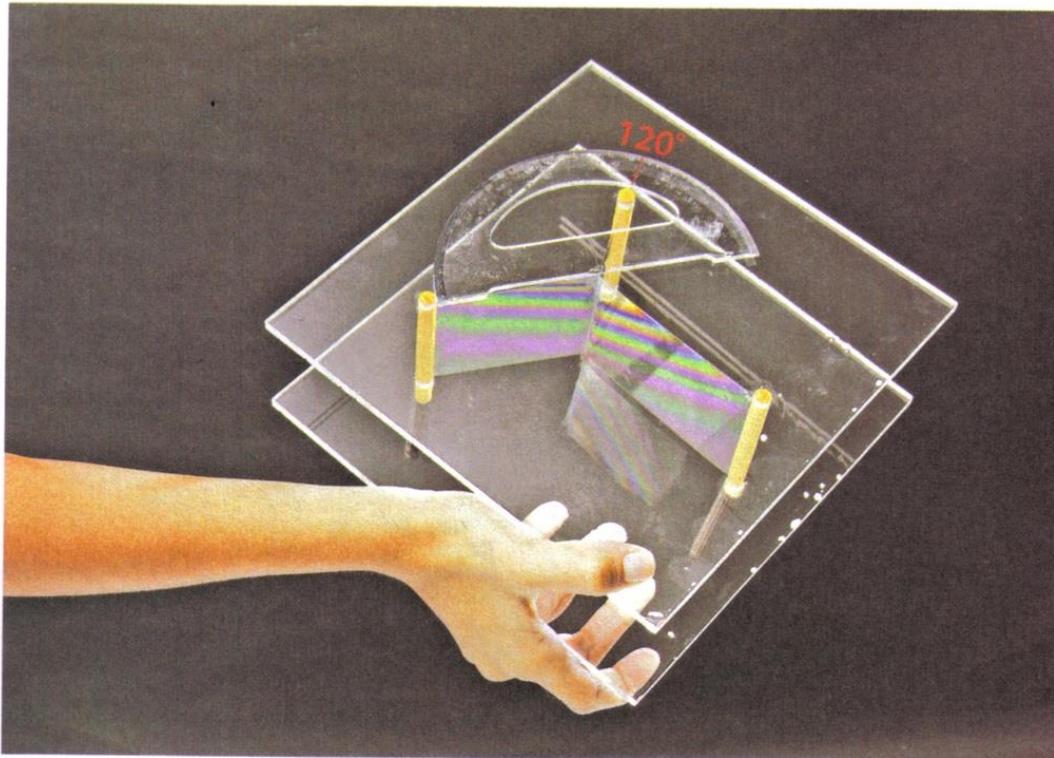


FIGURA 29: Ângulos de 120° entre os planos retangulares

4° Experimento: Obter o caminho mais curto ligando quatro vértices de um quadrado no plano euclidiano.

Qual seria o menor caminho que liga os quatro vértices de um quadrado no plano euclidiano?

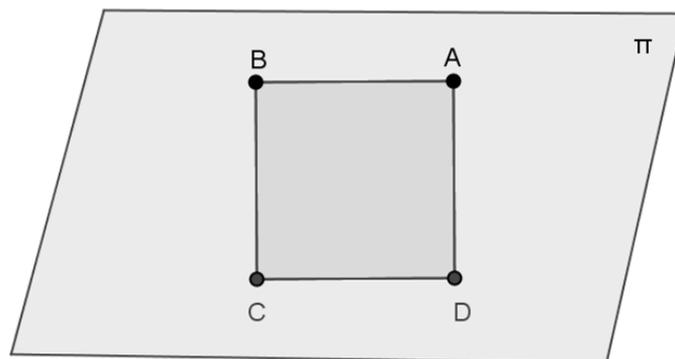


FIGURA 30: quadrado $ABCD$ no plano euclidiano

Vejamos algumas possíveis configurações de caminhos ligando os quatro vértices do quadrado.

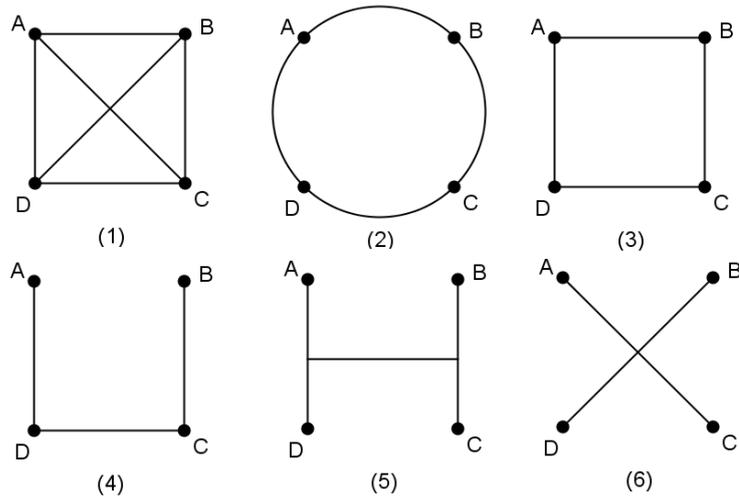


FIGURA 31: seis possíveis projetos de malha viária ligando as cidades A, B, C e D

A FIGURA 31 nos mostra seis projetos de caminhos ligando os quatro vértices de um quadrado, no projeto (1) temos um caminho total igual a $4 + 2\sqrt{2} \cong 6,83$, na opção (2), por exemplo, conseguimos reduzir o comprimento da malha para $2\pi(0,5 \cdot \sqrt{2}) \cong 4,44$. Essa opção pode ainda ser melhorada, como mostra o caminho na opção (3), onde o comprimento total se reduz para 4 unidades. O projeto (4) continua garantindo a ligação entre as quatro cidades e reduz o comprimento total da malha para 3 unidades. O projeto (5) não reduz o comprimento da malha em relação ao anterior, mas melhora sua eficiência.

Dos seis projetos apresentados, (6) é o caminho mais curto ($2\sqrt{2} \cong 2,83$), contudo ele não constitui a solução do problema apresentado inicialmente, como veremos a seguir.

Antes de obtermos a solução geral para esse problema vamos considerar o seguinte teorema.

Se P e Q são dois pontos de um lado da reta s , e R é um ponto de s tal que a soma $PR + RQ$ seja mínima, então os ângulos formados entre PR e s , e RQ e s são congruentes.

Demonstração

Inicialmente marcamos o ponto Q' , resultado da reflexão de Q sobre s , conforme mostra a figura.

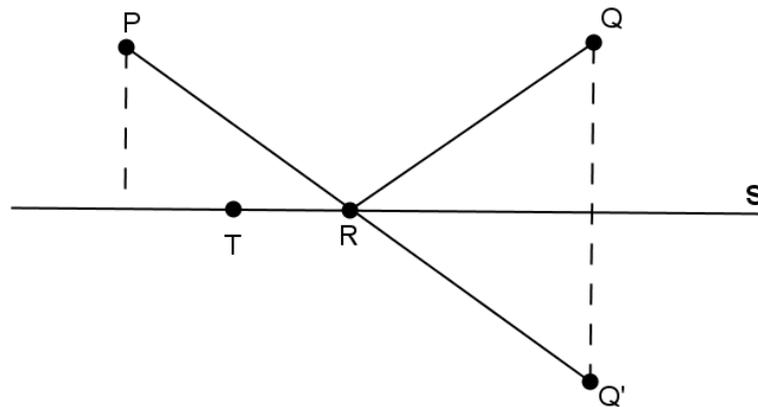


FIGURA 32: menor distância entre P e Q passando pela reta s

Sendo T um ponto que se desloca sobre s , todos os possíveis triângulos TQQ' serão isósceles onde $TQ = TQ'$, daí que $PT + TQ$ é igual a $PT + TQ'$. Então segue que o mínimo valor possível para $PT + TQ'$ ocorrerá quando os pontos P , T e Q' estiverem alinhados, ou seja, quando o ponto móvel T coincidir com o ponto R , garantindo assim que os ângulos formados entre PR e s , e RQ e s sejam congruentes.

Primeiramente vamos supor que o ponto T esteja sobre o segmento CD , daí temos o seguinte caminho que liga esses pontos.

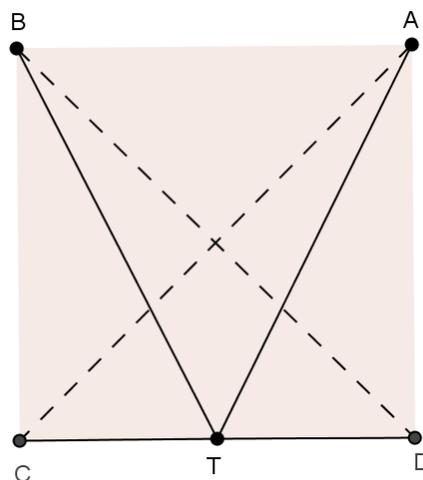


FIGURA 33: caminho ligando os pontos A , B , C e D quando T está sobre o segmento CD

Temos que $BT + TD > BD$ e $AT + TC > AC$, somando as duas desigualdades temos que $BT + TD + AT + TC > AC + BD \Rightarrow BT + AT + CD > AC + BD$, logo T , estando sobre o lado CD , não fornece o caminho mínimo procurado, o mesmo acontece se T estiver em qualquer outro lado do quadrado.

Agora considere os pontos A, B, C e D , vértices de um quadrado e t o eixo de simetria horizontal do quadrado, pelo teorema anterior, temos que o ponto T nos fornece o menor caminho para ir de A até B tocando a reta t . Analogamente temos o mesmo resultado para os pontos C e D .

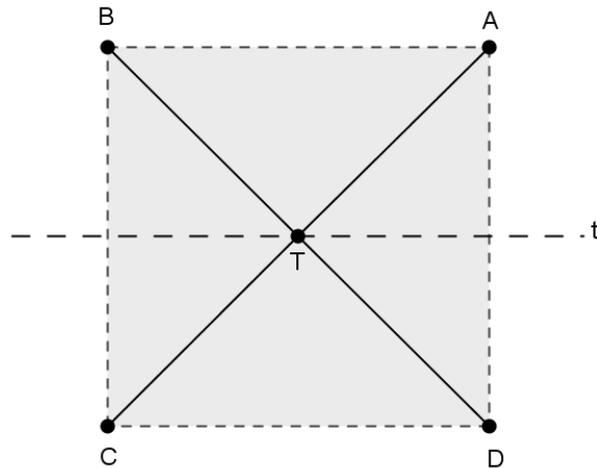


FIGURA 34: caminho ligando os pontos A, B, C e D quando T está sobre a reta t

Agora considerando o triângulo ABT , e considerando o resultado obtido para a menor distância que une três pontos temos que existe um ponto X , tal que $AX + BX + TX < AT + BT$, para o triângulo CDT analogamente temos que $CY + DY + TY < CT + DT$, e também que $\hat{A}XB = \hat{B}XT = \hat{A}XT = 120^\circ$ e $\hat{C}YD = \hat{C}YT = \hat{D}YT = 120^\circ$.

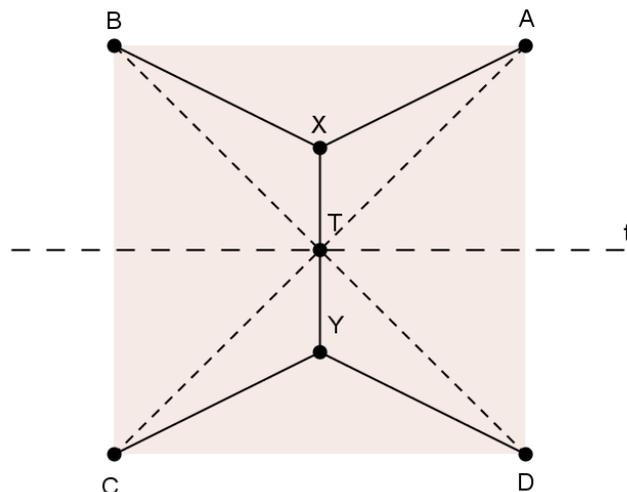


FIGURA 35: menor caminho ligando os pontos A, B, C e D

Agora supondo $BX < AX$ (FIGURA 35) teremos $\alpha > 30^\circ$ e $\beta < 30^\circ$ implicando $\gamma > 60^\circ$ e $\lambda > 30^\circ$ e também $\varepsilon < 30^\circ$, implicando em $\theta > 60^\circ$, o que caracteriza uma contradição, pois a soma dos ângulos internos do quadrilátero $BCXY$ deve ser 360° .

Analogamente não poderemos ter $BX > AX$, portanto $BX = AX$. Da mesma forma teremos que $CY = DY$, como a reta t é o eixo de simetria horizontal do quadrado temos que $BX = AX = CY = DY$.

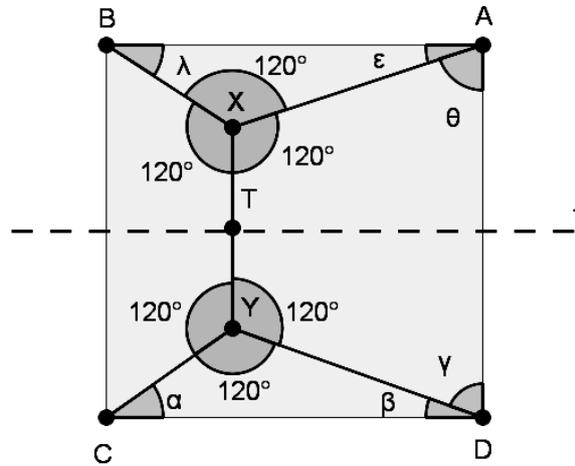


FIGURA 36: menor caminho ligando os pontos A, B, C e D

Este experimento trata-se de uma restrição do menor caminho entre quatro pontos, pra uma demonstração mais geral pode-se consultar textos referentes ao problema de Steiner, uma leitura complementar pode ser encontrada no livro do COURANT (1973).

O problema que acabamos de resolver matematicamente pode também ser solucionado com auxílio de uma experiência com bolhas de sabão.

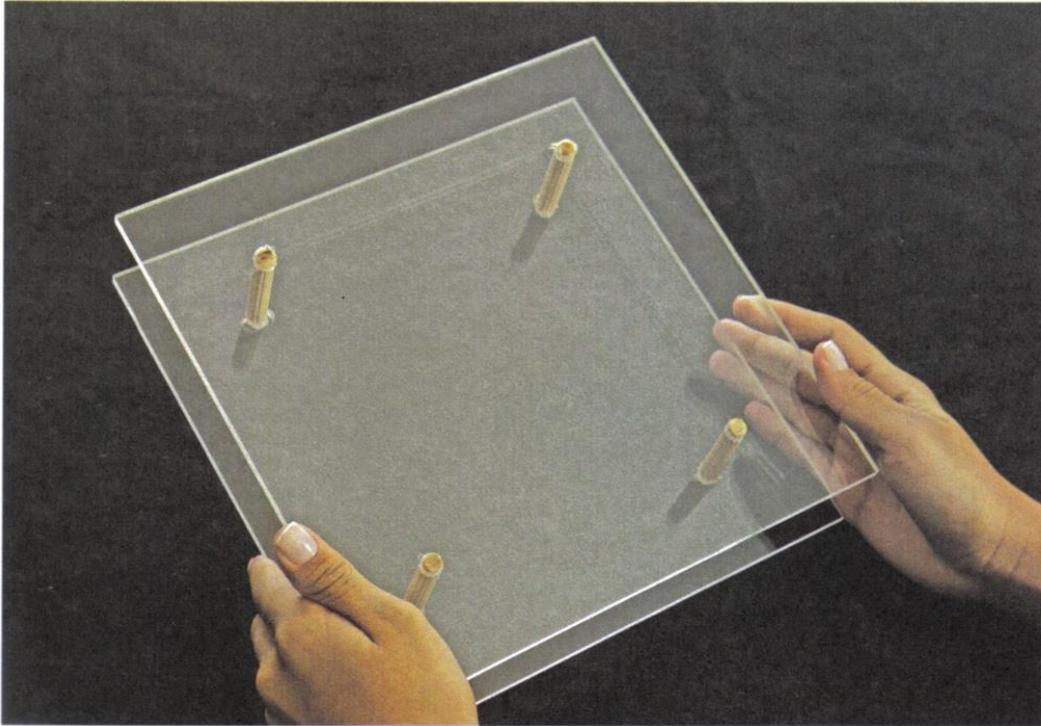


FIGURA 37: dispositivo com quatro pinos nos vértices de um quadrado

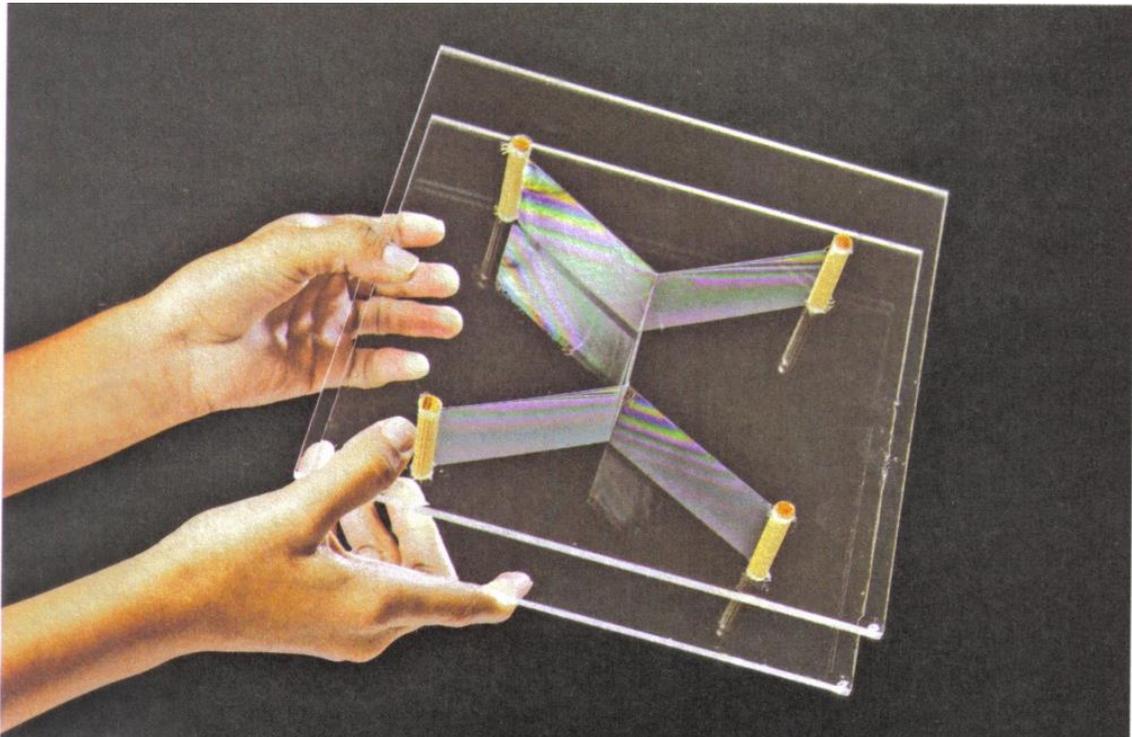
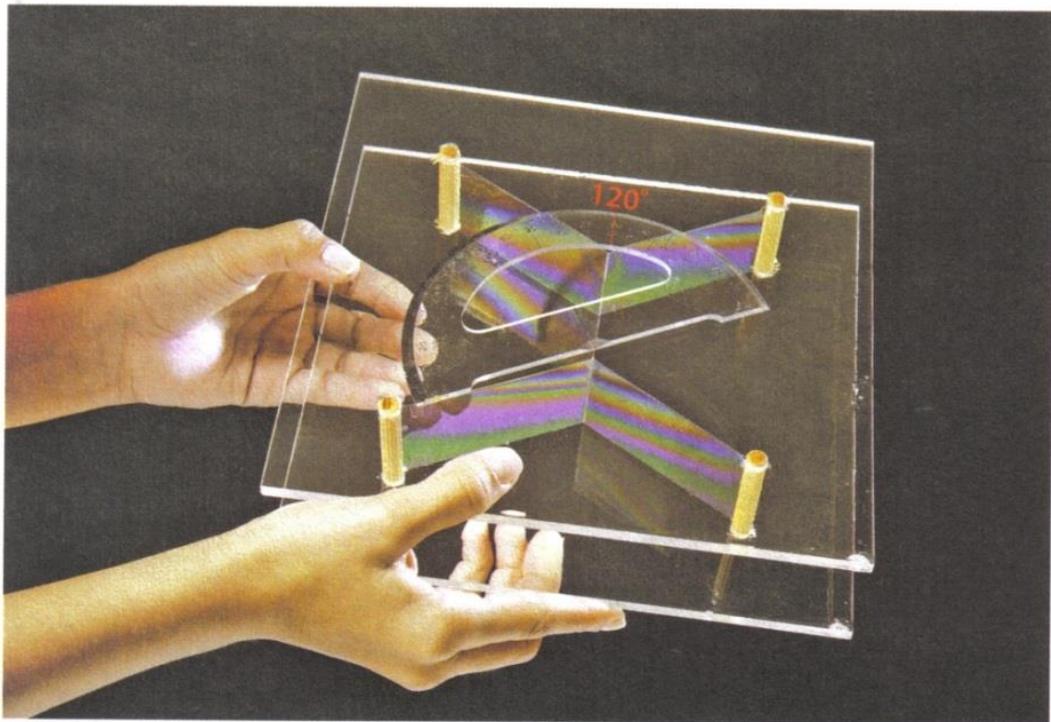


FIGURA 38: superfície de sabão buscando equilíbrio



Fotografias: Sérgio Dotta Jr./ID/BR

FIGURA 39: Bolha em equilíbrio

5° Experimento: Obter a superfície de menor área limitada por duas circunferências de mesmo diâmetro, coaxiais e paralelas.

Quando colocamos os anéis numa solução de sabão e retiramos d modo que os anéis fiquem paralelos e coaxiais. O que acontece? A superfície tem um formato cilíndrico? Na verdade a superfície formada trata-se da catenóide que é a superfície de revolução gerada pela catenária.



FIGURA 40: catenóide em filme de sabão

Catenóide em \mathbb{R}^3

Superfície obtida pela revolução da catenária em torno do eixo Ox . Sua parametrização em \mathbb{R}^3 pode ser dada por:

$$X(u, v) = (u, \cosh(u)\cos(v), \cosh(u)\sen(v))$$

Derivadas de ordem Superior

$$X_u = (1, \sinh(u) \cos(v), \sinh(u) \sin(v))$$

$$X_v = (0, -\cosh(u) \sin(v), \cosh(u) \cos(v))$$

$$X_{uu} = (0, \cosh(u) \cos(v), \cosh(u) \sin(v))$$

$$X_{vv} = (0, -\cosh(u) \cos(v), -\cosh(u) \sin(v))$$

$$X_{uv} = (0, -\sinh(u) \sin(v), \sinh(u) \cos(v))$$

Primeira Forma Fundamental

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + \sinh^2(u) \cos^2(v) + \sinh^2(u) \sin^2(v) = 1 + \sinh^2(u)$$

$$E = \cosh^2(u)$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -\sinh(u) \cos(v) \cosh(u) \sin(v) + \sinh(u) \sin(v) \cosh(u) \cos(v)$$

$$F = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \cosh^2(u) \sin^2(v) + \cosh^2(u) \cos^2(v)$$

$$G = \cosh^2(u)$$

$$I_q(w) = a^2 E + 2ab F + b^2 G$$

$$I_q(w) = a^2 \cdot \cosh^2(u) + 2ab \cdot 0 + b^2 \cdot \cosh^2(u)$$

$$I_q(w) = (a^2 + b^2) \cdot \cosh^2(u)$$

Segunda Forma Fundamental

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

$$N = \left(\frac{\sinh(u)}{\cosh(u)}, -\frac{\cos(v)}{\cosh(u)}, -\frac{\sin(v)}{\cosh(u)} \right)$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = -\frac{\cosh(u) \cos^2(v)}{\cosh(u)} - \frac{\cosh(u) \sin^2(v)}{\cosh(u)}$$

$$e = -1$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{\sinh(u) \sin(v) \cos(v)}{\cosh(u)} - \frac{\sinh(u) \cos(v) \sin(v)}{\cosh(u)}$$

$$f = 0$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{\cosh(u) \cos^2(v)}{\cosh(u)} + \frac{\cosh(u) \sin^2(v)}{\cosh(u)}$$

$$g = 1$$

$$II_q(w) = a^2 e + 2ab f + b^2 g$$

$$II_q(w) = a^2 \cdot (-1) + 2ab \cdot 0 + b^2 \cdot 1$$

$$II_q(w) = b^2 - a^2$$

Curvaturas

Curvatura Gaussiana

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{-1 \cdot 1}{\cosh^4(u)}$$

$$K = -\frac{1}{\cosh^4(u)}$$

Curvatura Média

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot G - 2 \cdot f \cdot F + E \cdot g}{E \cdot G - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1) \cdot \cosh^2(u) - 2 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot \cosh^2(u)}{\cosh^2(u) \cdot \cosh^2(u) - 0}$$

$$H = 0$$

Curvatura Normal

$$K_n = \frac{II_{(q)}}{I_{(q)}} = \frac{b^2 - a^2}{(a^2 + b^2) \cosh^2(u)}$$

Curvaturas Principais

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$k^2 - 2 \cdot 0 \cdot k - \frac{1}{\cosh^4(u)} = 0$$

$$k^2 = \frac{1}{\cosh^4(u)}$$

$$k_1 = -\frac{1}{\cosh^2(u)} \text{ e } k_2 = \frac{1}{\cosh^2(u)}$$

Como a curvatura média é identicamente nula, a Catenóide é uma superfície mínima.

6° Experimento: Pegue um fio razoavelmente flexível e enrole-a em torno de uma lata para formar uma hélice. Deixe algum espaço no final para uma alça, mergulhe a hélice em uma solução de sabão e depois retire. A superfície formada é uma helicóide.



FIGURA 41: helicóide

Helicoide em \mathbb{R}^3

Considere uma hélice cilíndrica dada por $\alpha(t) = (a \cos(t), a \sin(t), bt), t \in \mathbb{R}$. Por cada ponto da hélice pode-se traçar uma reta paralela ao plano xy e que intersecta o eixo Oz . A superfície gerada por essas retas é chamada helicóide. É uma superfície regrada obtida pela isometria do catenóide, cuja parametrização pode ser dada por:

$$X(u, v) = (v \cos(u), v \sin(u), u)$$

Derivadas de ordem Superior

$$X_u = (-v \sin(u), v \cos(u), 1)$$

$$X_v = (\cos(u), \sin(u), 0)$$

$$X_{uu} = (-v \cos(u), -v \sin(u), 0)$$

$$X_{vv} = (0, 0, 0)$$

$$X_{uv} = (-\sin(u), \cos(u), 0)$$

Primeira Forma Fundamental

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + v^2 \sin^2(u) + v^2 \cos^2(u)$$

$$E = 1 + v^2$$

$$F = \langle X_u, X_v \rangle = -v \sin(u) \cos(u) + v \sin(u) \cos(u)$$

$$F = 0$$

$$G = \langle X_v, X_v \rangle = \cos^2(u) + \sin^2(u)$$

$$G = 1$$

$$I_q(w) = a^2 E + 2ab F + b^2 G$$

$$I_q(w) = a^2 \cdot (1 + v^2) + 2ab \cdot 0 + b^2 \cdot 1$$

$$I_q(w) = a^2(1 + v^2) + b^2$$

Segunda Forma Fundamental

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}$$

$$N = \left(-\frac{\operatorname{sen}(u)}{\sqrt{1+v^2}}, -\frac{\cos(u)}{\sqrt{1+v^2}}, -\frac{v}{\sqrt{1+v^2}} \right)$$

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{v \cos(u) \operatorname{sen}(u)}{\sqrt{1+v^2}} - \frac{v \cos(u) \operatorname{sen}(u)}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$e = 0$$

$$f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{\operatorname{sen}^2(u)}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{\cos^2(u)}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$f = \frac{1}{\sqrt{1+v^2}}$$

$$g = \langle X_{vv}, N \rangle = 0$$

$$II_q(w) = a^2 e + 2ab f + b^2 g$$

$$II_q(w) = a^2 \cdot 0 + 2ab \cdot \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} + b^2 \cdot 0$$

$$II_q(w) = \frac{2ab}{\sqrt{1+v^2}}$$

Curvaturas

Curvatura Gaussiana

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{0 \cdot 0 - \left(\frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \right)^2}{(1+v^2) \cdot 1 - 0^2}$$

$$K = -\frac{1}{(1+v^2)^2}$$

$$K = -\frac{1}{\cosh^4(u)}$$

Curvatura Média

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{e \cdot G - 2 \cdot f \cdot F + E \cdot g}{E \cdot G - F^2}$$

$$H = \frac{1}{2} \cdot \frac{0 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{1+v^2}} \cdot 0 + (1+v^2) \cdot 0}{(1+v^2) \cdot 1 - 0}$$

$$H = 0$$

Curvatura Normal

$$K_n = \frac{II_{(q)}}{I_{(q)}} = \frac{\frac{2ab}{\sqrt{1+v^2}}}{a^2(1+v^2)+b^2} = \frac{2ab}{(a^2 + a^2v^2 + b^2)\sqrt{1+v^2}}$$

Curvaturas Principais

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

$$k^2 - 2 \cdot 0 \cdot k - \frac{1}{\cosh^4(u)} = 0$$

$$k^2 = \frac{1}{\cosh^4(u)}$$

$$k_1 = -\frac{1}{\cosh^2(u)} \text{ e } k_2 = \frac{1}{\cosh^2(u)}$$

Temos que a curvatura média é identicamente nula em todos os pontos da Helicóide, portanto é uma superfície mínima.

7º Experimento: Obter a superfície de menor área limitada pelas arestas de um tetraedro regular.

Construindo uma armação de arame de modo a formar um tetraedro e após mergulhar a armação em água e detergente, obtém-se qual superfície? E quais princípios estão envolvidos no resultado obtido?

Retirando-se a armação da solução de água e sabão, obtém-se um sistema formado por seis películas planas, na forma de triângulos isósceles, que representa a superfície de menor área limitada pelo contorno (FIGURA 43). De cada vértice parte uma linha, formada pela intersecção de três películas, que se encontram no centro do tetraedro. O ângulo entre duas linhas é $109^{\circ}28'$, e o ângulo entre as películas é de 120° .



FIGURA 42: A superfície mínima formada por uma película de sabão, tendo como bordo um tetraedro.

Note que pela segunda Lei de Plateau as superfícies de sabão se encontram de três em três ao longo de uma linha singular, formando um ângulo de 120° , sendo assim tetraedro ficou dividido em quatro pequenas pirâmides de volume V' . Então seja V o volume do tetraedro, temos que

$$V' = \frac{1}{4}V$$

$$\frac{1}{3}A_b \cdot H' = \frac{1}{4} \frac{1}{3} A_b \cdot H$$

$$H' = \frac{1}{4}H.$$

Portanto cada linha de encontro entre três películas tem comprimento $\ell = \frac{3}{4}H$,

sendo $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$, a a aresta do tetraedro, α o ângulo entre as linhas e considerando

uma das películas que tem como lados umas das arestas do tetraedro, temos que:

$$a^2 = 2\ell^2 - 2\ell^2 \cdot \cos \alpha$$

$$a^2 = 2\ell^2(1 - \cos \alpha)$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{a^2}{2\ell^2}$$

$$\cos \alpha = -\frac{1}{3},$$

o que nos dá $\alpha = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 109,5^\circ = 109^\circ 27'$.

8° Experimento: Obter a superfície de menor área limitada pelas arestas de um cubo.

A superfície mínima formada por imersão de uma moldura de arame no formato cúbico em uma solução de água e sabão é mostrada na Figura 43. Ela contém uma superfície com um “quadrado” no centro. O “quadrado” tem quatro lados curvos formados pelas linhas da película de sabão que surgem da interseção de três superfícies. As laterais curvas do “quadrado” se cruzam em $109^{\circ}28'$, como previsto pelos resultados de Plateau. Há também duas outras linhas das películas que se encontram uma em cada canto do “quadrado” com os ângulos previstos pelas leis de Plateau. A partir das bordas e canto do “quadrado” saem superfícies que terminam sobre as doze arestas do cubo. Elas não são todas planas. As únicas superfícies planas são aquelas a partir dos vértices do “quadrado” para as bordas da estrutura que são perpendiculares ao “quadrado”. O plano do “quadrado” é sempre paralelo a uma das faces do cubo. Isso pode ser feito para saltar de um plano para outro por qualquer sopro nela ou por agitação do quadro. Lá são, portanto, três superfícies mínimas com a mesma área. Ao romper diferentes partes da superfície mínima pode-se obter o subconjunto de superfícies mínimas associados com um número de arestas do cubo. Este número é menor ou igual, a doze.



FIGURA 43: A superfície de sabão formada pelas doze arestas de um cubo

9º Experimento: Mostrar que para certos contornos existe mais do que uma Superfície Mínima.

As superfícies mínimas se chamam assim porque minimizam a superfície para um determinado volume dado. As superfícies mínimas do Espaço Euclidiano Tridimensional se caracterizam pelo fato de que, localmente, as funções que elas representam podem apresentar um mínimo ou mínimos, entre as quais pode haver um mínimo relativo, não necessariamente absoluto, como se observa na superfície que se forma ao introduzir o arame das figuras abaixo na solução de água e sabão. Nas fotografias abaixo a superfície, que é formada através da introdução do fio na solução de água e sabão é uma superfície mínima (mínimo relativo), por isso não é mínima absoluta.



FIGURA 44: película de sabão forma um mínimo relativo

A área mínima é obtida quando juntamos as duas extremidades superiores dos arames curvados e rompemos a película formada sobre os arcos paralelos, como pode ser visto nas seguintes fotografias.

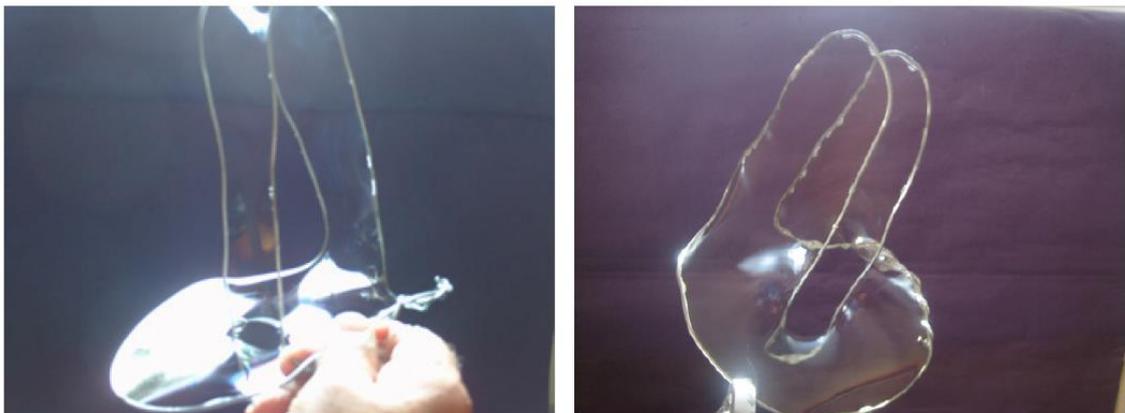


FIGURA 45: película de sabão forma mínimo absoluto

10° Experimento: Obtendo a superfície de Scherk.

Se introduzirmos em água com sabão a estrutura de um cubo que está ausente duas arestas paralelas, de uma mesma face e outras duas arestas, perpendiculares as anteriores, da face paralela a anterior obtemos a superfície Scherck, cuja forma se assemelha uma sela de cavalo, como visto na figura.



FIGURA 46: película de sabão formando a superfície de Scherk

A superfície de Scherk é o gráfico da função $f(x, y) = \ln\left(\frac{\cos y}{\cos x}\right)$

Sendo

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{tg} x, \quad f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sec^2 x, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = -\operatorname{tg} x \quad f_{yy} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial}{\partial y} f \right] = 0 \quad e$$

$$f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\sec^2 x,$$

pela equação de Euler-Lagrange temos

$$(1 + f_x^2)f_{yy} + (1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} = \\ (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot (-\sec^2 x) + (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \sec^2 x - 2 \cdot \operatorname{tg} x \cdot (-\operatorname{tg} x) \cdot 0 = 0,$$

portanto superfície de Scherk é uma Superfície Mínima.

BOLHAS DE SABÃO



FIGURA 47: fonte: http://static.freepik.com/fotos-gratis/bolha-de-sabao_21247574.jpg

A ciência explica que uma bolha de sabão é uma porção de ar cercada por uma película de água e um elemento tensoativo (sabão ou detergente). O volume de uma bolha de sabão está determinado pela quantidade de ar cerrado em seu interior. De todas as superfícies que abraçam essa determinada quantidade de ar em seu interior a de menor superfície é a esfera.

Se compararmos alguns sólidos geométricos que tenham o mesmo volume, por exemplo, um cubo, um cilindro, um cone, uma pirâmide e uma esfera, veremos que a de menor superfície é a esfera. Esta forma esférica é propiciada pela tensão superficial que faz com que a bolha de sabão tente ocupar a menor superfície, daí as bolhas tenham a menor superfície exterior com o maior volume interior de ar.

Suponhamos que temos uma pirâmide de base quadrada, um cone, uma esfera, um cilindro e um cubo, todos com volume de 1000 cm^3 e com altura 10 cm . Salvo a esfera cujo diâmetro é fixo para esse volume. Vamos calcular a área dessas superfícies e verificar que a de menor superfície é a esfera.

- **Pirâmide**

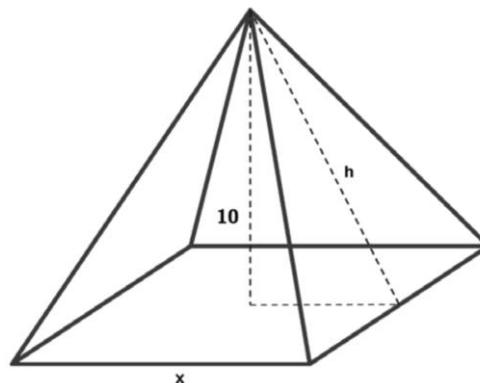


FIGURA 48: pirâmide de volume 1000 cm^3

$$V = \frac{1}{3} \cdot x^2 \cdot 10 \Rightarrow x = \sqrt{300} = 17,32 \text{ cm}$$

$$h = \sqrt{10^2 + 8,66^2} = 13,22 \text{ cm}$$

Portanto

$$A_{\text{pirâmide}} = x^2 + 4 \cdot \frac{x \cdot h}{2} = 17,32^2 + 4 \cdot \frac{17,32 \cdot 13,22}{2} = 757,92 \text{ cm}^2 .$$

- **Cone**

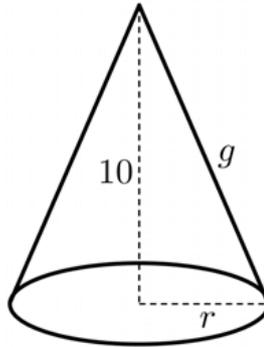


FIGURA 49: cone de volume 1000 cm^3

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \Rightarrow r = \sqrt{\frac{300}{\pi}} = 9,77 \text{ cm}$$

$$g = \sqrt{10^2 + r^2} = \sqrt{100 + 9,77^2} = 13,98$$

$$A_{\text{cone}} = \pi r^2 + \pi r g$$

$$A_{\text{cone}} = \pi \cdot 9,77^2 + \pi \cdot 9,77 \cdot 13,98 = 728,96 \text{ cm}^2$$

- **Cilindro**

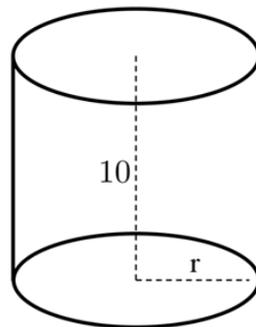


FIGURA 50: cilindro de volume 1000 cm^3

$$V = 1000 = \pi r^2 \cdot h \Rightarrow r = \sqrt{\frac{100}{\pi}} = 5,64 \text{ cm}$$

$$A_{\text{cilindro}} = 2\pi r^2 + 2\pi \cdot r \cdot 10$$

$$A_{\text{cilindro}} = 2\pi \cdot 5,64^2 + 2\pi \cdot 5,64 \cdot 10 = 554,23 \text{ cm}^2$$

- **Cubo**

$$V = 1000 = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{1000} = 10\text{cm}$$

$$A_{\text{cubo}} = 6x^2 = 6 \cdot 10^2 = 600\text{cm}^2$$

- **Esfera**

$$V = 1000 = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}} = 6,20\text{cm}$$

$$A_{\text{esfera}} = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 6,20r^2 = 483,05\text{cm}^2$$

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esse trabalho utiliza uma metodologia simples com recursos didáticos de fácil acesso, que pode ser executado em sala de aula, ou caso a escola possua, no laboratório multidisciplinar.

O trabalho propôs um tema que pôde ser trabalhado com os alunos na forma atividades experimentais ligadas à matemática que tornam as aulas mais atrativas e participativas, de forma que o aluno constrói seu próprio conhecimento a partir da observação dos fenômenos e da modelagem matemática.

O estudo das propriedades geométricas presente nas bolhas e películas de sabão, partindo de atividades experimentais, contribuiu consideravelmente para o aprendizado dos alunos, através de construções de modelos concretos e descobertas.

Algumas dificuldades foram verificadas durante a realização das atividades, principalmente nas demonstrações analíticas, pois os alunos não estão acostumados com esse tipo de leitura e desenvolvimento lógico.

Faz-se necessário antes da realização dessa atividade, trabalhar com os alunos algumas demonstrações em geometria, a forma do desencadeamento lógico das demonstrações, para que os mesmos se ambientem com a linguagem e as ideias.

Após a execução total do projeto, foi feita uma entrevista informal com a turma, de modo a sondar o aprendizado em relação ao tema abordado. Alguns alunos relataram que "estudar matemática com bolhas de sabão é mais legal, pois, dessa forma, há um significado no aprendizado da matemática", outro comentou que atividades como essa "ajudam a compreender mais o estudo da geometria com auxílio de materiais que nem se quer pensava que pudessem ser usados". Isso reforça a ideia que trazer a matemática do cotidiano, faz com que a matemática da sala de aula faça sentido.

Com um pouco de esforço nós professores podemos tornar assuntos que são relativamente complexos em brincadeiras de aprendizado, aproximando cada vez mais os alunos dessa disciplina que para tantos ainda é um desafio entendê-la.

REFERENCIAS

- [1] BOYS, C.V. **Soap Bubbles, their colors and forces which mold them**, Dover 1959.
- [2] COURANT, R. and Robbins, H. **What is Mathematics?**, pp. 329-361 and 385-397. Oxford, 1973
- [3] LOVETT, D. **Demonstrating science with soap films**, IOP, Bristol, 1994
- [4] DO CARMO, M. P. **Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies** (Coleção: Textos Universitários), Sociedade Brasileira de Matemática – SBM, Rio de Janeiro, 2005.
- [5] DO CARMO, M. P. **Superfícies Mínimas**. 2ª. edição. Rio de Janeiro: Impa, 2005, 122 p.
- [6] DOUGLAS, J. **Solution of the Problem of Plateau**. Transactions of the American Mathematical society, v. 33, n. 1, p. 263–321, 1931
- [7] EMMER, M. **Architecture and Mathematics: Soap Bubbles and Soaps Films**. p. 53-65 in Nexus: Architecture and Mathematics, ed. Kim Williams, Fucecchio Florence: Edizioni dell' Erba, 1996.
- [8] GRANJA, C. E. **Atividades Experimentais de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental**. Editora SM. São Paulo, 2012
- [9] IEZZI, G., Dolce O., Degenszajn D., Périgo R., Almeida N. **Matemática Ciência e Aplicações**. Volume 2. 4a Edição. Editora Atual. São Paulo, 2006.
- [10] ISENBERG, C. **The Science of Soaps Films and Soap Bubbles**. New York: Dover Publications, 1992

- [11] KAWANO, C. **A Bolha de Sabão em Números**. Revista Galileu. Edição 187. Editora Globo. São Paulo. Fevereiro de 2007.
- [12] OPREA, J. **The Mathematics of soap films: Explorations with Maple**, AMS, Student Mathematical Library Vol. 10, 2000.
- [13] POLYA, G. **A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático**. Tradução e adaptação: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.
- [14] TENEBLAT, K. **Introdução à Geometria Diferencial**. 2ª Edição, Editora Edgard Blucher, 2008.

ANEXOS

ANEXO A – Imagens dos alunos na execução da metodologia.



Imagem 1



Imagem 2



Imagem 3



Imagem 4



Imagem 5



Imagem 6