UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO BAHIA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS
MESTRADO EM MATEMÁTICA

DESMISTIFICANDO A TRIGONOMETRIA: EXISTÊNCIA DE VALORES DO SENO E COSSENO MAIORES QUE 1

ROSEMAR DOS SANTOS ALMEIDA

CRUZ DAS ALMAS
2014

DESMISTIFICANDO A TRIGONOMETRIA: EXISTÊNCIA DE VALORES DO SENO E COSSENO MAIORES QUE 1

ROSEMAR DOS SANTOS ALMEIDA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Orientador: Profº Dr. Juarez dos Santos Azevedo

Co-orientador: Profº Msc. Alex Santana dos Santos

CRUZ DAS ALMAS
2014

FICHA CATALOGRÁFICA

A447d	Almeida, Rosemar dos Santos. Desmistificando a trigonometria: existência de valores do seno e cosseno maiores que 1 / Rosemar dos Santos Almeida._ Cruz das Almas, BA, 2014. 63f.; il. Orientador: Juarez dos Santos Azevedo. Coorientador: Alex Santana dos Santos. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. 1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Matemática – Trigonometria. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título. CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

DESMISTIFICANDO A TRIGONOMETRIA: EXISTÊNCIA DE VALORES DO SENO E COSSENO MAIORES QUE 1

ROSEMAR DOS SANTOS ALMEIDA

Dissertação apresentada ao curso de Mestrado Profissional em Matemática do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia e a Sociedade Brasileira de Matemática, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre.

Banca Examinadora:

Orientador:____

Prof° Dr. Juarez dos Santos Azevedo - UFRB

Membro:____

Profª Dra. Mariana Pinheiro G. da Silva - UFRB

Membro:____

Prof° Dr. Jailson de Araújo Rodrigues - IFBA

Cruz das Almas, 04 de junho de 2014.

Aos meus pais Maria Conceição e Osmar e demais familiares
e à minha companheira Josene Oliveira,
com muito amor.

"Erros são, no final das contas,
fundamentos da verdade.
Se um homem não sabe o que uma coisa é,
já é um avanço do conhecimento saber o que ela não é."

Carl Jung

AGRADECIMENTOS

A Deus, em primeiro lugar, em especial à minha Mãe e meu Pai, que sempre me incentivaram nos estudos, à meus irmãos, à minha família, pela força dada, à minha companheira e sua família, por estarmos quase sempre juntos nos momentos mais importantes e, aos meus amigos, por poder contar sempre com todos.

A Instituição e a todos que a compõem.

Aos professores Dr. Juarez dos Santos Azevedo (Orientador) e Msc. Alex Santana dos Santos (Co-orientador), pelas contribuições, pelas orientações, que me levaram a execução e conclusão deste trabalho.

A todos os colegas do mestrado, que contribuíram diretamente nesta etapa de novos conhecimentos. Por terem sido companheiros em todos os momentos.

Agradeço aos meus colegas, particular e especialmente à Josene Oliveira, Roselí Almeida, Sóstenes Souza, Ronaldo Almeida, Leniedson Guedes, Rosilene Almeida, Ruan Cruz, Raphael Almeida, Danilo Otávio, Lucas Santos e demais colegas da república Zumbi dos Palmares que, além de companheiros de estrada, tornaram-se grandes amigos, pela atenção, companhia, conselhos, por todos os risos, por me suportarem nos momentos de intenso cansaço e estresse (que não foram poucos) e por me ajudarem a enxergar que essa fase é apenas mais uma de outras que virão.

Agradeço ao professor Dr. Eleazar Madriz e demais Professores do corpo docente do PROFMAT-UFRB, pelas contribuições e ensinamentos ao logo do curso.

Emfim, a todos os que, de alguma maneira, contribuíram para a conclusão de mais esta fase da minha vida, os meus sinceros agradecimentos.

Rosemar Almeida

RESUMO

NESTE trabalho, estudaremos as funções seno e cosseno definidas no conjunto dos números complexos, com o objetivo de mostrar aos professores do ensino médio a existência de valores de seno e cosseno maiores que 1 (um). Para isso, faremos estudos sobre trigonometria e sobre os números complexos. Para definirmos as funções trigonométricas complexas, faremos uso dos conhecimentos da série de MacLaurin e da exponencial complexa. Além disso, mostraremos que as funções trigonométricas complexas gozam das mesmas propriedades que as funções trigonométricas reais, e veremos que existem valores de seno e cosseno maiores que 1 (um), sendo que nenhum deles é real.

Palavras-chave: Função seno complexa, função cosseno complexa, números complexos, exponencial complexa.

ABSTRACT

In this work, we study the sine and cosine functions defined in the set of complex numbers, with the aim of showing high school teachers for values of sine and cosine greater than 1 (one). To do so, we studies on trigonometry and complex numbers. To define the complex trigonometric functions, we use the knowledge of the MacLaurin series and complex exponential. Furthermore, we show that the complex trigonometric functions enjoy the same properties as real trigonometric functions, and we will see that there are values of sine and cosine greater than 1 (one), none of which is real.

Keywords: Complex sine function, complex cosine function, complex numbers and complex exponential.

SUMÁRIO

Introdução **12**

1 Trigonometria **16**
1.1 Teorema de Pitágoras 17
1.2 Relações Trigonométricas de Ângulos 18
1.2.1 Seno de α 18
1.2.2 Cosseno de α 19
1.2.3 Tangente de α 19
1.3 Relação Fundamental da Trigonometria 19
1.4 Seno, Cosseno e Tangente como Funções Reais de Variável Real 20
1.5 Algumas Propriedades das Funções Trigonométricas 23

2 Números Complexos **29**
2.1 Origem dos Números Complexos 29
2.2 Números Complexos 31
2.2.1 Definição 31
2.2.2 O Plano Complexo 32
2.2.3 Módulo e Complexo Conjugado 33
2.2.4 Representação Polar 36
2.2.5 Fórmulas do Produto e do Quociente 38
2.3 A Exponencial 39
2.3.1 Série de Taylor e série de MacLaurin 39
2.3.2 Propriedades da exponencial 41

3 Funções Trigonométricas Complexas **44**
3.1 Funções de Variável Complexa 44
3.2 Função Exponencial Complexa 46

3.3 Funções Cosseno e Seno Complexas 47
3.3.1 Visualização gráfica 56

Conclusão **58**

Referências Bibliográficas **64**

LISTA DE FIGURAS

1.1 Um triângulo retângulo. 17
1.2 Demonstração do Teorema de Pitágoras. 18
1.3 O círculo trigonométrico e um ponto P sobre ele. 20
1.4 O círculo trigonométrico, um ponto P sobre ele e um ponto P′. 22
1.5 Acerca das propriedades das funções trigonométricas. 24
1.6 Círculo trigonométrico, de raio $r = 1$. 25
1.7 Relações trigonométricas para dois ângulos suplementares, α e β. 27

2.1 Representação de número complexo no plano. 33
2.2 Regra do paralelogramo: (a) soma e (b) subtração. 34
2.3 Representação do módulo de um número complexo. 35
2.4 Exemplos de complexos conjugado. 36
2.5 Representação Polar. 37

3.1 (a) $cos(ix)$ e (b) $cos(z)$. 57
3.2 (a) $sen(ix)$ e (b) $sen(z)$. 57

INTRODUÇÃO

QUANDO analisamos o conteúdo de matemática no ensino básico, geralmente, constatamos que duas características são bastante evidentes e contraditórias. A primeira característica a ser observada se refere a importância do conhecimento da área de matemática, e a segunda trata da insatisfação quanto aos resultados negativos em relação à sua aprendizagem.

O que fundamenta a ideia de importância da matemática, diz respeito ao seu papel decisivo, pois possibilita a resolução de problemas da vida cotidiana, possui inúmeras aplicações na esfera do trabalho e funciona como instrumento indispensável para a construção de conhecimentos em outras áreas.

Em contra partida, a insatisfação traz à tona alguns problemas que devem ser enfrentados, entre eles se destacam: o ensino centrado em procedimentos mecânicos, que na maioria das vezes, são desprovidos de significados para os alunos. Há portanto, uma necessidade em caráter emergencial para reformular os objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que a sociedade reclama.

Frente a essa realidade, o ensino das funções seno e cosseno surgem com inúmeras possibilidades de alcançar tais contradições, pois possuem um campo vasto de aplicações. Porém, quando essas funções são trabalhadas no ensino médio, temos apenas o enfoque da sua definição no conjunto dos números reais, fazendo com o que os alunos pensem apenas nessa realidade, ou seja, mostra-se que as funções seno e cosseno são limitadas em um intervalo de números reais fechado com extremos nos números -1 (menos um) e $+1$ (mais um).

Além disso, temos o auxílio da internet, que por sua vez, possibilita uma busca mais rápida por aplicações das funções seno e cosseno nas diversas áreas do conhecimento. Entretanto, nessas buscas podemos encontrar situações em que valores de seno e cosseno são maiores que 1. E essa informação pode ser surpreendente para muitos, pois se definirmos as funções seno e cosseno no conjunto dos números complexos, veremos que essas funções não são mais limitadas.

Um dos primeiros a tratar as funções seno e cosseno no conjunto dos números complexos, foi Euler (ver, [12]). Ao considerar um círculo S^1 como um subconjunto

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid = 1\}$$

do plano complexo, observou-se que a aplicação $E : \mathbb{R} \to S^1 \subset \mathbb{C}$ toma a forma $E(x) = cos(x) + isen(x)$, pois $\mathbb{R}^2$ é visto como $\mathbb{C}$. Utilizando as fórmulas de arco soma do seno e do cosseno de números reais podemos notar que

$$\begin{aligned} E(x+y) &= cos(x+y) + isen(x+y) \\ &= (cosx + isenx)(cosy + iseny) \\ &= E(x) \cdot E(y). \end{aligned}$$

Portanto, Euler concluiu que E é uma função complexa comportando-se como uma exponencial. Isto o levou a propor a seguinte equação:

$$e^{ix} = cos(x) + isen(x).$$

Esta equação fez com que várias controvérsias aparecessem, principalmente por levar a conclusões inesperadas como $e^{i\pi} = -1$. Além disso, podemos reescrever essa conclusão da seguinte forma: $e^{i\pi} + 1 = 0$. Esta igualdade é uma das mais expressiva na matemática, pois relaciona os principais símbolos matemáticos em uma única igualdade.

Com o avanço dos conhecimentos das funções complexas, verificou-se que a equação de Euler é a única possível se quisermos manter para os complexos as propriedades válidas nos reais.

Sendo assim, as funções seno e cosseno poderam ser estendidas ao conjunto dos números complexos de modo que:

$$sen(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

e

$$cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}.$$

É importante ressaltar que estas relações são frutos da série de Maclaurin, que é um caso especial da série de Taylor e através delas conseguimos mostrar a existência de valores de seno e de cosseno maiores que 1 (um) (ver, [37]).

Sendo assim, este trabalho tem como objetivo principal mostrar aos professores do ensino médio, que existe a possiblidade das funções seno e cosseno terem valores maiores que 1. Com isso, mudarmos a forma de apresentar a definição das funções seno e cosseno, ou seja, deixar claro ao aluno que, se estendermos a definição das funções seno e cosseno ao conjunto dos números complexos, teremos valores de seno e cosseno maiores que 1.

Preocupados com esta temática, podemos notar que alguns livros didáticos do ensino médio [4, 3, 16, 19, 22], tratam as funções trigonométricas apenas no conjunto dos números reais, e nenhum deles aborda, nem a nível de informação, a possibilidade da existência de valores para o seno e para o cosseno no conjunto dos complexos.

Um outro fator importante, é a necessidade dos professores estarem buscando se aprimorar, a fim de que os alunos tenham condições de compreender as funções trigonométicas em um sentido mais amplo para que possam progredir em seus estudos posteriores. Em se tratando de quais são os conhecimentos de matemática necessários para ensinar Shulman [31, 32] define categorias do conhecimento básico, incluindo conhecimento do conteúdo, considerado fundamental para a atividade docente.

Além disso, diversas publicações (Cury [13]; Lellis [20]; Moreira e Soares [24]; D'Ambrosio [14]) nos mostram que o conhecimento dos conteúdos é um dos pilares da autonomia e da autoconfiança do docente, tanto na reconstrução do currículo quanto para organizar as práticas didáticas interativas. Segundo Fiorentini et. al. [34] e Fiorentini [17] um dos principais desafios enfrentados pelos professores, se refere a possuirem uma atitude investigadora e crítica em relação à prática pedagógica e aos saberes e, também, a participação na produção de saberes e no desenvolvimento curricular da escola.

Sendo assim, é de suma importância que os professores do ensino médio possuam condições necessárias para desenvolverem os seus trabalhos em sala de aula, visto que o domínio do que ensina é fundamental ao desenvolvimento dos trabalhos. Por isso, quando tratarmos de funções trigonométricas devemos estar atentos a todas as possibilidades de abordagem, inclusive considerando um domínio de números complexos.

O presente trabalho é estruturado em três capítulos como segue:

No capítulo 1, será apresentada a trigonometria no triângulo retângulo, onde será abordado o teorema de Pitágoras, as razões de seno, cosseno e tangente, além disso, a extensão dessas funções ao conjunto dos números reais. Serão ainda demonstradas algumas de algumas propriedades referentes as funções seno e cosseno, e também a relação fundamental da trigonometria.

No capítulo 2, seguindo o mesmo raciocínio da primeira seção, serão abordados os conceitos básicos de números complexos, um pouco do contexto histórico e demonstrações de algumas propriedades consideradas importantes para o desenvolvimento do tema. Ainda nesta abordagem, será apresentada a função exponencial, que servirá de pré-requisito para alcançar o objetivo deste trabalho.

No capítulo 3, trabalharemos as funções seno e cosseno definidas no conjunto dos números complexos, mostrando a existência do seno e cosseno maiores que 1 e as demonstrações de propriedades referentes as essas funções. Além disso, serão comparadas as funções seno e cosseno definidas no conjunto dos números reais e as definidas no conjunto dos números complexos. Dessa forma, iremos alcançar o objetivo principal do trabalho.

Nas considerações finais, apresentaremos nossas conclusões a respeito da existência de valores de seno e cosseno maiores que 1.

CAPÍTULO 1

TRIGONOMETRIA

O Estudo da trigonometria se deu pela necessidade de resolver problemas das civilizações antigas, motivando o desenvolvimento de ciências como Agrimensura, Navegação e Astronomia, pois as dimensões do universo sempre fascinaram os cientistas, e com isso, o estudo da trigonometria avançou para acompanhar as necessidades de tais ciências. O astrônomo grego Aristarco de Samos (310 a.C. - 230 a.C.) foi um dos primeiros a calcular as distâncias que separam a Terra, a Lua e o Sol. Para tal feito, ele fez uso de relações entre as medidas dos lados dos triângulos retângulos com seus ângulos internos [12].

Em se tratando de trigonometria como ciência, alguns relatos mostram que a trigonometria nasceu com o astrônomo grego Hiparco de Nicéia (190 a.C. - 125 a.C.), que também é conhecido como o *Pai da Trigonometria* por ter estudado e sistematizado algumas relações entre elementos de um triângulo [12].

As relações entre as medidas dos lados de um triângulo com as medidas de seus ângulos é de grande utilidade na medição de distâncias inacessíveis ao homem, como a altura de montanhas, torres e árvores, ou largura de rios e lagos. Além dessas aplicações, a trigonometria também possui aplicações na Engenharia, na Mecânica, na Eletricidade, na Acústica, na Medicina e até na Música [21, 27, 29].

1.1 Teorema de Pitágoras

Antes de falarmos do teorema de Pitágoras, iremos definir alguns elementos importantes do triângulo retângulo. Em trigonometria, os lados dos triângulos retângulos assumem nomes particulares, apresentados na Figura 1.1. O lado de maior comprimento, oposto ao ângulo reto θ, chama-se *hipotenusa*; os lados restantes, ligados ao ângulo reto, chamam-se *catetos*.

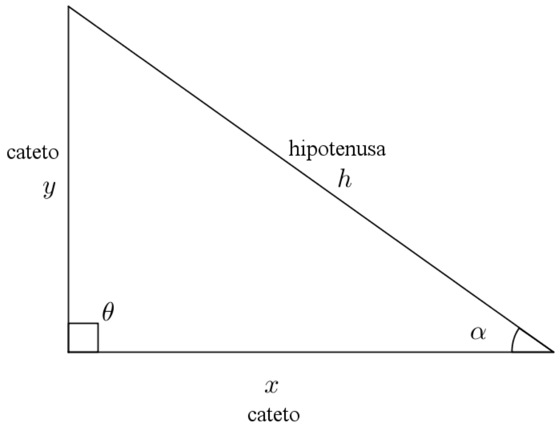


Figura 1.1: Um triângulo retângulo.

O geômetra grego Pitágoras (570-501 a.C.) formulou o seguinte teorema, que tem hoje o seu nome, e que relaciona a medida dos diferentes lados do triângulo retângulo: *a soma do quadrado dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa.* Ou seja, se x e y forem o comprimento dos dois catetos e h o comprimento da hipotenusa, teremos:

$$x^2 + y^2 = h^2.$$

Demonstração.

Observando a Figura 1.2, temos que o triângulo retângulo tem seus catetos de comprimento x e y. Como a área de um triângulo é dada pela metade do produto do comprimento da base pelo comprimento da altura, temos que a área deste triângulo é $\frac{xy}{2}$. Observando a Figura 1.2, temos que o quadrado de lado h foi construído de forma que, pudéssemos ter "copiado"e "colado"o triângulo de tal maneira que a hipotenusa do triângulo fosse o lado do quadrado. Sendo assim, a área do quadrado é, naturalmente, h^2. Com essa construção, temos uma nova figura, um quadrado, no qual se inscrevem o quadrado e os triângulos - o "original"e as "cópias". Este novo quadrado tem lado de comprimento $x + y$ como mostra a Figura 1.2.

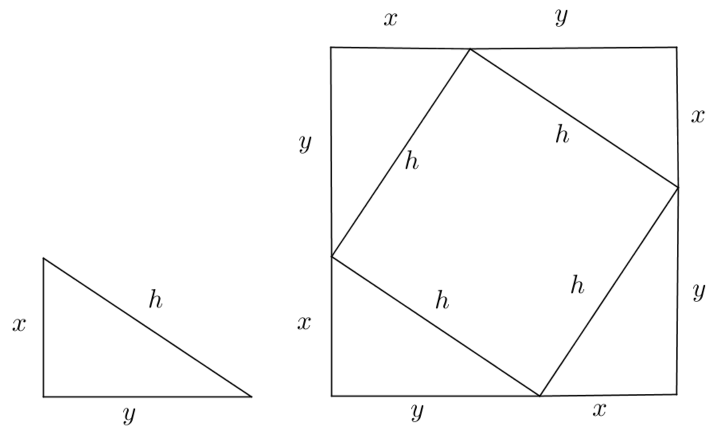


Figura 1.2: Demonstração do Teorema de Pitágoras.

Neste caso, a área do novo quadrado é $(x+y)^2$, ou seja, $x^2+2xy+y^2$. Por outro lado, a área deste novo quadrado é igual ao espaço ocupado pelas figuras anteriores (o quadrado e os quatro triângulos). Estas cinco figuras têm áreas dadas por h^2 e $\frac{xy}{2}$. Como temos quatro triângulos, a área que todos eles ocupam é $\frac{4xy}{2} = 2xy$. Então, as cinco figuras dentro do quadrado maior ocupam uma área que totaliza $h^2 + 2xy$. Mas esta área é igual à do quadrado maior, como se vê na Figura 1.2. Portanto, temos

$$x^2 + 2xy + y^2 = h^2 + 2xy$$
$$x^2 + y^2 = h^2,$$

que é justamente a fórmula para o teorema de Pitágoras.

1.2 Relações Trigonométricas de Ângulos

Na maioria das aplicações trigonométricas, relacionam-se os comprimentos dos lados de um triângulo recorrendo a determinadas relações dependentes de ângulos internos. Neste sentido serão apresentadas algumas relações trigonométricas, para isso, considere a Figura 1.1.

1.2.1 Seno de α

É o quociente do comprimento do cateto *oposto* ao ângulo α pelo comprimento da hipotenusa do triângulo (ver Figura 1.1):

$$sen(\alpha) = \frac{y}{h}.$$

1.2.2 Cosseno de α

É o quociente do comprimento do cateto *adjacente* ao ângulo α pelo comprimento da hipotenusa do triangulo (ver Figura 1.1):

$$cos(\alpha) = \frac{x}{h}.$$

1.2.3 Tangente de α

É o quociente dos comprimentos do cateto *oposto* pelo cateto *adjacente* (ver Figura 1.1):

$$tg(\alpha) = \frac{y}{x}.$$

Pode ser definida também como sendo o quociente do seno pelo cosseno, ou seja,

$$tg(\alpha) = \frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{\frac{y}{h}}{\frac{x}{h}} = \frac{y}{h} \cdot \frac{h}{x} = \frac{y}{x}.$$

1.3 Relação Fundamental da Trigonometria

A fórmula fundamental da trigonometria surge como um caso particular do teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = h^2.$$

Como a hipotenusa é diferente de zero, podemos dividir ambos os membros desta igualdade por h^2, ou seja,

$$\frac{x^2}{h^2} + \frac{y^2}{h^2} = 1$$

$$\left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h}\right)^2 = 1,$$

usando as definições de seno e cosseno, acima definidas, temos,

$$(sen(\alpha))^2 + (cos(\alpha))^2 = 1,$$

isto é,

$$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1.$$

Portanto, $sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$ é a fórmula fundamental da trigonometria.

1.4 Seno, Cosseno e Tangente como Funções Reais de Variável Real

Inicialmente definimos as funções seno, cosseno e tangente de forma a atender as condições implicitas no triângulo retângulo, ou seja, atendendo a que seus argumentos, o ângulo α, estivesse entre $0°$ e $90°$, pois caso contrário não teriamos um triângulo retângulo.

Façamos algumas análises:

(1) se o ângulo α for igual a zero grau, teríamos um segmento de reta;

(2) se o ângulo α for igual a noventa graus, teríamos duas semi-retas com os pontos de origem ligados por um segmento de reta, com o qual são perpendiculares.

Temos, pois, que as funções trigonométricas, tal como anteriormente definidas para o triângulo retângulo, têm o domínio restringido a $0° < \alpha < 90°$, ou se usarmos radianos, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Para que possamos ter as funções trigonométricas definidas em toda reta real, devemos recorrer ao *círculo trigonométrico*. Ele é definido por uma circunferência de raio unitário centrada na origem dos eixos coordenados.

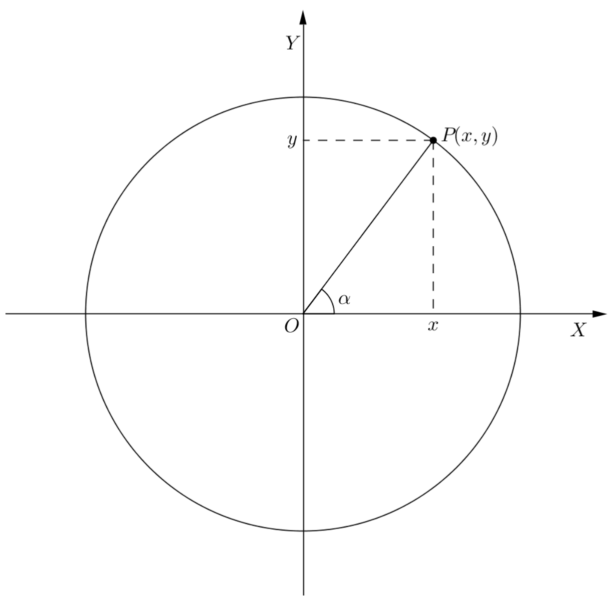


Figura 1.3: O círculo trigonométrico e um ponto P sobre ele.

Observando a Figura 1.3, notamos o triângulo retângulo OPx. Como o raio (r) da circunferência é igual a 1 (um), todos os pontos da circunferência distam da origem da mesma distância,

$r = 1$. Sendo assim, o segmeto de reta com extremidades nos pontos O e P tem comprimento igual a 1 (um), ou seja, $\overline{OP} = 1$.

Usando o triângulo OPx, temos que:

$$sen(\alpha) = \frac{y}{r}$$

e

$$cos(\alpha) = \frac{x}{r},$$

sendo que r é a hipotenusa. Dessa forma, podemos definir o seno e o cosseno do ângulo α, para todos os valores de α, e não somente para aqueles entre $0°$ (ou 0 radiano) e $90°$ (ou $\frac{\pi}{2}$ radianos), definidos anteriormente. Como no círculo trigonométrico o raio é $r = 1$, temos então que as coordenadas do ponto P podem ser escritas como

$$y = sen(\alpha)$$

e

$$x = cos(\alpha),$$

ou seja,

$$P(x, y) = P(cos(\alpha), sen(\alpha)).$$

Analisando algumas situações na Figura 1.3, temos:

(1) $sen(\frac{\pi}{2}) = 1$ e $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$

(2) se o ângulo α for igual a π radianos (meia-volta no cículo trigonométrico), temos

$$sen(\pi) = 0$$

e

$$cos(\pi) = -1,$$

obtemos o ponto $P(x, y) = (0, -1)$.

(3) quando temos $\alpha = 2\pi$ radianos (uma volta completa no círculo, começando em $\alpha = 0$), voltamos a ter o ponto $(0, 1)$. Portanto, $sen(2\pi) = 0$ e $cos(2\pi) = 1$.

Continuando com este raciocínio e caminhando com o ponto P sobre o círculo trigonométrico, verificamos que as funções se repetem cada vez que adicionamos 2π radianos ao argumento (ângulo), isto é, são periódicas. Definimos assim, as funções seno e cosseno para os ângulos positivos, sendo que os ângulos positivos são construídos no sentido anti-horário. Para completar o domínio na reta real, basta raciocinar de forma análoga ao caso dos ângulos positivos considerando a construção dos ângulos no sentido horário. As duas funções ficam então definidas para todos os valores da reta real.

Para definirmos a função tangente em toda a reta real, vamos considerar a Figura 1.4. Recordemos que a definição de tangente é:

$$tg(\alpha) = \frac{y}{x}.$$

Fazendo análise dos triângulos OPx e $OP'x'$, temos que estes são semelhantes pois o ângulo α é comum a ambos os triângulos; como os lados Px e $P'x'$ são paralelos, os ângulos formados com o eixo dos x são iguais; e consequentimente os ângulos dos vértices P e P' são iguais. Dessa forma, os triângulos são semelhantes pelo caso AAA. Portanto, podemos definir a tangente do angulo α da forma anterior, sendo x e y as coordenadas do ponto $P(x,y) = (x,y) = (cos(\alpha), sen(\alpha))$. Recordamos que estamos trabalhando com uma circunferência de raio $r = 1$.

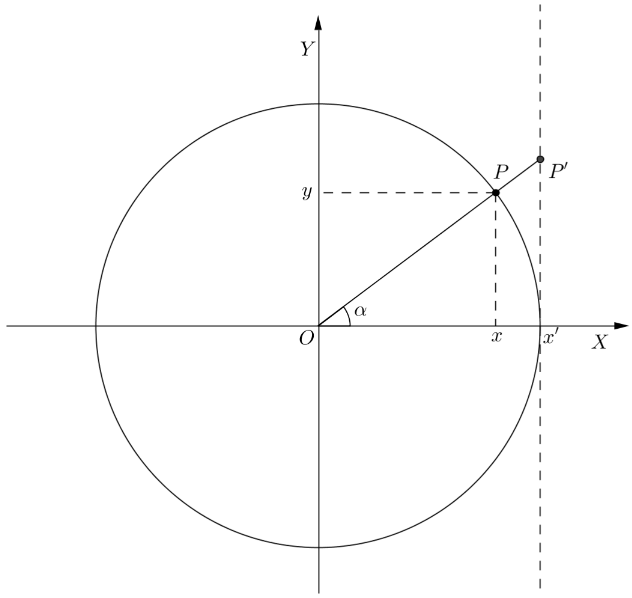


Figura 1.4: O círculo trigonométrico, um ponto P sobre ele e um ponto P'.

A tangente do ângulo α é assinalada pela "altitude"do ponto P', ou seja, a sua ordenada. Ora, o ponto P' tem coordenadas $P' = (1, tg(\alpha))$. Usando o fato de que os triângulos são semelhantes e, além disso, possuem os lados proporcionais. Portanto, temos que é igual o quociente de comprimentos dos lados para os dois triângulos. Observando o triângulo contido na circunferência, temos que $tg(\alpha) = \frac{y}{x}$, e dentro da circunferência temos $-1 \leq x \leq 1$. Ora, o ponto P' no segundo triângulo tem abscissa $x = 1$, pois situa-se sobre a reta vertical que passa por $x = 1$ no eixo X. Sendo $x = 1$, temos então $y = x \cdot tg(\alpha)$. Para ângulos tais que $y > x$, temos que $tg(\alpha) > 1$. Como $x = 1$ em P', segue:

$$tg(\alpha) > 1 \Rightarrow x \cdot tg(\alpha) > 1 \Rightarrow y = x \cdot tg(\alpha) > 1.$$

Nesse caso, a "altura"do ponto P' nos dá uma medida de $tg(\alpha)$. O mesmo raciocínio é utilizado para definirmos os valores negativos.

É importante observar que esta função não pode ser definida para todos os valores da reta real. De fato, quando $\alpha = \frac{\pi}{2}$, a "altura"de P' é infinita (ou seja, $tg(\alpha) = \infty$), e nesse caso a função não fica bem definida nesse ponto. O mesmo se passa para $\frac{3\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{2}$ e assim por diante, ou seja, para qualquer ângulo da forma $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$, sendo k um número inteiro. Portanto, o domínio desta função deve necessariamente excluir todos estes pontos em que a função não fica bem definida; os restantes dos pontos são permitidos.

1.5 Algumas Propriedades das Funções Trigonométricas

Usando as definições dadas acima, podemos deduzir a maioria das fórmulas que usualmente aparecem na trigonometria e algumas das propriedades das funções trigonométricas são enunciadas na proposição a seguir. Para a demonstração desta proposição, utilizaremos o fato das funções seno, cosseno e tangente serem periódicas nas quais seno e cosseno possuem período 2π e a tangente tem o período dado por π.

Proposição 1.1. *Para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, temos:*

(1) $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$.

(2) $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$.

(3) $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)$.

(4) $sen(\alpha+\beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)$.

(5) $cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha)$.

(6) $sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha)$.

Demonstração:

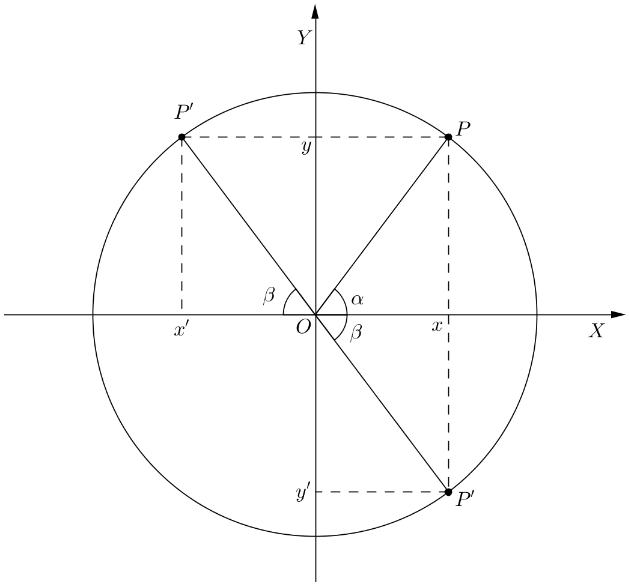


Figura 1.5: Acerca das propriedades das funções trigonométricas.

(1) Seja $\alpha = -\beta$, isto é, $\alpha =\mid \beta \mid$, e $\beta = - \mid \alpha \mid = -\alpha$. Ora, $sen(\alpha) = \frac{y}{r}$. Projetando o ângulo β sobre o eixo dos Y, então vem que $sen(\beta) = \frac{y'}{r} < 0$, pois $y' < 0$ (Figura 1.5). Observemos que, $sen(\beta) = \frac{y'}{r}$ e por conseguinte

$$sen(\alpha) = \frac{y}{r} = -\frac{y'}{r} = -sen(\beta) = -sen(-\alpha)$$

$$sen(\alpha) = -sen(-\alpha)$$

$$sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$$

Portanto, $sen(-\alpha) = -sen(\alpha)$.

(2) Seja $\alpha = -\beta$. Ora, $cos(\alpha) = \frac{x}{r}$ e $cos(\beta) = \frac{x'}{r}$. Na projeção feita na Figura 1.5, observamos que $x = x'$. Sendo assim,

$$cos(\alpha) = \frac{x}{r} = \frac{x'}{r} = cos(\beta) = cos(-\alpha)$$

$$cos(\alpha) = cos(-\alpha).$$

Portanto, temos que a função cosseno satisfaz esta propriedade.

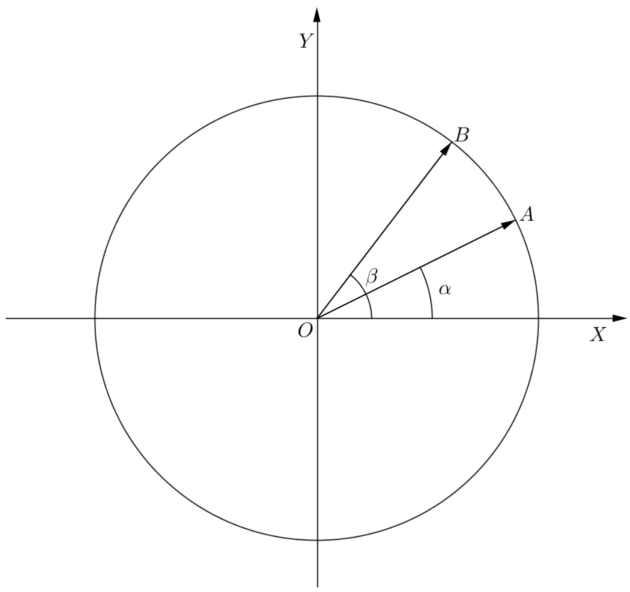


Figura 1.6: Círculo trigonométrico, de raio $r = 1$.

(3) Para demonstrar este item, usaremos o conhecimento de produto interno que pode ser encontrado em [36]. Sejam $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$ dois vetores com origem no ponto O e extremidade no ponto A e B e que fazem ângulo α e β com o eixo dos X, respectivamente. Pela definição de produto interno de dois vetores, temos que

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \| \overrightarrow{OA} \| \,.\, \| \overrightarrow{OB} \| \,.cos(\beta - \alpha),$$

e $\beta - \alpha$ é um ângulo que $\overrightarrow{OB}$ faz com $\overrightarrow{OA}$. O ponto A, pela Figura 1.6, tem coordenadas $(cos(\alpha), sen(\alpha))$, e o ponto B tem coordenada $(cos(\beta), sen(\beta))$. Visto que os vetores possuem origem no ponto $O = (0,0)$, as coordenadas dos vetores coincidirão com as coordenadas dos pontos A e B. Com isto em mente, o produto interno dos dois vetores pode ainda ser escrito como:

$$(cos(\alpha), sen(\alpha)) \cdot (cos(\beta), sen(\beta)) = cos(\alpha) \cdot sen(\beta) + sen(\alpha) \cdot cos(\beta)$$

Fazendo equivaler as duas expressões para o produto interno dos dois vetores, e notando que $\| \overrightarrow{OA} \| = \| \overrightarrow{OB} \| = 1$ (visto que o círculo trigonométrico tem raio $r = 1$), temos finalmente:

$$cos(\beta - \alpha) = cos(\alpha)sen(\beta) + sen(\alpha)cos(\beta).$$

Fazendo agora,

$$cos(\beta + \alpha) = cos(\beta - (-\alpha)) = cos(-\alpha)sen(\beta) + sen(-\alpha)cos(\beta).$$

Usando o fato de que $sen(-\alpha) = -\text{sen}(\alpha)$ e $cos(-\alpha) = cos(\alpha)$, demonstrado anteriormente, temos:

$$cos(\beta + \alpha) = cos(\alpha)sen(\beta) + (-sen(\alpha))cos(\beta)$$

$$cos(\beta + \alpha) = cos(\alpha)sen(\beta) - sen(\alpha)cos(\beta).$$

Portanto, mostramos que $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)sen(\beta) - sen(\alpha)cos(\beta)$ é válida.

(4) Para demonstrar esta relação, partiremos da ideia de $sen(\beta - \alpha)$. Para isso, iremos fazer uso da definição de dois ângulos complementares (isto é, cuja soma é $\frac{\pi}{2}$ radianos). Observando a Figura 1.7, temos que o seno de um ângulo é igual ao cosseno do outro ângulo. Supondo $h = 1$, o comprimento do cateto adjacente a α é $cos(\alpha)$. O cateto adjacente ao ângulo α é simultaneamente o cateto oposto ao ângulo β. Portanto, $cos(\alpha) = sen(\beta)$. Igualmente, $sen(\alpha) = cos(\beta)$, como se vê na Figura 1.7. Fazendo uso da relação $sen(\beta) = cos(\frac{\pi}{2} - \beta)$, temos que:

$$\begin{aligned} sen(\beta - \alpha) &= cos(\frac{\pi}{2} - (\beta - \alpha)) \\ &= cos(\alpha - (\beta - \frac{\pi}{2})) \\ &= cos(\alpha) \cdot cos(\beta - \frac{\pi}{2}) + sen(\alpha) \cdot sen(\beta - \frac{\pi}{2}) \\ &= cos(\alpha) \cdot [cos(\beta) \cdot cos(\frac{\pi}{2}) + sen(\beta)sen(\frac{\pi}{2})] + sen(\alpha) \cdot sen(\beta - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

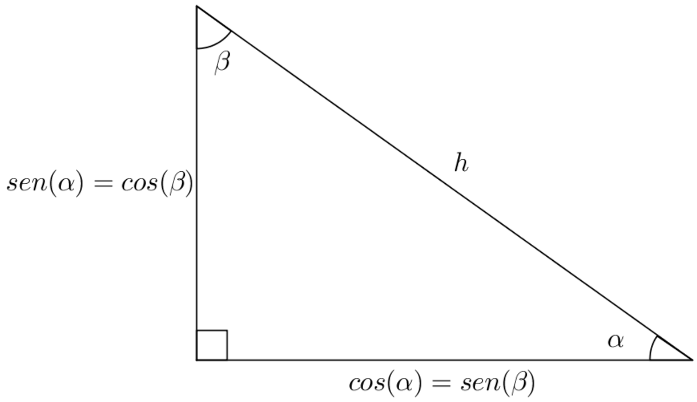


Figura 1.7: Relações trigonométricas para dois ângulos suplementares, α e β.

Ora, $cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ e $sen(\frac{\pi}{2}) = 1$. O seno tem período 2π (isto é, $sen(\theta) = sen(\theta + 2\pi)$), e por conseguinte $sen(\beta - \frac{\pi}{2}) = sen(\beta + \frac{3\pi}{2})$. Usando o recurso de redução ao primeiro quadrante, temos: $sen(\frac{\pi}{2}) = sen(\beta + \frac{3\pi}{2}) = -cos(\beta)$.

Assim,

$$sen(\beta - \alpha) = cos(\alpha) \cdot [cos(\beta) \cdot 0 + sen(\beta) \cdot 1] + sen(\alpha)(-cos(\beta))$$

$$sen(\beta - \alpha) = cos(\alpha)sen(\beta) - sen(\alpha)cos(\beta)$$

Para concluir a demonstração, basta fazer:

$$sen(\beta + \alpha) = sen(\beta - (-\alpha))$$

$$sen(\beta + \alpha) = cos(-\alpha)sen(\beta) - sen(-\alpha)cos(\beta)$$

$$sen(\beta + \alpha) = cos(\alpha)sen(\beta) + sen(\alpha)cos(\beta)$$

Portanto, $sen(\alpha + \beta) = sen(\alpha)cos(\beta) + sen(\beta)cos(\alpha)$.

(5) Neste caso, basta fazer $\alpha = \beta$ e utilizar a igualdade provada no item (3). Para o arco $\alpha + \beta = 2\alpha$, temos:

$$cos(2\alpha) = cos(\alpha)cos(\alpha) - sen(\alpha)sen(\alpha)$$

$$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sen^2(\alpha).$$

(6) Usando o mesmo raciocínio do item anterior e usando a igualdade do item (4), temos:

$$sen(2\alpha) = sen(\alpha)cos(\alpha) + sen(\alpha)cos(\alpha)$$

$$sen(2\alpha) = 2sen(\alpha)cos(\alpha).$$

No próximo capítulo, iremos realizar um estudo a respeito de alguns conceitos básicos de números complexos, que será de suma importância ao desenvolvimento das funções trigonométricas de variável complexa, as quais mostraremos a existência de valores de seno e cosseno maiores que 1.

CAPÍTULO 2

NÚMEROS COMPLEXOS

2.1 Origem dos Números Complexos

O Desenvolvimento dos números se deu ao longo da história de forma gradativa, de maneira a atender as necessidades da época. O que não é diferente para os números complexos. Em algumas situações em que envolviam equações do 2º grau, como $x^2 + 1 = 0$, os matemáticos diziam que tais equações não possuiam solução, pois até então não se admitia raiz quadrada de números negativos. Essas conclusões ocorreram até o século XVI.

Entretanto, a principal motivação dos números complexos foi a equação do 3º grau, pois ao trabalhar com essas equações, alguns matemáticos observaram que os números reais não eram suficientes para resolve-las, daí a necessidade de novos números. Para solucionar tais necessidades, alguns matemáticos europeus, principalmente os italianos, desenvolveram pesquisas, e até realizaram disputas.

Antes das disputas realizadas entres os matemáticos, alguns pesquisadores já realizavam estudos a cerca das resoluções de problemas envolvendo equações do 3º grau, porém, muitos não publicavam seus trabalhos. Esse tipo de comportamento pode ser observado de duas maneiras: alguns matemáticos não publicavam seus estudos para desafiar os outros matemáticos, para se mostrar algumas vezes mais inteligentes; ou não publicavam seus estudos devido ao medo, pois se outro matemático encontrasse algum erro em sua teoria, colacaria em risco a notoriedade da teoria.

Dessa forma, alguns estudos avançaram no intuito de resolver a problemática das equações do 3º grau, e nesse contexto, o jovem Niccolò Fontana, conhecido como Tartaglia, foi desafiado a resolver várias equações do 3º grau. Para surpresa, Tartaglia conseguiu resolver todos os problemas, com muita dedicação e esforço, e, além disso, criou um método para a resolução de equações desse tipo. Tartaglia venceu todas as disputas propostas a ele.

Um fato interessante dentro da história dos números complexos, deve-se a esta descoberta de Tartaglia. A famosa "Fórmula de Cardano", é fruto dos trabalhos de Tartaglia, pois ao saber que Tartaglia tinha conseguido resolver as equações de 3º grau, Girolamo Cardano insistiu para que Tartaglia lhe desse a fórmula de resolução. Depois de muita insistência, Tartaglia resolveu revelar a solução para Cardano, sendo que Cardano jurava que não iria divulgar o resultado. Porém, Cardano não cumpriu o acordo, e publicou a resolução de uma equação do 2º grau usando de maneira similar a resolução de Tartaglia, e apenas mencionou, de maneira bem simples, o nome de Tartaglia em sua publicação. E assim, tal método de resolução ficou conhecido como "Fórmula de Cardano".

Após esse grande embate, tem-se um novo problema inquietante trazido por Cardano, que na época, era conhecido como números "sofisticados", ou seja, as raízes quadradas de números negativos. Cardano chegou a concluir que tais números seriam um número "tão sutil quanto inútil". Com o desenvolvimento de estudos posteriores, conseguiu-se provar que estes números não eram tão inúteis como Cardano achava (ver,[5]).

Com a utilização dos números complexos, fez-se necessário a simplificação da sua escrita. Esta simplificação deve-se as contribuições de Leonhard Euler, que criou o símbolo i para representar a raiz quadrada de -1. Uma outra contribuição dada por Euler, é que os números complexos também possuiam uma parte real, ou seja, um número complexo seria do tipo: $z = a + ib$, onde a e b são números reais e $i^2 = -1$. Porém, esta contribuição só foi aceita depois que Gauss a apresentou. Além disso, Euler mostrou que os números complexos são um corpo fechado, pois, como veremos a seguir, as operações de soma e multiplicação realizadas com os elementos deste conjunto, resultam em elementos do próprio conjunto (ver, [5, 18]).

Além dos estudos a cerca das manipulações algébricas, também foram desenvolvidos trabalhos buscando representar os números complexos de forma geométrica. Os trabalhos publicados por Jean Argand já faziam uma correspondência objetiva entre os números compelxos e os pontos do plano. Mas só depois das contribuições de Gauss é que foi aceita a representação geométrica, pois Gauss pensou nos números $a + b\sqrt{-1}$ como coordenadas de um ponto do plano cartesiano, tendo assim a representação do número complexo $a + b\sqrt{-1} = (a, b)$. Além disso, deu uma intrepetação geométrica para a adição e multiplicação dos símbolos. É importante lembrarmos que, a expressão números complexos foi utilizada a partir de Gauss em 1832.

2.2 Números Complexos

A definição dos números complexos adotada aqui será a do matemático irlandês William R. Hamilton de 1837, embora muito anteriormente vários matemáticos já houvessem trabalhado com os números complexos como pontos no plano (ver, [35]).

2.2.1 Definição

Um número complexo z é um par ordenado de números reais $z = (x, y)$ satisfazendo as seguintes regras de manipulação para a soma e o produto:

(1) $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

(2) $z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + y_1 x_2)$.

Estas duas operações, a da soma e a do produto, gozam das seguintes propriedades:

(3) comutatividade: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ e $z_1 z_2 = z_2 z_1$.

(4) associatividade: $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ e $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$.

(5) $(0, 0)$ é o elemento neutro aditivo: $z + (0, 0) = z$ para todo z complexo.

(6) $(1, 0)$ é a identidade multiplicativa: $z(1, 0) = z$ para todo z complexo.

(7) todo $z = (x, y)$ tem um simétrico aditivo, $-z = (-x, -y)$, ou seja, $(x, y) + (-x, -y) = (0, 0)$.

(8) todo $z = (x, y) \neq (0, 0)$ tem um inverso multiplicativo, o número $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$, ou seja, $(x, y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = (1, 0)$.

(9) distributividade do produto em relação à soma: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$.

Todas essas propriedades decorrem de (1), (2) e do fato de que elas são válidas para a soma e o produto de números reais. Um conjunto munido de uma soma e de um produto para os quais valem (3) a (9) é chamado de *corpo*. Concluímos assim, que os números complexos formam um corpo, que é representado pelo símbolo $\mathbb{C}$.

Ao observarmos os números complexos da forma $a + i0$, percebemos que eles se comportam, com relação à adição e à multiplicação, do mesmo modo que os números reais a; em outras palavas, fazendo corresponder o número complexo $a + i0$ ao número real a, então a soma $a + b$ corresponderá $(a + b) + i0$, que é o mesmo que $(a + i0) + (b + i0)$; e ao produto ab corresponderá $ab + i0$, que é o mesmo que $(a + i0)(b + i0)$. Isso quer dizer que somar e multiplicar números reais equivale, pela correspondência $a \longmapsto a + i0$, a somar e multiplicar, respectivamente, os números complexos correspondentes, o que nos permite identificar o número real a com o número complexo $a + i0$, já que, do ponto de vista da adição e da multiplicação, seu comportamento é o mesmo. Deste modo, os números complexos se apresentam como uma extensão natural dos números reais. Portanto, o corpo $\mathbb{R}$ dos números reais é visto como um subcorpo de $\mathbb{C}$.

O número complexo $(0, 1)$ é chamado de *unidade imaginária* e representado pelo símbolo i. A propriedade notável que o número i satisfaz é a seguinte:

$$i^2 = ii = (0, 1)(0, 1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

e nesse sentido podemos escrever $i = \sqrt{-1}$. Agora, $(y, 0)(0, 1) = (0, y)$ e daí,

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (y, 0)(0, 1),$$

isto é, podemos representar $z = x + yi$. Assim todo número complexo $z = (x, y)$ também pode ser escrito como $z = x + iy$. Ambas as notações serão adotadas de agora em diante.

2.2.2 O Plano Complexo

Dado um número complexo $z = x + iy$, sua parte real x é denotada por $Re(z)$, e sua parte imaginária y, por $Im(z)$. O plano complexo é o conjunto das representações de todos os números complexos $z = x + iy$ pelos pontos $P = (x, y)$ do plano. Além disso, o eixo das abscissas passa a ser tratado como *eixo real* e o eixo das ordenadas como sendo *eixo imaginário*.

A representação dos números complexos por pontos do plano é muito útil e de uso frequente. Por meio dela, o número complexo $z = x + iy$ é identificado com o ponto (x, y), ou com o vetor Oz de componentes x e y (Figura 2.1). As conhecidas regras do paralelogramo para a soma e subtração de vetores se aplicam, então, no caso de soma e subtração de números complexos (vide Figura 2.2(a) e 2.2(b)).

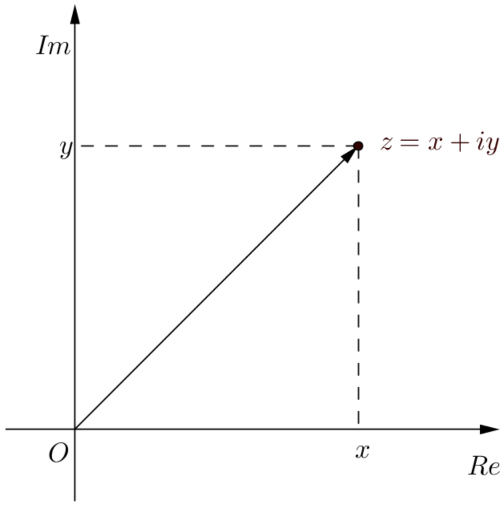


Figura 2.1: Representação de número complexo no plano.

2.2.3 Módulo e Complexo Conjugado

Definimos o *módulo, valor absoluto* ou *norma* de um número complexo $z = x + iy$ como sendo o número não-negativo $\mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$. Como se vê, ele é a distância do ponto z à origem, como observamos na Figura 2.3.

O *complexo conjugado* de $z = x + iy$ é definido como sendo $\bar{z} = x - iy$. A Figura 2.4 ilustra exemplos de complexos conjugados.

Em termos do módulo e do conjugado, temos as seguintes propriedades:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = (x^2 + y^2) + i(-xy + yx) = x^2 + y^2,$$

isto é, $z\bar{z} = \mid z \mid^2$. Esta propriedade permite calcular o *quociente* $z = z_1/z_2$ de dois números complexos z_1 e z_2, $z_2 \neq 0$, que é definido pela condição $zz_2 = z_1$. Para isso, basta multiplicar o numerador e o denominador pelo complexo conjugado do denominador. Em geral, com $z_1 = x_1 + iy_1$ e $z_2 = x_2 + iy_2$, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Além disso, temos:

(1) $\mid z \mid = \mid \bar{z} \mid$

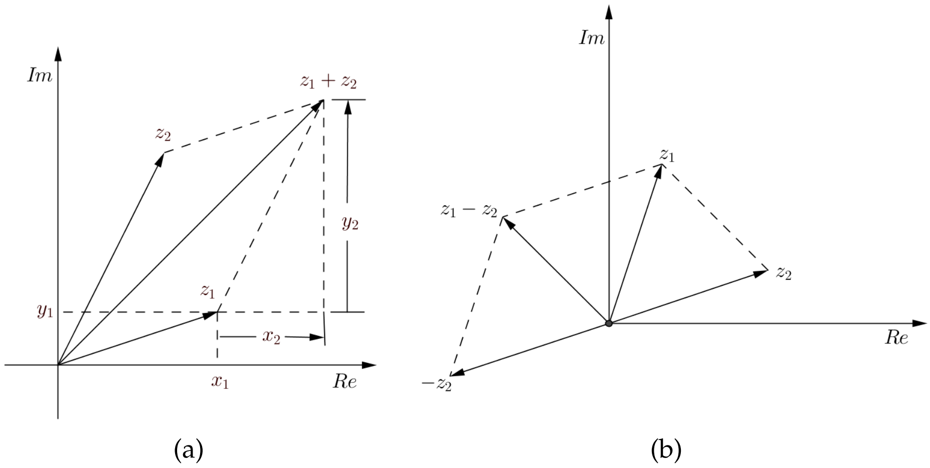


Figura 2.2: Regra do paralelogramo: (a) soma e (b) subtração.

(2) $Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

(3) $Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

(4) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

(5) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1 z_2}$

Usando a última dessas igualdades obtemos

$$| z_1 z_2 |^2 = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 z_2 \overline{z_1 z_2} = z_1 \overline{z_1} z_2 \overline{z_2} = | z_1 |^2 | z_2 |^2$$

ou seja,

$$| z_1 z_2 | = | z_1 || z_2 | \; .$$

Demonstração.

(1) De fato, considerando $z = x + iy$ e $\overline{z} = x - iy$, temos que por definição

$$| z | = \sqrt{x^2 + y^2}$$

e

$$| \bar{z} | = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Portanto, $| z | = | \overline{z} |$.

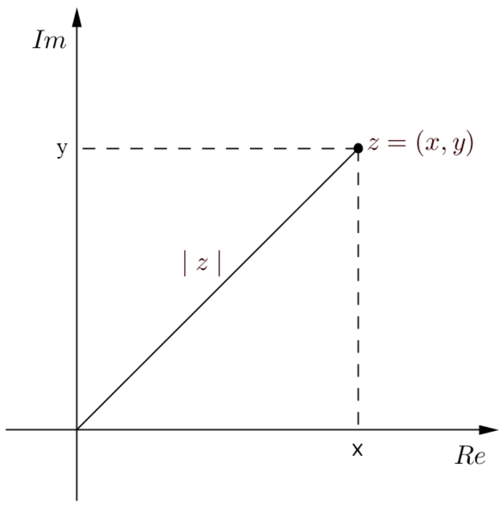


Figura 2.3: Representação do módulo de um número complexo.

(2) Observando um número complexo $z = x + iy$ qualquer, temos que sua parte real é dada por x. Sendo assim, façamos:

$$\frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{x + iy + (x - iy)}{2} = \frac{x + iy + x - iy}{2} = \frac{2x}{2} = x = Re(z).$$

Portanto, temos que a parte real de um número complexo z pode ser escrita por $\frac{z+\overline{z}}{2}$.

(3) Observando um número complexo $z = x + iy$ qualquer, temos que sua parte imaginária é dada por y. Sendo assim, façamos:

$$\frac{z - \overline{z}}{2i} = \frac{x + iy - (x - iy)}{2i} = \frac{x + iy - x + iy}{2i} = \frac{2iy}{2i} = y = Im(z).$$

Portanto, temos que a parte imaginária de um número complexo z pode ser escrita por $\frac{z-\overline{z}}{2i}$.

(4) Considerando agora $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $\overline{z_1} = x - iy$ e $\overline{z_2} = x_2 - iy_2$, temos que

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + iy_1 + (x_2 + iy)} = \overline{(x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)} =$$

$$= (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2) = x_1 - iy_1 + x_2 - iy_1 = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

Portanto, $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$.

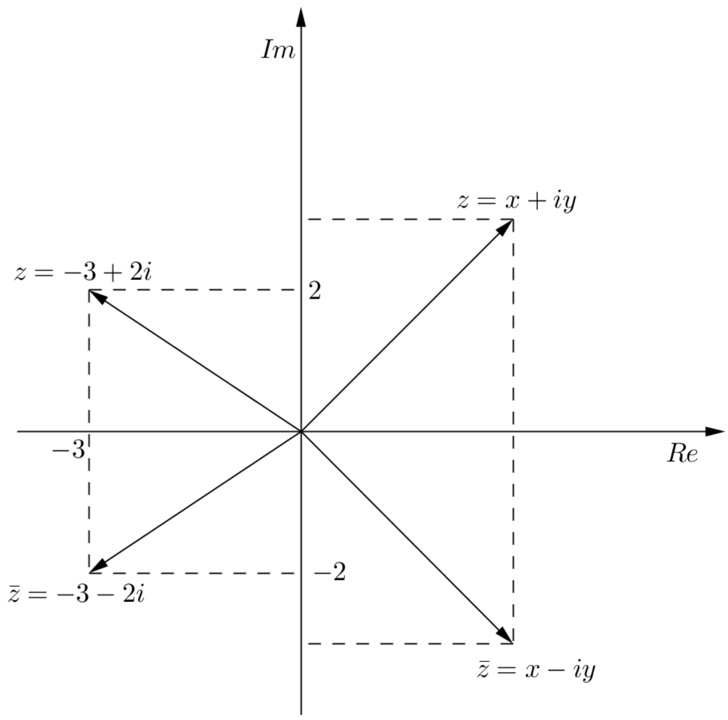


Figura 2.4: Exemplos de complexos conjugado.

(5) $\overline{z_1 z_2} = \overline{(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)} = x_1x_2 - y_1y_2 - i(x_1y_2 + y_1x_2) = x_1x_2 + y_1y_2i^2 - ix_1y_2 - iy_1x_2 = (x_1 - iy_1)(x_2 - -iy_2) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

Portanto, $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

2.2.4 Representação Polar

Como um número complexo é definido por um par ordenado de números reais, temos imediatamente que um tal número está identificado com um ponto do plano cartesiano.

Uma outra identificação, muito útil, é obtida através das *coordenadas polares* (r, θ). Considerando um ponto $(x, y) \neq (0, 0)$ do plano, então a coordenada r desse ponto é sua distância à origem e a coordenada θ é o ângulo determinado pelo segmento de reta que une o ponto à origem e o semi-eixo positivo dos x, medido no sentido anti-horário (medida do ângulo em *radianos*).

Pelas relações trigonométricas do triângulo retângulo, as coordenadas cartesianas e polares estão relacionadas por (veja a Figura 2.5):

$$sen(\theta) = \frac{y}{r}$$

e

$$cos(\theta) = \frac{x}{r},$$

ou seja,

$$y = rsen(\theta)$$

$$x = rcos(\theta)$$

Logo, um número complexo não nulo $z = x + yi = (x, y)$ se escreve

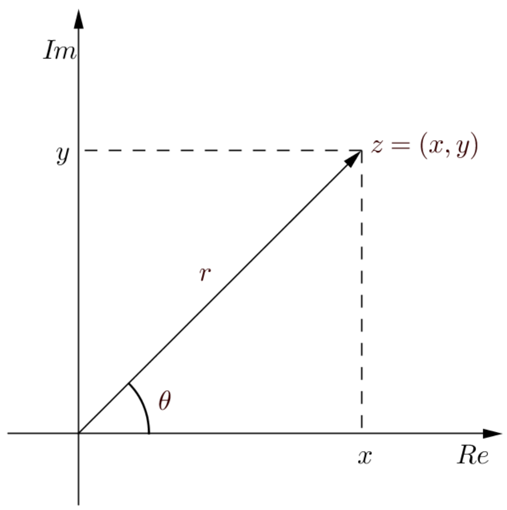


Figura 2.5: Representação Polar.

$$z = rcos(\theta) + irsen(\theta) = r(cos\theta + isen\theta),$$

sendo que $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \mid z \mid$. Esta é a chamada *representação polar* ou *forma polar* ou *forma trigonométrica* de um número complexo.

Qualquer valor de θ para o qual a igualdade acima se verifica é chamado *um argumento* de z e usaremos a notação $\theta = arg(z)$. Observemos que θ não é único já que, se a igualdade é verdadeira para um valor de θ, também o é para $\theta + 2k\pi$, k um número inteiro arbitrário, pois as funções seno e cosseno são periódicas de mesmo período, e a soma de funções periódicas de mesmo período também é periódica. Mas podemos determinar θ de maneira única exigindo, por exemplo, que $0 \leq \theta < 2\pi$ ou que $-\pi < \theta \leq \pi$.

2.2.5 Fórmulas do Produto e do Quociente

De posse da representação polar, vamos deduzir uma regra muito conveniente para a multiplicação. Sejam

$$z_1 = r_1(cos(\theta_1) + isen(\theta_1))$$

e

$$z_2 = r_2(cos(\theta_2) + isen(\theta_2))$$

dois números complexos quaisquer. Então,

$$\begin{aligned} z_1z_2 &= r_1r_2(cos(\theta_1) + isen\theta_1)(cos(\theta_2) + isen(\theta_2)) \\ &= r_1r_2[(cos(\theta_1)cos(\theta_2) - sen(\theta_1)sen(\theta_2)) + i(sen(\theta_1)cos(\theta_2) + cos(\theta_1)sen(\theta_2))], \end{aligned}$$

isto é,

$$z_1z_2 = r_1r_2[cos(\theta_1 + \theta_2) + i(sen(\theta_1 + \theta_2))].$$

(usando as fórmulas de adição para seno e o cosseno).

Vemos assim que o *produto de dois números complexos é o número cujo módulo é o produto dos módulos dos fatores e cujo argumento é a soma dos argumentos dos fatores*.

Vamos deduzir agora, um resultado análogo para a divisão. Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{cos(\theta) + isen(\theta)} &= \frac{cos(\theta) - isen(\theta)}{(cos(\theta) + isen(\theta))(cos(\theta) - isen(\theta))} \\ &= \frac{cos(\theta) - isen(\theta)}{cos^2(\theta) + sen^2(\theta)} \\ &= cos(\theta) - isen(\theta), \end{aligned}$$

temos:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{cos(\theta_1) + isen(\theta_1)}{cos(\theta_2) + isen(\theta_2)} \\ &= \frac{r_1}{r_2}(cos(\theta_1) + isen(\theta_1))(cos(\theta_2) - isen(\theta_2)) \\ &= \frac{r_1}{r_2}[(cos(\theta_1)cos(\theta_2) + sen(\theta_1)sen(\theta_2)) + i(sen(\theta_1)cos(\theta_2) - cos(\theta_1)sen(\theta_2))] \end{aligned}$$

Portanto, usando as fórmulas de subtração de seno e cosseno, temos:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\theta_1 - \theta_2) + i(sen(\theta_1 - \theta_2))],$$

isto é, *para dividir números complexos basta fazer o quociente dos módulos e a diferença dos argumentos*.

2.3 A Exponencial

Nesta seção iremos obter a exponencial e^z de um número complexo z e apresentaremos algumas de suas propriedades.

Para definirmos a exponencial complexa iremos, inicialmente, definir a série de Taylor e a série de MacLaurin. Essas definições serão feitas de modo que possamos estabelecer as relações que nos possibilite desenvolver a exponencial no caso complexo, portanto, não iremos tratar das condições inerentes ao cálculo de séries. Para um estudo mais aprofundado das séries ver [37].

2.3.1 Série de Taylor e série de MacLaurin

Definição 2.1. *Sejam I um intervalo real e $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^n em I, isto é, uma função que possui como sua enésima derivada em I, uma função contínua, e $n \in \mathbb{N}$. Seja $x_0 \in I$. Sabemos que*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots + f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x - x_0)^{(n-1)}}{(n-1)!} + R_n(x),$$

onde $R_n(x) = f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))\frac{(x-x_0)^n}{n!}$, sendo $0 < \theta < 1$. É a fórmula de Taylor de f, de ordem n, com resto de Lagrange, em torno do ponto x_0.

Suponhamos que $f \in C^\infty(I)$. Chama-se série de Taylor de f em x_0 à série de potências

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Se $x_0 = 0 \in I$, a série de Taylor designa-se por série de MacLaurin e escreve-se

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

De posse do conhecimento das funções trigonométricas, da função exponencial e^x e, além disso, dos conhecimentos dos fundamentos do cálculo diferencial e integral e em especial das séries de MacLaurin, podemos estabelecer a definição da exponencial complexa.

Temos que a expansão dessas funções em série de MacLaurin, válidos para todos os valores reais da variável x é:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots;$$

$$cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots;$$
$$sen(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots.$$

A constante de Euler e, que é um número irracional compreendido entre 2 e 3 ($e \approx 2,71828\ldots$), é dada pela série

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots,$$

que se obtém da primeira igualdade acima, fazendo $x = 1$.

Para calcularmos a exponencial complexa, tomaremos como base a função e^x. Para isso, iremos substituir x por iy ($y \in \mathbb{R}$) e realizando as operações necessárias (sem nos preocuparmos com qualquer significado preciso de convergência), obtemos:

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{2!} - i\frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \ldots$$

Reagrupando os termos desta série, de tal forma que os termos reais fiquem agrupados em um parêntese e os imáginarios em outro, obtemos:

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \ldots\right).$$

Em vista das igualdades do seno e cosseno definidas acima, temos:

$$e^{iy} = cosy + iseny.$$

Este resultado da exponencial é apenas para o caso particular, o caso de expoente puramente imaginário iy. Por outro lado, o cálculo da exponencial no caso de um expoente qualquer $z = x + iy$, é dada de maneira a manter a propriedade aditiva da exponencial real:

$$e^{x_1+x_2} = e^{x_1}e^{x_2}.$$

Assim a exponencial e^z, para um número complexo qualquer $z = x + iy$, mediante é dada por

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(cosy + iseny).$$

2.3.2 Propriedades da exponencial

De acordo com a definição que acabamos de construir da exponencial, e das propriedades das funções reais $senx$, $cosx$ e e^x, decorrem as seguintes propriedades da exponencial complexa:

(1) $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$;

(2) $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$;

(3) $(e^z)^n = e^{nz}$, n inteiro;

(4) $\mid e^z \mid = e^{Re(z)}$;

(5) $e^z \neq 0$ para todo z;

(6) e^z é uma função periódica de período $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, isto é, $e^{z+2k\pi i} = e^z$, para todo $k \in \mathbb{Z}$;

(7) $e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2k\pi i$, k inteiro.

Demonstração:

(1) Com a notação usual,

$$z_1 = x_1 + iy_1$$

e

$$z_2 = x_2 + iy_2,$$

obtemos, em vista da definição da exponencial, $e^z = e^x(cosy + iseny)$,

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(cosy_1 + iseny_1) \cdot e^{x_2}(cosy_2 + iseny_2) \\ &= e^{x_1+x_2}[(cosy_1cosy_2 - seny_1seny_2) + i(seny_1cosy_2 + cosy_1seny_2)] \\ &= e^{x_1+x_2}[cos(y_1 + y_2) + isen(y_1 + y_2)]. \end{aligned}$$

Observando esta igualdade e a definição $e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + iseny)$ com $x = 0$ (pois, a expressão entre cochetes acima é o caso particular da exponencial complexa), concluímos que

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{x_1+x_2}e^{i(y_1+y_2)} = e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2},$$

o que completa a demonstração.

(2) Temos, com $z = x + iy$,

$$\begin{aligned} e^{-z} &= e^{-x}e^{-iy} = \frac{1}{e^x}[cos(-y) + isen(-y)] \\ &= \frac{1}{e^x}(cosy - iseny) = \frac{1}{e^x(cosy + iseny)} \\ &= \tfrac{1}{e^{x+iy}} = \tfrac{1}{e^z}. \end{aligned}$$

(3) A fórmula $(e^z)^n = e^{nz}$, n inteiro, é imediata nos casos $n = 0$ e $n = 1$. Para $n = 2$, segue facilmente de $e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$; e em geral, para $n > 0$, é estabelecida por indução. Para isso, a equação é válida para $n = 0$, basta mostrar que o fato de ser válida para $n = k$ segue-se que é válida também para $n = k + 1$, $k \geq 0$. Supomos, então, que

$$(e^z)^k = e^{kz}.$$

Em consequência,

$$(e^z)^{k+1} = (e^z)^k(e^z) = e^{kz}e^z = e^{kz+z} = e^{(k+1)z}.$$

O caso $n < 0$ reduz-se facilmente ao caso $n > 0$. De fato, supondo $n < 0$, temos

$$(e^z)^n = \frac{1}{(e^z)^{-n}};$$

mas $-n > 0$, logo $(e^z)^{-n} = e^{-nz}$, portanto,

$$(e^z)^n = \frac{1}{e^{-nz}} = e^{nz}.$$

Isto completa a demonstração.

(4) Seja $z = x + iy$ um número complexo qualquer, temos que:

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} \\ &= e^x(cosy + iseny) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mid e^z \mid &= \mid e^x(cosy + iseny) \mid \\ &= \mid e^x \mid\mid cosy + iseny \mid \\ &= e^x\sqrt{cos^2x + sen^2y} \\ &= e^x\sqrt{1} \\ &= e^x. \end{aligned}$$

Portanto, $\mid e^z \mid= e^{Re(z)}$.

(5) Da propriedade (4), temos que qualquer que seja o número complexo $z = x + iy$, temos que $e^z \neq 0$, pois $e^{Re(z)} > 0$.

(6) Suponhamos que $e^{z+w} = e^z$, para todo $z \in \mathbb{C}$, isto é, $e^w = 1$, sendo $w = s + it, s, t \in \mathbb{R}$, temos por definição que:

$$\begin{aligned} e^w = e^s cost + ie^s sent &= 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^s cost = 1 \\ e^s sent = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e^s = 1 \\ sent = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} s = 0 \\ t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \end{aligned}$$

Assim $w = 2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$, ou seja, o período de e^z é $2k\pi i, k \in \mathbb{Z}$.

(7) $(\Leftarrow)$ Se $z = 2k\pi i$, então $e^z = e^0(cos2k\pi + isen2k\pi) = 1$. Pois, os arcos são múltiplos de 2π, e daí, temos que o cosseno será sempre igual a 1 (um), e o seno igual a 0 (zero). Portanto, $e^z = 1$.

$(\Rightarrow)$ Se $e^z = 1 \Leftrightarrow e^{z+z'} = e^{z'}, \forall z' \in \mathbb{C} \Rightarrow z = 2k\pi i$, por 6, $k \in \mathbb{Z}$.

Com esse estudo prévio, temos condições suficientes para generalizar o conceito da funções seno e cosseno no conjunto dos números complexos.

CAPÍTULO 3

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS COMPLEXAS

De acordo com o estudo feito nos Capítulos 1 e 2, iremos iniciar agora o estudo das *funções trigonométicas complexas de uma variável complexa*, isto é, das funções $f : D \to \mathbb{C}$ cujo domínio D está contido em $\mathbb{C}$. Essas funções trigonométricas fazem parte do objeto principal da Análise Complexa em uma variável.

Inicialmente iremos apresentar o conceito de funções de variável complexa, assim como algumas noções básicas associadas as essas funções. Em seguida, trataremos de forma especial as funções trigonométicas complexas, com o objetivo de mostrar as existência de seno e cosseno maiores que 1. Além disso, serão trabalhadas as propriedades referentes as funções trigonométricas.

3.1 Funções de Variável Complexa

Para definirmos funções de uma variável complexa, consideremos uma função do tipo $f : D \to \mathbb{C}$ cujo domínio D é um subconjunto de $\mathbb{C}$. Estas funções são chamadas de funções complexas de variável complexa. De agora por diante, sempre que considerarmos funções $f : D \to \mathbb{C}$ assumiremos implicitamente que $D \subset \mathbb{C}$, a menos que se diga explicitamente o contrário.

Sendo assim, seja D um conjunto de números complexos e seja f uma lei que faz corresponder, a cada elemento z do conjunto D, um único número complexo, que denotamos por $f(z)$. Nestas condições, diz-se que f é uma função com domínio D. O conjunto I dos valores

$w = f(z)$, correspondentes a todos os valores de z em D, é chamado a *imagem* de D pela função f; z é chamada *variável independente*, e w, a *variável dependente*.

Um fato importante é que uma função de variável complexa z pode assumir valores puramente reais. Por exemplo,

$$f(x) = \mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}, z = x + iy,$$

é uma função real da variável complexa z.

Muitas vezes é conveniente expressarmos uma função $f : D \to \mathbb{C}$ em termos de sua *parte real* e de sua *parte imaginária*, isto é, representarmos f na forma

$$f = u + iv,$$

onde

$$u(z) = Re[f(z)]$$

e

$$v(z) = Im[f(z)](z \in D).$$

É importante observar que as funções u e v são funções reais em D. Se escrevermos $z = (x, y)$ com $x, y \in \mathbb{R}$, podemos considerar u e v como funções reais de duas variáveis reais:

$$u(z) = u(x, y)$$

e

$$v(z) = v(x, y).$$

Por exemplo, se $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é dada por $f(z) = z + 1$, então as partes real e imaginária de f são $u(z) = u(x, y) = x + 1$ e $v(z) = v(x, y) = y$.

Para que uma função complexa $f : D \to \mathbb{C}$ seja limitada em um conjunto S de D, deve existir uma constante $M > 0$ tal que

$$\mid f(z) \mid \leq M$$

para todo $z \in S$. Por exemplo, a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada pela expressão $f(z) = z^2$ é limitada em $\{z \in \mathbb{C}; \mid z \mid \leq 1\}$, mas não é limitada em $\mathbb{C}$.

3.2 Função Exponencial Complexa

Nesta seção iremos abordar sobre algumas características entre a função exponencial complexa e a função exponencial real.

Relembremos do Capítulo anterior que a definição da função exponencial complexa é: $e : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(cosy + iseny).$$

Observemos que no caso particular de z ser um número real ($y = 0$), segue que

$$e^z = e^{x+0i} = e^x(cos0 + isen0) = e^x(1+0) = e^x$$

o que mostra que, quando o expoente é real, a exponencial complexa coincide com a exponencial real. Por outro lado,

$$\mid z \mid = e^x\sqrt{(cosy)^2 + (seny)^2} = e^x$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Como $e^x > 0$ obtemos $e^z \neq 0$.

Agora, recordando a representação polar

$$\begin{aligned} e^{z_1}e^{z_2} &= e^{x_1}(cosy_1 + iseny_1)e^{x_2}(cosy_2 + iseny_2) \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(cos(y_1+y_2) + isen(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2}(cos(y_1+y_2) + isen(y_1+y_2)) \\ &= e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{1}{e^z} &= \frac{1}{e^x(cosy + iseny)} \\ &= \frac{1}{e^x}(cosy - iseny) \\ &= e^{-x}(cos(-y) + isen(-y)) \\ &= e^{-z}. \end{aligned}$$

Por essas duas últimas propriedades, temos:

$$\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1}e^{-z_2} = e^{z_1-z_2}$$

Invocando as duas primeiras propriedades e usando indução

$$(e^z)^n = e^{nz}$$

qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$.

Até agora, as propriedades da exponencial complexa coincidiram com as da exponencial real. Dentre as diferenças entre a exponencial real e exponencial complexa, uma supreendente é que a exponencial complexa é *periódica*, de período imaginário $2\pi i$, pois

$$\begin{aligned} e^{z+2\pi i} &= e^x(cos(y+2\pi) + isen(y+2\pi)) \\ &= e^x(cosy + iseny) \\ &= e^z. \end{aligned}$$

Ainda destacamos a propriedade da conjugação. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} \overline{e^z} &= \overline{e^x(cosy + iseny)} \\ &= e^x(cosy - iseny) \\ &= e^x(cos(-y) + isen(-y)) \\ &= e^{\overline{z}} \end{aligned}$$

e portanto

$$| e^z |^2 = e^z\overline{e^z} = e^z e^{\overline{z}}.$$

3.3 Funções Cosseno e Seno Complexas

Como vimos a função exponencial é dada por

$$e^z = e^x(cosy + iseny), z = x + iy.$$

Agora se $z = iy$, temos que

$$e^{iy} = e^0(cosy + iseny) = cosy + iseny$$

e se $z = -iy$, ficamos com

$$e^{-iy} = e^0(cos(-y) + isen(-y)) = cosy - iseny.$$

Segue que

$$seny = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$$

e

$$cosy = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

A extensão das funções trigonométricas reais ao plano complexo é feita de forma natural usando as relações acima. Assim definimos

$$sen(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

e

$$cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

É importante observar que as outras funções trigonométricas, são definidas em termos das funções seno e cosseno pelas relações usuais.

Observemos também que, se z for um número real, as funções seno e cosseno complexas transformam-se nas funções seno e cosseno reais, visto que, se $z = x$, com x real, segue que

$$senz = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = senx$$

e

$$cosz = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = cosx$$

o que mostra que, quando z for real, as funções seno e cosseno complexa coincidem com as funções seno e cosseno reais, mostrando assim, que as funções estão bem definidas.

Em relação as identidades trigonométricas, a maioria das propriedades válidas para as funções trigonométricas reais permanecem válidas no caso complexo. Por exemplo, temos a seguinte

Proposição 3.1. *Para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$, temos:*

(1) $sen^2 z + cos^2 z = 1.$

(2) $sen(-z) = -sen(z).$

(3) $cos(-z) = cos(z).$

(4) $sen(z + w) = sen(z)cos(w) + sen(w)cos(z).$

(5) $cos(z + w) = cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w).$

(6) $sen(2z) = 2sen(z)cos(z).$

(7) $cos(2z) = cos^2(z) - sen^2(z).$

Demonstração:

(1) De fato,

$$\begin{aligned} cos^2z + sen^2z &= \left(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\right)^2 \\ &= \frac{e^{2iz}+2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4} - \frac{e^{2iz}-2e^{iz}e^{-iz}+e^{-2iz}}{4} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portanto, $sen^2z + cos^2z = 1$.

(2) De acordo com a definição da função seno complexa, temos:

$$sen(-z) = \frac{e^{-iz}-e^{iz}}{2i} = (-1)\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} = -sen(z).$$

Sendo assim, $sen(-z) = -sen(z)$.

(3) Utilizando a definição da função cosseno complexa, temos:

$$cos(-z) = \frac{e^{-iz}+e^{iz}}{2} = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = cos(z)$$

Concluímos assim, que $cos(-z) = cos(z)$.

(4) Para demonstrar esta igualdade, usaremos $sen(z)cos(w) + sen(w)cos(z)$ para obter $sen(z+w)$. Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} sen(z)cos(w) + sen(w)cos(z) &= \frac{1}{4i}[(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw}) + (e^{iw}-e^{-iw})(e^{iz}+e^{-iz})] \\ &= \frac{1}{4i}[e^{i(z+w)} - e^{-i(z-w)} + e^{i(z-w)} - e^{-i(z+w)} + \\ &+ e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} + e^{-i(z-w)} - e^{-i(z+w)}] \\ &= \frac{1}{2i}[e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}] \\ &= sen(z+w) \end{aligned}$$

Portanto, $sen(z+w) = sen(z)cos(w) + sen(w)cos(z)$.

(5) Seguindo o mesmo racíocinio da demonstração anterior, temos:

$$\begin{aligned}
cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w) &= \frac{1}{4}[(e^{iz}+e^{-iz})(e^{iw}+e^{-iw})+(e^{iz}-e^{-iz})(e^{iw}-e^{-iw})] \\
&= \frac{1}{4}[e^{i(z+w)}+e^{-i(z-w)}+e^{i(z-w)}+e^{-i(z+w)}+ \\
&+ e^{i(z+w)}-e^{-i(z-w)}-e^{i(z-w)}+e^{-i(z+w)}] \\
&= \frac{1}{2}[e^{i(z+w)}+e^{-i(z+w)} \\
&= cos(z+w).
\end{aligned}$$

O que mostra que $cos(z+w) = cos(z)cos(w) - sen(z)sen(w)$.

(6) Para demonstrar esta igualdade, basta substituir w por z em (4). Sendo assim, temos:

$$sen(z+z) = sen(2z) = sen(z)cos(z) + sen(z)cos(z) = 2sen(z)cos(z).$$

O que mostra a igualdade (pois o item (4) já foi demonstrado).

(7) Semelhante a demonstração anterior, substituindo w por z em (5), temos:

$$cos(z+z) = cos(2z) = cos(z)cos(z) - sen(z)sen(z) = cos^2 z - sen^2 z.$$

Mostrando que a igualdade é válida (pois o item (5) já foi demonstrado).

Uma outra forte analogia entre as funções seno e cosseno complexas e as funções seno e cosseno reais é que ambas são periódicas de período 2π, o que pode ser justificado pelas igualdades:

$$\begin{aligned}
sen(z+2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz+2\pi i}-e^{-iz-2\pi i}}{2i}
\end{aligned}$$

usando o fato de que a função exponencial é periódica de período $2\pi i$, ou seja, $e^{z+2\pi i} = e^z$, como visto na seção anterior. Com isso, temos:

$$\begin{aligned}
sen(z+2\pi) &= \frac{e^{iz+2\pi i}-e^{-iz-2\pi i}}{2i} \\
&= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \\
&= sen(z).
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} cos(z+2\pi) &= \frac{e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}}{2} \\ &= \frac{e^{iz+2\pi i}+e^{-iz-2\pi i}}{2} \end{aligned}$$

novamente usando o fato de que a função exponencial é periódica de período $2\pi i$, temos:

$$\begin{aligned} cos(z+2\pi) &= \frac{e^{iz+2\pi i}+e^{-iz-2\pi i}}{2} \\ &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \\ &= cosz. \end{aligned}$$

Apesar dessas analogias, as funções seno e cosseno complexas também possuem grandes diferenças em relação às funções seno e cosseno reais. Uma das mais marcantes é que as funções seno e cosseno complexas são ilimitadas, ao contrário das funções seno e cosseno reais que cumprem as condições:

$$-1 \leq sen(x) \leq 1$$

e

$$-1 \leq cos(x) \leq 1$$

para todo x real. Para demonstrarmos esta diferença, inicialmente verificaremos as seguintes igualdades:

Considerando um número complexo $z = x + iy$, e que *senh* e *cosh* significam, respectivamente, seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, temos:

(1) $cos(z) = cos(x)cosh(y) - isen(x)senh(y)$;

(2) $sen(z) = sen(x)cosh(y) + icos(x)senh(y)$;

(3) $\mid cos(z) \mid^2 = cos^2(x) + senh^2(y)$;

(4) $\mid sen(z) \mid^2 = sen^2(x) + senh^2(y)$.

Demonstração:

Para essas demonstrações usaremos as seguntes definições:

$$cosh(y) = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$$

e

$$senh(y) = \frac{e^y - e^{-y}}{2}.$$

(1) Como x é a parte real e y a parte imaginária, temos:

$$\begin{aligned}
cos(z) &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \\
&= \frac{e^{-y+ix} + e^{y-ix}}{2} \\
&= \frac{e^{-y}(cosx + isenx) + e^{y}(cosx - isenx)}{2} \\
&= \frac{e^{-y}cosx + e^{y}cosx + ie^{-y}senx - ie^{y}senx}{2} \\
&= \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}cosx - i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}senx \\
&= cosh(y)cos(x) - isenh(y)sen(x).
\end{aligned}$$

(2) Como x é a parte real e y a parte imaginária, temos:

$$\begin{aligned}
sen(z) &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \\
&= \frac{e^{-y+ix} - e^{y-ix}}{2i} \\
&= \frac{e^{-y}(cosx + isenx) - e^{y}(cosx - isenx)}{2i} \\
&= \frac{e^{-y}cosx - e^{y}cosx + ie^{-y}senx + ie^{y}senx}{2i} \\
&= \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i}cosx + i\frac{e^{y} + e^{-y}}{2i}senx \\
&= \frac{e^{y} + e^{-y}}{2}senx + i\frac{e^{y} - e^{-y}}{2}cosx \\
&= cosh(y)sen(x) + isenh(y)cos(x).
\end{aligned}$$

(3) Do item (1) obtemos:

$$\begin{aligned}
\mid cos(z) \mid^2 &= cosh^2(y)cos^2(x) + senh^2(y)sen^2(x) \\
&= cosh^2(y)cos^2(x) + senh^2(y)(1 - cos^2(x)) \\
&= cosh^2(y)cos^2(x) + senh^2(y) - senh^2(y)cos^2(x) \\
&= (cosh^2(y) - senh^2(y))cos^2(x) + senh^2(y) \\
&= cos^2(x) + senh^2(y).
\end{aligned}$$

(4) Do item (2) segue:

$$\begin{aligned} \mid sen(z) \mid^2 &= cosh^2(y)sen^2(x) + senh^2(y)cos^2(x) \\ &= cosh^2(y)sen^2(x) + senh^2(y)(1 - sen^2(x)) \\ &= cosh^2(y)sen^2(x) + senh^2(y) - senh^2(y)sen^2(x) \\ &= (cosh^2(y) - senh^2(y))sen^2(x) + senh^2(y) \\ &= sen^2(x) + senh^2(y). \end{aligned}$$

Sendo assim, podemos demonstrar que as *funções seno e cosseno* não são limitadas em $\mathbb{C}$. De fato, dizemos que uma função f definida num subconjunto D de $\mathbb{C}$ é limitada se exitir $K > 0$ tal que $\mid f(z) \mid \leq K$ para todo $z \in D$. Usando as igualdades (3) e (4) acima, com $z = ni, n = 1, 2, 3, \ldots$, vemos que

$$\begin{aligned} \mid cos(z) \mid^2 &= cos^2(x) + senh^2(y) \\ &= cos^2(0) + senh^2(y) \\ &= 1 + senh^2(y) \\ &= cosh^2(y) - senh^2(y) + senh^2(y) \\ &= cosh^2(y) \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever que

$$\mid cos(z) \mid = \mid cosh(y) \mid .$$

Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} \mid cos(z) \mid &= \mid cosh(y) \mid \\ &= \mid \frac{e^{-y} + e^y}{2} \mid \\ &= \frac{e^{-y} + e^y}{2} \to +\infty \end{aligned}$$

quando $y \to +\infty$.

Em relação a função seno, temos:

$$\begin{aligned} \mid sen(z) \mid^2 &= sen^2(x) + senh^2(y) \\ &= sen^2(0) + senh^2(y) \\ &= 0 + senh^2(y) \\ &= senh^2(y) \end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever que

$$\mid sen(z) \mid = \mid senh(y) \mid .$$

Sendo assim, temos que

$$\begin{aligned} \mid sen(z) \mid &= \mid senh(y) \mid \\ &= \mid \frac{e^y - e^{-y}}{2} \mid \\ &\geq \frac{e^y - e^{-y}}{2} \to +\infty \end{aligned}$$

quando $y \to +\infty$.

Dessa forma, mostramos que as *funções seno e cosseno* não são limitadas no conjunto dos números complexos.

Como exemplo de que o cosseno pode ser maior que 1, observemos:

$$\begin{aligned} cos(i) &= \frac{e^{ii} + e^{-ii}}{2} \\ &= \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} \\ &= \frac{e^{-1} + e}{2} \\ &\cong \frac{0,3678794409628968 + 2,71828183}{2} \\ &\cong \frac{3,0861612709628968}{2} \\ &\cong 1,5430806354814484. \end{aligned}$$

Portanto, $cos(i) \cong 1,5431$.

Dessa forma, temos um exemplo de cosseno maior que 1!

Vamos agora, verificar uma situação para o seno. Sempre que nos deparamos com uma equação do tipo $sen(z) = 4$, afirmamos que tal equação não possui solução real. No entanto, no campo dos complexos:

$$\begin{aligned} sen(z) = 4 &\Leftrightarrow \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 4 \\ &\Leftrightarrow e^{iz} - e^{-iz} = 8i \\ &\Leftrightarrow e^{iz} - \frac{1}{e^{iz}} - 8i = 0 \\ &\Leftrightarrow e^{2iz} - 1 - 8ie^{iz} = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^{iz})^2 - 8ie^{iz} - 1 = 0 \end{aligned}$$

que é uma equação quadrática em e^{iz}. Para resolver esta equação, usaremos a fórmula conhecida como fórmula de Bhaskara. Dessa forma, temos:

$$\Delta = (-8i)^2 - 4(1)(-1) = 64i^2 + 4 = -60$$

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= \frac{8i \pm \sqrt{-60}}{2(1)} \\
&= \frac{8i\sqrt{60i^2}}{2} \\
&= \frac{8i \pm \sqrt{2^2 \cdot 15i^2}}{2} \\
&= \frac{8i \pm 2i\sqrt{15}}{2} \\
&= 4i \pm i\sqrt{15} \\
&= (4 \pm \sqrt{15})i.
\end{aligned}$$

Assim, escrevendo $z = x + iy$, sendo x e y reais, temos:

$$\begin{aligned}
e^{iz} &= e^{i(x+iy)} \\
&= e^{-y+ix} \\
&= e^{-y}(cosx + isenx)
\end{aligned}$$

$$e^{-y}(cosx + isenx) = \begin{cases} (4+\sqrt{15})i \\ (4-\sqrt{15})i \end{cases}$$

Na equação,

$$e^{-y}(cosx + isenx) = (4 + \sqrt{15})i,$$

como $(4 + \sqrt{15})i$ é um número imaginário puro e $4 + \sqrt{15} > 0$, segue que

$$e^{-y} = 4 + \sqrt{15}$$

e

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Portanto,

$$y = -ln(4 + \sqrt{15})$$

e

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Conclusão:

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i[ln(4 + \sqrt{15})], k \in \mathbb{Z}.$$

Procedendo de modo análogo para a equação

$$e^{-y}(cosx + isenx) = (4 - \sqrt{15})i,$$

segue que as outras soluções são:

$$z = \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) - i[ln(4 - \sqrt{15})], k \in \mathbb{Z}.$$

Isso mostra que, no campo dos números complexos, a equação $sen(z) = 4$ possui infinitas soluções. Na próxima seção, iremos esboçar alguns gráficos relacionados as funções seno e cosseno complexas.

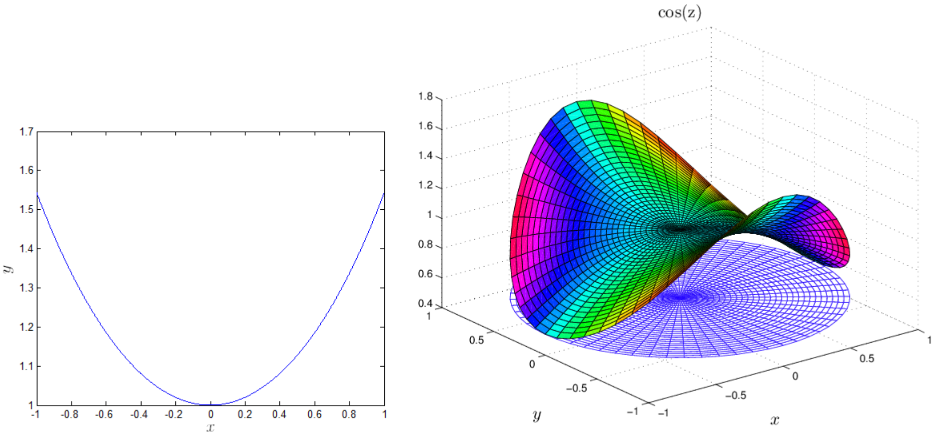
3.3.1 Visualização gráfica

Os gráficos apresentados nesta seção foram plotados utilizando o software *Matlab*©2011 através do comando cplxmap.

A Figura 3.1(a) descreve um caso particular da função cosseno complexa onde são apresentados valores de cossenos de números complexos imaginários puros no intervalo $[-1, 1]$. Neste gráfico podemos observar que, a função possui um eixo de simetria em $x = 0$, pois $cos(z) = cos(-z)$, e possui ponto mínimo em $x = 0$ o qual representa o valor $y = cos(i0) = cos(0) = 1$. A Figura 3.1(b) descreve comportamento da função cosseno complexa no par ordenado (x, y) plotado no intervalo $[-1, 1] \times [-1, 1]$.

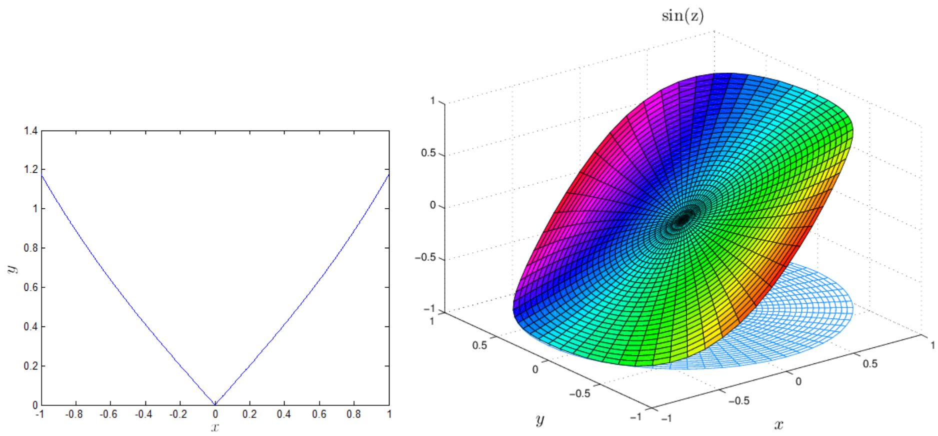
Ainda podemos analisar que, vários números complexos, dentro do domínio definido anteriormente, possuem valores de cosseno maiores que 1, não apenas números puramente imaginários.

De forma similar às análises anteriores, iremos plotar o gráfico da função seno complexa. A Figura 3.2(a), descreve somente a parte imaginária da função $sen(z)$, cujo domínio é o intervalo $[-1, 1]$. Podemos notar que no intervalo $[-1, 1]$ a imagem do seno transcede o valor 1. Já na Figura 3.2(b) plotamos o gráfico da função $sen(z)$ novamente considerando o intervalo $[-1, 1] \times [-1, 1]$.



(a) (b)

Figura 3.1: (a) $cos(ix)$ e (b) $cos(z)$.



(a) (b)

Figura 3.2: (a) $sen(ix)$ e (b) $sen(z)$.

CONCLUSÃO

NESTE trabalho apresentamos uma introdução a respeito das funções seno e cosseno possuírem valores maiores que 1 (um) e abordamos a inexistência dessas informações em alguns livros didáticos e a importância que os professores do ensino médio precisam dar sobre esta temática, a fim de que os discentes possam ter um aprendizado mais amplo. Em seguida, fizemos um estudo acerca das funções trigonométricas reais e dos números complexos, para que finalizássemos com a apresentação das funções trigonométricas complexas, onde mostramos a existência dos valores de seno e cosseno maiores que 1 apresentando exemplos e experimentos numéricos.

De acordo com o estudo feito, acreditamos que seja possível, com algumas ponderações a respeito dos conteúdos do cálculo diferencial, que os professores do ensino médio, possam abordar os conceitos de trigonometria no conjunto dos números complexos. Neste sentido os alunos poderão perceber a possibilidade de valores de seno e cosseno maiores que 1. Através deste estudo, percebemos também que tanto as funções seno e cosseno reais quanto as funções seno e cosseno complexas possuem várias propriedades em comum e poucas diferenças. Além disso, resolvemos alguns exemplos e plotamos gráficos dos senos e cossenos no conjunto dos números complexos. As aplicações demonstraram que as funções seno e cosseno são ilimitadas neste conjunto.

Sabendo da possibilidade de progressão dos alunos em seus estudos, principalmente na graduação, é importante que seja abordado essa temática de forma que os alunos possam desenvolver seus conhecimentos e possam desenvolver o seu potencial crítico e investigativo dentro da matemática. Neste sentido, futuros trabalhos poderão ser elaborados no intuito de mostrar que quando trabalhamos com funções definidas no conjunto dos números complexos, algumas características não são mais válidas, como exemplo de logaritmo de número negativo.

Em virtude do que foi abordado neste trabalho, o estudo acerca das funções seno e cosseno complexas pode ser realizado no ensino médio, pois são assuntos acessíveis neste nível de ensino, levando em consideração os assuntos do cálculo diferencial, é claro. Além do mais, é de suma importância para que os alunos desmistifiquem que o seno e cosseno só possuem valores entre -1 (menos um) e $+1$ (mais um).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] ARDENGHI, M. J. **Ensino e aprendizagem do conceito de função**: pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

Disponível em:

<http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/ARDENGHI_marcos_jose.html> Acesso em: 25 jan. 2014.

[2] ÁVILA, G. **Variáveis Complexas e Aplicações**. 3 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[3] AYRES Jr., F. **Trigonometria**. Coleção Schaum. Ed, MN Graw-hill do Brasil, Ltda.

[4] BONJORNO, J. R.; GIOVANNI, J. R. **Matemática - uma nova abordagem - Vol. 1 - Trigonometria**, Ed. FTD, São Paulo, 2011.

[5] BOYER, C. B. **História da Matemática**. Trad. Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1996.

[6] BRASIL. Ministério da Educação e Cultura. CAPES. Banco de Teses.

Disponível em: <http://www.capes.gov.br/servicos/banco-de-teses> Acesso em: 16 nov. 2013.

[7] ——. Guia de livros didáticos: PNLD 2012: Matemática/Brasília, 2011.

[8] ——. Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996, estabelece as diretrizes e bases da educação nacional.

Disponível em: <http://www.jusbrasil.com.br/legislacao/109224/lei de-diretrizes-ebases-lei-9394-96> Acesso em: 05 nov. 2013.

[9] —–. Parâmetros Curriculares Nacionais.

Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf> Acesso em: 05 nov. 2013.

[10] —–. Parecer CEB nº 15/98, de 01 de junho de 1988 sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/PCB15_1998.pdf> Acesso em: 16 nov. 2013.

[11] —–. Resolução CNE/CEB nº 3, de 26 de junho de 1998. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio.

Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/PCB15_1998.pdf> Acesso em: 20 nov. 2013.

[12] CARMO, M. P.; MORGADO, A. C.; WAGNER, E. **Trigonométria Números Complexos**. Coleção professor de matemática. 3 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

[13] CURY, H. A. (Org.). **Formação de professores de Matemática**: uma visão multifacetada. Porto Alegre: EDIPUCRS, 2001.

[14] D'AMBROSIO, B.; D'AMBROSIO, U. Formação de professores de Matemática: professor pesquisador. **Atos de Pesquisa em Educação**, Blumenau, v. 1, n. 1, p. 75-85, 2006.

Disponível em:

<http://proxy.furb.br/ojs/index.php/atosdepesquisa/article/view/65> Acesso em: 22 jan. 2014.

[15] EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. Campinas: Ed. UNICAMP, 1995.

[16] FILHO, B. B.; SILVA, C. X. **Matemática 2ª: aula por aula, PNLEM, aprovado pelo MEC**. São Paulo: FTD, 1ª edição, 2003.

[17] FIORENTINI, D. Formação Matemática e didáticopedagógica nas disciplinas da licenciatura em Matemática. In: VII Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004, São Paulo. **Anais...**, 2004.

Disponível em:

<www.sbempaulista.org.br/epem/anais/mesas.../mr11-Dario.doc> Acesso em: 22 jan. 2014.

[18] GARBI, G. G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Makron Books, 1997.

[19] IEZZI, G. **Fundamentos da Matemática Elementar - Trigonometria**. Vol. 3. São Paulo: Atual, 1998.

[20] LELLIS, M. **Sobre o conhecimento do professor de Matemática**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2002.

Disponível em:

<http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/marcelo_lellis.pdf> Acesso em: 25 jan. 2014.

[21] LINDEGGER, L. R. M. **Construindo Conceitos Básicos da Trigonometria no Triângulo Retângulo: Uma proposta a partir da manipulação de modelos**. São Paulo, 2000. 204f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

[22] MACHADO, N. J. **Matemática por assuntos, trigonometria**. São Paulo:Scipione.

[23] MAROIS, P.; TALL, D. Facets and Layers of the Function Concept. In: **Proceedings of PME 20**, Valencia, 2, 1996, p. 297-304.

Disponível em: <www.warwick.ac.uk/staf f/David.Tall/pdfs/dot1996f-demarois-pme.pdf> Acesso em: 10 jan. 2014.

[24] MOREIRA, P.; SOARES, M. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, Rio de Janeiro, n. 28, p. 50-61, janeiro-abril 2005.

Disponível em: <http://www.scielo.br/pdf/rbedu/n28/a05n28.pdf> Acesso em: 25 jan. 2014.

[25] ORIENTAÇÕES curriculares para o ensino médio (OCEM): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/DPEM, 2006.

[26] —–. Orientação Curriculares para o Ensino Médio.

Disponível em:

<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume_02_internet.pdf>
Acesso em: 02 nov. 2013.

[27] PAIVA, M. **Matemática**: volume único. 2. ed. Sao Paulo: Moderna, 2003.

[28] PARAMETROS curriculares nacionais (PCNEM): ciências da natureza, matemática e suas tecnologias: Secretaria de Educação Media. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[29] PRADO, F. B. **Ensino de Gráficos de Funções Trigonométricas e Uma Aplicação em Música**. 2013. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática - PROFMAT) - Instituto de Matemática Pura e Aplicada - IMPA, Rio de Janeiro. 2013.

Disponível em: <http://bit.profmat-sbm.org.br/xmlui/handle/123456789/278>
Acesso em: 15 fev. 2014.

[30] SFARD, A. On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as dif ferent sides of the same coin. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, The Netherlands, n. 22, p. 1-36, 1991.

Disponível em: <www.msu.edu/ sfard/> Acesso em: 10 jan. 2014.

[31] SHULMAN, L. S. Those who understand: Knowledge Growth in teaching. **Educational Researcher**, Washington D. C., v. 15, n. 2, p. 4-14, 1986.

[32] —–. Conocimiento y ensenãza: fundamentos de la nueva reforma. Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado, Granada Espanha, v. 9, n. 2, 2005. Disponível em: <ht tp://www.ugr.es/ recfpro/rev92ART1.pdf> Acesso em: 10 jan. 2014.

[33] SILVA, U. **Análise da abordagem de função adotada em livros didáticos de Matemática da Educação Básica**. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

Disponível em:

<http://www.sapientia.pucsp.br//tde_busca/arquivo.php?codArquivo=5679>
Acesso em: 25 jan. 2014.

[34] ——; SOUZA JUNIOR, A.; MELO, G. Saberes docentes: um desafio para acadêmicos e práticos. In: GERALDI, C.; FIORENTINI, D.; PEREIRA, E. (Orgs.) **Cartografias do trabalho docente**: professor(a) - pesquisador(a). Campinas: Mercado das Letras, 1998. p. 307-335.

[35] SOARES, M. G. **Cálculo em uma variável complexa**. 5 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[36] STEINBRUCH, A.; WINTERLE, P. **Geometria analítica**. 2. ed. São Paulo: MAKRON Books, 1987.

[37] STEWART, J. **Cálculo: Volume 2**. 5 ed. Sao Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2006.