

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESTADO DO RIO DE JANEIRO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA  
CURSO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Rosemary Vieira Casanova

**O ensino de funções no nível fundamental e o Projeto  
MatDigital**

Rio de Janeiro  
2014

Rosemary Vieira Casanova

## **O ensino de funções no nível fundamental e o Projeto MatDigital**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Orientadores:

Gladson Octaviano Antunes  
Doutor em Matemática – UNIRIO

Aline Caetano da Silva Bernardes  
Mestre em Matemática – UNIRIO

Rio de Janeiro  
2014

Rosemary Vieira Casanova

## **O ensino de funções no nível fundamental e o Projeto MatDigital**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática PROFMAT da UNIRIO, como requisito para a obtenção do grau de MESTRE em Matemática.

Aprovado em 21/08/2014

### **BANCA EXAMINADORA**

---

Gladson Octaviano Antunes  
Doutor em Matemática - UNIRIO

---

Aline Caetano da Silva Bernardes  
Mestre em Matemática - UNIRIO

---

Letícia Guimarães Rangel  
Mestre em Matemática – CAP-UFRJ

Rio de Janeiro  
2014

**À minha adorada filha Mariana e ao meu amado  
filho Rodrigo. Companheiros e amigos.  
Os maiores presentes que recebi da vida.  
Simplesmente tudo.**

**“O objetivo do ensino da matemática, em formação inicial, é contribuir para o desenvolvimento geral da capacidade de raciocínio, de análise e de visualização.”**

**Raymond Duval**

## **Agradecimentos**

À Deus, por guiar meus caminhos, sobretudo nos momentos de dificuldade, e por me permitir a inesquecível oportunidade de realizar este trabalho no PROFMAT-UNIRIO.

Ao meu querido pai, que sempre me ensinou o real valor e importância que devem ser dados a educação e a formação profissional.

À minha querida e dedicada mãe, pois sem o seu apoio, ajuda e carinho essa caminhada teria sido mais difícil.

À minha adorada filha Mariana, amiga e companheira de todos os momentos durante o período do PROFMAT, desde o momento de inscrição na prova de acesso até o término da conclusão das disciplinas, passando pelo ápice momento do Exame de Qualificação. Sempre ao meu lado nas dificuldades e nos sucessos. Nos momentos de ansiedade e nos momentos de comemoração. Participando de tudo e, várias vezes, estudando junto.

Ao meu amado filho Rodrigo, amigo e um grande incentivador do meu aperfeiçoamento profissional. O tempo todo me estimulando e confiando na minha capacidade. Sempre ao meu lado, me dando força, comemorando, e participando dos meus estudos, com sugestões e opiniões.

Ao meu querido esposo Ricardo, paciente e atencioso, que precisou abrir mão de muitos momentos ao meu lado para que eu pudesse concluir meu trabalho.

Ao meu orientador Professor Gladson Antunes, que já era maravilhoso como professor, extremamente organizado e exigente. E que como orientador foi dedicado, atencioso e companheiro, em todos os momentos, estando sempre preocupado com o andamento do trabalho.

À minha orientadora Professora Aline Bernardes, uma parceira indiscutível, presente em todos os momentos do desenvolvimento do meu trabalho. Exigente, atenciosa, dedicada e impecável, estava sempre buscando um maior aperfeiçoamento dos textos e das atividades.

À inesquecível Professora Letícia Rangel, que participou ativamente do meu aperfeiçoamento profissional durante o Curso de Especialização em Ensino de

Matemática, e que, para a minha felicidade, também irá contribuir na conclusão do meu Curso de Mestrado em Matemática.

Aos professores do PROFMAT-UNIRIO, Gladson Antunes, Ronaldo Busse, Leonardo Martins e Fábio Simas, pela atenção, dedicação e aprendizado proporcionados, e, em especial, ao Professor Silas Fantin, por me fazer caminhar em direção a novos conhecimentos, com a disciplina Álgebra Linear, e que se tornou inesquecível com a frase: “Quem conhece a **T** numa base, conhece a **T**”

Aos meus amigos e alunos da turma PROFMAT-UNIRIO. Uma turma maravilhosa, da qual eu tive a oportunidade e o privilégio de fazer parte. A melhor de todas. Companheira, estudiosa, amiga, divertida e inseparável.

Ao Professor Fernando Pompeu, da Escola de Educação Física e Desportos da UFRJ, por sempre me apoiar, me incentivar e valorizar, em todos os momentos da minha vida, a minha capacidade profissional.

Aos meus alunos da Escola Municipal Manoel Bomfim, que dão sentido às minhas manhãs, com suas dúvidas e seus progressos.

À Matemática, por ela existir e me fazer tão feliz.

## Resumo

Neste trabalho abordamos a proposta do Projeto MatDigital para o ensino de funções no 9º ano do Ensino Fundamental. Este projeto visa o desenvolvimento de materiais didáticos digitais e de ações de formação de professores de Matemática, envolvendo docentes que atuam no Ensino Básico e no Ensino Superior. A proposta trata de Relações entre Variáveis e parte dos conceitos de fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios.

Apresentamos ainda um “pequeno diagnóstico” do ensino de funções através de uma revisão histórica, de um levantamento na literatura sobre os problemas atuais no ensino e na aprendizagem deste conceito e de uma análise de livros didáticos.

As atividades originais da proposta do MatDigital foram adaptadas para uma versão estática e aplicadas a duas turmas de alunos do nono ano de uma escola do município do Rio de Janeiro. A análise das respostas dos alunos possibilita um *feedback* à comissão de redação do capítulo de Relações entre Variáveis.

Propomos também quatro novas atividades que abordam as noções de relações entre variáveis, utilizando os conceitos de diagrama de dispersão e ajuste de curvas; além de uma atividade relacionada a um fenômeno determinístico. Esta atividade foi testada, mas as quatro primeiras não foram aplicadas aos alunos.

**Palavras-chave:** Ensino e aprendizagem de funções, Projeto MatDigital, Relações entre Variáveis.

## Abstract

In this work we approach the proposal of MatDigital Project for teaching functions in the 9th grade of elementary school. This project aims at the development of digital teaching materials and training activities for mathematics teachers, involving teachers who work in Basic Education and Higher Education. The proposal deals with Relations between Variables and some concepts of deterministic phenomena and random phenomena.

We also present a "small diagnostic" of the teaching of functions through a historical review, a survey of the literature on current issues in the teaching and learning of this concept and textbooks analysis.

The original activities of the MatDigital proposal were adapted to a static version and applied in two classes of 9th graders from a school of Rio de Janeiro city. The analysis of student responses provides a feedback to the editorial committee of the chapter of Relationships between variables.

We also propose four new activities that treat notions of relations between variables, using the concepts of scatter diagram and fitting curves; as well as an exercise related to a deterministic phenomenon. This activity was tested, but the first four were not applied to students.

**Keywords:** Teaching and learning functions, Project MatDigital, Relationships between Variables.

## Sumário

Introdução.....	1
1- Funções: Aspectos históricos e o estado atual do ensino no nível fundamental.....	4
1.1- Aspectos históricos do conceito de função.....	4
1.2- As dificuldades no ensino e aprendizagem de funções no nível fundamental ....	10
1.3-Análise de bibliografias sobre o tópico funções no ensino fundamental .....	13
1.3.1-Relação de bibliografias analisadas .....	14
1.3.2-Análise das bibliografias.....	15
1.3.3-Análise Comparativa.....	33
1.4- Recapitulando .....	36
2- A proposta do MatDigital.....	38
2.1- O projeto MatDigital .....	39
2.1.1- Concepção.....	39
2.1.2 – Estrutura da Coleção .....	40
2.1.3- Comitês Acadêmicos .....	42
2.1.4- Desenvolvimento dos Materiais.....	42
2.2- A proposta para o ensino de funções no MatDigital .....	43
2.2.1- O ensino informal de relações entre variáveis a partir do sexto ano .....	43
2.2.2- O ensino de funções no 9º ano .....	44
2.2.3- Justificativa da Proposta .....	46
2.3- Panorama atual do projeto MatDigital .....	47
2.4- O capítulo Relações entre Variáveis em versão estática .....	48
3. O Estudo de Campo.....	49
3.1. O Espaço Amostral .....	49
3.2. As Atividades.....	50
4. Atividades aplicadas: Apresentação e Análise dos resultados obtidos.....	67
4.1. Parâmetros de Análise e Condições de realização das atividades .....	67
4.2. Apresentação e análise dos resultados .....	68
4.3- Avaliação da Aplicação das Atividades .....	97

5. Diagramas de Dispersão e Ajuste de Curvas: Proposta de Atividades.....	100
5.1. Diagramas de Dispersão .....	100
5.1.1. Atividades.....	102
5.2. Ajuste de Curvas .....	107
5.2.1. Atividade .....	108
6. Considerações Finais .....	111
Anexo 1: Atividades desenvolvidas no primeiro dia de encontro .....	113
Anexo 2: Atividades desenvolvidas no segundo dia de encontro .....	119
Anexo 3: Atividades desenvolvidas no terceiro dia de encontro.....	125
Anexo 4: Planilha de Conteúdos do MatDigital : Nono Ano .....	129
Anexo 5: Livros indicados no PNLD .....	131
Referências Bibliográficas.....	133

## Introdução

O foco do presente estudo é o ensino de funções no nível fundamental e a proposta do Projeto MatDigital para o ensino deste tópico no nono ano.

A motivação para o estudo desse assunto surgiu em virtude da relevância de sua abordagem no 9º ano do ensino fundamental e da perspectiva de trabalho a partir de materiais digitais.

O tema “funções” é de extrema importância para a matemática e outras ciências:

O conceito de função é justamente considerado como um dos mais importantes em toda a matemática. Como o ponto, a linha, e o plano foram elementos básicos da geometria euclidiana, a teoria dominante da época de Grécia Antiga até a Idade Moderna, as noções de função e derivada constituem a base da análise matemática, a teoria de que se tornou central no desenvolvimento da matemática desde então.

(PONTE, 1990, p.1)

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCNs<sup>1</sup> (BRASIL,1998) a noção de função pode ser trabalhada nos terceiro e quarto ciclos (do 6º ao 9º ano), mas sua abordagem formal deverá ocorrer somente no ensino médio:

O encaminhamento dado a Álgebra, a partir da generalização de padrões, bem como o estudo da variação de grandezas possibilita a exploração da noção de função nos terceiro e quarto ciclos. Entretanto, a abordagem formal desse conceito deverá ser objeto de estudo do ensino médio.

(BRASIL, 1998, p.51)

O presente trabalho irá contemplar uma revisão histórica; uma revisão na literatura sobre Educação Matemática, com o objetivo de conhecer as discussões sobre o ensino e a aprendizagem de funções; e uma análise de livros didáticos. Essas revisões e análises foram realizadas visando identificar fatores comuns e não comuns, com relação às dificuldades no ensino de funções e à sua abordagem.

---

<sup>1</sup> Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), criados em 1997 pelo Governo Federal, constituem um referencial para a Educação Básica no Brasil. Sem ser impositivo, seu objetivo principal é orientar o planejamento escolar e fornecer parâmetros a partir dos quais o sistema educacional possa se organizar.

Também serão apresentados os resultados obtidos nas atividades que foram aplicadas a um grupo de alunos do 9º ano, que já havia tido um primeiro contato com o ensino de funções anteriormente. Essas atividades foram obtidas a partir da proposta do capítulo “Relações entre Variáveis” do Projeto MatDigital, que aborda funções utilizando os conceitos de fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios. Esses resultados possibilitam um *feedback* sobre o desenvolvimento das questões do MatDigital, que deverá ser encaminhado à comissão de redação do capítulo.

Este trabalho foi desenvolvido apresentando-se em seis capítulos. No primeiro capítulo iremos destacar alguns aspectos históricos no desenvolvimento do conceito de função; e serão observadas, segundo literatura especializada, as dificuldades no ensino de funções, no nível fundamental. Ainda nesse capítulo serão analisadas quinze bibliografias destinadas ao ensino fundamental, sendo quatorze livros didáticos e um Caderno Pedagógico. Nessa análise verificaremos, entre outros pontos, o tipo de abordagem no ensino de funções, a ênfase ou não da expressão analítica e os assuntos contemplados em cada livro; com destaque para uma coleção que aborda função inversa e função composta no 6º ano e continua a desenvolver as noções e aplicações de funções no 7º, 8º e 9º anos.

No segundo capítulo trataremos do Projeto MatDigital, que é uma proposta de uma Coleção Didática Digital direcionada aos alunos do segundo segmento do ensino fundamental das Escolas Públicas do País, formalizada pela SBM. O objetivo principal desse projeto é o desenvolvimento de um conjunto de materiais e recursos digitais, para a sala de aula dos quatro últimos anos do ensino fundamental público brasileiro. Um segundo objetivo é a capacitação dos professores para o uso desse material didático e a formação continuada destes.

Serão apresentadas, no terceiro capítulo, algumas atividades do MatDigital, que foram retiradas das seções “ Explorando o Assunto” e “Aprofundando o Assunto”, do capítulo de “Relações entre Variáveis”, e que foram adaptadas para uma versão estática, e aplicadas em duas turmas de nono ano do ensino fundamental. Essa versão estática se refere ao uso de lápis ou caneta e papel, onde as questões foram impressas, diferente da versão digital, em que o material é implementado para ser utilizado em um *tablet*, com *links*, animações, jogos interativos, entre outros recursos tecnológicos. Na abordagem de funções realizada nesse capítulo destaca-se a introdução da ideia de “*relações que são funções e relações que não são funções, a partir de fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios*”.

Realizaremos, no quarto capítulo, a análise da aplicação das atividades nas turmas. Verificaremos as contribuições que essas atividades trouxeram ao conhecimento prévio dos alunos. A partir da análise das respostas dos alunos, apontaremos algumas sugestões visando alterar algumas atividades. O experimento possibilitou obter um *feedback* sobre a proposta do MatDigital para o ensino de funções no nono ano.

No quinto capítulo serão propostas quatro atividades novas. Três dessas atividades foram elaboradas com o objetivo de abordar à análise de gráficos de dispersão, e uma dessas atividades foi confeccionada para tratar do ajuste de curvas. Essas atividades deverão envolver situações do cotidiano.

Por fim, no sexto e último capítulo, serão realizadas algumas considerações finais que deverão abordar o trabalho como um todo e suas possíveis contribuições.

## **1- Funções: Aspectos históricos e o estado atual do ensino no nível fundamental.**

Neste capítulo iremos abordar alguns dados do desenvolvimento histórico do conceito de função, pois analisando historicamente podemos observar que as noções matemáticas se alteram ao longo do tempo e podem sofrer influências externas, isto é, não se desenvolvem apenas por demandas internas à própria Matemática. Essas mudanças também se refletem na abordagem dos conteúdos matemáticos realizada pelos livros didáticos.

Serão apresentadas também algumas características, relacionadas ao ensino de funções, de quinze bibliografias direcionadas ao ensino fundamental que, em sua maioria, estão presentes nas indicações do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). Esse programa seleciona e analisa em torno de dez livros, a cada período de três anos, e essa análise é disponibilizada aos professores das escolas para que o grupo escolha o tipo de abordagem matemática mais interessante ao perfil atual de seus alunos. A abordagem que o professor utiliza em sala de aula, no ensino de funções, normalmente, está relacionada ao material didático adotado pela escola, ou seja, aos livros didáticos, apostilas, cadernos pedagógicos, listas de exercícios, entre outros.

Finalizando, será observado que, há algum tempo, ocorre, de acordo com vários autores, uma preocupação com o ensino de funções no contexto da matemática, cujo conteúdo, no nível fundamental, é desenvolvido, na maioria das escolas, no 9º ano, e que reflete com que conhecimento de funções os alunos ingressam no ensino médio.

Considerando a importância dos aspectos históricos no desenvolvimento do conceito de função; dos conteúdos abordados pelos diversos livros didáticos disponíveis; e da análise de alguns artigos e livros relacionados ao ensino de funções, que indicam as dificuldades e os avanços na aprendizagem desse conteúdo; podemos ter uma ideia de como se apresenta o estado atual do ensino de funções no nível fundamental.

### **1.1- Aspectos históricos do conceito de função**

Estudando os aspectos históricos do desenvolvimento do conceito de função podemos encontrar exemplos particulares de funções em épocas antigas; por exemplo, a

contagem, que implica uma correspondência entre um conjunto de objetos e uma sequência de números de contagem; e as quatro operações aritméticas elementares, que são funções de duas variáveis. (PONTE, 1990, p.1).

As tabelas babilônicas e egípcias também já contemplavam uma ideia de função, uma vez que tratavam justamente de registros de correspondências entre um número e o resultado das operações que envolviam esse número. (ROQUE, 2012, p.369)

Roque (2012, p. 369 e 371) afirma que: “quando pensamos em função, duas coisas vêm à mente: a curva que a representa graficamente, e sua expressão analítica [...]”. “em seguida vem a ideia de correspondência, como uma máquina de entradas e saídas, pois quando falamos de função pensamos em duas grandezas que variam de modo correlato.”

Segundo Roque (2012, p.371), o exemplo mais comum de função é o da relação espaço e tempo. Ela afirma que: “Se vemos alguma coisa móvel se deslocar no espaço, perguntamos se há alguma lei que governe esse movimento em função do tempo”. Portanto, de acordo com Roque (2012, p.371), uma das principais motivações para a introdução da ideia de função foi a noção de trajetória, que associa um movimento a uma curva que poderá ser expressa por uma equação.

Ponte afirma que:

As funções são importantes ferramentas para o estudo de problemas de variação. Uma determinada quantidade pode variar com o tempo, no espaço, de acordo com outras grandezas, e simultaneamente em várias dimensões. Essa variação pode ser mais rápida ou mais lenta, ou pode mesmo desaparecer em algum ponto. Pode seguir padrões simples ou complexos e obedecer a diversas restrições.  
(PONTE, 1990, p.4)

Ponte (1990, p.7) também indica que as ideias relacionadas à variação (aumento, diminuição, constância, máximo e mínimo), e à variação da variação (variação rápida e lenta, a velocidade de mudança, suavidade, continuidade e descontinuidade) são compreendidas mais facilmente a partir de representações gráficas.

A ideia de regularidade foi um dos componentes mais importantes para a noção de função. (PONTE, 1990, p.5).

Podemos considerar três elementos essenciais na formação do conceito primitivo dos séculos XVII e XVIII de função: (a) a

notação algébrica, levando aspectos importantes, tais como simplicidade e rigor, permitindo a manipulação de expressões analíticas e condensando em si uma grande quantidade de informações, (b) a representação geométrica, produzindo uma base intuitiva fundamental, dos quais um exemplo notável é a associação entre noções de tangente à uma curva e a derivada de uma função, e (c) a conexão com os problemas concretos do mundo físico, associada a ideia de regularidade, proporcionando a motivação fundamental e o interesse para o estudo de famílias de funções.

(PONTE, 1990, p. 5)

Oresme (1323 -1382) apresentou algumas ideias gerais sobre quantidades de variáveis independentes e dependentes em sua teoria geométrica de latitudes como forma de representar diferentes graus de intensidade e extensão. (PONTE, 1990, p. 2)

Descartes (1596-1650) afirmou que uma equação de duas variáveis, geometricamente representada por uma curva, indica uma dependência entre variáveis. (PONTE, 1990, p. 2)

Galileu (1564-1642) ressaltou que a matemática foi a língua mais apropriada para o estudo da natureza. Para se estudar um determinado fenômeno, foi necessário medir quantidades, identificar regularidades, e obter relações que representam descrições matemáticas tão simples quanto possível. (PONTE, 1990, p. 4)

O estudo do movimento da queda dos corpos, do movimento dos planetas, e do movimento curvilíneo levou à consideração das proporcionalidades direta e inversa, bem como de funções polinomiais e trigonométricas. (PONTE, 1990, p. 4)

Segundo Roque (2012, p.371), Galileu apresentou a noção de função no sentido de uma associação entre duas grandezas que variam, dada por uma proporção geométrica. Porém, Descartes afirmou que essa associação deveria ser algébrica, pois não relacionava uma grandeza física ao tempo.

O aparecimento de funções na pesquisa matemática como um conceito claramente individualizado e como sendo objeto de estudo em si ocorreu no final do século XVII. O surgimento de uma noção de função como uma entidade matemática individualizada pode ser atribuído aos primórdios do cálculo infinitesimal. (PONTE, 1990, p. 1)

Newton (1642-1727) foi um dos primeiros matemáticos a mostrar como funções poderiam ser desenvolvidas em séries infinitas, permitindo assim a intervenção de processos infinitos. Ele usou o termo "fluente" para designar variáveis independentes, e "quantidades relacionadas" para indicar as variáveis dependentes. (PONTE, 1990, p. 2)

Em 1673 Leibniz (1646-1716) utilizou o termo "função" para designar, em termos gerais, a dependência de quantidades geométricas, como subtangentes e subnormais, da forma de uma curva. Ele também introduziu os termos "constante", "variável" e "parâmetro". (PONTE, 1990, p. 2). Esses conceitos se tornaram populares com a publicação do primeiro tratado de cálculo diferencial, publicado por L'Hôpital em 1696. (ROQUE, 2012, p.373) A noção de variável só foi introduzida formalmente no século XIX. (ROQUE, 2012, p.371)

No final do século XVII, Jean Bernoulli (1667-1748) já empregava a palavra função relacionando-a indiretamente a “quantidades formadas a partir de quantidades indeterminadas e constantes”. (ROQUE, 2012, p.373).

Em uma correspondência à Bernoulli, redigida em 1698, Leibniz discute qual seria a melhor notação para uma função. (ROQUE, 2012, p.373)

Em 1718 Jean Bernoulli (1667-1748) publicou um artigo, com uma ampla difusão, que continha a definição da função de uma variável como sendo uma quantidade que é composta, dessa variável e de constantes. Mais tarde, Euler (1707-1793), que era um ex-aluno de Bernoulli, modificou essa definição trocando “quantidade” por “expressão analítica”. (PONTE, 1990, p. 2)

Mas essa formulação de Euler, identificando, na prática, a noção de função com a noção de expressão analítica, levou a várias incoerências, pois, as mesmas funções podiam ser representadas por diferentes expressões analíticas. Essa formulação também limitava as classes de funções que poderiam ser consideradas. Comparando com a atual terminologia, essa definição de Euler, que incluía apenas funções analíticas, era um subconjunto da classe de funções contínuas. (PONTE, 1990, p. 2)

D' Alembert (1717-1783) também contribuiu para a ampliação do conceito de função incentivando a discussão que versava sobre o problema da corda vibrante. Outra importante contribuição para o desenvolvimento do conceito de função tem origem nas obras de Fourier (1768-1830), relacionadas ao problema do fluxo de calor em corpos materiais. (PONTE, 1990, p. 3)

Esse desenvolvimento ainda continuou e, a partir da noção de correspondência, matemáticos mudaram para a noção de relação, um parente próximo da noção de função. (PONTE, 1990, p. 3)

A partir da publicação de sua “Introduction in analysin infinitorum” (Introdução à análise infinita), em 1748, Euler (1707-1793) destaca função como a noção central da matemática e define função de uma quantidade variável como sendo uma expressão

analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes. (ROQUE, 2012, p.374)

Nessa mesma obra, Euler também definiu a ideia de constante e de variável. A primeira como sendo uma quantidade definida que possui sempre um mesmo e único valor, e a segunda como uma quantidade indeterminada, que pode assumir qualquer valor. (ROQUE, 2012, p.374)

No prefácio da obra *Institutiones calculi differentialis* (Fundamentos do cálculo diferencial), publicada em 1755, Euler formula uma nova definição de função que não se identifica à expressão analítica:

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o habito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se  $x$  designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de  $x$ , de qualquer maneira, ou que são determinadas por  $x$ , são chamadas funções de  $x$ .  
(ROQUE, 2012, p. 378)

D'Alembert (1717-1783), em 1757, redigiu o verbete função, no volume sete, de sua *Encyclopédie*, da seguinte forma:

Função, s.f. (Álgebra). Os antigos geômetras, ou melhor, os antigos analistas, chamaram função de uma quantidade qualquer  $x$  às diferentes potências dessa quantidade; mas, hoje, chamamos função de  $x$ , ou, em geral, de uma quantidade qualquer, a uma quantidade algébrica composta de tantos termos quanto quisermos e na qual  $x$  se encontra, ou não, misturado de um modo qualquer com constantes. (ROQUE, 2012, p. 378)

Em 1837, Dirichlet (1805-1859) julgou ser necessário separar o conceito de função da sua representação analítica, formulando-o e definindo função em uma versão revisada dos trabalhos sobre as séries de Fourier. Ele caracterizou a definição de função em termos de uma correspondência arbitrária entre variáveis que representam conjuntos numéricos. Uma função tornou-se uma correspondência entre duas variáveis, de modo

que para qualquer valor da variável independente está associado apenas um valor da variável dependente.

Sejam  $a$  e  $b$  dois números fixos e  $x$  uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre  $a$  e  $b$ . Se a cada  $x$  corresponde um único  $y$ , finito, de maneira que, quando  $x$  se move continuamente no intervalo entre  $a$  e  $b$ ,  $y = f(x)$  também varia progressivamente, então  $y$  é dita uma função contínua de  $x$  nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que  $y$  dependa de  $x$  de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas.  
(ROQUE, 2012, p.458)

Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, iniciada por Cantor (1845-1918), a noção de função continuou a se desenvolver. E no século XX, a ideia de função foi estendida para incluir todas as correspondências arbitrárias satisfazendo a condição de singularidade entre os conjuntos numéricos ou não numéricos. (PONTE, 1990, p.3)

Mas, segundo Roque (2012, p.474), a definição formal de função que aprendemos na escola segue o padrão bourbakista<sup>2</sup>:

Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos, que podem ser distintos ou não. Uma relação entre um elemento variável  $x$  de  $E$  e um elemento variável  $y$  de  $F$  é dita uma relação funcional se, para todo  $x$  pertencente a  $E$ , existe um único  $y$  pertencente a  $F$  que possui a relação dada com  $x$ . Damos o nome de função a operação que associa, desse modo, a todo elemento  $x$  pertencente a  $E$ , o elemento  $y$  pertencente a  $F$  que possui a relação dada com  $x$ ;  $y$  será dito o valor da função no elemento  $x$ .  
(ROQUE, 2012, p.474)

De acordo com Roque (2012, p.474), a utilização desse padrão bourbakista provoca uma dificuldade de conciliação em relação aos exemplos de função que são, efetivamente, estudados. Em sua opinião, é difícil associar a noção dinâmica do conceito de função, que aparece em situações físicas, à definição formal, de natureza estática. E, em virtude disso, essas ideias “contaminaram” a educação por volta dos anos 60.

---

<sup>2</sup> O adjetivo bourbakista é empregado em referência a Bourbaki, pseudônimo adotado por um grupo de matemáticos franceses dos anos 1930 cujo objetivo era elaborar livros atualizados sobre todos os ramos da matemática que pudesse servir de referência para estudantes e pesquisadores.

A definição de função encontrada com mais frequência nos livros de ensino médio, segundo Roque (2012, p.370), é a seguinte: “Dados dos conjuntos X e Y, uma função  $f: X \rightarrow Y$  e uma regra ou que diz como associar a cada elemento  $x \in X$  um elemento  $y = f(x) \in Y$ . O conjunto X chama-se domínio e Y e o contradomínio da função”.

Concluindo, segundo Ponte, o desenvolvimento do conceito de função priorizou, na fase inicial, dois aspectos: a coerência e a generalidade. Durante esse desenvolvimento os matemáticos consideraram também as funções para as quais não existia expressão analítica correspondente; funções que não tinham uma simples representação geométrica e também funções que não tinham relação com situações físicas concretas. Houve também as funções contínuas sem derivadas em qualquer ponto, que desafiaram os matemáticos. (PONTE, 1990, p. 1). Em seus primórdios, a noção de função foi usada para designar correspondências entre entidades geométricas. E, através de sua associação com o estudo das expressões analíticas, as funções garantiram um lugar fundamental na corrente principal do pensamento matemático. (PONTE, 1990, p. 3)

## **1.2- As dificuldades no ensino e aprendizagem de funções no nível fundamental**

Na análise de Menna Barreto (2008, p.1), o conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática. No contexto da matemática escolar com vistas às aplicações, funções podem ser entendidas como um conceito que trata de problemas de variação e quantificação de fenômenos. Ou, em outras palavras, o estudo das funções pode ser entendido como o estudo de relações entre grandezas que variam. Dentro desta concepção, uma variável representa os valores do domínio de uma função, surgindo a noção de variáveis dependente e independente. (MENNA BARRETO, 2008, p.3)

Segundo Palis (2013, p.1) o ensino e a aprendizagem de funções têm sido considerados bastante problemáticos. As dificuldades dos alunos com o conceito de função têm sido amplamente divulgadas na literatura especializada. Vários estudos vêm indicando que a aprendizagem desse conceito é desenvolvida ao longo de vários anos, e é mais complexa do que se supõe no ensino e também na concepção de currículos. Entre

as principais dificuldades dos alunos estão a extrema aderência à concepção de função como expressão algébrica e a resolução de problemas de otimização de enunciado verbal.

De acordo com Palis (2013, p.1), muitos alunos acreditam que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica. Normalmente, uma função é somente pensada em termos de manipulação simbólica e numérica, de uma forma desconectada do seu aspecto conceitual. Essa ideia de função como fórmula é acompanhada da dificuldade em discernir variável de incógnita, função de equação, e da construção de domínio de uma função.

Ao identificarmos as variáveis de um fenômeno que ocorre com certa regularidade é possível descrevê-lo por relações quantitativas entre elas, ou seja, descrevê-lo através de um modelo matemático. No entanto, alguns pesquisadores verificaram que muitos alunos têm dificuldades na compreensão do conceito de variável, em lidar com expressões algébricas e ainda mais, em expressar relações generalizadas, pois comumente não sentem a necessidade de generalização. (MENNA BARRETO, 2008, p.8)

Segundo Tinoco (2001, p. 1), a noção de variável é uma das mais difíceis para os alunos. Muitos não percebem a diferença entre considerar letras em equações, nas quais se tratam de incógnitas e valores dados, e em funções, nas quais se tratam de quantidades variáveis e constantes. Muitos alunos tendem a igualar a zero qualquer expressão apresentada com o objetivo de tentar determinar um valor para a variável envolvida.

Para Menna Barreto (2008, p.7), a compreensão do conceito de variável, a capacidade de se mover nas múltiplas representações e de representar matematicamente as relações, assim como a capacidade de relacionar o conceito a outras áreas e contextos e de associar funções a outros tópicos da matemática são competências importantes para uma compreensão ampla das funções.

Segundo Palis (2013, p.1), os problemas de otimização de enunciado verbal são importantes, pois propiciam oportunidades de interpretações qualitativas de aspectos covariacionais da situação funcional estudada e a utilização de diferentes representações de uma mesma função.

De acordo com Raymond Duval (2008, p.11), identificar uma função com a sua expressão analítica, ou seja, confundir o objeto com uma de suas representações é uma consequência do ensino. A facilidade em se confundir um objeto e sua representação

ocorre porque não há o acesso a este objeto a não ser por meio de sua representação, pois os objetos matemáticos, não sendo acessíveis pela percepção, somente por sua representação. Esse acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. O objeto representado não pode ser identificado com o conteúdo da representação que o torna acessível. Esse conteúdo depende mais do registro de representação do que do objeto representado. (RAYMOND DUVAL, 2008, p.31).

Com vistas a enfrentar as dificuldades, algumas pesquisas sugerem que o estudo das funções deva iniciar a partir de representações numéricas, gráficas e contextualizadas, que são mais intuitivas e possuem um apelo mais visual. Para eles, os métodos algébricos e os aspectos de formalização devem ser reservados para um segundo momento. (MENNA BARRETO, 2008, p.8)

Segundo Menna Barreto, (2008, p.8), algumas pesquisas defendem a ideia de que uma situação, um problema ou um fenômeno deve ser descrito inicialmente verbalmente, sem nenhuma linguagem formal e com o tempo deve se fazer uso de variáveis para representar relações que são funções:

[...] a introdução de variáveis para representar relações funcionais em situações problemas concretas dá aos alunos a percepção de que as variáveis podem representar números de vastos conjuntos numéricos e de que elas são instrumentos úteis na descrição de generalizações.

(MENNA BARRETO, 2008, p.8)

Para Tinoco (2001, p. 1), no ensino atual e nos livros didáticos mais usados, destacam-se duas características: A concepção de função como expressão analítica e a introdução do conceito como conjunto de pares ordenados e como caso particular das relações. A primeira característica citada se baseia na tendência de alguns matemáticos durante o processo histórico da definição de função. E a segunda característica está relacionada ao último estágio desse processo com a definição de Peano.

Palis (2013, p.1) afirma que: “aspectos procedimentais predominam e o desenvolvimento de aspectos conceituais é bastante limitado [...]”.

Diversos trabalhos que investigam o ensino e a aprendizagem de funções têm enfatizado também a necessidade de um desenvolvimento do conceito de função que inclua uma concepção de função como covariação de quantidades e não

somente como correspondência. Nesse sentido, o que se propõe é que o aluno desenvolva o raciocínio covariacional, isto é, que lhe permita refletir sobre uma situação na qual há duas quantidades que variam, percebendo como uma delas varia em relação à outra. Para isso é importante que o aluno seja exposto a atividades envolvendo o conceito de função como covariação. (PALIS, 2013, p.1)

Por todas essas razões, o ensino das funções deverá atender à necessidade de articular de forma permanente as diversas formas de representação. E, apesar das muitas dificuldades constatadas na compreensão do conceito de função, algumas mudanças simples na ênfase, nos pontos de vista e nas abordagens, podem contribuir para amenizá-las. (MENNA BARRETO, 2008, p.9)

### **1.3-Análise de bibliografias sobre o tópico funções no ensino fundamental**

Será realizada, nesta seção, a análise de quatorze livros didáticos e um Caderno Pedagógico adotado na rede municipal de ensino do Rio de Janeiro com o objetivo de verificar como estão sendo abordados os conteúdos relacionados às funções atualmente, no ensino fundamental, na maioria das escolas públicas.

Na análise individual de cada livro será apresentada uma pequena tabela informando o número total de páginas do livro, o número total de páginas dedicadas ao estudo de funções, o tipo de abordagem, a definição de função adotada pela coleção, quando houver, os assuntos abordados, a ênfase, os destaques, e os tipos de exemplos citados.

Os livros didáticos selecionados são de diferentes autores e editoras, com ano de edição variando de 2007 a 2013.

A seleção incluiu nove livros indicados no PNLD-2014; quatro livros indicados no PNLD-2011, mas que não constaram no PNLD-2014; e um livro adotado em uma escola pública federal, o Colégio Militar do Rio de Janeiro, que não constou nos PNLDs de 2008, 2011 e 2014.

Dos livros indicados no PNLD-2011, mas que não constaram no PNLD-2014, foram selecionadas, para a análise, as seguintes obras: o livro que foi adotado, em 2011, 2012 e 2013, na escola pública federal Colégio Pedro II e na escola pública estadual Cap-UERJ, “Tudo é Matemática”; o livro que foi adotado na Escola Municipal Manoel

Bonfim, em 2011, 2012 e 2013, “Vontade de saber matemática”; o livro que aborda funções desde o 6º ano do Ensino Fundamental e que foi indicada nos PNLDs de 2008 e 2011, “Aplicando a Matemática”, e o livro “Matemática e Realidade”, de autoria de Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado.

Serão observados também como as obras introduzem o conceito de função, se a definição formal é apresentada, se são explorados exemplos de relações que não são funções, se são exploradas diferentes representações ou se a abordagem enfatiza a expressão analítica em detrimento das outras representações.

### 1.3.1-Relação de bibliografias analisadas

Apresentamos, a seguir, uma tabela referente às bibliografias analisadas neste trabalho. Nela constam o título, o autor, a editora, o ano de edição do livro que foi consultado, e as indicações, quando for o caso, nos PNLDs de 2008, 2011 e 2014.

Tabela 1: Livros didáticos analisados

<b>Título</b>	<b>Autores</b>	<b>Editora</b>	<b>Ano de Edição</b>	<b>PNLD</b>
Aplicando a Matemática	Alexandre Luís Trovon de Carvalho e Lourisnei Fortes Reis	Casa Publicadora Brasileira	2010	2008 2011
Descobrimo e aplicando a matemática	Alceu dos S. Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado	Dimensão	2012	2014
Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna	2011	2011 2014
Matemática	Marcelo Lellis Imenes e Luiz Marcio Imenes	Moderna	2009	2011 2014
Matemática e Realidade	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado	Atual (Saraiva Livreiros Editores)	2009	2008 2011
Matemática na medida certa	Centurión, Jakubovic e Lellis	Scipione	2003	2008 2011
Matemática: Compreensão e prática	Ênio Silveira e Claudio Marques	Moderna	2008	-----
Matemática: Ideias e desafios	Iracema O. Mori e Dulce S. Onaga	Saraiva (Saraiva Livreiros)	2005	2008 2011 2014

		Editores)		
Praticando Matemática	Alvaro Andrini e Maria José Vasconcellos	Ed. do Brasil	2012	2008 2014
Projeto Araribá Matemática	Editora Moderna	Moderna	2010	2008 2014
Projeto Telaris Matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	2012	2014
Projeto Velear Matemática	Antônio José Lopes Bigode	Scipione	2012	2014
Tudo é matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	2009	2008 2011
Vontade de saber matemática	Joamir Souza e Patricia M. Pataro	FTD	2012	2011 2014
Caderno Pedagógico-Matemática	SME-RJ	-----	2013	-----

### 1.3.2-Análise das bibliografias

#### Aplicando a Matemática

(Alexandre Luís Trovon de Carvalho e Lourisnei Fortes Reis)

Essa coleção aborda funções a partir do volume que é direcionado ao 6º ano do ensino fundamental. A atividade na qual o aluno tem o primeiro contato com esse tema envolve “Máquinas”, com o seguinte exemplo:

“O professor Roberval inventou um tipo de máquina que vai ser muito útil para os estudantes de Matemática. Ela pode ser programada de diferentes maneiras, para efetuar operações: ‘Comecei programando-a assim: todo número que entra, sai multiplicado por 2.’ Para cada valor colocado na máquina haverá somente um valor de saída. Por isso a máquina com uma regra de programação também é chamada de função.”

(CARVALHO; REIS, 2013, p.20)

O capítulo segue informando que as funções podem envolver diversos tipos de operações. A função inversa é abordada através do seguinte exemplo, na página 21: “Patrícia pensou em um número, multiplicou-o por 6 e obteve 72. Em que número ela pensou?” A seguir é apresentado o alinhamento de duas máquinas em série, na página 23, caracterizando a função composta, como mostra o exemplo abaixo:

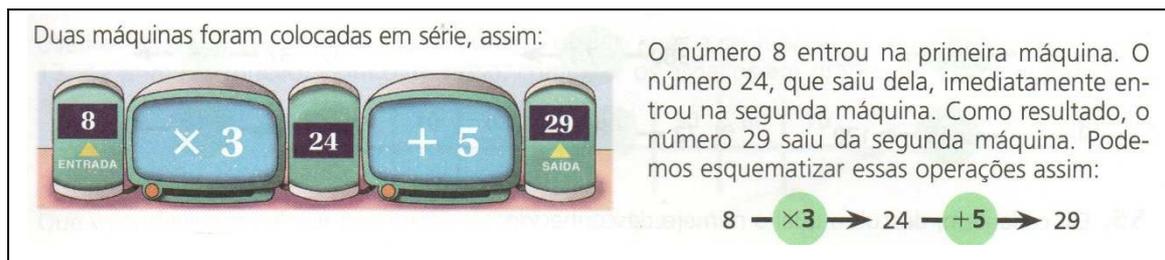


Figura 1: Trecho do livro “Aplicando a Matemática” do 6º ano

Em linguagem formalmente usada a partir do 9º ano, temos que:

$$f(x) = 3x, g(x) = x + 5 \text{ e } y = g \circ f$$

O primeiro exemplo de atividade, relacionada ao cotidiano apresentado no livro, na página 24 é: “O Sr. Joaquim é barbeiro e cobra R\$13,00 cada corte de cabelo. Entretanto, ele tem um custo de R\$ 3,00 com loções e outras coisas. Por isso, o ganho é de R\$ 10,00 em cada corte. Se ele fizer 30 cortes de cabelo em uma semana, quanto ele irá ganhar?” A abordagem é finalizada com um desafio sobre Funções e Códigos Secretos.

Tabela 2: Dados do livro “Aplicando a Matemática” do 6º ano

6º ANO	
Formato	O livro do 6º ano possui um total de 313 páginas. São dedicadas, ao ensino de funções, 6 páginas do capítulo 1.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela. Não há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função. Aborda essa definição através de um exemplo: “O professor Roberval inventou um tipo de máquina que vai ser muito útil para os estudantes de matemática. Ela pode ser programada de diferentes maneiras para efetuar operações. Para cada valor colocado na máquina haverá somente um valor de saída. Por isso a máquina com uma regra de programação também é chamada de função.” (p.20)
Assuntos Contemplados	Máquinas e funções: Definição de função. Funções inversas e números desconhecidos. Duas máquinas em série: Função composta Letras e valores numéricos. Funções e códigos secretos
Ênfase	Atividades relacionadas às “máquinas”
Destaques	Desafio que inclui Códigos Secretos
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica da função. Não há exemplos de situações que não sejam funções.

No livro direcionado ao 7º ano novamente são utilizadas as atividades associadas às “Máquinas”, mas desta vez, primeiramente, para se estudar múltiplos, na página 13. Neste caso as funções compostas e inversas também são utilizadas, como segue abaixo:

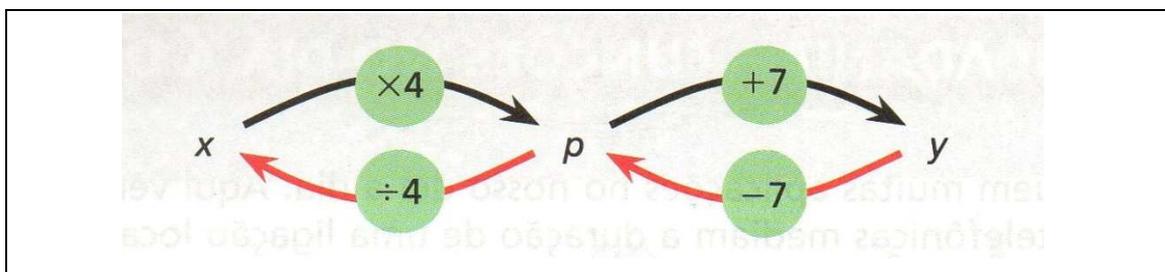


Figura 2: Trecho do livro “Aplicando a Matemática” do 7º ano

As “Máquinas” aparecem novamente nesse volume, na página 177 do capítulo 6, Funções e Gráficos, onde são estudados pontos, coordenadas e representação cartesiana, pois, segundo a coleção, na página 182: “Podemos utilizar funções para gerar pontos”. O gráfico da função é construído a partir desses pontos que, quando estão alinhados, são marcados e ligados através de uma reta.

A seguir, ainda no livro do 7º ano, na página 188, é abordada a forma algébrica das funções, por exemplo: “ $y = 2x$ ”. O conceito de função do 1º grau:  $y = a.x + b$  é enunciado. É observado que o gráfico de uma função do 1º grau é uma reta.

Tabela 3: Dados do livro Aplicando a Matemática do 7º ano

7º ANO	
Formato	O livro do 7º ano possui um total de 327 páginas. São dedicadas, ao ensino de funções, 7 páginas do capítulo 1, e 26 páginas do capítulo 6, somando 33 páginas.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função.
Assuntos Contemplados	Máquinas e múltiplos. Função inversa. Máquinas em série: Funções compostas Funções e gráficos: Pontos em coordenada; Representação cartesiana Forma algébrica das funções. Gráfico da função. Reflexão sobre os eixos cartesianos.
Ênfase	As atividades que envolvem “máquinas”, representação cartesiana e forma algébrica de função.
Destaques	A “Regra de Friend” usada para encontrar a dosagem de medicação correta para uma criança com menos de dois anos de idade.
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica da função. Não há exemplos de situações que não sejam funções.

O terceiro volume da coleção, destinado aos alunos do 8º ano, aborda funções na unidade 3, denominada: “Álgebra: Um estudo de Arqueologia da Matemática”. Inicialmente é apresentada, na página 46 uma tabela com valores de entrada(x) e saída(y), a seguir é solicitado que seja determinada uma fórmula que expresse o valor y da saída em termos do valor x da entrada.

Na unidade 7 deste terceiro volume, o tema funções é abordado novamente, na página 106, no momento em que são estudadas as diagonais de um polígono. Na máquina: “pega-se o número de entrada, subtrai 3, multiplica pelo número de entrada e divide por 2”, ou seja:

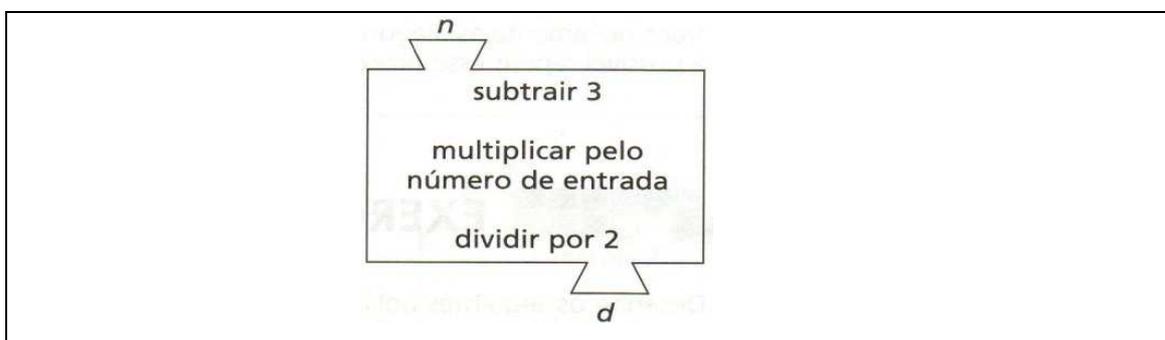


Figura 3: Trecho do livro “Aplicando a Matemática” do 8º ano

Tabela 4: Dados do livro Aplicando a Matemática do 8º ano

8º ANO	
Formato	O livro do 8º ano possui um total de 282 páginas. São dedicadas, ao ensino de funções, 14 páginas do capítulo 3, e 4 páginas do capítulo 7, totalizando 18 páginas.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função.
Assuntos Contemplados	Álgebra: um estudo de arqueologia da matemática Fórmulas x Equações Máquinas em série Diagonais de polígonos e funções
Ênfase	Determinação de fórmulas para o cálculo de perímetro e área.
Destaques	A comparação entre uma fórmula, onde a letra é uma variável (Ex: $A = 4 \cdot 10^{-6} \cdot v^2$ ) e uma equação, onde a letra é uma incógnita (Ex: $x + 2 \cdot x = 96$ ). Ambas, fórmula e equação, são classificadas como expressões algébricas. (p.43 e 44)
Exemplos	Não há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica da função. Não há exemplos de situações que não sejam funções.

No último volume da coleção, direcionado aos alunos do 9º ano, o capítulo 1 da unidade 2, intitulado: “Equações, incógnitas, funções e variáveis”, se inicia relacionando função e equação, como mostra o texto a seguir, que consta na página 44: “O curioso é que podemos utilizar o que aprendemos a respeito de funções e gráficos para resolver equações.” Segue o primeiro exemplo:

“Márcio é empregado de uma empresa de construção. Ele ganha um valor fixo de R\$ 10,00 por dia e mais R\$ 3,00 de comissão para cada metro quadrado de piso que colocar. Vamos determinar quantos metros quadrados de piso ele precisa assentar para ganhar R\$ 40,00 em um dia”.

(CARVALHO; REIS, 2013, p.44)

A equação obtida na resolução desse problema é:  $40 = 3x + 10$ . Mas, se colocarmos  $y$  no lugar de 40, podemos obter uma tabela e a seguir um gráfico que irá mostrar várias possibilidades de ganho. Assim, variando  $x$  temos o ganho diário  $y$ , como segue abaixo:

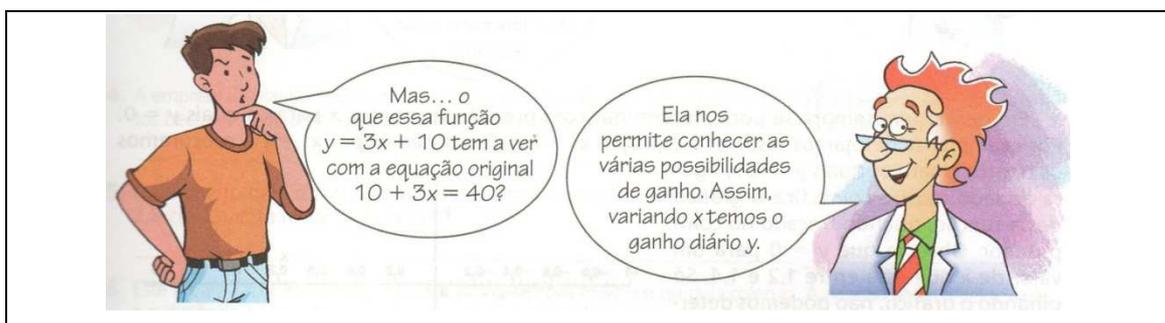


Figura 4: Trecho do livro “Aplicando a Matemática” do 9º ano

No exemplo seguinte, na página 46, é mencionado um número classificado como irracional: raiz cúbica de 2.

Tabela 5: Dados do livro Aplicando a Matemática do 9º ano

9º ANO	
Formato	O livro do 9º ano possui um total de 265 páginas. São dedicadas, ao ensino de funções, 12 páginas do capítulo 2.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função.
Assuntos Contemplados	A linguagem algébrica e funções Equações, incógnitas, funções e variáveis

	Problemas envolvendo funções quadráticas: vértice do gráfico;
Ênfase	O uso de funções e gráficos para resolver equações.
Destaques	A “transformação” de uma equação em uma função. (p.45)
Exemplos	Não há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica da função. Não há exemplos de situações que não sejam funções.

## Descobrimo e Aplicando a Matemática

(Alceu dos S. Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado)

Este livro aborda a ideia de função dentro do capítulo 3, no volume referente ao 9º ano. Não há um capítulo dedicado ao tratamento deste conteúdo tão importante na matemática e em outras ciências. Nesse capítulo também são vistos os conteúdos de monômios, polinômios e produtos notáveis antes da introdução a funções. A abordagem tem o seguinte início:

“Em diversas atividades do dia a dia estabelecemos correspondências entre os elementos de dois conjuntos. Nas correspondências a seguir, identifique aquelas caracterizadas pelo fato de que, a cada elemento do primeiro conjunto, corresponde um único elemento do segundo conjunto :

... é pai de ... (entre o conjunto de pais e de filhos)  
 ... é marido de ... (em um conjunto de brasileiros casados)  
 ... é chefe de ... ( no conjunto de pessoas de uma firma)  
 ... é inicial da palavra... (no conjunto de palavras)  
 ... tem por inicial a letra...(entre o conjunto de palavras e o de letras...  
 ”(MAZZIEIRO; MACHADO, 2012, p. 88)

Tabela 6: Dados do livro Descobrimo e aplicando a Matemática

Formato	O livro possui 9 capítulos totalizando 284 páginas. O tema funções é abordado em 18 páginas do capítulo 3 que possui 44 páginas.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos. Não há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Dados dois conjuntos A e B, uma função de A em B é uma regra que associa a cada elemento de A um único elemento de B.” (p. 89)
Assuntos Contemplados	Usando e deduzindo fórmulas Funções, fórmulas, tabelas e gráficos As funções e seus gráficos cartesianos Gráficos de funções afim Funções, funções quadráticas, seus gráficos e aplicações Gráficos de funções quadráticas Obs:Os assuntos são abordados sem títulos, entre um exercício e outro.

Ênfase	Tabelas.
Destaques	Relação de temas que deverão ser “aprendidos” em cada capítulo.
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Há exemplos de situações que não são funções.

## Matemática

(Edwaldo Bianchini)

Esta coleção inicia o estudo do tópico funções, no volume direcionado ao 9º ano, com o problema do cotidiano, que segue abaixo e, a partir dele, constrói uma tabela:

“A empresa de TV a cabo Cab cobra de seus assinantes uma mensalidade de R\$ 95,00 e mais R\$ 5,00 por programa extra que for comprado. Desse modo o valor a ser pago no final de cada mês depende do número de programas comprados pelo assinante”.  
(BIANCHINI, 2012, p. 180)

Tabela 7: Dados do livro Matemática

Formato	O livro possui 9 capítulos totalizando 250 páginas. O capítulo 7, com 36 páginas, aborda os assuntos relacionados a funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Dizemos que a grandeza $y$ é função da grandeza $x$ se há entre elas uma correspondência tal que, para cada valor de $x$ , exista um único valor de $y$ .” (p. 181)
Assuntos Contemplados	-O conceito de função; Gráfico de uma função; Como reconhecer o gráfico de uma função -Função polinomial do 1º grau: Gráfico de uma função polinomial do 1º grau; Estudo do sinal de uma função polinomial do 1º grau; -Função polinomial do 2º grau: Gráfico de uma função polinomial do 2º grau; Esboço do gráfico de uma função polinomial do 2º grau; Coordenadas do vértice da parábola; Valor máximo e valor mínimo de uma função polinomial do 2º grau; Construção do gráfico de uma função polinomial do 2º grau; Estudo do sinal de uma função polinomial do 2º grau;
Ênfase	Problemas, gráficos e lei de formação da função.
Destaques	Trechos sobre a História da Matemática. Quadro com resumos dos gráficos após a abordagem.
Exemplos	Não há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Matemática

(Imenes e Lellis)

Nesta coleção o capítulo sobre funções do volume abordado no 9º ano tem início com os seguintes exemplos, constantes na página 179: “A área do quadrado é função da medida de seu lado”, “O imposto de renda que uma pessoa paga é função de seu salário”, “A quantidade de combustível que um veículo consome por quilômetro rodado é função de sua velocidade”. É feita referência de que o conceito de função é muito importante também na Biologia, na Economia, na Física, na Química entre outras ciências.

Tabela 8: Dados do livro Matemática

Formato	O livro possui 14 capítulos totalizando 306 páginas. O capítulo 10, com 23 páginas, aborda o ensino de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de variação e dependência entre variáveis. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função, somente uma indicação: “Para se ter uma ideia do que é função, podemos pensar em duas grandezas que variam, uma dependendo da outra.” (p.179)
Assuntos Contemplados	-Funções, suas tabelas e suas fórmulas -Gráfico: o retrato da função -Usando funções: Problemas.
Ênfase	Tabelas, fórmulas, problemas e gráficos.
Destaques	A partir de problemas ele define a lei de formação da função e explora o gráfico da função, inclusive seu ponto máximo ou mínimo.
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Matemática e Realidade

(Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado)

O capítulo de funções do livro utilizado no 9º ano tem início com o seguinte problema, na página 250: “Osias é gerente financeiro de um grande banco. Para exercitar-se, costuma correr diariamente, mantendo um ritmo de 6 km por hora. Quantos metros ele corre a cada minuto?” É construída uma tabela e definida a lei de formação dessa função.

Tabela 9: Dados do livro Matemática e Realidade

Formato	O livro possui 29 capítulos num total de 319 páginas. Quatro deles, 23, 24, 25 e 26, totalizando 60 páginas, são dedicados ao ensino de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Quando há correspondência entre duas grandezas $x$ e $y$ , de modo que para cada valor de $x$ fica determinado um único valor de $y$ , dizemos que $y$ é função de $x$ .” (p.251)
Assuntos Contemplados	-Tabelas, fórmulas e gráficos: Noção de função; A notação $f(x)$ ; Representação gráfica da função; Gráfico de uma função; Reconhecendo o gráfico de uma função -Funções representadas por retas: Funções do 1º grau; Significado dos coeficientes; Função crescente e função decrescente; Proporcionalidade; Função linear; -Funções do 2º grau: Fórmula e gráfico da função do 2º grau; Função quadrática; O vértice da parábola; Construção de uma parábola; Interseções com os eixos coordenados; Os zeros da função quadrática; Os sinais da função quadrática. -Inequações do 1º e 2º grau.
Ênfase	Problemas e construções de tabelas e gráficos.
Destaques	Desafios.
Exemplos	Não há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

### Matemática na Medida Certa

(Centurión, Jakubo e Lellis)

O livro referente ao 9º ano inicia a abordagem de funções com um exemplo, na página 188: “Na aula de matemática o professor aponta para o aluno e diz um número. Esse aluno deve dizer o número que, somado ao do professor dá 10”. É utilizado uma tabela e o diagrama de flechas para ilustrar algumas possibilidades desse problema. Outros exemplos de funções em situações do cotidiano se seguem.

Tabela 10: Dados do livro Matemática na medida certa

Formato	O livro possui 5 capítulos num total de 218 páginas. O capítulo 5, com 38 páginas, aborda funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela, seguida do diagrama de flechas. Há ênfase na expressão analítica da função.

Definição	Não apresenta uma definição formal de função. Aborda essa definição através de um exemplo. “Cada número que o professor diz admite uma e só uma resposta.” (p.189)
Assuntos Contemplados	-Ideia de função; Domínio; Lei de associação; Pares ordenados -Função constante; Gráfico da função constante -Função de 1º grau; Gráfico da função do 1º grau -Função de 2º grau; Gráfico da função do 2º grau, Concavidade da parábola; Interseção com os eixos; Máximos e Mínimos
Ênfase	Problemas e gráficos de função do 2º grau.
Destaques	Questões do Enem.
Exemplos	Não há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Matemática: Compreensão e Prática

(Ênio Silveira e Claudio Marques)

O primeiro capítulo dedicado às funções do volume indicado ao 9º ano inicia a abordagem com o seguinte problema:

“O modelo Tata Nano - o carro mais barato do mundo – alcança a velocidade máxima de 105 km/h, faz 20 km com um litro de combustível e custa aproximadamente 2500 dólares. Considerando que a fábrica Tata Motors tenha produzido 30 mil unidades desse veículo por mês em 2008, em cinco meses, quantos desses veículos foram produzidos? Escreva o número de veículos( $v$ ) produzidos pela fábrica, nesse ano, em função do tempo( $t$ )”.

(SILVEIRA; MARQUES, 2012, p. 94)

O livro também apresenta a definição de relação, na página 96: “Denominamos relação de A em B qualquer subconjunto de  $A \times B$  não-vazio.” É citada a seguinte observação na página 98 do livro: “Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.”

Tabela 11: Dados do livro Matemática: Compreensão e Prática

Formato	O livro possui 12 capítulos num total de 328 páginas. Dois deles, os capítulos 3 e 4, totalizando 48 páginas, são dedicados ao ensino de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela, seguida do diagrama de flechas. Há ênfase na expressão analítica da função.

Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Dados dois conjunto A e B, chama-se função de A em B qualquer relação entre os elementos desses conjuntos, de modo que a cada elemento de A se associe um único elemento de B.” (p. 98).
Assuntos Contemplados	Funções: Representação de uma função; Relação e função; Lei de associação; Relação inversa; Função. -Domínio, Contradomínio, Conjunto Imagem e Valor de uma função -Função Afim: Representação gráfica; Resolução gráfica de um sistema de equações; Zeros da função; Variação da função; Estudo do sinal da função -Inequação do 1º grau: Representação gráfica de uma inequação do 1º grau com duas incógnitas; Resolução gráfica de um sistema de inequações do 1º grau; -Função quadrática: Gráfico; Concavidade da parábola; Zeros da função; Coordenadas do vértice; Construção do gráfico de uma função quadrática com base nas coordenadas do vértice; Valor mínimo e valor máximo; Estudo do sinal -Inequações do 2º grau
Ênfase	Construção de gráficos. Exercícios objetivos relacionados às definições.
Destaques	Aborda os conceitos de Relação e Relação inversa; e as atividades Valor de uma função e Resolução gráfica de um sistema de equações. Desafios.
Exemplos	Não há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Há exemplos de situações que não são funções, mas somente utilizando conjuntos numéricos, através do diagrama de flechas.

## Matemática: Ideias e Desafios

(Iracema e Dulce)

Nesta coleção os exemplos iniciais, que constam na página 243 do livro referente ao 9º ano, são: “Em um veículo, dentre vários fatores, o consumo de combustível depende da sua velocidade”, “O preço das passagens de ônibus depende, dentre outros fatores, da distância entre a cidade do embarque e a de destino”. Seguem várias outras situações envolvendo funções onde são utilizadas tabelas, variáveis, leis de formação e gráficos.

Tabela 12: Dados do livro Matemática: Ideias e Desafios

Formato	O livro possui 11 capítulos num total de 301 páginas. Dois deles, os capítulos 9 e 10, totalizando 38 páginas, são dedicados ao ensino de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de relações entre

	grandezas. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função. Aborda essa definição através de um exemplo: “A cada aluno corresponde um único número de chamada.” (p. 244).
Assuntos Contemplados	-Funções: significado e registro -Função de 1º grau: Inclinação de retas; Raiz ou zero de uma função de 1º grau; Estudo de sinais. -Função do 2º grau: Desenhando parábolas; Raízes ou zeros de uma função de 2º grau; Vértice da parábola; Construção de parábolas; Estudando parábolas: Máximos e mínimos; Estudo de sinais; Inequações do 2º grau;
Ênfase	Gráficos
Destaques	O capítulo 9 inicia a abordagem sobre funções com exemplos de frases de jornais e televisão que abordam a palavra “função” com diferentes significados. Quadro com resumos dos gráficos após a abordagem.
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Praticando Matemática

(Alvaro Andrini e Maria José Vasconcellos)

O capítulo sobre funções, do volume abordado no 9º ano, tem início com a seguinte afirmação na página 95: “A quantidade de combustível consumida por um automóvel é função da distância que ele percorre”. É dito também que existe uma ligação entre a palavra função e a relação de interdependência entre os valores de grandezas. Faz-se referência a “Ideia da Máquina” da seguinte forma:

“Imagine a função como uma máquina. Para cada número que colocamos na entrada, ela faz as operações indicadas e fornece um número na saída. A máquina diz: ‘Triplica e depois soma 2.’ Para obtermos na saída a bolinha com o número 71, que número deve ser colocado na bolinha de entrada?”  
(ANDRINI; VASCONCELLOS, 2012, p. 99)

Tabela 13: Dados do livro Praticando Matemática

Formato	O livro possui 10 capítulos totalizando 252 páginas. O capítulo 4, que possui 38 páginas, aborda os assuntos relacionados a funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de variação e dependência entre variáveis. Há ênfase na expressão analítica da função. Faz uso do diagrama de flechas.
Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Para que tenhamos uma função é preciso estabelecer dois conjuntos, um primeiro conjunto, no

	qual tomaremos os valores de $x$ , e um segundo conjunto, no qual encontraremos os valores correspondentes de $y$ ; haver uma relação entre $x$ e $y$ de forma que a cada $x$ tomado no primeiro conjunto corresponda um único $y$ no segundo conjunto.” (p.97)
Assuntos Contemplados	-Conceito de função: Lei de formação; Diagramas -A ideia da máquina -Domínio e imagem -As funções e suas aplicações -Da tabela para a lei de formação da função -Interpretando gráficos -Construindo gráficos de funções
Ênfase	Problemas e Gráficos
Destques	Questões da OBMEP, Cap-UERJ, Pedro II e vestibulares .
Exemplos	Há exemplo de função sem explicitar a expressão analítica. Há exemplo de uma situação que não é função. Após citar esse exemplo, o livro o classifica a partir do diagrama de flechas.

### Projeto Araribá

A ideia de função é abordada no volume referente ao 9º ano dessa coleção a partir de um texto sobre a camada do pré-sal e do exemplo:

“Considere que a produção de um poço de petróleo localizado em uma plataforma marítima seja de 18.000 barris por dia e que cada barril de petróleo tenha capacidade para 159 litros e responda às questões no caderno: 1-Em um dia, quantos litros de petróleo serão extraídos? 2-Em três dias, quantos barris de petróleo serão produzidos nesse poço? E quantos litros de petróleo? 3-Escreva uma expressão que relacione a quantidade de litros extraídos à quantidade de dias.”.  
(PROJETO ARARIBÁ, 2013, P. 129)

Tabela 14: Dados do livro Projeto Araribá

Formato	O livro possui 14 capítulos totalizando 218 páginas. Os capítulos 8, 9 e 10, totalizando 34 páginas, são dedicados ao ensino de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre grandezas. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Quando há correspondência entre duas grandezas e para cada medida da primeira grandeza ocorre uma única medida correspondente da segunda, dizemos que a segunda grandeza é função da primeira.” (p.130)
Assuntos Contemplados	-A ideia de função; Lei de formação da função; Variáveis dependentes e independentes -A notação $f(x)$ ; Valor de uma função -Representação gráfica de uma função -Função afim: Análise do gráfico de uma função afim; Função linear;

	-Função quadrática; Estudo do gráfico de uma função quadrática; Concavidade, ponto máximo e ponto mínimo da parábola.
Ênfase	Problemas e Tabelas
Destaques	Variáveis dependentes e independentes. Problemas de Contagem.
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Projeto Telaris

(Luiz Roberto Dante)

A Coleção Projeto Telaris inicia o capítulo de funções, na página 70, do volume direcionado aos alunos do 9º ano, com uma situação do cotidiano relacionando, através de uma tabela e depois de um gráfico, as variáveis “caixas de suco” e “preço à pagar”. A seguir apresenta a lei de formação da função e a definição de variável.

Tabela 15: Dados do livro Projeto Telaris

Formato	O livro possui 9 capítulos totalizando 292 páginas. O capítulo 3, com 37 páginas, aborda o estudo de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de variação e dependência entre variáveis. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função. Aborda essa definição através de um exemplo. “Quando variamos a medida do lado de um quadrado, seu perímetro também varia. Dizemos que o perímetro de um quadrado é dado em função da medida de seu lado, isto é, o perímetro depende da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado, temos um único valor para o perímetro.” (p.72)
Assuntos Contemplados	- Explorando a ideia de função -A ideia intuitiva de função: Lei da função; Variáveis, variável dependente e independente; Gráficos de funções; Zeros de uma função; Reconhecendo se um gráfico é de função; Resolução de problemas que envolvam o conceito de função -Função afim: Gráfico de uma função afim; Ângulo de declividade da reta de uma função afim; Função linear; Gráfico de uma função linear; Função linear e proporcionalidade; - Função quadrática; Valor de uma função quadrática em um ponto; Zeros de uma função quadrática; Gráfico de uma função quadrática; Coeficientes a,b e c; A parábola e suas interseções com os eixos; Vértice da parábola, valor máximo ou valor mínimo da função quadrática; Outras situações que envolvem funções
Ênfase	Problemas e Gráficos.
Destaques	Questões de raciocínio lógico.
Exemplos	Não há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Projeto Velear

(Antônio José Lopes)

O capítulo sobre funções destaca inicialmente, na página 163, do volume referente ao 9º ano, o fato de que várias ciências, tais como: Economia, Física Biologia, Química e Sociologia estudam a relação entre variáveis que interferem nos fenômenos naturais e sociais. Profissionais como meteorologistas, economistas e demógrafos utilizam modelos matemáticos: “Os meteorologistas, por exemplo, estudam a relação entre pressão, temperatura, direção e velocidade dos ventos para fazer previsões do tempo e calcular a probabilidade de fazer sol ou chover”. Antes de iniciar o estudo de funções o autor aborda modelos matemáticos, fórmulas, interdependência entre grandezas, tabelas e análise de gráficos. Ele define modelo matemático como sendo uma representação da realidade que pode ser expressa por meio de fórmulas, esquemas ou gráficos.

Tabela 16: Dados do livro Projeto Velear

Formato	O livro possui 12 capítulos num total de 261 páginas. Dois deles, os capítulos 8 e 9, totalizando 49 páginas, são dedicados ao ensino de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos. Utiliza também o diagrama de flechas e a representação no sistema cartesiano. Não há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Chama-se função de um conjunto A em um conjunto B, conhecidos, qualquer relação entre esses conjuntos que faça corresponder a cada elemento de A um único elemento de B.” (p.175)
Assuntos Contemplados	Introdução às funções: -Modelos matemáticos: fórmulas, tabelas e gráficos: Fórmulas e a interdependência entre as grandezas; Tabelas -Análise de gráficos: um estudo matemático; -Função: primeiras ideias: Representação de funções no sistema cartesiano; Representação de pontos, intervalos e regiões; Intervalos no plano cartesiano; Discreto X Contínuo. Funções polinomiais de 1º e 2º graus: -Funções do 1º grau: Interseções com os eixos; Inclinação da reta; Coeficiente Angular -Inequações do 1º grau; -Funções quadráticas: Interseções com os eixos; Vértice; Esboço da parábola -Análise de Gráficos: Função do 1º grau; Função quadrática; -Aplicações e Modelagem: Problemas de máximo e de mínimo: áreas e perímetros; a matemática do taxista; Descobrimo fórmulas no cotidiano.

	-Interseção de curvas
Ênfase	Tabelas e gráficos
Destaques	Diferentemente dos outros livros analisados, este aborda a ideia de “natureza discreta” e “natureza contínua”. Também é estudada a inclinação da reta e o coeficiente angular. Outros assuntos pouco explorados no 9º ano, mas tratados neste livro são: a interseção de curvas e a interdependência entre as grandezas.
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica da função. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Tudo é Matemática

(Luiz Roberto Dante)

A ideia de função é mostrada, inicialmente, na página 80, do livro do 9º ano dessa coleção, utilizando o exemplo da correspondência entre “quantidade de litros de gasolina adquirida” e o “preço a pagar”. A partir de então é montada uma tabela com os valores e é definida a lei de formação dessa função. Os exercícios seguintes envolvem fórmulas, tabelas e gráficos. Vários exemplos utilizando as “Máquinas” são mostrados.

Tabela 17: Dados do livro Tudo é Matemática

Formato	O livro possui 10 capítulos num total de 291 páginas. O capítulo 4, com 34 páginas, trata a abordagem de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de variação e dependência entre variáveis. Há ênfase na expressão analítica da função.
Definição	Não apresenta uma definição formal de função. Aborda essa definição através de um exemplo. “Quando variamos a medida do lado de um quadrado, seu perímetro também varia. Dizemos que o perímetro de um quadrado é dado em função da medida de seu lado, isto é, o perímetro depende da medida do lado. A cada valor dado para a medida do lado, temos um único valor para o perímetro.” (p.82)
Assuntos Contemplados	-Ideia intuitiva de função: Lei da função; Variáveis; Representação gráfica de uma função -Construção de gráficos de funções: Zeros de uma função; Reconhecendo se um gráfico é de função -Função Afim: Gráfico de uma função afim; Função linear; Gráfico de uma função linear; Função identidade; Função linear e proporcionalidade -Função Quadrática: Definição; Valor de uma função quadrática em um ponto; Zeros de uma função quadrática; Gráfico de uma função quadrática; Os coeficientes a, b e c; A Parábola e suas interseções com os eixos; Vértice da parábola, valor máximo ou valor mínimo da função quadrática -Regularidades e funções

Ênfase	Tabelas e “Máquinas”
Destaques	Exercícios de reconhecimento de gráficos de funções. Função linear e proporcionalidade
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

## Vontade de saber Matemática

(Joamir Souza e Patricia M. Pataro)

O livro Vontade de Saber Matemática do 9º ano inicia o capítulo de funções, na página 82, abordando Criptografia. Logo após é dada uma noção sobre a história do desenvolvimento do conceito de função e a seguir são citados exemplos de problemas do cotidiano, na página 74, tais como: “O valor da fatura de um telefone é calculado em função do consumo do mês”; “A comissão de um vendedor é dada em função do quanto ele vende em determinado período”; “O tempo de uma viagem está em função da velocidade praticada no trajeto”.

Tabela 18: Dados do livro Vontade de saber Matemática

Formato	O livro possui 10 capítulos totalizando 237 páginas. O capítulo 5, com 40 páginas, trata a abordagem de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de relação entre grandezas variáveis. Há ênfase na expressão analítica da função. Utiliza também o diagrama de flechas
Definição	Não apresenta uma definição formal de função. Aborda essa definição através de um exemplo: “Mário trabalha em uma fábrica de montagem de televisores. Para montar cada aparelho ele verificou que eram gastos 4,5 min. Neste caso, estão relacionadas duas grandezas, isto é, a quantidade de televisores $x$ e o tempo em minutos $y$ . Cada quantidade de televisores corresponde a um único tempo em minutos, ou seja, a cada valor que atribuímos à variável $x$ , obtemos um único valor para a variável $y$ . Essa situação caracteriza um exemplo de função.” (p.84)
Assuntos Contemplados	-Criptografia -A noção de função -Variável dependente e variável independente -Lei de formação da função -Notação de função -Representação de função por meio de diagramas -Representação gráfica de uma função -Função afim: Gráfico de uma função afim; Função linear; Função linear e proporcionalidade; Função crescente e decrescente; Zeros de

	uma função afim; Interseção com o eixo y -Função quadrática; Gráfico de uma função quadrática; Zeros de uma função quadrática; Interseção com o eixo y; Coordenadas do vértice; Ponto de máximo e de mínimo de uma função quadrática.
Ênfase	Problemas e Gráficos.
Destaques	Noções sobre o Geogebra. Questões do Enem e de universidades. Trechos relacionados à História da Matemática.
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Não há exemplos de situações que não são funções.

### Caderno Pedagógico da SME-RJ

O Caderno Pedagógico do 3º bimestre do 9º ano inicia as atividades citando algumas situações do cotidiano, na página 2, em que as funções estão presentes: “O valor da conta de energia elétrica depende do número de kWh gastos durante um mês”; “A comissão de um vendedor é uma função das vendas que ele efetuou”; “O tempo de percurso de certo trajeto é uma função da velocidade média desenvolvida no trajeto”.

A seguir são apresentadas algumas atividades envolvendo tabelas e lei de formação da função, nas páginas 3 e 4. O seguinte exercício envolvendo a máquina é desenvolvido na página 4: “No laboratório de Informática, Pedro criou um programa que realiza operações matemáticas a partir de uma lei que determina o número de saída em função do número de entrada”.

Seguem, nas páginas 5, 6 e 7, vários problemas envolvendo o conceito de função. A seguinte definição de Relação é apresentada logo após alguns exercícios de revisão sobre Plano cartesiano e par ordenado, na página 10: “Uma relação entre dois conjuntos A e B é uma regra que associa elementos de A a elementos de B.” Essa definição é exemplificada através de diagramas.

Tabela 19: Dados do Caderno Pedagógico

Formato	O caderno do 3º bimestre possui 53 páginas das quais 25 são destinadas ao ensino de funções. E o caderno do 4º bimestre possui 29 páginas das quais 19 são destinadas ao ensino de funções. No total temos 44 páginas dedicadas ao estudo de funções.
Abordagem	A ideia de função abordada inicialmente é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela. Há ênfase na expressão analítica da função. Utiliza também o diagrama de flechas
Definição	Apresenta uma definição formal de função: “Uma relação entre dois conjuntos A e B é uma função de A em B, quando todos os elementos

	$x \in A$ têm seu correspondente $y \in B$ ; e cada $x \in A$ possui apenas um correspondente $y \in B$ .” (p.10)
Assuntos Contemplados	Função: Situações do cotidiano; Noção de função; Lei de formação da função; Valor de uma função. Relembrando Plano cartesiano e Par ordenado. Definição de Relação. Definição de quando uma relação é também uma função. Gráficos; Gráfico de uma função do 1º grau; Função crescente, decrescente e constante; Zero ou raiz da função; Descobrimo a função através de seu gráfico; Função Polinomial do 2º Grau: Domínio; Contradomínio; Lei da Correspondência; Valor de uma função; Zero da função; Gráfico da função polinomial do 2º grau; Valor máximo e valor mínimo; Coordenadas do vértice da função; Esboço de gráfico.
Ênfase	Problemas do cotidiano
Destaques	Plano cartesiano e par ordenado. Definição de Relação
Exemplos	Há exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica. Há exemplos de situações que não são funções, mas somente utilizando conjuntos numéricos, através do diagrama de flechas.

### 1.3.3-Análise Comparativa

A coleção “Aplicando a Matemática”, de Alexandre Luís Trovon de Carvalho e Lourisnei Fortes Reis, aborda o estudo de funções nos quatro volumes, ou seja, desde o 6º ano do ensino fundamental. A função inversa e a função composta são os destaques na abordagem do livro do 6º ano. No livro do 7º ano é utilizada a ideia de função para o desenvolvimento de algumas atividades relacionadas a Múltiplos e Pares Ordenados. O destaque desse ano é a abordagem da “*Regra de Friend*”, usada para encontrar a dosagem de medicação correta para uma criança com menos de dois anos de idade. No livro do 8º ano, a ideia de função é aplicada ao cálculo de diagonais de um polígono. Também é realizada uma comparação entre as ideias de “fórmula” e “equação”. No último livro da coleção, referente ao 9º ano, é destaque a “transformação” de uma equação em uma função, como segue: “A equação obtida na resolução do problema é:  $40 = 3x + 10$ . Mas, se colocarmos  $y$  no lugar de 40, é possível obter uma tabela e a seguir um gráfico que irá mostrar várias possibilidades de ganho. Assim, variando  $x$  temos o ganho diário  $y$ .”

O livro do 9º ano “Descobrimo e Aplicando a Matemática”, de Alceu dos S. Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado, é o único que inicia o estudo de funções

com exemplos não numéricos de situações que não são funções, além citar também exemplos que são funções.

As coleções do 9º ano: “Matemática: Compreensão e Prática”, de Ênio Silveira e Claudio Marques, “Praticando Matemática”, de Alvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, e o Caderno Pedagógico da Prefeitura do Rio de Janeiro também apresentam exemplos de situações que não são funções, mas estas são classificadas a partir de diagramas de flechas.

A publicação do 9º ano “Matemática: Compreensão e Prática”, de Ênio Silveira e Claudio Marques trabalha a ideia de relação antes de definir função. Ela ressalta que “Toda função é uma relação, mas nem toda relação é uma função.”

A bibliografia “Projeto Telaris”, de Luiz Roberto Dante, do 9º ano, explora a noção de variável dependente e variável independente.

A coleção “Projeto Velear”, de Antônio José Lopes, do 9º ano, trabalha a ideia de modelos matemáticos. A noção de “Discreto X Contínuo” também é contemplada nessa coleção.

A ideia de função abordada inicialmente, em grande parte das coleções, é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, principalmente utilizando tabelas.

Grande parte das coleções, nove delas, apresentam exemplos de funções sem explicitar a expressão analítica, porém, apenas quatro coleções apresentam exemplos de situações que não representam funções.

Das quinze coleções analisadas, doze apresentam ênfase na expressão analítica da função, apesar de algumas delas mencionarem exemplos sem explicitá-la. Além disso, sete dessas coleções não apresentam uma definição formal de função.

Todas as coleções analisadas enfatizam o estudo de funções através de exemplos do cotidiano. Vários autores utilizam os exemplos envolvendo situações que incluem “Máquinas”. Sete livros utilizam os diagramas de flechas em alguns de seus exemplos.

Com exceção do livro “Descobrimos e Aplicando a Matemática”, todos os outros dedicam um ou mais capítulos ao estudo de funções.

Outros assuntos importantes, também abordados em algumas coleções, são: proporcionalidade, probabilidade, coeficiente angular, coeficiente linear, relação e relação inversa, história da matemática, Criptografia, Geogebra, questões do Enem, questões da OBMEP.

A coleção “Aplicando a Matemática” e o Caderno Pedagógico são materiais pedagógicos “consumíveis”, isto é, possuem espaço pré-determinado no próprio livro/caderno para que o aluno possa desenvolver a resolução da atividade.

O ensino de funções, no nível fundamental, é incentivado e valorizado pelos autores dos livros didáticos direcionados a esse período do ensino, e do Caderno Pedagógico do município do Rio de Janeiro. A maioria das coleções dedica vários capítulos ao estudo desse conteúdo tão importante na matemática. Esse estudo objetiva proporcionar sólidos conhecimentos para uma boa aprendizagem na abordagem que deverá ser realizada, sobre este conteúdo, no ensino médio.

Apresentamos a seguir, nas tabelas 20 e 21, um resumo sobre a ideia de função abordada inicialmente, em cada livro didático analisado, e as principais características dessa abordagem.

Tabela 20: Resumo das ideias de função apresentadas nos livros analisados

<b>Ideia de função abordada inicialmente</b>	<b>Bibliografias</b>
Correspondência entre elementos de dois conjuntos	4
Correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela	1
Correspondência entre elementos de dois conjuntos, através de uma tabela, seguida do diagrama de flechas	3
Relações entre grandezas	2
Variação e dependência entre variáveis	4
Correspondência entre grandezas	1

Tabela 21: Resumo das características analisadas quanto à abordagem

<b>Características da Abordagem</b>	<b>Bibliografias</b>
Enfatizam a expressão analítica	12
Apresentam uma definição formal	8
Abordam algum exemplo de função sem a expressão analítica	9
Citam algum exemplo que não é função	4
Utilizam o diagrama de flechas	7

#### **1.4- Recapitulando**

Após as análises, histórica, dos livros didáticos, e dos artigos e bibliografias relacionadas ao ensino de funções, podemos perceber que a ideia de correspondência e de variação está presente todo o tempo. Desde épocas antigas, com a contagem, até a presente data, pois, na maioria dos livros didáticos, a ideia de função, abordada inicialmente, é a de correspondência entre elementos de dois conjuntos, principalmente utilizando tabelas, como o que ocorre no exemplo de uma máquina que possui uma entrada que está relacionada a uma saída. Esse exemplo da máquina é frequentemente utilizado nas bibliografias didáticas atuais.

Podemos observar que a identificação de uma função com a sua expressão analítica tem origens históricas. A maioria das coleções analisadas apresenta ênfase na expressão analítica da função, apesar de grande parte dessas coleções exibirem vários exemplos de funções sem explicitar a sua expressão analítica. Essa ênfase mostra razões de ordem didática para o fato apontado por Palis (2013, p.1) de que muitos alunos acreditam que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica.

Também podemos constatar que as dificuldades com os conceitos de "constante", "variável" e "parâmetro", entre outros, são antigas, pois são relatadas em vários estudos ao longo dos anos.

A comparação entre “fórmula” e “equação”, no livro didático “Aplicando a Matemática” do 8º ano, demonstra que é imprescindível sempre deixar claro esses conceitos para o aluno, e de relacioná-los à ideia de expressão algébrica.

O livro didático “Aplicando a Matemática” do 9º ano, ao comparar função e equação, ressalta uma necessidade antiga de estarmos sempre atentos a possíveis confusões, por parte dos alunos, ao estabelecer essas noções.

Podemos verificar também que, apesar de algumas dificuldades na aquisição de determinados conhecimentos relacionados à função, por parte dos alunos, devido a importância desses conhecimentos, podemos abordá-los no 6º ano do ensino fundamental, de forma básica, clara e até intuitiva, incluindo também, a partir de exemplos simples, as ideias de função inversa e função composta, conteúdos considerados difíceis pelos alunos quando abordados no 9º ano.

Outros assuntos relacionados às funções que já eram analisados por antigos matemáticos, mas que também fazem parte dos livros didáticos e dos estudos de pesquisadores atuais são, por exemplo, as variáveis dependentes e independentes, e a noção de proporcionalidade.

Quanto à definição de função, esta foi estudada por vários matemáticos em nossa história, e reformulada várias vezes, mas, temos que, atualmente, sete das quinze bibliografias consultadas não apresentam nenhuma definição formal sobre esse conceito.

Algumas pesquisas defendem a ideia de que uma situação, um problema ou um fenômeno deve ser descrito inicialmente verbalmente, sem nenhuma linguagem formal. Podemos verificar que isso ocorre em todas as coleções analisadas, que incentivam o estudo de funções através de exemplos do cotidiano.

Apesar de muitos livros didáticos abordarem inicialmente a ideia de correspondência entre elementos de dois conjuntos, principalmente utilizando tabelas, atualmente defende-se a ideia de um conceito de função que inclua uma concepção de função como covariação de quantidades e não somente como correspondência.

Observa-se que, de acordo com vários autores, as dificuldades em discernir variável de incógnita, função de equação e identificar uma função com a sua expressão analítica, ou seja, confundir o objeto com uma de suas representações é uma consequência do ensino. Mesmo nos dias de hoje, muitos alunos ainda acreditam que todas as funções podem ser definidas por uma fórmula algébrica, e alguns tendem a igualar à zero qualquer expressão apresentada com o objetivo de tentar encontrar um valor para a variável envolvida.

## 2- A proposta do MatDigital

Neste capítulo iremos abordar o projeto MatDigital, a proposta para o ensino de funções no MatDigital, e alguns conceitos preliminares necessários para a compreensão dessa proposta. Faremos também uma análise do projeto, apresentaremos um panorama atual, e abordaremos o MatDigital em versão estática.

As informações pertinentes à proposta do MatDigital foram disponibilizadas através dos seguintes documentos:

Tabela 22: Documentos do MatDigital

Documento	Descrição
Resumo do MatDigital (versão datada de 17/06/2013).	Texto informando sobre: a concepção, os objetivos, a estrutura, as seções do livro do aluno (“Explorando o Assunto”, “Aprofundando o Assunto”, Organizando o que você aprendeu”); os tipos de exercícios (“Atividades”, “Indo Adiante”); os destaques gráficos: (“Refletindo”, “Para Conhecer”, “Quebrando a Cuca”, “Organizando as Ideias”, “Mão na Massa”, “Jogo”, “É Lógico!”), o texto introdutório e as orientações específicas constantes no Caderno do professor, os materiais suplementares; as Comissões Acadêmicas e suas atribuições (Comitê Editorial, Comitê Acadêmico de Redação, Comitê Acadêmico de Articulação de Áreas do Conhecimento, Comitê Acadêmico de Recursos Multimídia, Comitê Acadêmico de Revisão Científica, Comitê Acadêmico de Acompanhamento e Inserção nas Escolas Públicas), a Coordenação do Projeto, as Comissões Técnicas, a Metodologia de Desenvolvimento, as Diretrizes para as Comissões de Redação, as Etapas do Projeto.
Planilha de conteúdos do MatDigital – sexto ao nono ano (versão datada de 03/10/2013).	Planilha com informações sobre os títulos dos capítulos, os respectivos conteúdos, objetivos, articulação com outros capítulos e sugestões de atividades e recursos.
Delineamento do capítulo sobre Relações entre Variáveis. Duas versões: uma datada de (10/10/2013)	Texto enviado ao respectivo comitê de redação com a apresentação e justificativa da proposta de iniciar o capítulo

e a outra de (25/11/2013).	abordando fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios.
Capítulo 1, do livro direcionado ao sexto ano, denominado “Os Números no Nosso Dia a Dia: para que servem os Números?”. (recorte-6º ano-capítulo 1) (versão datada de 07/11/2013).	<p>Texto preparado pelo comitê de redação explicitando os objetivos do capítulo e o desenvolvimento do mesmo, adotando a proposta acima.</p> <p>Capítulo 1 do livro do 6º ano onde constam: assuntos e conceitos abordados no capítulo, objetivos, concepção, relações com outros capítulos, atividades e comentários direcionados ao professor. É organizado de forma a contemplar as seguintes seções: “Explorando o Assunto”, “Aprofundando o Assunto”, “Refletindo”, “Organizando as ideias”, “Quebrando a cuca”, “Para Conhecer”, “É lógico”, e “Organizando o que você aprendeu”.</p>
Capítulo 3 do livro direcionado ao nono ano denominado “Relações entre variáveis” (recorte-9ºano-capítulo 3 (versão datada de 15/11/2013)	Capítulo 3 do livro do 9º ano onde constam: assuntos e conceitos abordados no capítulo (principais e secundários), objetivo geral, objetivos específicos, pré-requisitos, atividades e comentários direcionados ao professor. É organizado de forma a contemplar as seguintes seções: “Explorando o Assunto”, “Aprofundando o Assunto”, “Refletindo”, “Organizando as ideias”, “Quebrando a cuca”, “Para Conhecer”.

## 2.1- O projeto MatDigital

### 2.1.1- Concepção

A proposta do MatDigital é de uma Coleção Didática Digital direcionada aos alunos do segundo segmento do ensino fundamental das Escolas Públicas do País. A criação dessa Coleção é um projeto da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM). O objetivo principal desse projeto é o desenvolvimento de um conjunto abrangente de materiais e recursos digitais para a sala de aula dos quatro anos do segundo segmento do ensino fundamental público brasileiro. A proposta é de um modelo com atividades multimídia interativas e não apenas um texto convencional visualizado em um computador. Um segundo objetivo, não menos importante, é a capacitação dos

professores para o uso desse material didático e a formação continuada destes, conectada com a prática. Logo, o MatDigital é concebido como um processo dinâmico visando a articulação permanente de três importantes pilares: Conteúdo, Tecnologia e Formação Continuada.

### **2.1.2 – Estrutura da Coleção**

A coleção MatDigital deverá ser constituída pelos Livros do Aluno – em versão digital, os Cadernos do Professor – em versão digital e os materiais suplementares. As atividades multimídia que comporão essa coleção poderão ser de diversas naturezas, tais como: hiperlinks, animações, vídeos, áudio, jogos e outras atividades interativas.

#### **Livro do Aluno**

Os capítulos do Livro do Aluno de cada ano da coleção deverão ser estruturados em três seções: *Explorando o Assunto*, *Aprofundando o Assunto* e *Organizando o que Você Aprendeu*.

A seção *Explorando o Assunto* é a inicial de cada capítulo e será constituída de situações e atividades introdutórias com o objetivo de despertar o interesse do aluno para o conteúdo a ser abordado e também problematizar os conceitos matemáticos apresentados.

A seção *Aprofundando o Assunto* corresponde ao desenvolvimento dos conceitos matemáticos propriamente ditos.

E a seção *Organizando o que Você Aprendeu* encerra cada capítulo com um resumo e uma sistematização geral dos conteúdos estudados com vistas à continuidade da abordagem nos capítulos posteriores.

Ao longo das seções *Explorando o Assunto* e *Aprofundando o Assunto* de cada capítulo serão propostos exercícios, numerados, de dois tipos: *Atividades*, que têm o objetivo de conduzir o desenvolvimento do assunto, e deverão ser realizadas em sala de aula; e *Indo Adiante*, que visa à consolidação dos conhecimentos aprendidos e a preparação para os capítulos seguintes, e deverão ser realizados como tarefa de casa. Os exercícios poderão ser planejados tanto para desenvolvimento com papel e lápis, quanto para uso de recurso multimídia.

O material inclui ainda destaques gráficos, na forma de caixas de texto, com os seguintes objetivos:

- Refletindo: Apresentam questões que serão abordadas e desenvolvidas ao longo do texto.
- Para Conhecer: Apresentam questões que não envolvem somente conteúdo matemático do livro. Algumas dessas questões poderão dar origem a propostas de atividades interdisciplinares.
- Quebrando a Cuca: Propõem questões mais desafiadoras.
- Organizando as ideias: Apresentam as definições e as propriedades dos conceitos matemáticos tratados.
- Mão na Massa: Propõem questões de caráter prático, com recursos externos ao próprio livro, tais como materiais concretos, jogos ou programas computacionais.
- Jogo: Propõem atividades lúdicas educacionais.
- É Lógico: Exploram questões envolvendo raciocínio lógico elementar.

### **Caderno do Professor**

Os Cadernos do Professor têm como objetivos orientar o trabalho didático e discutir aspectos do conteúdo que determinam a organização e a sequência de abordagem da Coleção. Além disso, os Cadernos do professor deverão apresentar um texto introdutório e orientações específicas. O texto introdutório irá abordar, sempre que forem pertinentes, os objetivos do capítulo; os conteúdos que serão desenvolvidos; as metodologias utilizadas com suas justificativas; o que esperar do aluno, em relação à aprendizagem, ao final do capítulo; as relações com os outros capítulos do livro, e com os outros anos escolares e as fundamentações teóricas. As orientações específicas devem indicar ao professor, sempre que couberem, os objetivos específicos das atividades; a solução comentada; possíveis dificuldades que os alunos possam apresentar; o tempo previsto para a aplicação das atividades, sugestões metodológicas específicas; indicação de materiais concretos e outros recursos didáticos, com a indicação de utilização do mesmo. Quando for necessário, esses Cadernos podem

incluir outros textos, e, recursos multimídias específicos, com orientações para o professor.

## **Materiais Suplementares**

Esses materiais são direcionados a alunos que necessitem de complementações adicionais de conteúdo. Os materiais suplementares não serão incluídos no corpo principal do Livro do Aluno, e poderão também ser disponibilizados em hiperlinks ou em um sítio na internet. São previstos também, direcionados ao professor, materiais suplementares que possuem como objetivo agregar conhecimentos enriquecedores sobre o conteúdo ou suas metodologias de ensino.

### **2.1.3- Comitês Acadêmicos**

O projeto MatDigital é constituído dos seguintes comitês: Comitê Editorial, Comitê Acadêmico de Articulação de Áreas do Conhecimento, Comitê Acadêmico de Recursos Multimídia, Comitês Acadêmicos de Redação, Comitê Acadêmico de Revisão Científica, Comitê Acadêmico de Acompanhamento e Inserção nas Escolas Públicas. Além dos comitês a coordenação do projeto conta com um Coordenador, um Vice-Coordenador e as Comissões Técnicas. Cada Comitê de Redação é composto por professores universitários e professores do ensino básico. Os Comitês de Redação foram constituídos nas diferentes regiões do país.

### **2.1.4- Desenvolvimento dos Materiais**

Os Comitês Acadêmicos de Redação trabalham na elaboração dos capítulos que vão compor o livro dos alunos e o caderno do professor, além de trabalharem também no desenvolvimento dos materiais suplementares. Após a elaboração, esse material é disponibilizado em uma plataforma para apreciação e sugestões por um determinado período. A seguir, esse material é encaminhado ao Comitê Acadêmico de Articulação de Áreas do Conhecimento. Esse comitê avalia e encaminha ao Comitê Acadêmico de Revisão Científica. Concluída a revisão, a proposta é encaminhada ao Comitê Editorial para avaliação final. Este comitê poderá aceitar, rejeitar ou reencaminhar o texto para o

Comitê Acadêmico de Redação, para que sejam realizados ajustes, correções ou reformulações.

## 2.2- A proposta para o ensino de funções no MatDigital

### 2.2.1- O ensino informal de relações entre variáveis a partir do sexto ano

No projeto MatDigital o tópico relações entre variáveis deverá permear toda a coleção de modo informal. Serão abordados, então, durante o desenvolvimento dos conteúdos, os conceitos de relações que são funções e relações que não são funções. Apresentamos, abaixo, uma atividade que deverá estar presente na versão final do primeiro capítulo, no material do sexto ano do MatDigital, intitulado “Os números no dia a dia”, e que ilustra de que maneira o tópico Relações entre Variáveis será abordado nesse nível.

As figuras abaixo mostram duas formas de pendurar roupas no varal para secarem. Observe-as e responda:

- Em cada forma de acomodação das roupas, quantos pregadores são necessários para pendurar 5 peças de roupa?
- E se fossem 10 peças de roupa penduradas, quantos pregadores seriam necessários em cada caso?
- E para pendurar 23 peças? Explique seus cálculos.
- E se fossem 123 peças? Explique como você obteve sua resposta

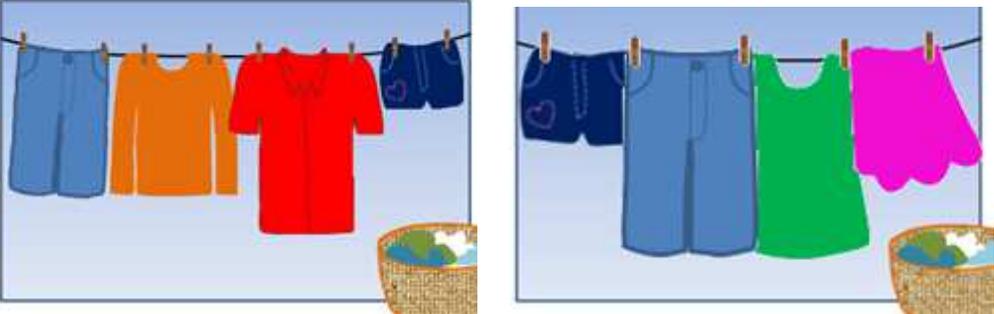


Figura 5: MatDigital – Capítulo 1 – Livro do 6º Ano

Os objetivos específicos da atividade apresentada acima são:

- Fazer com que o aluno utilize o recurso de uma tabela para organizar informações de uma determinada situação.
- Fazer com que o aluno busque as relações entre quantidade de roupas e de prendedores em diferentes situações, avançando rumo à generalização e familiarizando-o com a ideia de função.
- Facilitar, futuramente, o processo de medição com régua, ressaltando-se aqui a diferença entre a contagem de pontos e contagem de intervalos.

### **2.2.2- O ensino de funções no 9º ano**

O ensino de funções no nono ano, na proposta do projeto MatDigital, tem início com a abordagem de relações que são funções e relações que não são funções, pois observa-se que na natureza as relações que não são funções são mais comuns do que as relações que são funções. Mas, apesar disso, os livros didáticos não parecem demonstrar uma preocupação com a discussão de relações que não são funções. Em grande parte dos livros didáticos analisados no capítulo 2, seção 2.2, neste trabalho, foi possível observar que o estudo sobre funções abrange somente as relações que são funções. Sendo que, em muitos deles, não é apresentado sequer um exemplo de relações que não são funções. Apenas quatro, das quinze coleções analisadas, apresentam exemplos de situações que não representam funções.

Será disponibilizado, nos anexos, a última versão da estrutura de todos os capítulos do nono ano, com os títulos provisórios e os prováveis conteúdos a serem contemplados pela proposta do MatDigital<sup>3</sup>, que data de 03/10/2013, com o objetivo de que o leitor possa conhecer o contexto geral onde está inserido o tema relações entre variáveis.

### **Objetivos**

O capítulo do projeto do MatDigital que trata de Relações entre Variáveis apresenta os seguintes objetivos específicos:

---

<sup>3</sup> Todo o material produzido pelo MatDigital ainda se encontra em construção. Procuramos informar as datas das últimas versões dos arquivos que tivemos acesso.

- Diferenciar relações funcionais de relações não funcionais; no segundo caso, reconhecer aquelas que apresentam uma estrutura de causalidade, isto é, aquelas em que é possível estimar resultados.
- Retomar a noção de dependência entre variáveis abordada desde o 6º ano, em direção à introdução informal ao conceito de função.
- Reconhecer, nas relações, fenômenos determinísticos e aleatórios.
- Reconhecer que a relação de dependência entre grandezas variáveis, numa relação funcional, uma das grandezas é univocamente determinada pela variação da outra (variável independente).
- Observar que regularidades em situações reais, em sequências numéricas, ou padrões geométricos é uma habilidade essencial para o desenvolvimento do conceito de função.
- Desenvolver a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os.
- Construir e interpretar gráficos e tabelas.

### **Seção Explorando o Assunto**

O objetivo desta seção é introduzir o conceito de fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios na abordagem de relações entre variáveis.

Essa ideia de iniciar o estudo deste capítulo com relações entre variáveis ao invés de inferir diretamente em funções pretende contemplar a necessidade de se mostrar que existem muitos eventos na natureza, e em outras ciências também, que não são funções, ou seja, eles caracterizam uma relação entre duas ou mais variáveis, mas não caracterizam uma função.

A introdução dos conceitos de fenômenos determinísticos e de fenômenos aleatórios é de fundamental importância para que se possa observar que é possível identificar, ao analisar uma relação entre duas ou mais variáveis, quando é compatível (ou viável) prever os resultados com exatidão.

Explorar situações que envolvam fenômenos aleatórios de dois diferentes tipos, com estrutura de causalidade e sem estrutura de causalidade, é importante, pois, possibilita ao aluno a oportunidade de tentar distinguir situações em que é possível fazer estimativas, de situações nas quais não se pode fazer nenhuma previsão sobre uma variável a partir de outra(s).

A busca de uma relação de causalidade entre duas variáveis com a finalidade de controlar o fenômeno estudado, que na maioria das vezes não tem caráter determinístico, é a essência da modelagem matemática.

### **Seção Aprofundando o Assunto**

O objetivo desta seção é dar ênfase as relações determinísticas, destacando a relação de dependência entre as grandezas envolvidas de forma unívoca. Também são propostas atividades de modelos não determinísticos, tendo em vista que grande parte dos fenômenos observados da natureza é de caráter aleatório.

No que se refere às relações determinísticas entre as variáveis, a ideia fundamental é retomar os conteúdos tratados em anos anteriores, tais como: razão e proporção, potenciação, homotetia, a fim de caracterizar as relações afins e não lineares entre variáveis, sem analisar de qual natureza é a relação não linear estabelecida entre elas.

Para contemplar essa estrutura as situações exploradas se apoiam em diferentes representações de uma função, como por exemplo, tabular, verbal e gráfica, com o objetivo de que o aluno, desde o início, tenha contato com diferentes registros, desenvolvendo, assim, a capacidade de representar e de identificar o mesmo conceito em variadas representações.

### **2.2.3- Justificativa da Proposta**

A presente proposta pode ser melhor compreendida quando vista sob a ótica da Modelagem matemática. A Modelagem matemática é um processo que tem como objetivo fornecer uma descrição matemática de um dado fenômeno do mundo real. Tal descrição matemática, geralmente feita por meio de equações, é chamada Modelo Matemático. Quando construímos um modelo, de um modo geral, temos como objetivos

compreender um fenômeno e fazer previsões sobre seu comportamento futuro. Alguns exemplos de fenômenos que podem ser modelados matematicamente são: decaimento radioativo, disseminação de doenças infecto-contagiosas, área atingida por uma catástrofe demanda por um determinado produto e fenômenos climáticos.

Uma etapa fundamental na formulação de um modelo matemático é a identificação e especificação das variáveis (dependentes e independentes) envolvidas na situação e como estas se relacionam. Nesse sentido, pensamos que a proposta se mostra bastante coerente com os princípios da Modelagem uma vez que conduz o estudante a identificar e relacionar variáveis, ajudando-o dessa forma a desenvolver desde cedo a habilidade de extrair informação matemática a partir de situações reais.

### **2.3- Panorama atual do projeto MatDigital**

O texto referente ao segundo capítulo do nono ano, que trata de relações entre variáveis, ainda não está finalizado. O que se tem atualmente é uma versão incompleta, pois o projeto MatDigital teve a produção interrompida para replanejamento.

Analisando esse capítulo, pode-se observar que a equipe do projeto MatDigital contemplou, como um de seus objetivos, trabalhar fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios de forma a preparar o aluno para uma seção posterior, que irá abordar probabilidades.

Fenômenos determinísticos são aqueles em que, conhecidas as condições iniciais, um resultado individual pode ser obtido sem que seja necessário realizar o experimento. No caso dos fenômenos não determinísticos (aleatórios) não se sabe ao certo o que vai acontecer, isto é, a variação dos resultados de diferentes eventos é inevitável, de modo que o resultado de um evento particular é incerto. Entretanto, em algumas situações, uma eventual regularidade dessa variação permitirá estimar o resultado de um caso particular.

Nesse capítulo também são listadas várias propostas de atividades, tais como atividade explorando o jogo Torres de Hanói com o objetivo de abordar relações exponenciais, atividade explorando transformações geométricas com o objetivo de abordar relações que são funções entre variáveis não numéricas, etc.

A equipe do projeto MatDigital demonstrou se preocupar em explorar diferentes registros de representação.<sup>4</sup> A definição de função adotada por essa equipe foi a não formal.

## **2.4- O capítulo Relações entre Variáveis em versão estática**

Com o objetivo de testar as atividades elaboradas pela equipe do MatDigital, para o capítulo de relações entre variáveis, desenvolvemos, a partir de algumas dessas atividades, um material estático, adaptado para o ambiente de lápis e papel.

Foi elaborada outra atividade, em material estático, que abordou o tema “queda livre”, complementando a parte *Explorando o Assunto* e reforçando os exemplos sobre fenômenos determinísticos. Essa atividade foi anexada às atividades que foram adaptadas para a versão estática, e também foi testada.

Uma proposta de três atividades para serem aplicadas antes das atividades do MatDigital, relacionadas aos diagramas de dispersão; e uma proposta de uma atividade para dar continuidade a sequência didática do MatDigital, relacionada ao ajuste de curvas, também foram desenvolvidas, em versão estática, mas não foram testadas até o momento. Essas atividades serão apresentadas no capítulo 5 deste trabalho.

---

<sup>4</sup> De acordo com a teoria das representações semióticas de Raymond Duval a aprendizagem dos conceitos matemáticos está relacionada ao uso e à coordenação de diferentes registros de representações. A compreensão em matemática implica a capacidade de mudar de registro. É necessário que se saiba transitar entre diferentes registros de representação de um mesmo objeto, podendo escolher o que lhe gera menor custo de memória para operar. (DUVAL, 2008, p.31).

### **3. O Estudo de Campo**

Neste capítulo apresentaremos as atividades do MatDigital que foram adaptadas para uma versão estática, utilizando material impresso. Iremos relatar também o estudo de campo realizado com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal, no qual pudemos aplicar e testar as atividades.

#### **3.1. O Espaço Amostral**

As atividades que iremos apresentar foram aplicadas em duas turmas do 9º ano do turno da manhã da Escola Municipal Manoel Bonfim.

Esse trabalho foi desenvolvido no mês de dezembro de 2013. Foram necessários, para a realização das atividades, três dias de aulas, com dois tempos de 50 minutos em cada dia.

No primeiro dia de atividades participaram, no total, 52 alunos, sendo 27 da turma 1901, que foram organizados em 15 grupos de, no máximo, três alunos; e 25 alunos da turma 1903, onde um aluno realizou a atividade individualmente e vinte e quatro formaram duplas.

No segundo dia de atividades participaram 42 alunos, no total, sendo 20 alunos da turma 1901, que formaram 9 grupos de, no máximo, três alunos; e 22 alunos da turma 1903 organizados em 10 grupos de 1, 2 ou 4 alunos cada.

No último dia de atividades a frequência foi menor em virtude da proximidade das férias e do início do período de recuperação, do qual a grande maioria dos alunos dessas turmas não necessitou participar. A turma 1901 trabalhou com 3 duplas e a turma 1903, com cinco duplas.

As idades dos alunos variaram entre 13 e 15 anos.

O número de alunos repetentes é mínimo, pois as turmas 1901 e 1903 possuem, em sua maioria, alunos regulares, ou seja, que estão cursando anos escolares apropriados às respectivas idades.

Os alunos já haviam obtido as noções relativas ao ensino de funções indicadas ao segundo segmento do nível fundamental, 9º ano, utilizando, para isso, os Cadernos Pedagógicos da SME.

A aplicação das atividades ocorreu no período referente ao final do quarto bimestre.

Cabe ressaltar que no ano de 2013 ocorreu uma extensa greve de professores do município do Rio de Janeiro.

### 3.2. As Atividades

A exceção da atividade seis da primeira aula e da atividade complementar da terceira aula, todas as demais atividades foram desenvolvidas no Capítulo de Funções da Coleção MatDigital com o objetivo de serem aplicadas a alunos do 9º ano do ensino fundamental através do uso de *tablets*.

Para o desenvolvimento deste trabalho, essas atividades foram adaptadas e alocadas em uma versão estática, utilizando material impresso, sem as animações que deverão ser implementadas para o devido funcionamento em uma versão digital.

De acordo com o acervo original das questões do Capítulo relativo a Funções do MatDigital, os objetivos gerais dessas atividades são:

*Diferenciar relações funcionais de relações não funcionais a partir de fenômenos determinísticos e aleatórios, reconhecendo aqueles que apresentam uma estrutura de causalidade, isto é, aqueles em que é possível estimar resultados; e verificar situações de dependência entre variáveis, em direção à introdução informal ao conceito de função.*

A equipe do MatDigital se referia a relações que são funções como relações funcionais e as que não são funções como relações não funcionais. Optamos por não utilizar os termos “relações funcionais” e “relações não funcionais” ao longo deste texto por acharmos mais adequado seguir a linguagem praticada no ensino básico e na comunidade matemática em geral. No entanto, nas citações de trechos do texto original do capítulo sobre Relações entre Variáveis do MatDigital, preservamos os termos utilizados pelo comitê de redação.

O conjunto dessas atividades foi dividido em três aulas para adequar a aplicabilidade ao tempo disponível.

As aulas propostas tiveram como objetivos específicos o preenchimento de tabelas; a interpretação de gráficos e tabelas; o reconhecimento de fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios; o desenvolvimento da capacidade de apresentação de argumentos, utilizando a linguagem corrente, quando couber, que justifiquem a validade da lei de formação; o reconhecimento de que em uma relação de dependência entre grandezas variáveis do tipo funcional, uma das grandezas é univocamente determinada pela variação da outra (variável independente); a identificação de leis algébricas que descrevam regularidades em situações reais, em seqüências numéricas ou em padrões geométricos; a percepção de que uma relação que é função vai além das situações que envolvem regularidade, isto é, existem relações que são funções e que não obedecem a uma lei geral.

Os objetivos de cada atividade foram retirados do Capítulo de Funções da Coleção MatDigital, sem nenhuma alteração, e são apresentados antes do enunciado de cada questão. Porém, algumas atividades desse Capítulo não apresentavam objetivos. Nesses casos, os objetivos foram elaborados pela autora deste trabalho, mantendo a coerência com os objetivos do capítulo.

As atividades seis da primeira aula e complementar da terceira aula foram elaboradas, a partir das atividades da Coleção, com o intuito de enriquecer este trabalho. A primeira foi inserida com o objetivo de explorar uma segunda situação em que o aluno pudesse reconhecer um fenômeno determinístico, pois no material só havia uma atividade com esta finalidade. E a segunda foi elaborada com o objetivo de reconhecer quando uma relação entre duas ou mais variáveis é funcional, aprofundando, assim, as questões já trabalhadas. Foram desenvolvidas também as soluções dessas questões.

Destaca-se que as respostas de todas as atividades propostas serão apresentadas no capítulo seguinte e que a análise dos resultados, que também será realizada no próximo capítulo, foi elaborada a partir das respostas obtidas nas atividades aplicadas no estudo de campo, tendo em vista os objetivos a serem alcançados.

Apresenta-se a seguir o conjunto de atividades propostas para serem trabalhadas em cada uma das três aulas.

## Primeira aula:

Na vida, existem situações, fatos ou eventos que ocorrem com certeza, cujos resultados são previamente conhecidos. Por exemplo:

Quantos dias tem uma semana?

Depois de quarta-feira, que dia vem?

Quantos meses têm no ano?



Mas nem sempre é assim. Existem situações em que não sabemos previamente o que vai acontecer, estes eventos dependem do acaso ou da sorte. Não podemos determinar com antecedência o resultado. Por exemplo:

### Atividade 1

**Objetivo: apresentar um exemplo de fenômeno aleatório.**

No lançamento de uma moeda, é possível prever com antecedência qual lado (cara ou coroa) sairá, antes de cada lançamento?



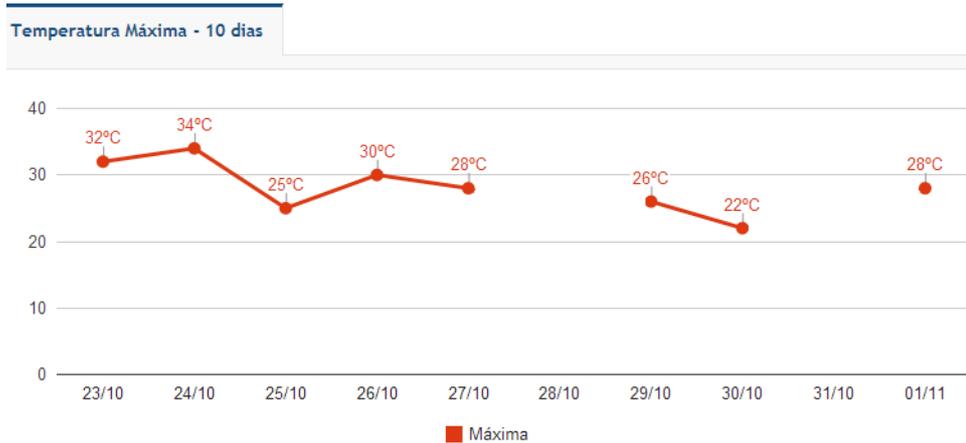
Qual será o resultado na quinta tentativa? Vamos verificar completando a tabela abaixo:

Lançamento	1°	2°	3°	4°	5°
Resultado					

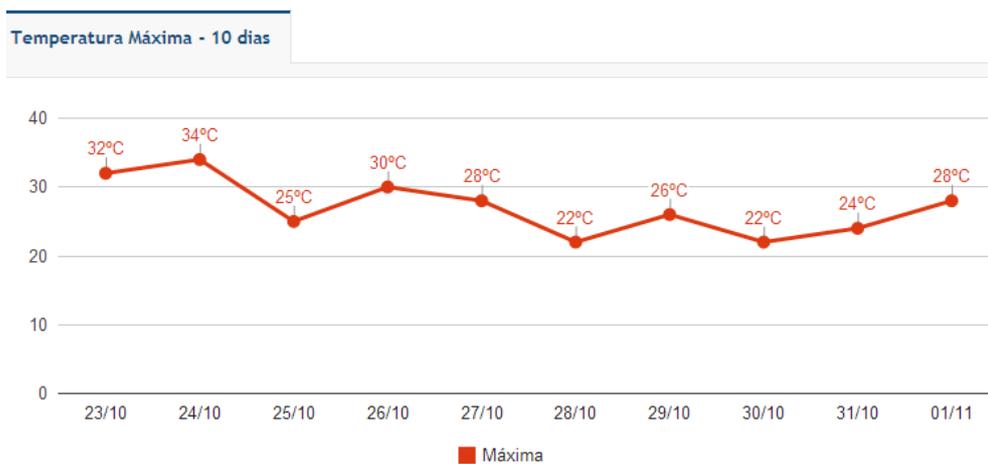
## Atividade 2

**Objetivo: explorar uma atividade aleatória de natureza diferente da apresentada anteriormente. Nesta situação é possível fazer alguma estimativa do resultado a ser obtido, através dos resultados previamente conhecidos.**

Observe o gráfico abaixo que relaciona as temperaturas máximas registradas no período de 10 dias na cidade de São Paulo. Faça uma estimativa das temperaturas máximas nos dias 28 e 31/10 e complete o gráfico.



Agora, verifique abaixo, a temperatura registrada oficialmente, segundo o Clima Tempo. O que podemos perceber quando analisamos as estimativas realizadas de acordo com o gráfico anterior?



Fonte: <http://www.climatempo.com.br/>

### Atividade 3

**Objetivo: apresentar outro fenômeno aleatório.**

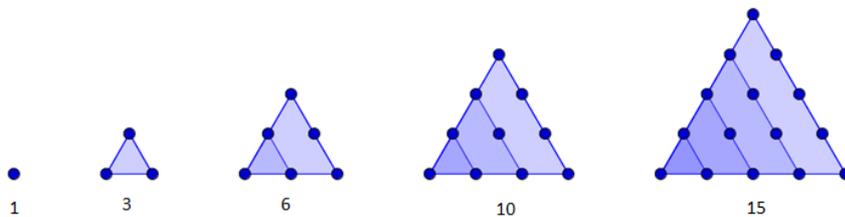
Jogando um dado (não viciado, cubo, numerado de 1 a 6), seis vezes consecutivas, é possível determinarmos que número irá aparecer com a face voltada para cima, na sexta jogada? Vamos verificar completando a tabela abaixo:

Lançamento	1°	2°	3°	4°	5°	6°
Resultado						

### Atividade 4

**Objetivo: explorar uma relação determinística entre números triangulares e a sua posição. Ou seja, associar o valor do n-ésimo número triangular com sua posição.**

Números triangulares são aqueles que representam uma coleção de pontos que podem ser dispostos no formato de um triângulo, conforme a figura abaixo.



Esses são os 5 primeiros números triangulares. Complete então a tabela abaixo:

Posição	Número Triangular
1°	
2°	
3°	
4°	
5°	

É possível determinar o 6°, o 7° e o 8° números triangulares? Vamos completar a tabela abaixo:

Posição	Número Triangular
6°	
7°	
8°	

### Refletindo sobre o assunto

Nas atividades acima, trabalhamos com dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios.

**Fenômenos determinísticos** são aqueles em que, conhecidas as condições iniciais, um resultado individual pode ser obtido sem que seja necessário realizar o experimento.

**Fenômenos aleatórios** (não determinísticos) são aqueles em que não se sabe ao certo o que vai acontecer, isto é, a variação dos resultados de diferentes eventos é inevitável, de modo que o resultado de um evento particular é incerto. Entretanto, em algumas situações, uma eventual regularidade dessa variação permitirá estimar o resultado de um caso particular.

### Atividade Complementar:

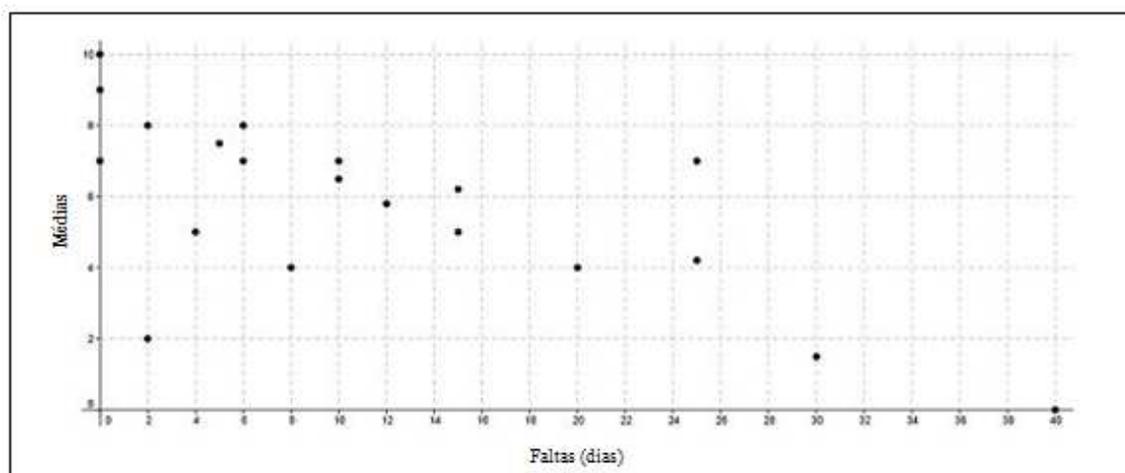
**Objetivo: apresentar situações em que o aluno deverá realizar a distinção entre fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios.**

A partir das observações acima, classifique as atividades 1, 2, 3 e 4 em fenômenos determinísticos ou fenômenos aleatórios.

### Atividade 5

**Objetivo: explorar uma situação em que o aluno possa identificar um fenômeno aleatório.**

O gráfico abaixo mostra as faltas x médias finais em Matemática dos alunos de uma turma do sexto ano, durante o ano letivo. Ao todo são 20 alunos.

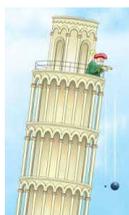


A relação “faltas dos alunos x média final em Matemática” expressa um fenômeno determinístico ou aleatório?

## Atividade 6

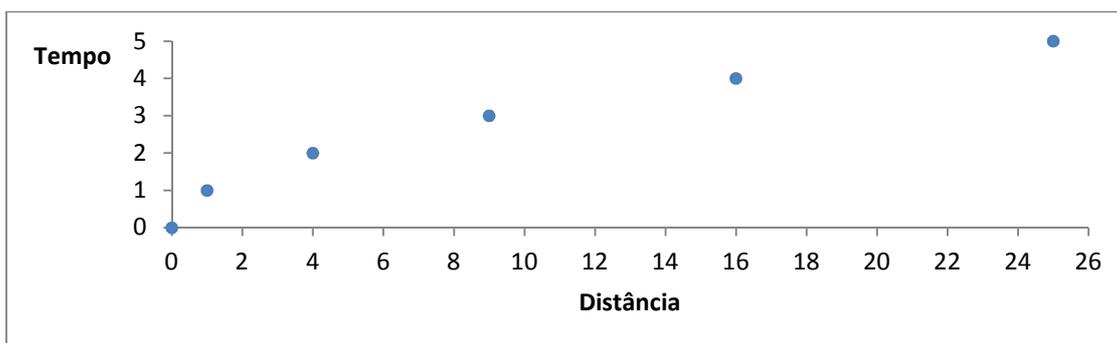
**Objetivo: explorar uma situação em que o aluno possa identificar um fenômeno determinístico.**

Duas bolas são lançadas, ao mesmo tempo, de uma torre. Os pesos das bolas são de 10 kg e de 5 kg. Qual delas chegará primeiro ao solo? Segundo Aristóteles, filósofo grego que nasceu no ano 384 a. C., corpos mais pesados caem mais rapidamente do que corpos mais leves. Ele dizia ainda que, objetos com o dobro da massa caíam duas vezes mais rápido. Mas Galileu, físico, matemático e filósofo, nascido em 15 de fevereiro de 1564, provou que isso não é verdade. Com o seu experimento, Galileu resolveu claramente esse problema. Segundo crença não comprovada ele lançava os objetos da Torre de Pisa, na Itália.



Sabe-se, no entanto, que ele utilizou um plano inclinado para realizar o experimento. Galileu observou que uma esfera rolando por um plano inclinado percorria uma distância 4 vezes maior em 2 segundos do que em 1 segundo. Assim ele provou que a distância percorrida a partir do repouso variava com o quadrado do tempo.

Observe o gráfico abaixo:



A relação “distância percorrida x tempo” expressa um fenômeno determinístico ou aleatório?

## Segunda Aula:

### Atividade 1

**Objetivo: identificar relações entre variáveis em fenômenos determinísticos e aleatórios a partir da observação das dispersões dos pontos que as representam no plano cartesiano.**

Pedro e Joaquim trabalham como vendedores em uma loja de eletrodomésticos e estão tentando compreender alguns fenômenos relacionados às vendas de alguns produtos em épocas de muito calor, e ainda tentam observar como isso pode se relacionar com os seus salários. Pedro trabalha na seção de condicionadores de ar e Joaquim na seção de televisores. Observe as situações a seguir e tente compreendê-las e perceber as diferenças entre elas.

### Situação 1

**Objetivo: identificar a relação (funcional) entre o salário do vendedor e o valor total das vendas mensais a partir de uma relação determinística que permite a obtenção unívoca da variável dependente envolvida no problema. Espera-se que o aluno perceba que os pontos obtidos na tabela parecem estar alinhados quando dispostos no plano cartesiano em virtude da lei de formação.**

O salário de Pedro é composto por uma parte fixa, no valor de R\$ 900,00, mais uma parte variável, que é a comissão de 15% sobre o valor total das vendas de condicionadores de ar no mês. A máquina abaixo indica como calcular o salário de Pedro. A tabela à esquerda registra o total de vendas de janeiro a novembro, pois dezembro é o mês de férias de Pedro.

a) Com base nessas informações, complete a tabela abaixo.

Total das vendas em reais.

JAN	10.000
FEV	7.500
MAR	8.000
ABR	2.200
MAI	3.000
JUN	2.000
JUL	1.000
AGO	1.000
SET	7.500
OUT	3.800
NOV	2.200



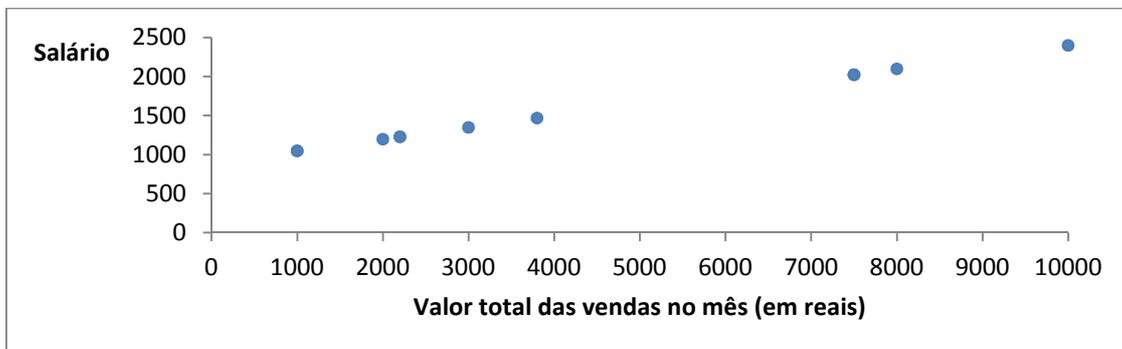
Salário de Pedro

JAN	
FEV	
MAR	
ABR	
MAI	
JUN	
JUL	
AGO	
SET	
OUT	
NOV	

b) O que aconteceu com o salário de Pedro nos meses em que ele vendeu a mesma quantidade de condicionares de ar?

c) É possível que o salário de Pedro seja diferente em meses em que o total de vendas é o mesmo?

Observe o gráfico abaixo, que relaciona o total das vendas de condicionadores de ar em reais e o salário de Pedro ao final do mês:



d) Podemos perceber algum padrão em relação à posição desses pontos no gráfico? Em caso positivo, qual?

## Situação 2

**Objetivo: identificar a relação (não funcional) entre o número de condicionadores de ar vendidos e as temperaturas médias diárias registradas. No entanto, espera-se que o aluno observe intuitivamente a ideia de causalidade entre essas variáveis a partir da dispersão dos pontos no plano cartesiano.**

Pedro observou que nos meses de janeiro a março as suas comissões são muito boas. O que será que pode ter influenciado no aumento das vendas de condicionares de ar nesses meses? Veja a reportagem abaixo.

**Reportagem do Globo.com: Rio vive um relacionamento sério com o ar-condicionado.**

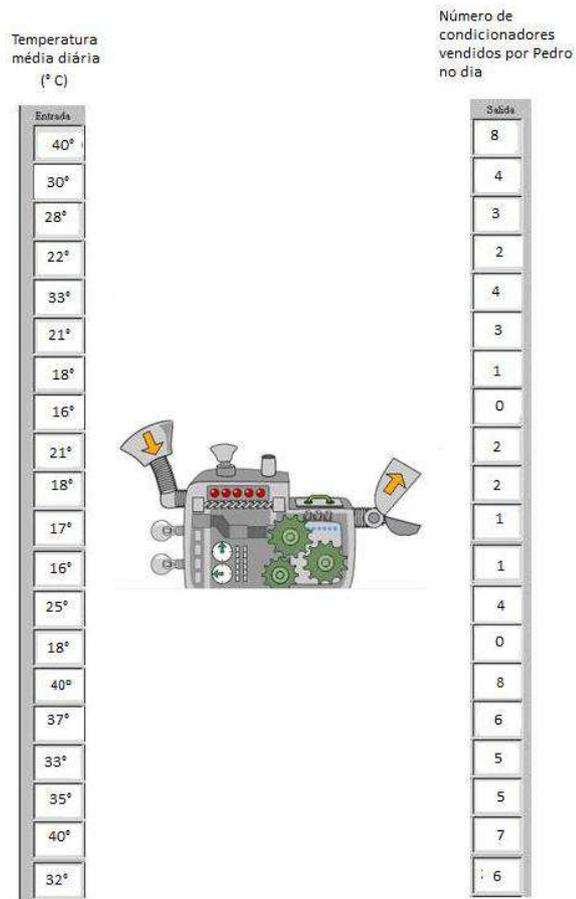
Contra a sensação térmica de 47°C, aparelhos ficam ligados o dia todo. Loja vendeu mais de 600 aparelhos até 23 de fevereiro.

**Mudança de perfil:**

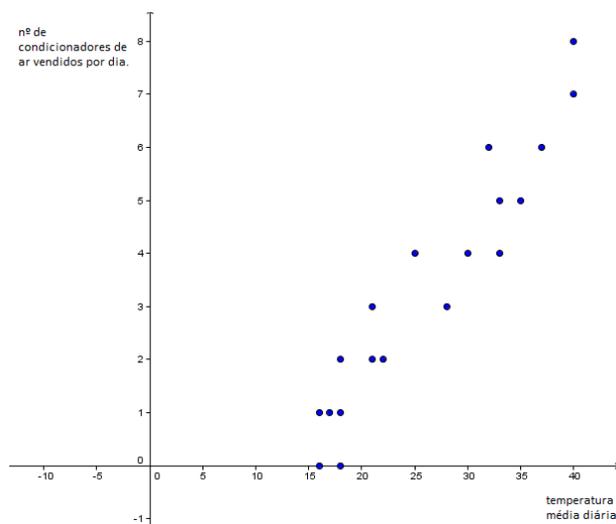
Numa loja especializada (AmbientAir) em aparelhos de ar-condicionado num shopping da Barra da Tijuca, Zona Oeste do Rio, até o vendedor se surpreende ao ver os números do mês: 662 aparelhos vendidos de 1 a 23 de fevereiro. "Tinha calculado 300 ou pouco mais, mas foi muito mais que isso", disse Flávio Conceição. Há oito anos na loja, ele explica que neste fevereiro encalorado as vendas cresceram 30% em relação a fevereiro do ano passado.

<http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2013/03/rio-vive-um-relacionamento-serio-com-o-ar-condicionado.html>

No esquema abaixo, a máquina produz como saída o número de condicionadores de ar vendidos por Pedro no dia (tabela da direita) a partir da temperatura média diária registrada em um período de 20 dias.



Observe agora a representação gráfica abaixo que relaciona a quantidade de condicionadores de ar vendidos por dia e a temperatura média diária registrada em um período de 20 dias.

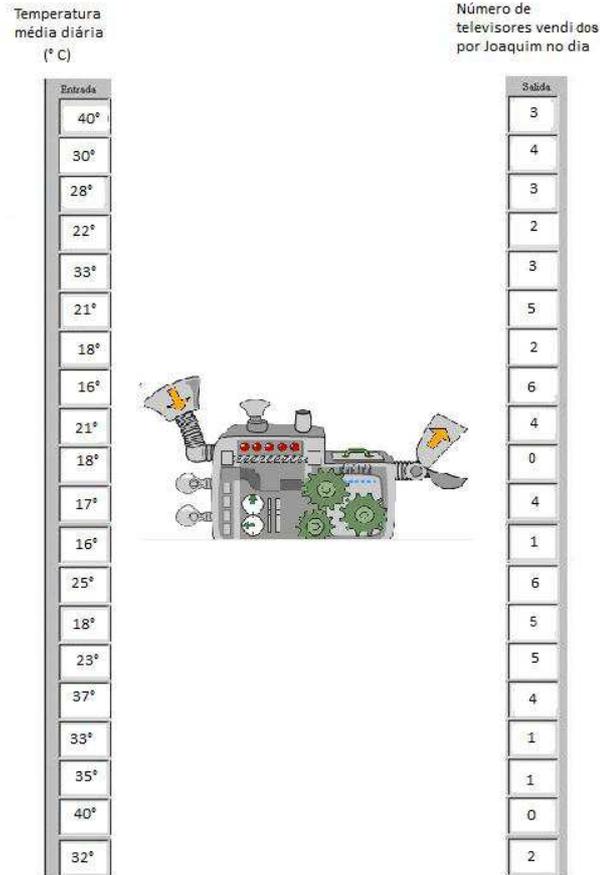


- a) É possível que em dias com a mesma temperatura média registrada Pedro tenha vendido números diferentes de condicionadores de ar?
- b) Podemos determinar exatamente quantos condicionares de ar foram vendidos a partir da temperatura do dia?
- c) Podemos fazer uma previsão do número de condicionadores de ar vendidos em um dia em que a temperatura média registrada foi de 40°?
- d) Podemos observar alguma tendência nas vendas se o dia foi mais quente ou menos quente?
- e) Você observa algum padrão em relação à posição desses pontos no plano? Tente justificar a sua resposta.

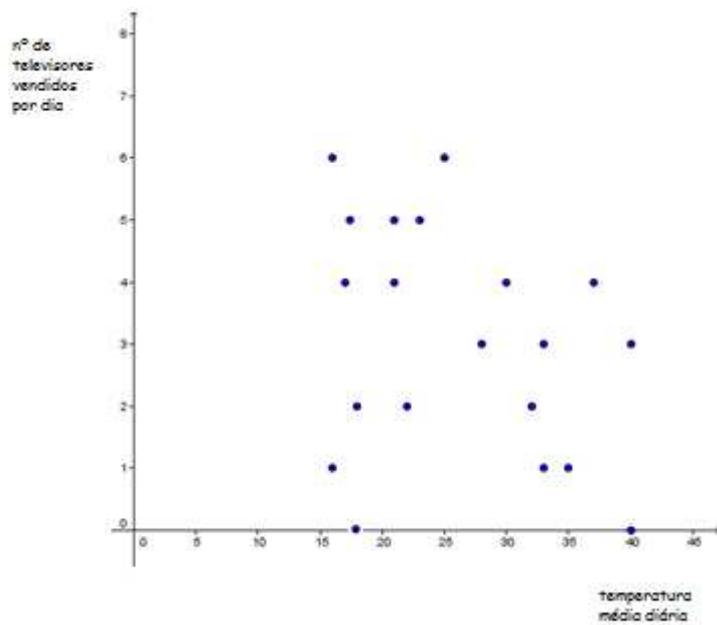
### Situação 3

**Objetivo: identificar a relação (não funcional) entre o número de televisores vendidos e as temperaturas médias diárias registradas. No entanto, espera-se que ele observe intuitivamente a ideia de não causalidade entre essas variáveis a partir da dispersão dos pontos no plano cartesiano.**

Joaquim observou que em épocas de muito calor as suas comissões não mudaram muito em relação à outras épocas. Será que a temperatura pode ter influenciado nas vendas de televisores? Veja o esquema abaixo em que a máquina produz como saída o número de televisores vendidos por dia, por Joaquim (tabela da direita) a partir da temperatura média diária registrada no mesmo período de 20 dias.



Observe a representação gráfica abaixo que relaciona a quantidade de televisores vendida por dia e a temperatura média diária registrada em um período de 20 dias.



- a) Podemos determinar exatamente quantos televisores foram vendidos a partir da temperatura do dia?
- b) Podemos observar alguma tendência nas vendas se o dia foi mais quente ou menos quente?
- c) É possível que dias com a mesma temperatura média corresponda a números diferentes de televisores vendidos?
- d) É possível determinar quantos televisores seriam vendidos num dia cuja temperatura média registrada seja  $18^{\circ}\text{C}$ ?

### Atividade Complementar

**Objetivo: apresentar situações em que o aluno deverá realizar a distinção entre fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios e, se for o caso, deverá perceber a ideia de causalidade ou não causalidade entre as variáveis dos fenômenos aleatórios a partir da dispersão dos pontos no plano cartesiano.**

Em cada situação anterior temos uma relação entre duas grandezas. Retorne às situações e analise:

- a) Em quais delas temos um fenômeno determinístico e em quais delas temos um fenômeno aleatório. Explique sua resposta.
- b) Compare as relações que expressam um fenômeno aleatório: Você diria que os gráficos apresentam o mesmo tipo de comportamento? Explique sua resposta.

### Terceira Aula:

Na vida, muitas vezes nos deparamos com situações em que duas grandezas se relacionam. A Matemática apresenta ferramentas que possibilitam investigar a existência ou não de padrões nas diversas relações entre variáveis.

Você já reparou que quanto mais rápido você caminha para a escola, menos tempo você demora?

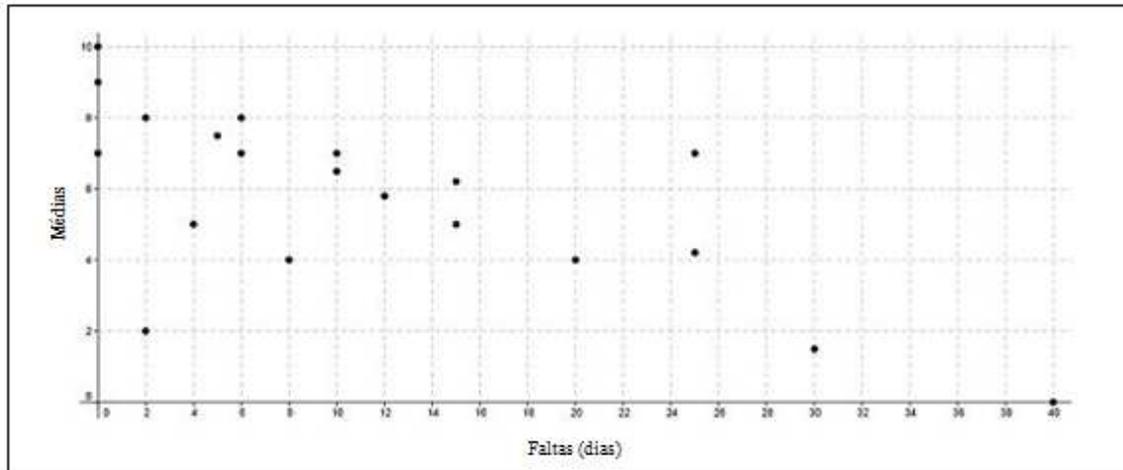
Você já percebeu que em dias mais quentes, as temperaturas medidas no decorrer do dia costumam ser mais elevadas?

Você já parou para pensar que quando sua mãe abastece o carro com combustível, o valor a ser pago se relaciona com a quantidade de combustível colocada?

### Atividade 1

**Objetivo: verificar se, na relação entre as variáveis “faltas” e “média final em Matemática”, cada entrada determina uma única saída.**

O gráfico abaixo representa a relação faltas x média final em Matemática dos alunos de uma turma do sexto ano, durante o ano letivo. Ao todo são 20 alunos.

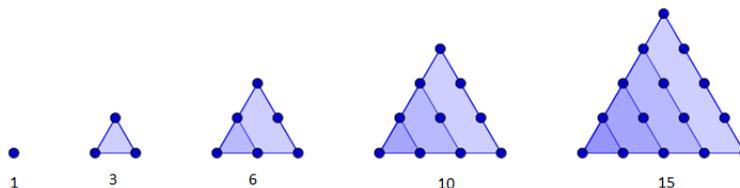


Podemos garantir que todos os alunos que tiverem a mesma quantidade de faltas terão a mesma média final?

### Atividade 2

**Objetivo: verificar se, na relação entre as variáveis “posição” e “número triangular”, cada entrada determina uma única saída.**

Observe a tabela abaixo que representa a relação posição x número triangular já vista anteriormente. Cada posição determina um único número triangular?



Posição	Número Triangular
1º	1
2º	3
3º	6
4º	10
5º	15

### Atividade 3

**Objetivo: determinar o valor total a ser pago pelo combustível em um posto com autosserviço conhecendo-se a quantidade de litros e o preço por litro; determinar a quantidade de litros a partir do valor total a ser pago; identificar as grandezas que variam no problema (valor total a ser pago e a quantidade de combustível em litros) e identificar a relação de dependência entre essas grandezas.**

Daniel parou em um posto de gasolina com autosserviço a fim de abastecer o seu carro com 20 litros de gasolina. O valor do litro de gasolina indicado na bomba de combustível foi de R\$ 2,90.

- Quanto Daniel teve que pagar?
- Daniel observou que podia gastar R\$ 87,00 para abastecer o seu carro. Quantos litros de gasolina ele pode colocar com este valor?
- Quais as grandezas que estão envolvidas nesta atividade? Quais delas mudam e quais permanecem fixas?
- Descreva com suas próprias palavras como obter o valor a ser pago a partir da quantidade de litros de gasolina.
- Chamando de  $x$  a quantidade de litros de gasolina e  $y$  o valor a ser pago pelo abastecimento, escreva uma igualdade que indique como calcular o valor a ser pago a partir da quantidade de litros de gasolina.

Você sabia que o valor a ser pago por uma corrida de um taxi é registrado no taxímetro, que é um aparelho instalado dentro dos taxis? Para calcular o valor desse serviço este aparelho faz uma conta que combina uma tarifa inicial, a distância percorrida e o tempo que o táxi fica parado durante o percurso. A tarifa inicial é conhecida como bandeirada e, em algumas cidades, há valores diferentes fixados dependendo do horário, do percurso e se o taxi é do tipo convencional ou especial.



#### **Veja como calcular o valor da corrida**

Suponha que o valor da bandeirada é R\$ 3,00, o preço por quilômetro rodado é R\$ 2,00 e o preço por hora em que o carro fica parado durante o trajeto é R\$ 10,00. O cálculo do valor da corrida é feito da seguinte forma:

- Multiplica-se a distância percorrida em quilômetros por R\$ 2,00 que é o preço por quilômetro rodado.
- Multiplica-se o tempo em horas em que o carro ficou parado por R\$ 10,00.
- Somam-se os resultados acima ao valor da bandeirada.

#### Atividade 4

**Objetivo: compreender que nem tudo é proporcional; identificar as variáveis do problema e a relação entre elas; diferenciar a situação apresentada das anteriores como uma relação em que uma variável depende de outras duas variáveis.**

Sofia está em um supermercado e deseja pegar um táxi até sua casa. Na cidade de Sofia o valor da bandeirada é R\$ 3,00 e o preço por quilômetro rodado é de R\$ 2,00.

- Sabendo que a distância do supermercado até a casa de Sofia é 20,5 km e que o táxi ficou parado durante 5 minutos em um engarrafamento, qual foi o valor pago pela corrida?
- Qual será o valor da corrida se a distância for o dobro da que Sofia percorreu, conforme o item anterior? O valor da corrida também será o dobro do resultado encontrado acima? Explique a sua conclusão.
- Em uma outra viagem de táxi feita por Sofia, o valor da corrida foi R\$ 38,00. A distância percorrida foi de 15 km, o valor da bandeirada foi R\$ 3,00, e o preço por quilômetro rodado foi de R\$ 2,00. O carro ficou parado durante essa corrida?
- Quais são as grandezas relacionadas nesse problema? Quais delas variam?

#### **Organizando as ideias**

Quando, em uma relação entre variáveis, cada entrada determinar uma única saída, diremos que a relação é *funcional*. Nestes casos, a variável de saída depende da variável de entrada.

#### **Atividade Complementar:**

**Objetivo: Reconhecer quando uma relação entre duas ou mais variáveis é funcional.**

- A relação entre a quantidade de gasolina e o valor total a ser pago é funcional?
- A relação entre o valor da corrida, a distância percorrida pelo taxi e o tempo em que o táxi fica parado durante o trajeto é funcional?

## 4. Atividades aplicadas: Apresentação e Análise dos resultados obtidos.

Neste capítulo serão apresentadas e analisadas as respostas dos alunos nas atividades propostas. Essa análise seguirá parâmetros definidos. Serão também avaliados os resultados obtidos, após a realização, pelos alunos, dessas atividades.

### 4.1. Parâmetros de Análise e Condições de realização das atividades

A análise dos resultados será guiada pelos objetivos que foram descritos no capítulo anterior.

Serão utilizadas, no gráfico estatístico, as seguintes classificações: **Totalmente correta** (fez toda a tarefa corretamente), **Parcialmente correta** (fez toda a tarefa, mas acertou apenas uma parte ou fez parte da tarefa acertando parcialmente, e deixou a outra parte da tarefa em branco), **Completamente incorreta** (fez toda a tarefa incorretamente ou fez parte da tarefa errando completamente, e deixou a outra parte em branco), **Incompleta** (fez parte da tarefa acertando totalmente, e deixou a outra parte em branco) e **Em branco**.

As respostas que constavam no arquivo referente ao Capítulo do livro (recorte) direcionado ao nono ano, denominado: “Relações entre variáveis”, da Coleção MatDigital, foram inseridas no texto. As respostas que não constavam no recorte foram desenvolvidas com a finalidade de complementar este trabalho.

Antes do início de cada dia de encontro para a realização das atividades, era solicitado aos alunos que se organizassem em grupos de, preferencialmente, três membros.

As folhas com as questões eram distribuídas aos alunos de acordo com a realização das atividades. Algumas orientações foram fornecidas aos alunos para o correto desenvolvimento das tarefas, sem descaracterizar o processo.

Na realização das atividades, os alunos tiveram algumas dúvidas, que foram adequadamente resolvidas, de acordo com as necessidades, mas sem comprometer os objetivos do trabalho.

As atividades não eram corrigidas ao final de cada aula, pois não havia tempo. No início da aula seguinte, de acordo com os interesses da turma, eram tecidos alguns comentários sobre as atividades da aula anterior, que incluía, quando solicitado, as

respostas das tarefas.

As questões da atividade complementar do primeiro dia do encontro foram analisadas pelos alunos após a leitura, reflexão e discussão do quadro “Refletindo sobre o assunto”.

## 4.2. Apresentação e análise dos resultados

**No primeiro dia de encontro foram abordadas as seguintes atividades:**

### **Atividade 1:**

- Determinar se é possível prever com antecedência qual lado sairá (cara ou coroa) antes de cada lançamento.
- Determinar qual o resultado que sairá na 5ª tentativa.
- Lançar uma moeda e completar uma tabela com os cinco primeiros lançamentos.

**Resposta:** Não é possível prever o resultado com antecedência, sabemos apenas que pode sair cara ou coroa.

Foram distribuídas moedas para os alunos que não possuíam uma. Alguns grupos alternavam o aluno escolhido para jogar a moeda. Os alunos realizaram a atividade e observaram, antes de cada jogada, através de comentários, que não era possível determinarem se ia sair cara ou coroa. Todos os grupos acertaram a questão. Não houve dúvidas por parte dos alunos na realização da atividade. O objetivo de apresentar um exemplo de fenômeno aleatório foi alcançado, pois os alunos perceberam que não era possível determinar nada antes do lançamento da moeda.

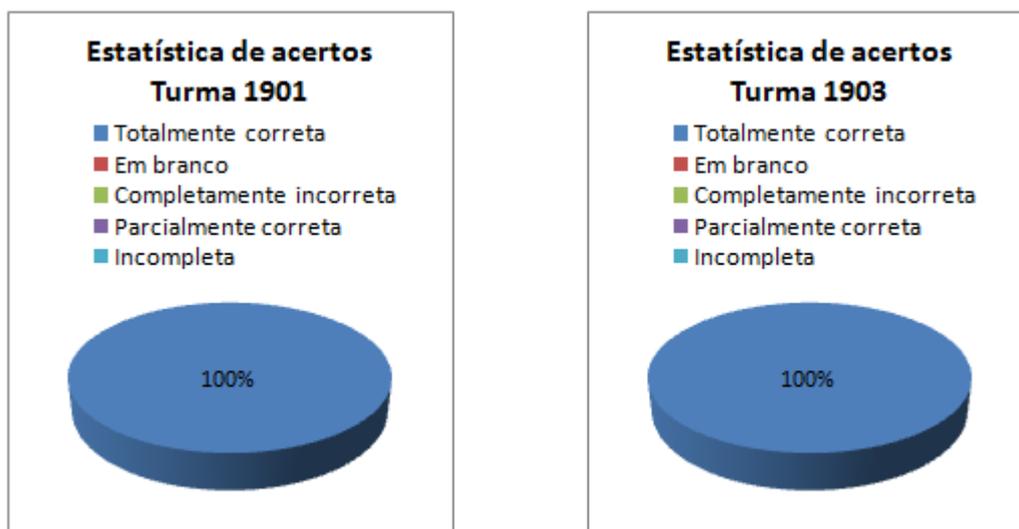


Figura 6: Estatística de acertos da atividade 1 do 1º encontro.

**Atividade 2:**

- Fazer uma estimativa das temperaturas máximas nos dias 28 e 31/10
- Completar o gráfico.
- Comparar as estimativas com os valores reais das temperaturas dos dias 28 e 31/10.

**Resposta:** Não é possível prever com exatidão as temperaturas nos dias 28/10 e 31/10. Porém, é possível fazer uma estimativa aproximada desses valores a partir das temperaturas conhecidas de outros dias.

Nesta situação é possível fazer alguma estimativa do resultado a ser obtido através dos resultados previamente conhecidos. A maioria dos alunos estimou as temperaturas sem nenhum tipo de parâmetro, mas um grupo fez a média aritmética. Ao verificarem a temperatura real do dia, todos constataram que estava bem próxima daquela que eles haviam previsto. O objetivo de explorar uma atividade aleatória de natureza diferente da anterior foi alcançado, pois eles observaram que, apesar de não poder determinar a temperatura exata, nos dias solicitados, era possível excluir uma faixa de temperaturas que, provavelmente, não poderiam ocorrer naqueles dias, o que não foi possível fazer no caso do lançamento da moeda. Os alunos não necessitaram de nenhum apoio para realizar a atividade.

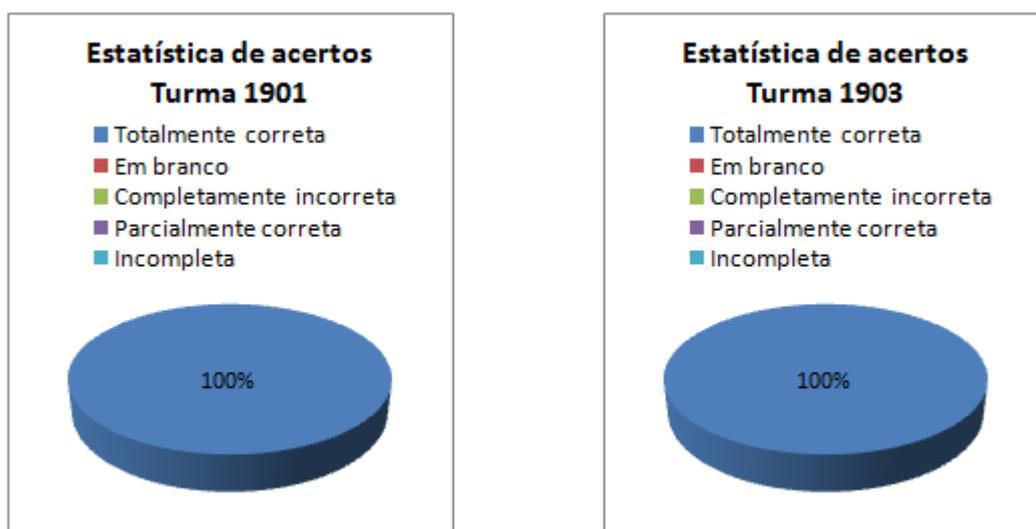


Figura 7: Estatística de acertos da atividade 2 do 1º encontro.

**Atividade 3:**

- Jogar um dado seis vezes consecutivas e verificar se é possível determinarmos que número irá aparecer com a face voltada para cima, na sexta jogada
- Anotar os seis resultados em uma tabela.

**Resposta:** Independente da quantidade de lançamentos não é possível determinar com precisão o próximo resultado, apenas estimar que ele será um número de 1 a 6.

O objetivo em apresentar outro fenômeno aleatório foi alcançado, pois os alunos verificaram que não era possível prever um resultado entre os seis possíveis, antes do lançamento do dado; e que esse exemplo era mais parecido com o exemplo de lançamento da moeda do que com o exemplo da estimativa da temperatura, pois não havia como eles descartarem nenhuma das possibilidades, já que todas tinham a mesma chance de ocorrer. Não foi necessário nenhum tipo de orientação especial aos alunos para a resolução dessa tarefa.

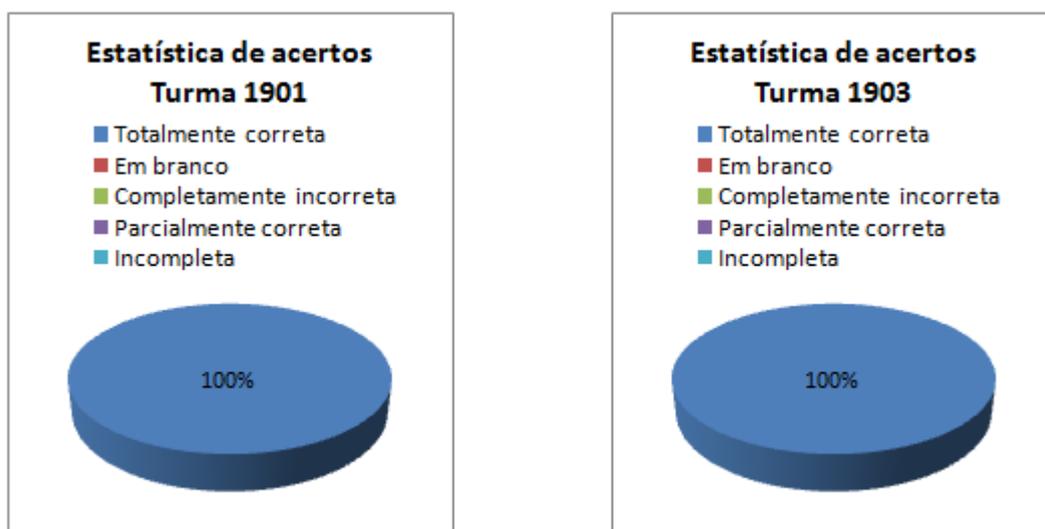


Figura 8: Estatística de acertos da atividade 3 do 1º encontro

**Atividade 4:**

- Completar a tabela com os cinco primeiros números triangulares.
- Determinar o 6º, o 7º e o 8º números triangulares.

**Resposta:**

$$6^\circ = 21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$$

$$7^\circ = 28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$$

$$8^\circ = 36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$$

Todos os alunos completaram corretamente a tabela com os cinco primeiros números triangulares que já estavam representados. A maioria dos alunos respondeu corretamente os valores para o 6º, 7º e 8º números triangulares, mesmo que para isso tenha sido necessário completar o desenho até chegar à resposta correta. Apenas alguns alunos perceberam o raciocínio que a questão envolvia. A turma 1903 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1901. O objetivo de explorar uma relação determinística entre números triangulares e a sua posição, ou seja, associar o valor do n-ésimo número triangular com sua posição foi alcançado.

Segue, abaixo, uma das respostas obtidas.

Posição	Número Triangular
6º	21
7º	28
8º	37

*O nº de bolinhas é somado ao nº da vez.*

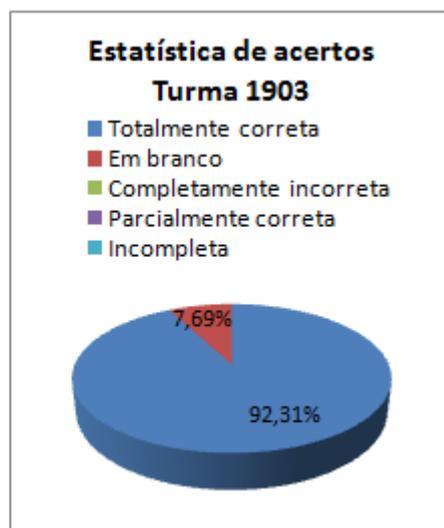
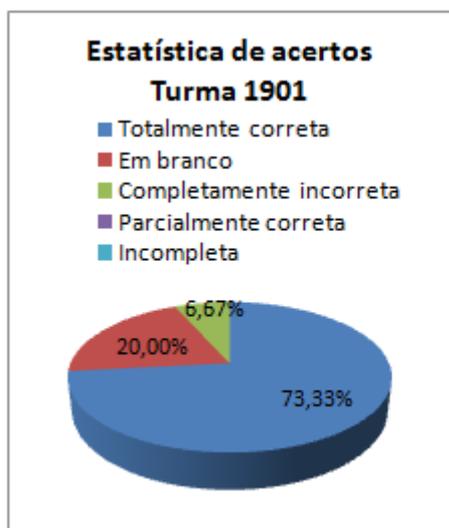


Figura 9: Estatística de acertos da atividade 4 do 1º encontro

**Atividade Complementar: Classificar as atividades anteriores em eventos aleatórios ou determinísticos.**

**Resposta:**

Atividade 1: Aleatório

Atividade 2: Aleatório

Atividade 3: Aleatório

Atividade 4: Determinístico

Na classificação da atividade 1 os alunos perceberam que era um evento aleatório. Não ocorreu nenhuma classificação incorreta em nenhuma das duas turmas. O número de questões em branco resultou, em sua maioria, do curto tempo para realizar as tarefas. A turma 1901 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1903.

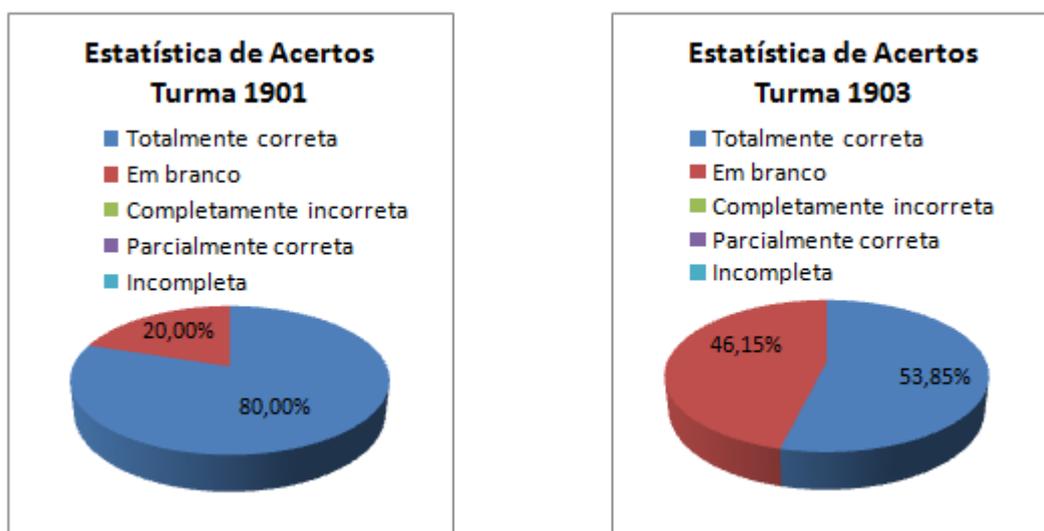


Figura 10: Estatística de acertos da primeira parte da atividade complementar do 1º encontro

Na classificação da atividade 2 os alunos consideraram, em sua maioria, um evento aleatório. Mas alguns alunos classificaram, incorretamente, em evento determinístico, em virtude de poderem estimar as temperaturas. A turma 1901 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1903. O número de questões em branco resultou, quase que em sua totalidade, do curto tempo para a realização das tarefas.

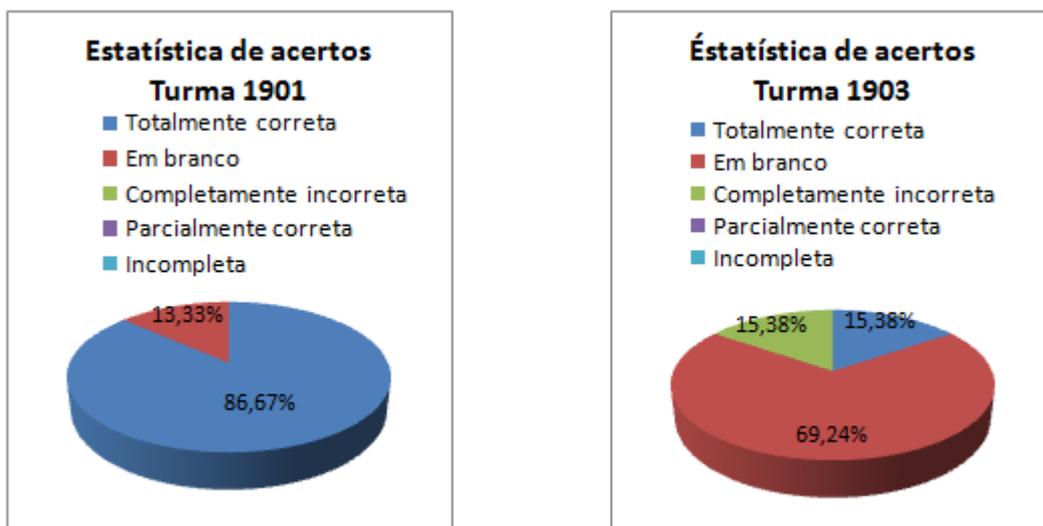


Figura 11: Estatística de acertos da segunda parte da atividade complementar do 1º encontro

Na classificação da atividade 3 todos os alunos que realizaram a questão, de ambas as turmas, responderam corretamente, classificando como evento aleatório. As turmas tiveram aproveitamentos muito próximos.

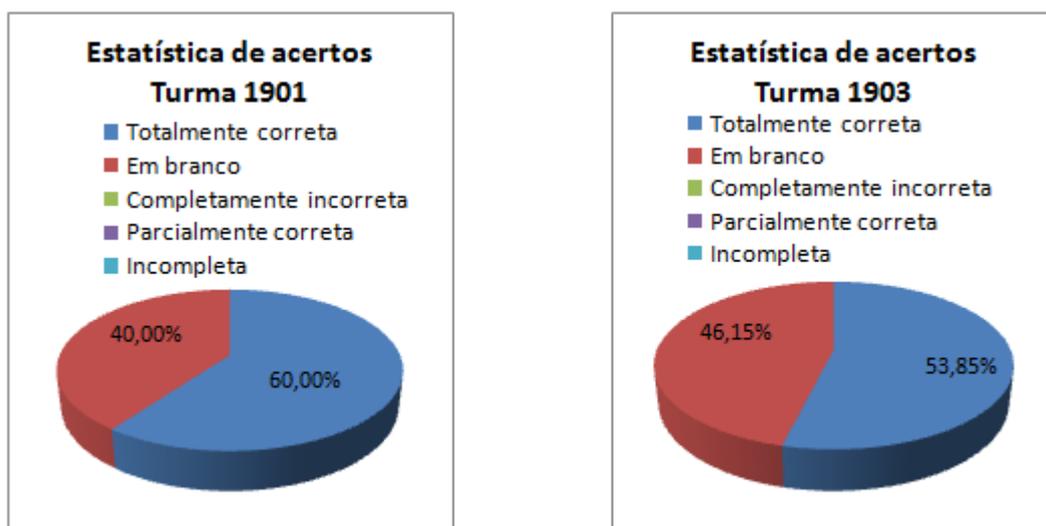


Figura 12: Estatística de acertos da terceira parte da atividade complementar do 1º encontro

Na classificação da atividade 4 poucos alunos analisaram de forma incorreta o evento determinístico. O alto percentual de questões em branco deve-se ao fato dos alunos terem utilizado uma grande parte do tempo da aula se concentrado em completar a tabela dos números triangulares. As turmas tiveram aproveitamentos muito próximos.

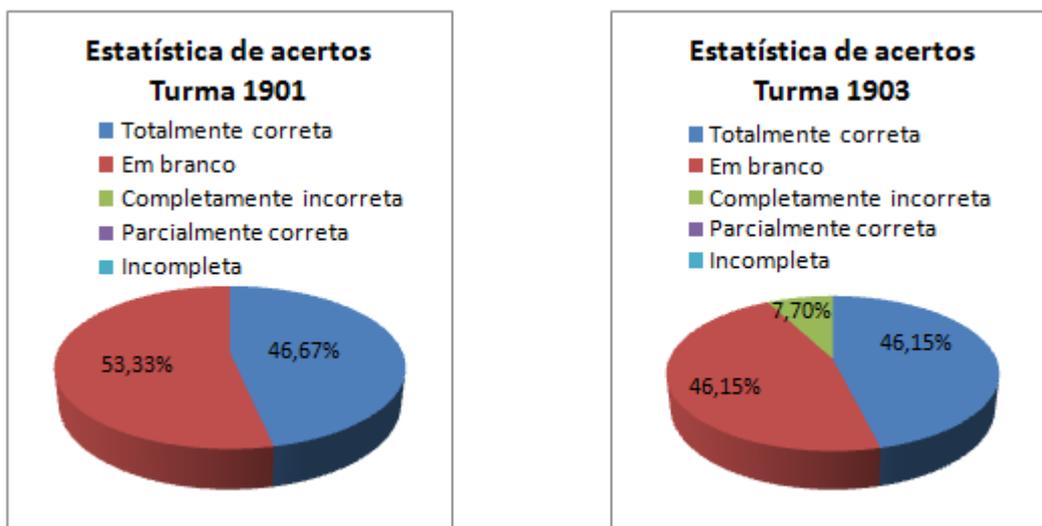


Figura 13: Estatística de acertos da quarta parte da atividade complementar do 1º encontro

O objetivo da atividade complementar de apresentar situações em que o aluno deverá realizar a distinção entre fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios foi alcançado.

**Atividade 5:** Observando o gráfico, classificar a relação “faltas dos alunos x média final em Matemática” em fenômeno determinístico ou aleatório.

**Resposta:** É um fenômeno aleatório, pois não é possível determinar qual será a média final a partir do número de faltas do aluno.

Nessa questão os alunos tiveram dificuldade em classificar analisando somente a dispersão dos pontos no gráfico. Mas após verificarem, através do gráfico, que alunos com o mesmo número de faltas tinham médias diferentes, a maioria dos grupos classificou corretamente. As turmas tiveram aproveitamentos muito próximos. O objetivo de explorar uma situação em que o aluno pudesse identificar um fenômeno aleatório foi alcançado, pois eles verificaram que não era possível determinar a média de um aluno a partir do seu número de faltas.

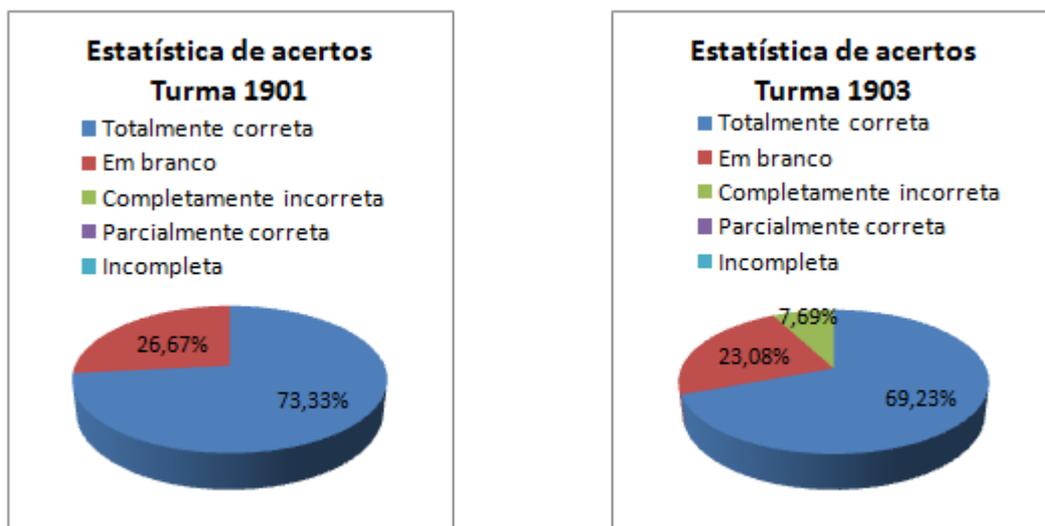


Figura 14: Estatística de acertos da atividade 5 do 1º encontro

**Atividade 6:** Analisando o gráfico, determinar se a relação “distância percorrida x tempo” expressa um fenômeno determinístico ou aleatório

**Resposta:** Determinístico.

Os alunos observaram que, segundo o texto, havia uma fórmula para determinar a distância percorrida a partir do tempo, e classificaram corretamente em evento determinístico. Quanto ao gráfico, alguns observaram que podiam “ligar” os pontos formando uma parábola. As turmas tiveram aproveitamentos muito próximos. O objetivo de explorar uma situação em que o aluno pudesse identificar um fenômeno determinístico foi alcançado.

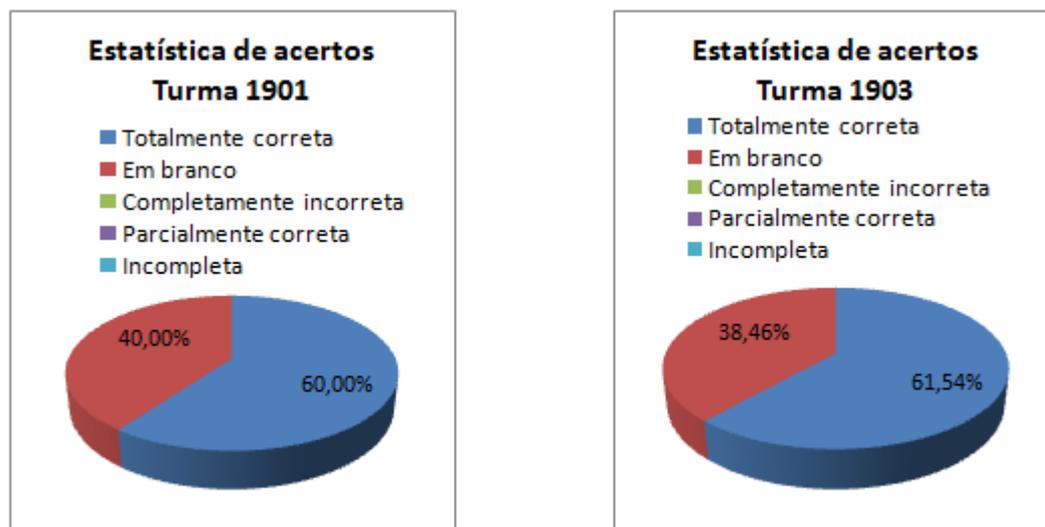


Figura 15: Estatística de acertos da atividade 6 do 1º encontro

**No segundo dia de encontro foram trabalhadas as atividades a seguir :**

Atividade 1:

**Situação 1a:** Completar a tabela com os salários de Pedro nos meses de janeiro à novembro

**Resposta:**

Janeiro	Fevereiro	Março	Abril	Mai	Junho	Julho	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro
2400	2025	2100	1230	1350	1200	1050	1050	2025	1470	1230

Os alunos realizaram essa atividade utilizando a calculadora dos seus celulares. Foi observado, pelos alunos, que para separar a parte inteira da parte fracionária de um número, algumas calculadoras utilizam ponto e outras utilizam vírgula. Poucos alunos erraram e, quando isso ocorreu, foi em uma ou duas questões apenas, e por falta de atenção no momento de digitar os valores na calculadora. A maioria completou toda a tabela corretamente. A turma 1903 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1901.

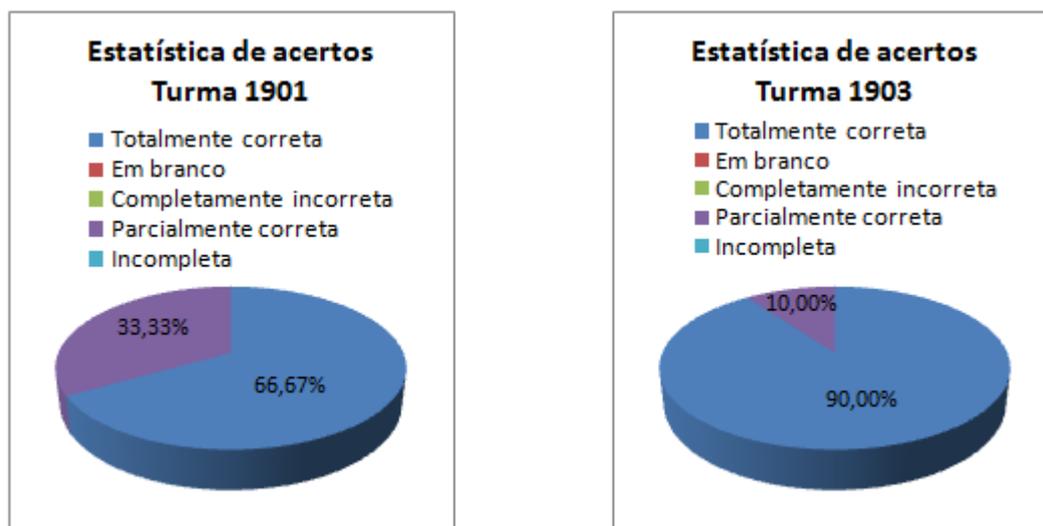


Figura 16: Estatística de acertos da atividade 1a do 2º encontro

**Situação 1b:** Informar o que ocorreu com o salário de Pedro nos meses em que ele vendeu a mesma quantidade de condicionadores de ar.

**Resposta:** Ficou igual.

A maioria dos alunos acertou a questão. Ambas as turmas apresentaram um percentual de acertos muito bom. Eles observaram, com facilidade, que a quantidade de condicionadores de ar vendidos estava relacionada ao salário de Pedro através da “comissão”.

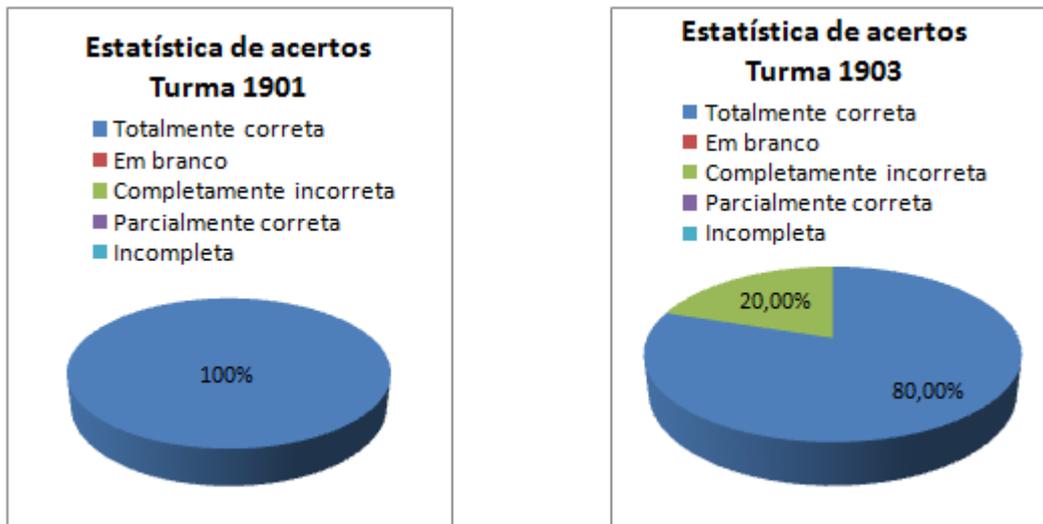


Figura 17: Estatística de acertos da atividade 1b do 2º encontro

**Situação 1c:** Verificar se é possível que o salário de Pedro seja diferente nos meses em que o total de vendas dele é o mesmo.

**Resposta:** Não.

Todos os alunos que fizeram a questão acertaram. A turma 1901 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1903.

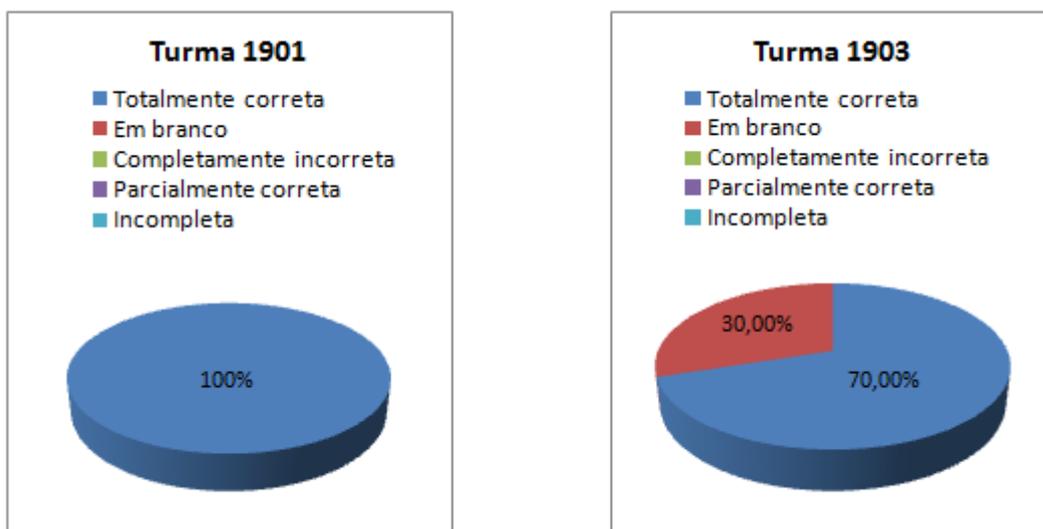


Figura 18: Estatística de acertos da atividade 1c do 2º encontro

**Situação 1d:** Verificar se existe algum padrão na posição dos pontos no gráfico. E, se existir, determinar qual é.

**Resposta:** Os pontos obtidos na tabela parecem estar alinhados quando dispostos no plano cartesiano em virtude da lei de formação.

A maioria dos alunos percebeu um padrão no gráfico e identificou nesse padrão uma reta. O percentual de acertos de ambas as turmas foi muito próximo.

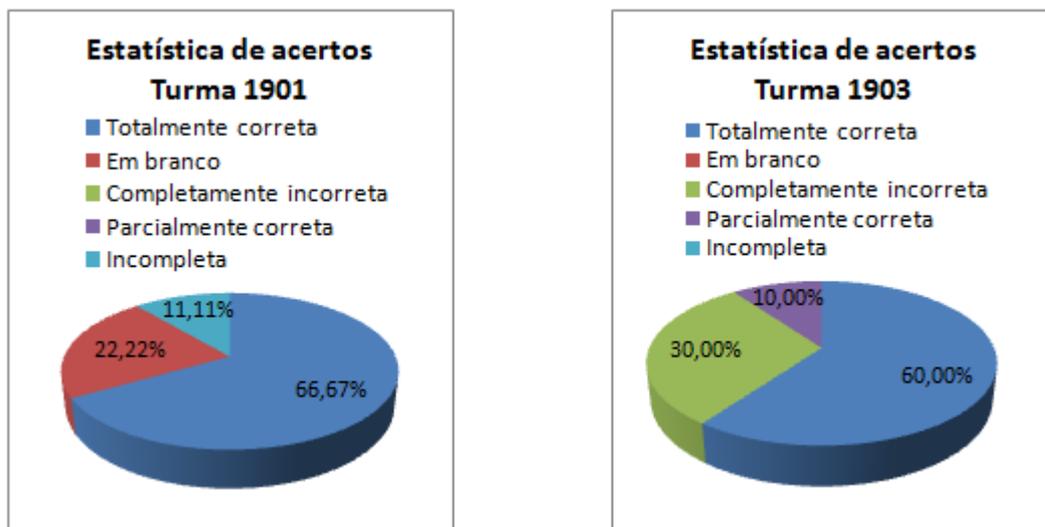


Figura 19: Estatística de acertos da atividade 1d do 2º encontro

Ao término das atividades propostas na situação 1, verificamos que os objetivos de identificar a relação funcional entre o salário do vendedor e o valor total das vendas mensais, a partir de uma relação determinística que permite a obtenção unívoca da variável dependente envolvida no problema, e de identificar relações entre variáveis em fenômenos determinísticos e aleatórios a partir da observação das dispersões dos pontos que as representam no plano cartesiano foram alcançados.

**Situação 2a:** Verificar se em dias com a mesma temperatura média registrada o número de condicionadores de ar vendidos é diferente.

**Resposta:** Sim.

A maioria dos alunos respondeu corretamente. Alguns alunos acharam que temperaturas iguais corresponderiam a quantidades de condicionadores de ar vendidos iguais. O percentual de acertos de ambas as turmas foi muito próximo.

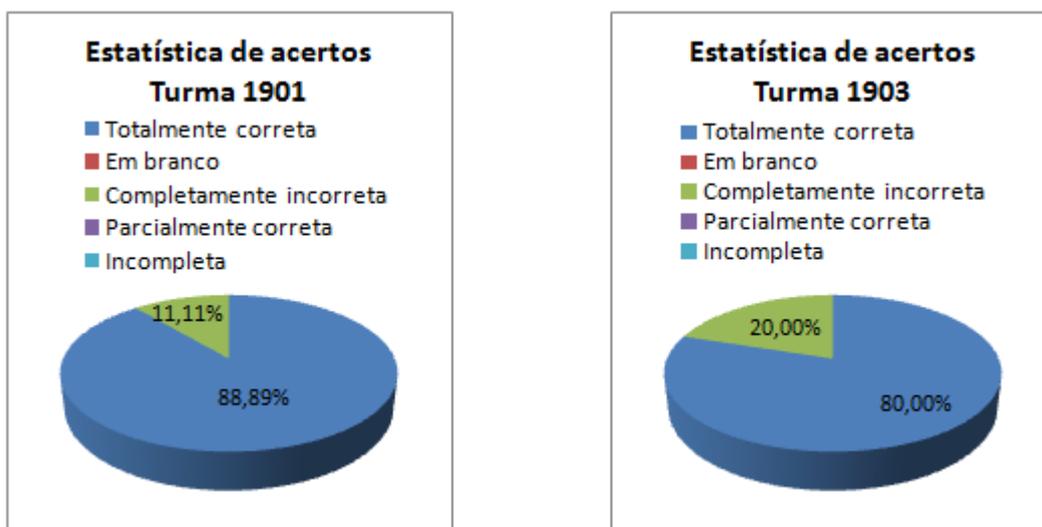


Figura 20: Estatística de acertos da atividade 2a do 2º encontro

**Situação 2b:** Verificar se é possível determinar exatamente quantos condicionadores de ar foram vendidos a partir da temperatura do dia.

**Resposta:** Não.

A maioria dos alunos errou essa questão, respondendo “SIM”, pois não entendeu a pergunta. Eles raciocinaram pensando somente na tabela. Acharam que esse “determinar” era ir até a tabela e consultar todas as opções para cada temperatura. Eles não perceberam que uma mesma temperatura não garantia um mesmo número de aparelhos vendidos. Por esse motivo responderam que era possível. Uma modificação no enunciado dessa pergunta seria prudente. Ele poderia ser alterado de: “**Podemos determinar exatamente quantos condicionadores de ar foram vendidos a partir da temperatura do dia?**” para: “**A partir de uma temperatura qualquer, que não conste necessariamente na tabela apresentada, podemos determinar quantos condicionadores de ar serão vendidos?**” A turma 1901 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1903.

Segue, abaixo, uma das respostas obtidas, que considerou uma interpretação incorreta do enunciado inicial.

b) Podemos determinar exatamente quantos condicionares de ar foram vendidos a partir d temperatura do dia?  
 Sim, pois o grafico é composto pela temperatura do dias e a quantidade de condicionadores de ar vendidos

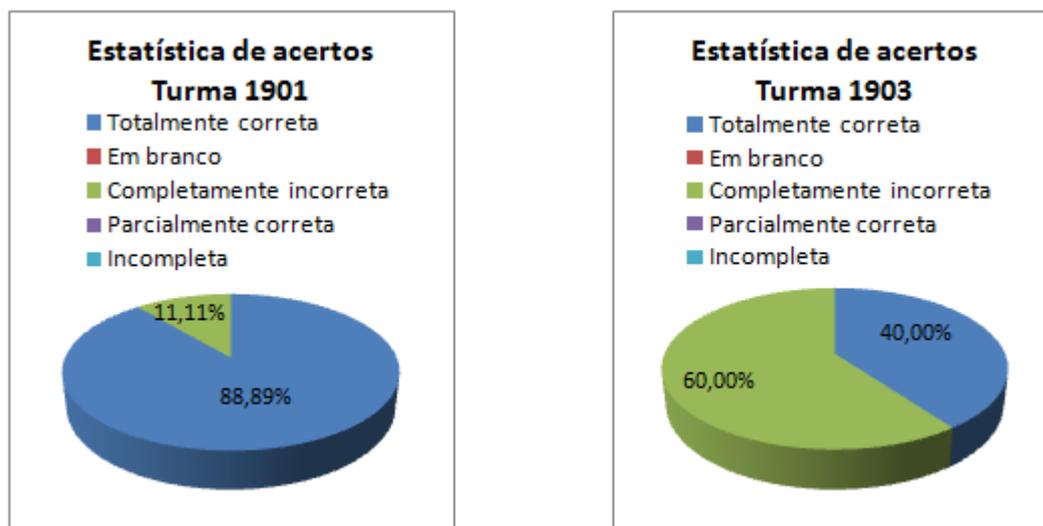


Figura 21: Estatística de acertos da atividade 2b do 2º encontro

**Situação 2c:** Verificar se é possível fazer uma previsão do número de condicionadores ar vendidos em um dia em que a temperatura média registrada foi de 40°.

**Resposta:** Não.

A maioria dos alunos errou essa questão. Esses alunos que erraram se basearam, a partir do gráfico, somente na situação apresentada, pois eles acharam que poderiam fazer uma previsão considerando somente, como conjunto universo, o que estava informado na tabela. A turma 1901 apresentou um maior percentual de acertos que a turma 1903.

Segue, abaixo, uma das respostas obtidas, também considerando uma interpretação incorreta do enunciado inicial.

c) Podemos fazer uma previsão do número de condicionadores ar vendidos em um dia em que a temperatura média registrada foi de 40°? Sim, de 8 condicionadores de ar.

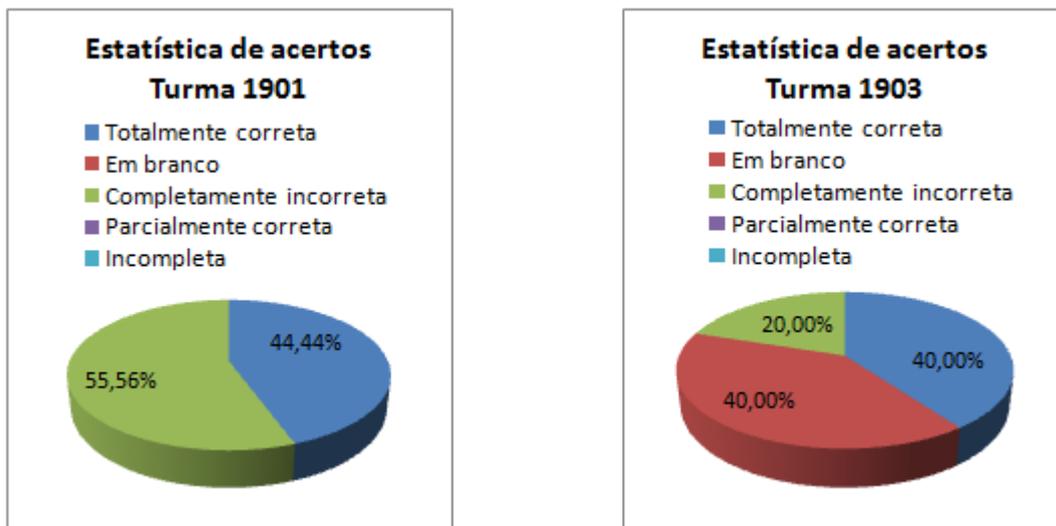


Figura 22: Estatística de acertos da atividade 2c do 2º encontro

**Situação 2d:** Verificar se é possível observar alguma tendência nas vendas se o dia foi mais quente ou menos quente.

**Resposta:** Sim.

A maioria dos alunos acertou essa questão. Ambas as turmas tiveram um percentual de acertos muito bom. Eles perceberam muito facilmente a relação entre a venda de condicionadores de ar e a temperatura do dia.

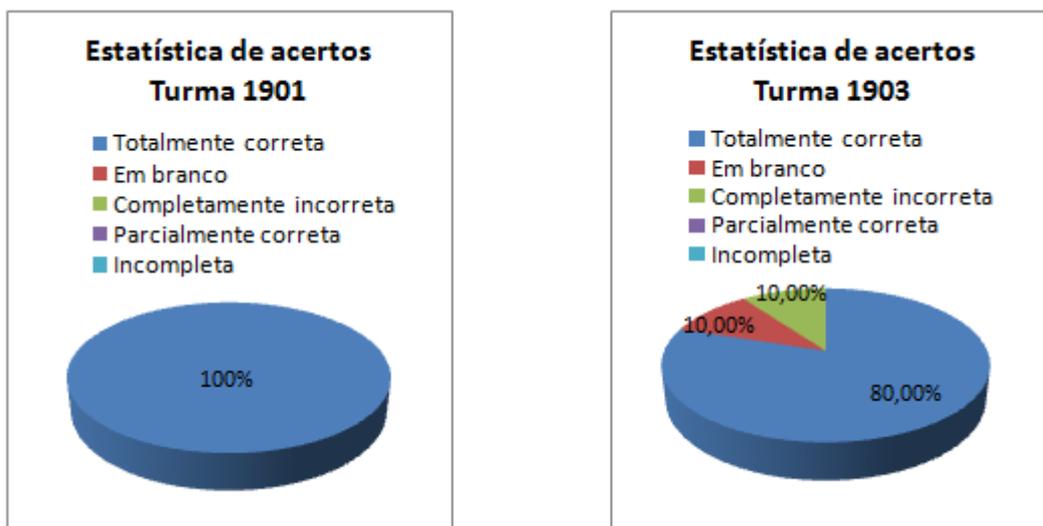


Figura 23: Estatística de acertos da atividade 2d do 2º encontro

**Situação 2e:** Verificar se existe algum padrão em relação à posição dos pontos no gráfico e justificar a resposta.

**Resposta:** Os pontos obtidos na tabela não estão sobre uma curva pré-determinada quando dispostos no plano, porém apresentam uma tendência de crescimento que permite obter previsões aproximadas.

A maioria dos alunos acertou a questão. O aproveitamento de ambas as turmas foi muito próximo.

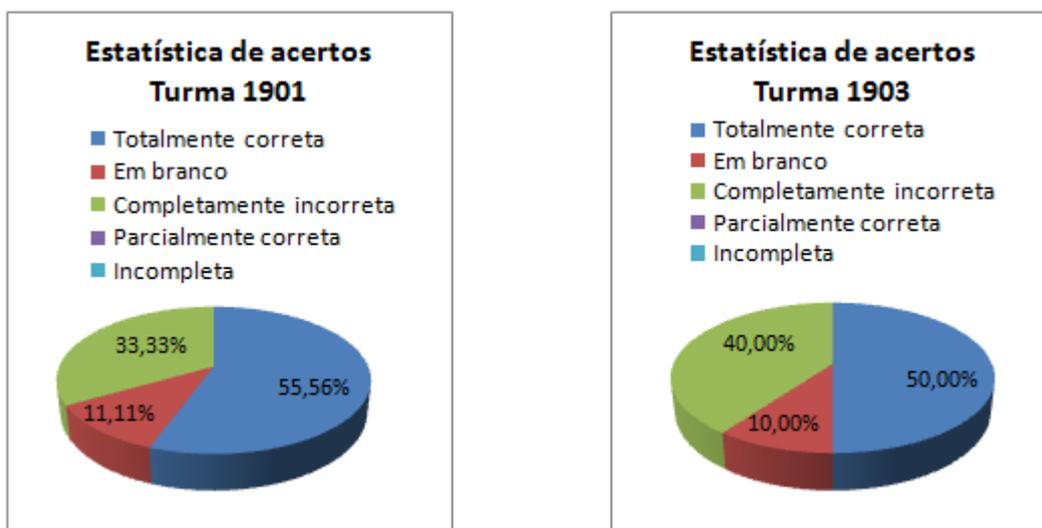


Figura 24: Estatística de acertos da atividade 2e do 2º encontro

Ao término das atividades propostas na situação 2, apesar do baixo percentual de acertos nos itens 2b e 2c, podemos verificar que o objetivo de fazer com que o aluno percebesse que mesmo as temperaturas não sendo as mesmas, temperaturas mais altas levavam a um aumento do número das vendas de condicionadores de ar, mas não necessariamente, uma determinada temperatura indicava exatamente um número definido de condicionadores de ar vendidos, ou seja, não era possível determinar exatamente o número de condicionadores de ar vendidos, a partir de uma determinada temperatura, mas era possível observar uma tendência nas vendas, se o dia foi mais ou menos quente, ou seja, o objetivo de identificar a relação não funcional entre o número de condicionadores de ar vendidos e as temperaturas médias diárias registradas foi atingido.

**Situação 3a:** Verificar se é possível determinar exatamente quantos televisores foram vendidos a partir da temperatura do dia.

**Resposta:** Não.

Os dois alunos que responderam sim pensaram que a pergunta queria dizer: “Olhando o gráfico podemos determinar, para cada temperatura, quais foram as opções de quantidades vendidas de televisores”. Como se eles quisessem listar todos os pontos que aparecem no gráfico, com abscissa e ordenada (par ordenado). Mas para uma mesma temperatura teríamos mais de uma opção de televisores vendidos, e para um mesmo número de televisores vendidos teríamos mais de uma temperatura. Poderíamos alterar o enunciado da questão de: “**Podemos determinar exatamente quantos televisores foram vendidos a partir da temperatura do dia?**” para: “**A partir de uma temperatura qualquer, que não conste necessariamente na tabela apresentada, podemos determinar quantos televisores serão vendidos?**” A turma 1901 obteve um aproveitamento muito melhor que a turma 1903.

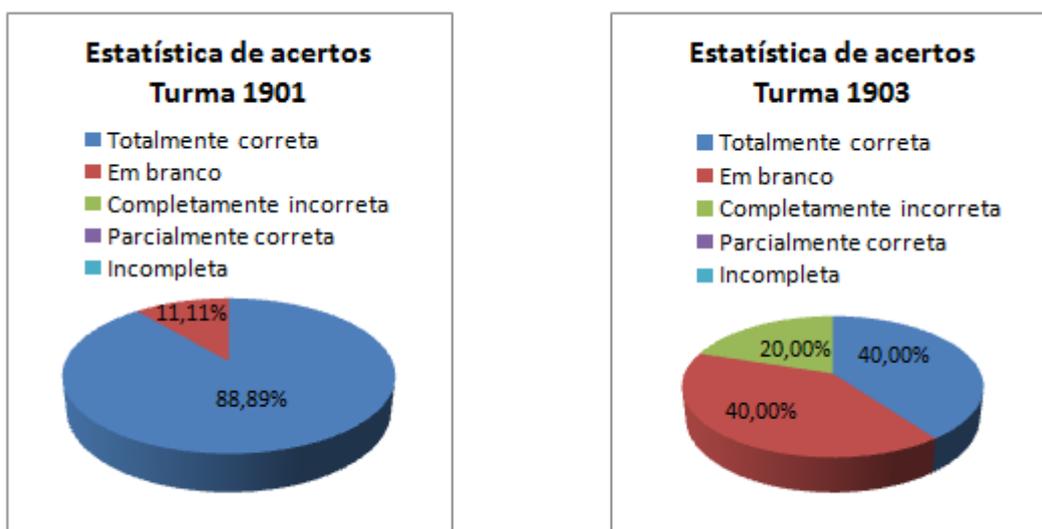


Figura 25: Estatística de acertos da atividade 3a do 2º encontro

**Situação 3b:** Verificar se há alguma tendência nas vendas se o dia foi mais quente ou menos quente.

**Resposta:** Não.

Alguns alunos se confundiram ao analisar o gráfico e acharam que em dias mais frios foram vendidos mais televisores. Mas ocorreram dias frios em que foram vendidos

poucos televisores também. A turma 1901 obteve um percentual de acertos maior que a turma 1903.

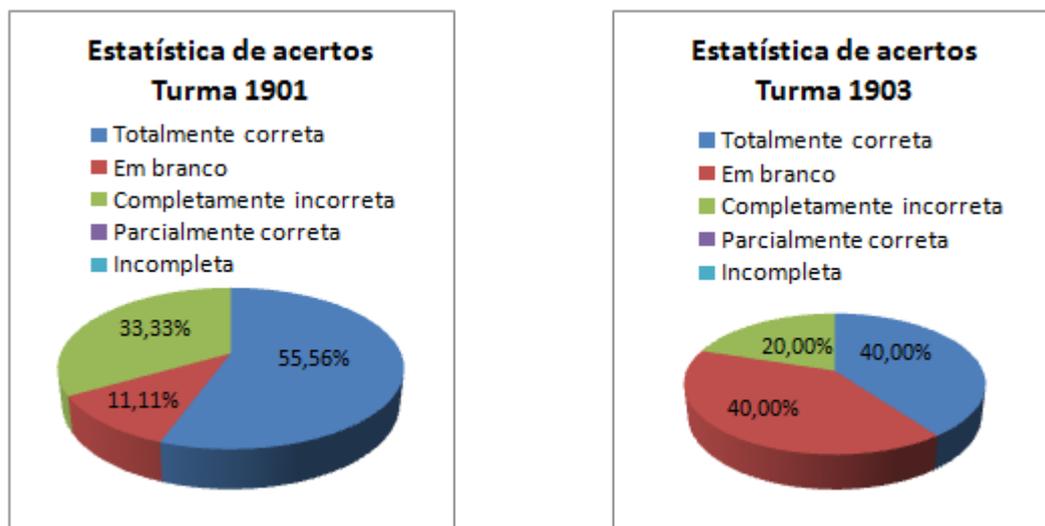


Figura 26: Estatística de acertos da atividade 3b do 2º encontro

**Situação 3c:** Verificar se dias com a mesma temperatura média correspondem a números diferentes de televisores vendidos.

**Resposta:** Sim.

A maioria dos alunos acertou essa questão. A turma 1901 obteve um percentual de acertos maior que a turma 1903.

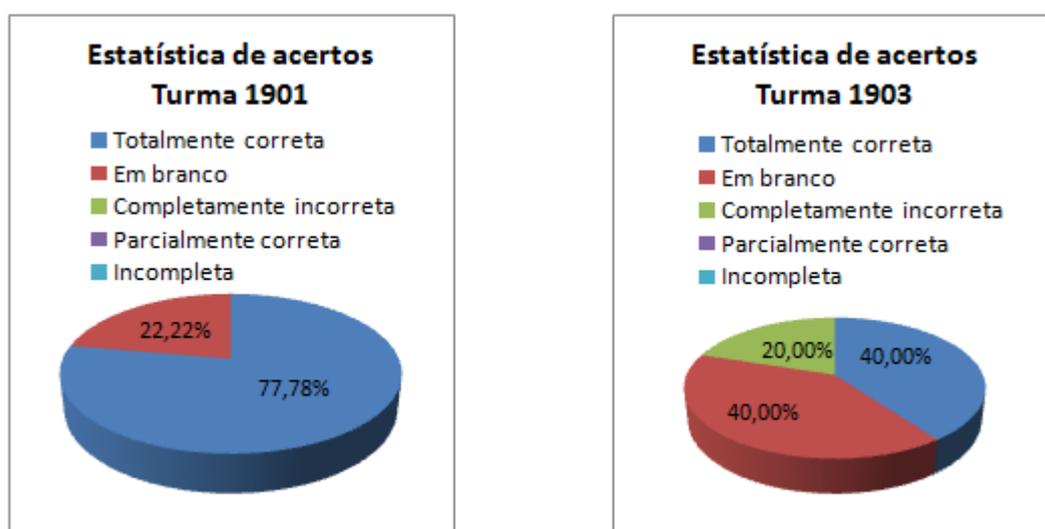


Figura 27: Estatística de acertos da atividade 3c do 2º encontro

**Situação 3d:** Verificar a possibilidade de determinar quantos televisores seriam vendidos num dia cuja temperatura média registrada seja 18°C.

**Resposta:** Não.

Os alunos que erraram a questão respondendo “SIM” entenderam a pergunta de outra maneira. Eles verificaram apenas as possibilidades mostradas pelo gráfico, ou seja, o que aconteceu nos dias representados no gráfico. E, de acordo com o gráfico, há várias opções de quantidades de televisores vendidos para a temperatura de 18°, mas essas opções são finitas e listáveis. O percentual de acertos de ambas as turmas foi muito próximo. Poderíamos modificar o enunciado de: “**É possível determinar quantos televisores seriam vendidos num dia cuja temperatura média registrada seja 18°C?**” para: “**É possível determinar, independentemente da tabela, quantos televisores seriam vendidos num dia cuja temperatura média registrada seja 18°C?**”

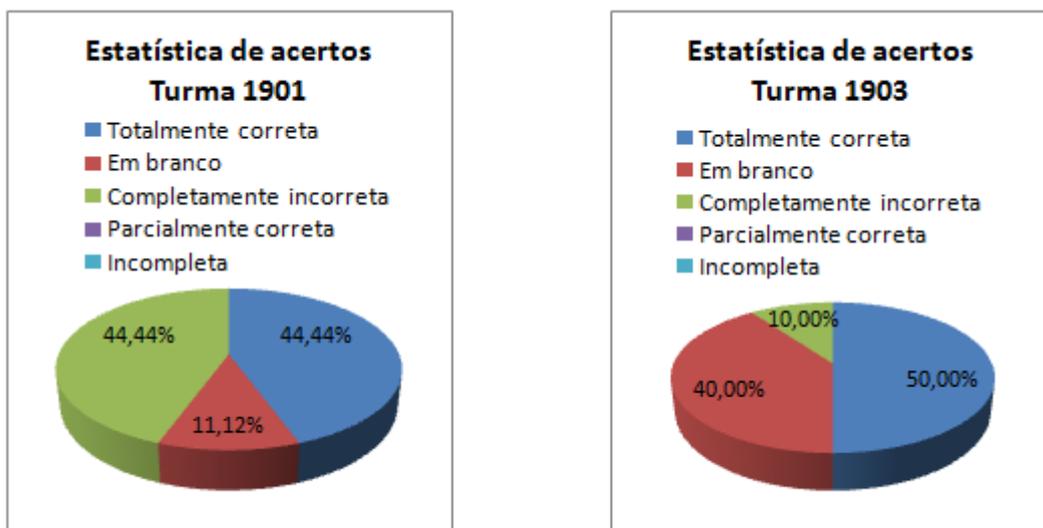


Figura 28: Estatística de acertos da atividade 3d do 2º encontro

Ao término das atividades propostas na situação 3, verificamos que o objetivo de identificar uma relação não funcional entre o número de televisores vendidos e as temperaturas médias diárias registradas foi alcançado.

**Atividade Complementar a:** Classificar as três situações em evento determinístico ou aleatório.

**Resposta:** Determinístico, Aleatório, Aleatório.

Muitos alunos não conseguiram responder à essa pergunta porque o tempo de aula havia terminado. Dos alunos que responderam, a maioria acertou. Não foi possível avaliar corretamente o aproveitamento dos alunos nessa atividade em virtude do tempo disponível.

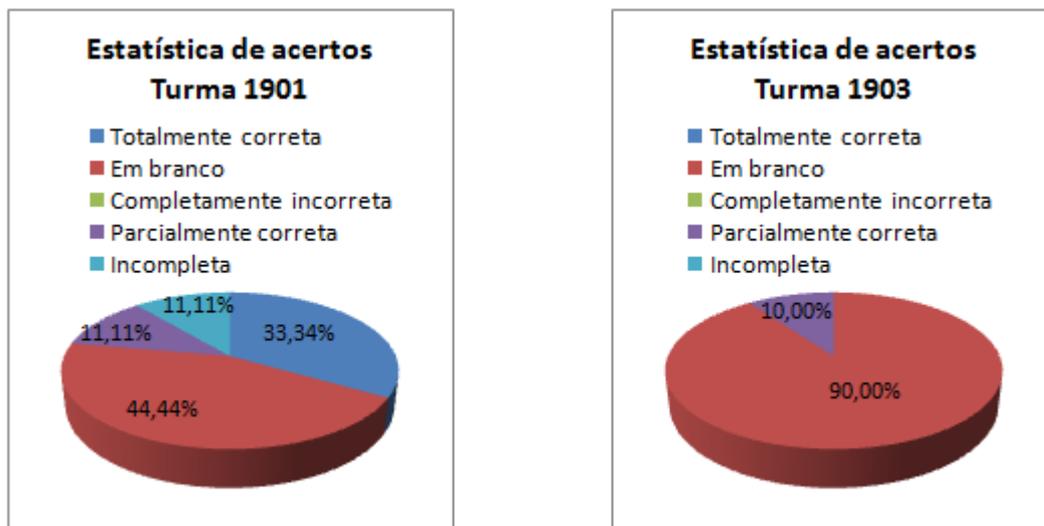


Figura 29: Estatística de acertos da atividade complementar a do 2º encontro

**Atividade Complementar b:** Verificar se os gráficos das relações que expressam um fenômeno aleatório apresentam o mesmo tipo de comportamento.

**Resposta:** Na situação 2 os pontos ficam mais dispersos, porém apresentam uma tendência de crescimento que permite previsões aproximadas, mas não descrevem uma relação determinística. Já na situação 3, os pontos apresentam-se totalmente dispersos no plano sem relação funcional entre as variáveis.

Muitos alunos não tiveram tempo para realizar essa atividade. Por esse motivo não foi possível avaliar corretamente o aproveitamento dos alunos.

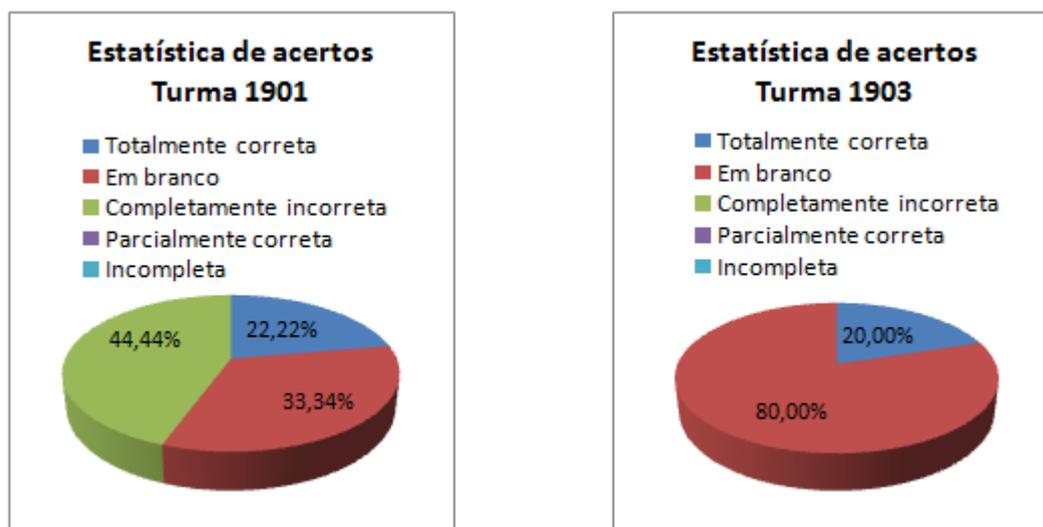


Figura 30: Estatística de acertos da atividade complementar b do 2º encontro

Ao término das questões propostas na atividade complementar verificamos que o objetivo de apresentar situações em que o aluno deverá realizar a distinção entre fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios foi alcançado, apesar do número pequeno de alunos que realizou essa atividade. Quanto à análise dos gráficos, não foi possível verificar corretamente o aproveitamento dos alunos nessa atividade, no sentido de perceber a ideia de causalidade ou não causalidade entre as variáveis dos fenômenos aleatórios a partir da dispersão dos pontos no plano cartesiano, portanto, o objetivo não foi alcançado.

**No terceiro dia de encontro foram abordadas as seguintes atividades:**

**Atividade 1:** Verificar se podemos garantir que todos os alunos que tiverem a mesma quantidade de faltas terão a mesma média final.

**Resposta:** Não. Há “entradas” com mais de uma “saída”.

A maioria dos alunos, em ambas as turmas, respondeu corretamente. Ambas as turmas tiveram um excelente aproveitamento. O objetivo de verificar se na relação entre as variáveis “notas” e “média final de Matemática”, cada entrada determina uma única saída foi alcançado.

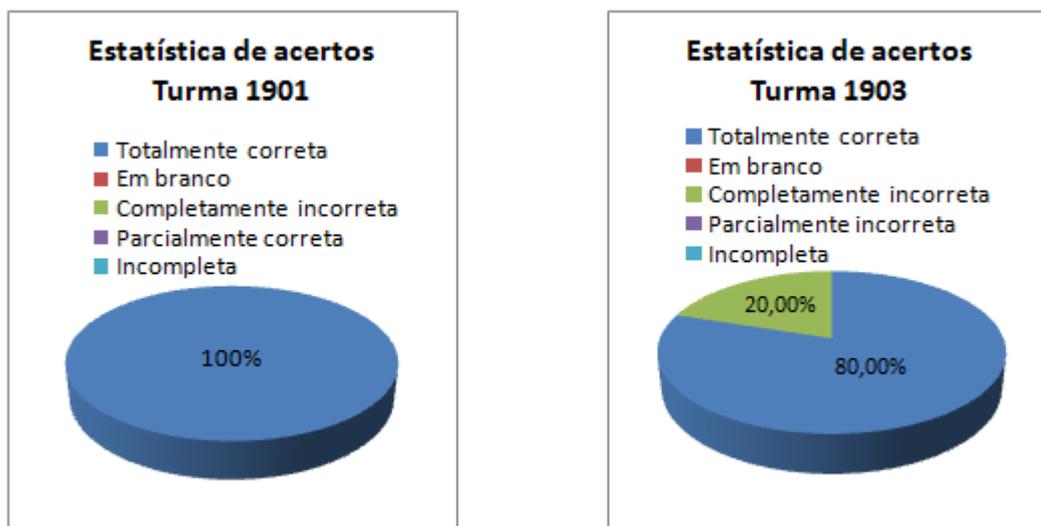


Figura 31: Estatística de acertos da atividade 1 do 3º encontro

**Atividade 2:** Verificar se, na tabela que representa a relação posição x número triangular, cada posição determina um único número.

**Resposta:** Sim.

A maioria dos alunos interpretou a pergunta de uma forma diferente. Eles acharam que esse “único número” ao qual o problema se refere é um número igual em todas as posições da tabela. A pergunta deve ser reformulada. A seguir uma sugestão de alteração: de: “**Cada posição determina um único número triangular?**” para: “**Para cada posição temos mais de uma opção de número triangular?**” As turmas não tiveram um bom aproveitamento. A turma 1901 obteve um percentual de erros maior que a turma 1903. O objetivo de levar o aluno a perceber que para cada posição da tabela temos apenas um único número triangular relacionado, ou seja, dele verificar que, na relação entre as variáveis “posição” e “número triangular”, cada entrada determina uma única saída, não foi alcançado, pois o aluno interpretou a pergunta de forma diferente do planejado.

Segue, abaixo, uma das respostas obtidas, considerando uma interpretação incorreta do enunciado.

Cada posição determina um único número triangular? *não, cada posição tem triangulos diferentes.*

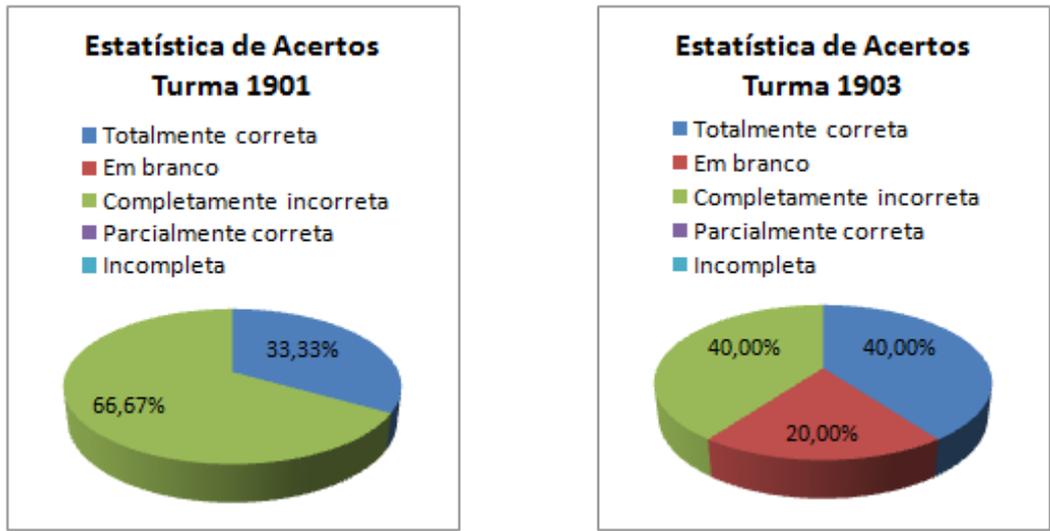


Figura 32: Estatística de acertos da atividade 2 do 3º encontro

**Atividade 3a:** Calcular quanto Daniel teve que pagar após abastecer seu carro.

**Resposta:** R\$58,00.

A maioria dos alunos acertou a questão. A turma 1903 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1901.

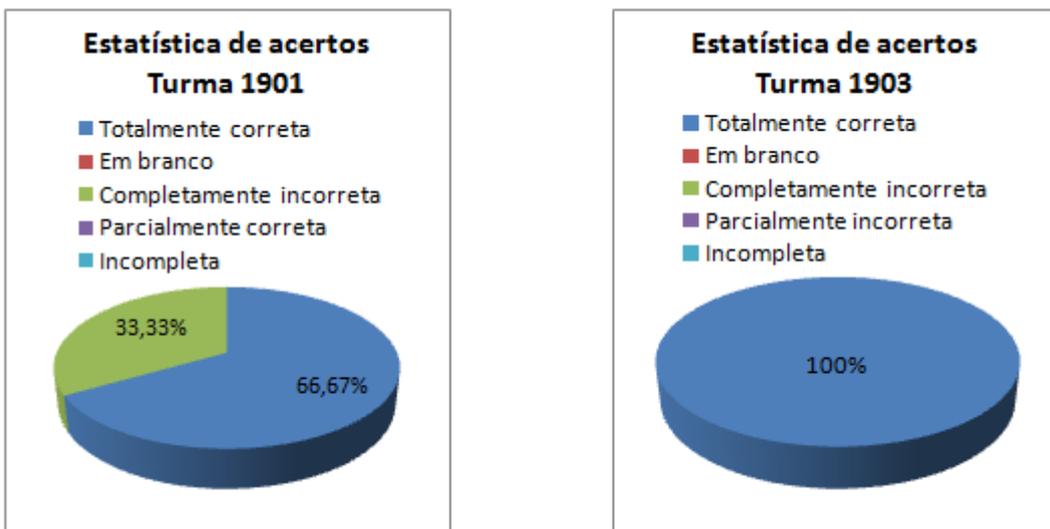


Figura 33: Estatística de acertos da atividade 3a do 3º encontro

**Atividade 3b:** Calcular quantos litros de gasolina Daniel pode colocar com R\$ 87,00.

**Resposta:** 30.

A maioria dos alunos acertou a questão. A turma 1903 apresentou um melhor aproveitamento que a turma 1901.

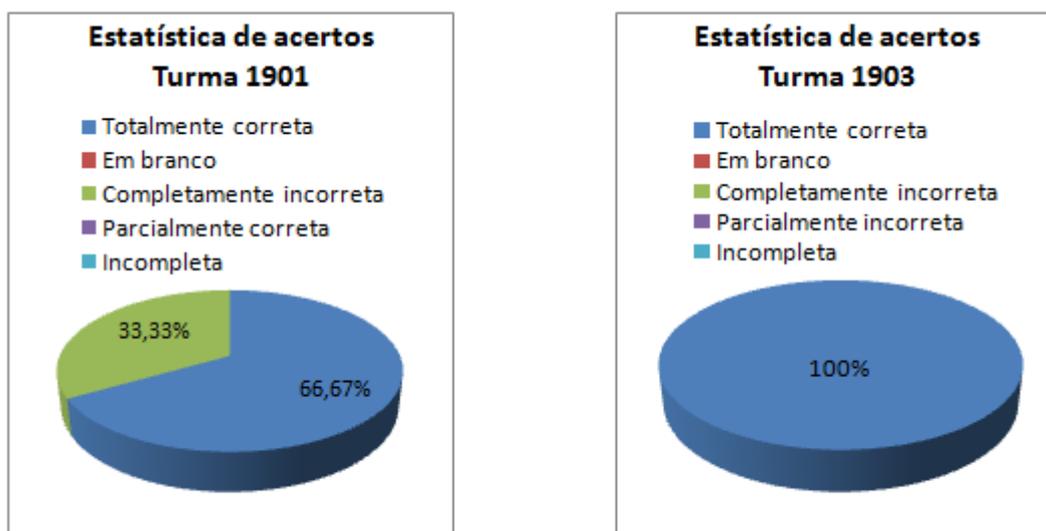


Figura 34: Estatística de acertos da atividade 3b do 3º encontro

**Atividade 3c:** Verificar quais as grandezas que estão envolvidas na atividade e quais delas mudam e quais permanecem fixas.

**Resposta:** Grandezas envolvidas: quantidade de litros, preço por litro e valor a ser pago. Fixas: preço por litro. Variáveis: quantidade de litros e valor a ser pago.

A maioria dos alunos não relacionou todas as grandezas envolvidas, somente algumas delas. O percentual de acertos de ambas as turmas foi muito baixo.

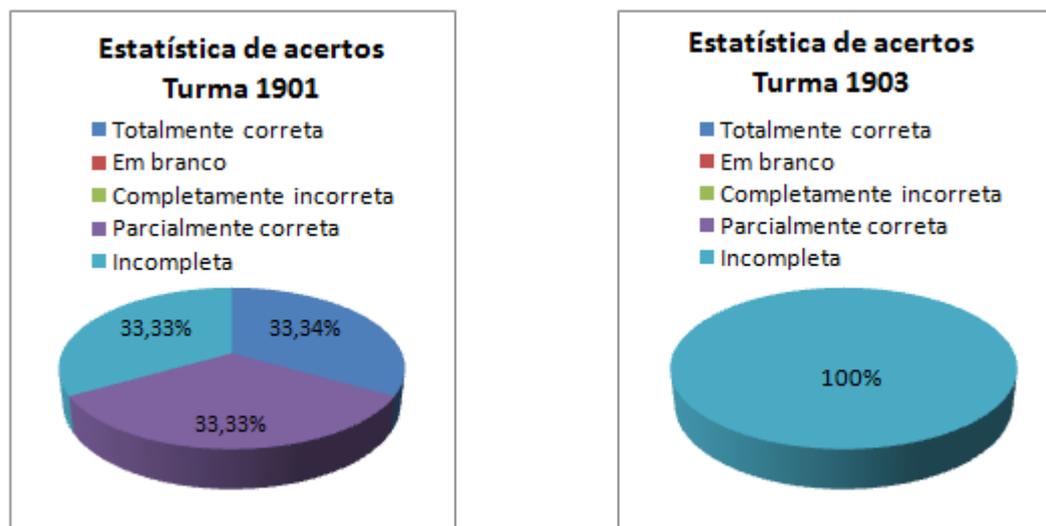


Figura 35: Estatística de acertos da atividade 3c do 3º encontro

**Atividade 3d:** Especificar como obter o valor a ser pago a partir da quantidade de litros de gasolina.

**Resposta:** Multiplica-se o preço a ser pago por litro (R\$ 2,90) pela quantidade de litros.

A maioria dos alunos acertou essa questão. A turma 1901 obteve um melhor aproveitamento que a turma 1903.

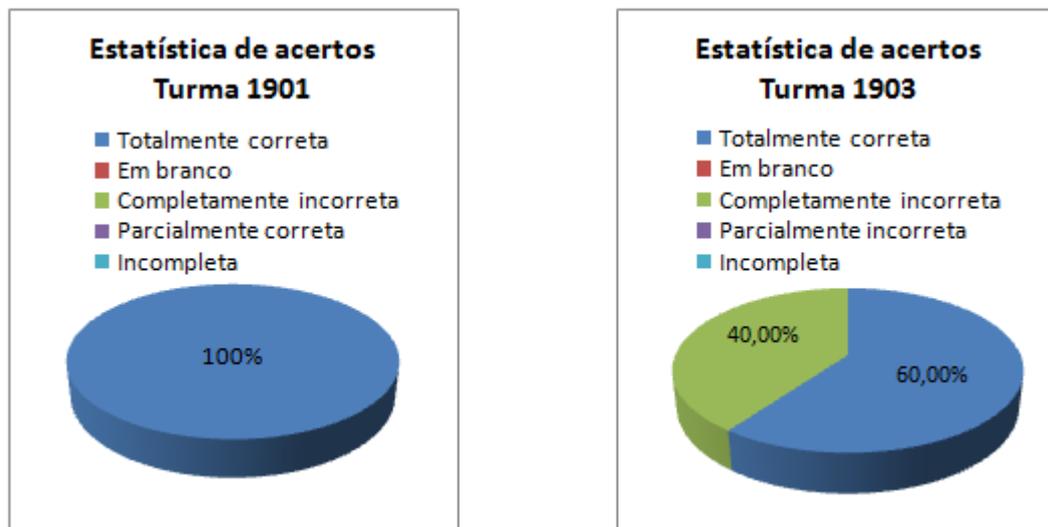


Figura 36: Estatística de acertos da atividade 3d do 3º encontro

**Atividade 3e:** Escrever uma igualdade que indique como calcular o valor a ser pago a partir da quantidade de litros de gasolina, chamando de x a quantidade de litros de gasolina e de y o valor a ser pago pelo abastecimento.

**Resposta:**  $y = 2,90 x$ .

Alguns alunos não entenderam muito bem a questão de como utilizar x e y. A turma 1903 obteve um melhor aproveitamento que a turma 1901.

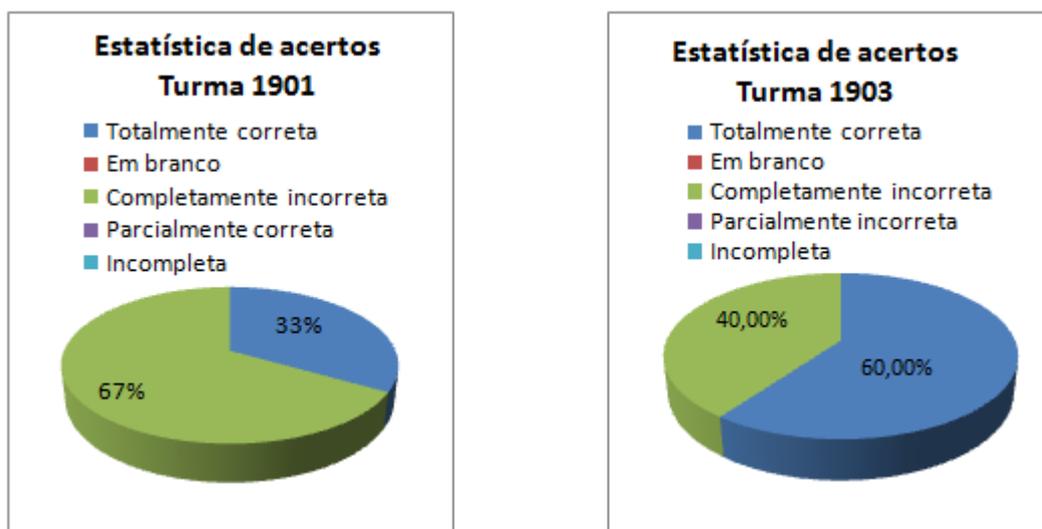


Figura 37: Estatística de acertos da atividade 3e do 3º encontro

Ao término das atividades propostas na questão 3, verificamos que os objetivos de determinar o valor total a ser pago pelo combustível em um posto com autosserviço conhecendo-se a quantidade de litros e o preço por litro; e a quantidade de litros a partir do valor total a ser pago foram alcançados. Mas, os objetivos de identificar as grandezas que variam no problema (valor total a ser pago e a quantidade de combustível em litros) e a relação de dependência entre elas; e obter a função que relaciona o valor a ser pago a partir da quantidade de litros de gasolina adquiridos, não foram alcançados, pois na primeira situação, os alunos não tiveram o cuidado de verificar, ao final da atividade, se haviam relacionado todas as grandezas mencionadas, e, na segunda situação, eles não entenderam muito bem a ideia de como utilizar  $x$  e  $y$ .

Esta questão contribui para que o aluno possa identificar, mais a frente, as variáveis em questão.

**Atividade 4a:** Determinar o valor pago por Sofia sabendo que a distância do supermercado até a casa dela é de 20,5 km e que o táxi ficou parado durante 5 minutos.

**Resposta:** R\$44,83333... = R\$44,83.

A maioria dos alunos acertou essa questão. A turma 1901 obteve um melhor aproveitamento que a turma 1903.

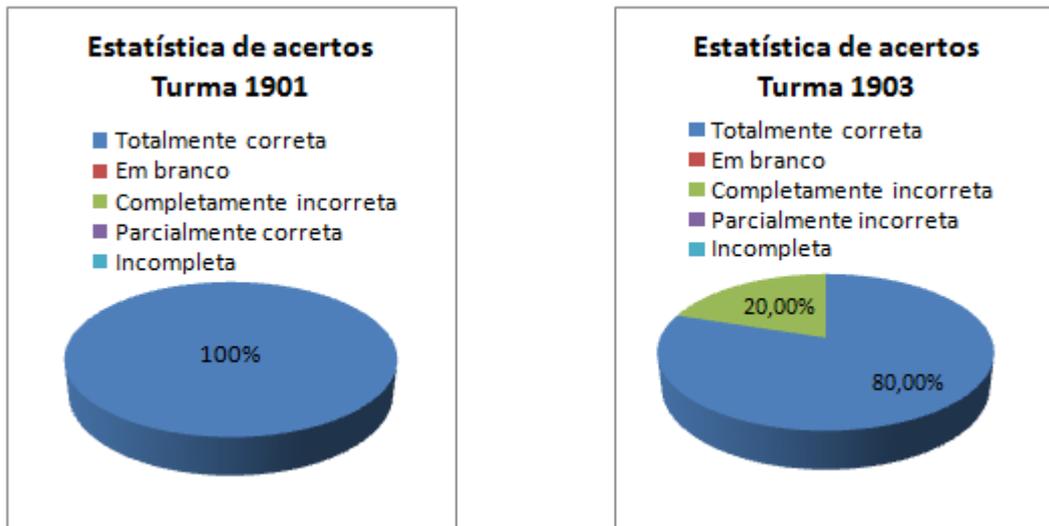


Figura 38: Estatística de acertos da atividade 4a do 3º encontro

**Atividade 4b:** Determinar o valor da corrida se a distância for o dobro da que Sofia percorreu, conforme o item anterior. Especificar se esse valor será o dobro do resultado da questão anterior.

**Resposta:** R\$85,83. Não dobra.

A maioria dos alunos acertou as duas perguntas da questão. Mas alguns acertaram uma delas e erraram a outra. A turma 1901 obteve um melhor aproveitamento que a turma 1903.

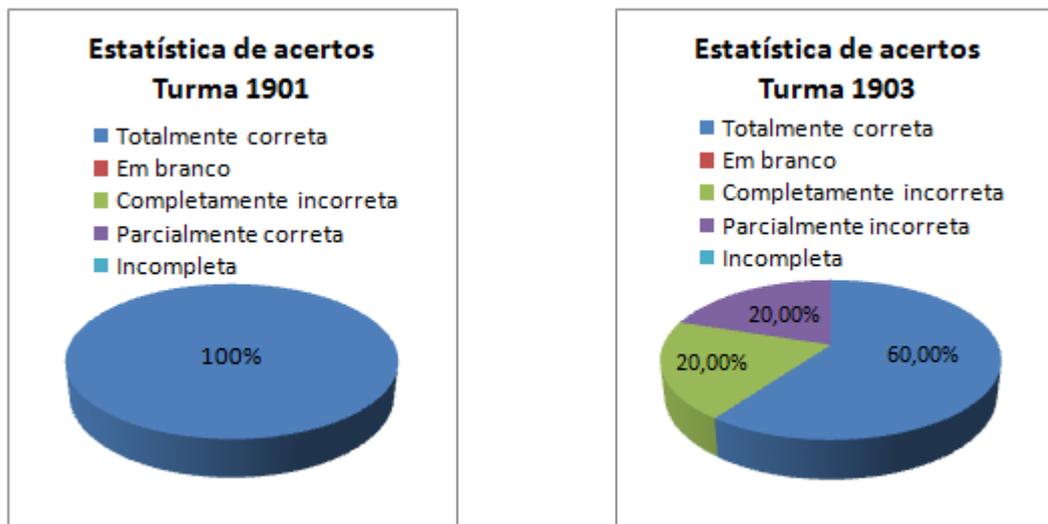


Figura 39: Estatística de acertos da atividade 4b do 3º encontro

**Atividade 4c:** Verificar se o táxi ficou parado no caso do valor da corrida ser de R\$ 38,00, a distância percorrida ser de 15 km, o valor de a bandeirada ser de R\$ 3,00, e o preço por quilômetro rodado ser de R\$ 2,00.

**Resposta:** Sim, 30 minutos.

A maioria dos alunos acertou essa questão. O aluno que acertou parcialmente colocou uma informação incorreta na resposta, ele determinou o tempo parado incorretamente. A turma 1901 obteve um melhor aproveitamento que a turma 1903.

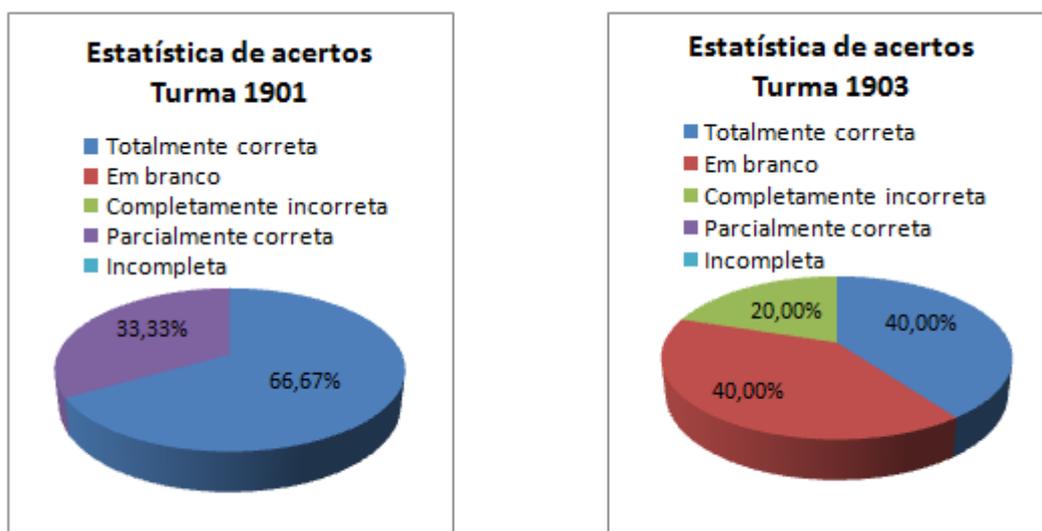


Figura 40: Estatística de acertos da atividade 4c do 3º encontro

**Atividade 4d:** Verificar quais as grandezas que estão envolvidas na atividade e quais delas variam.

**Resposta:** Grandezas envolvidas: valor da corrida (varia), preço por quilômetro rodado (fixo), tarifa inicial (fixo), preço por tempo parado (fixo), número de horas parado (varia), distância percorrida (varia) e tempo (varia).

Nenhum aluno relacionou todas as grandezas envolvidas. Alguns alunos também não relacionaram todas as grandezas que variavam. O percentual de acertos nessa questão foi muito pequeno. O aproveitamento da turma 1903 foi melhor.

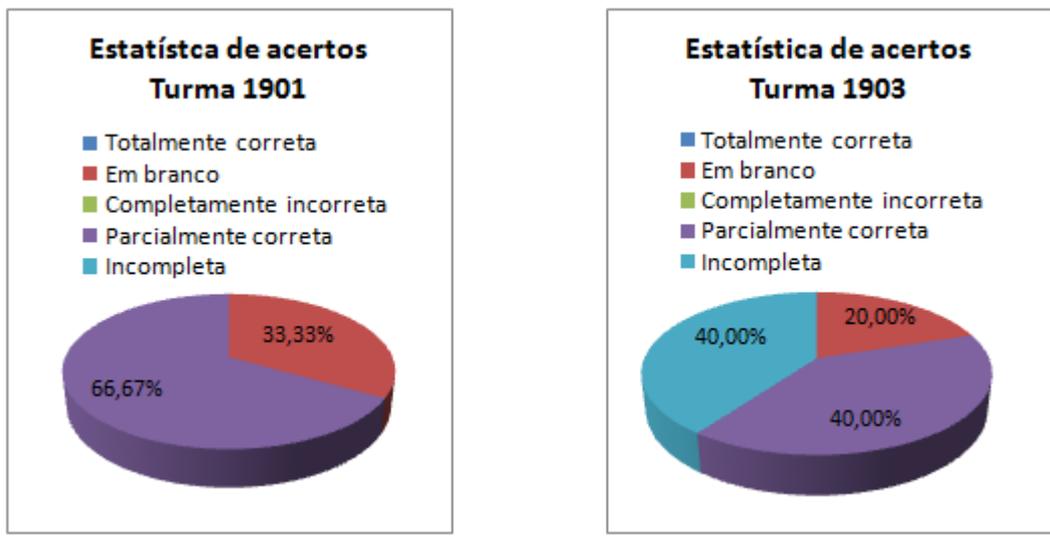


Figura 41: Estatística de acertos da atividade 4d do 3º encontro

Ao término das atividades propostas na questão 4, verificamos que os objetivos de diferenciar a situação apresentada das anteriores como uma relação em que uma variável depende de outras duas variáveis; compreender que numa relação nem tudo é proporcional; constatar que o valor da corrida inclui o tempo em que o táxi está em movimento e também o tempo em que o táxi está parado, foram alcançadas. Mas o objetivo de identificar as variáveis do problema e a relação entre elas não foi totalmente alcançado.

**Atividade Complementar-a:** Verificar se a relação entre a quantidade de gasolina e o valor total a ser pago é funcional.

**Resposta:** É funcional.

A maioria dos alunos acertou a questão. A turma 1901 obteve um melhor aproveitamento do que a turma 1903.

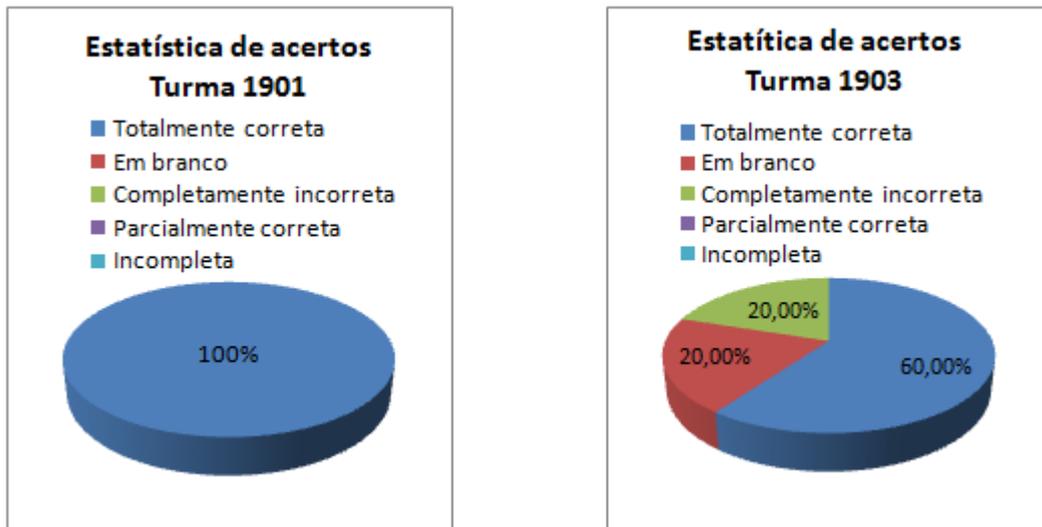


Figura 42: Estatística de acertos da atividade complementar a do 3º encontro

**Atividade Complementar-b:** Verificar se a relação entre o valor da corrida, a distância percorrida pelo taxi e o tempo em que o táxi fica parado durante o trajeto é funcional.

**Resposta:** O valor da corrida depende de duas variáveis: a distância percorrida e o tempo em que o táxi fica parado durante o percurso. Nesse caso, mesmo se ocorrerem entradas diferentes (distância percorrida e tempo em que o táxi fica parado) resultando em saídas iguais (valor da corrida), a relação é funcional. Não existe a possibilidade de entradas iguais resultarem em saídas diferentes (relação não funcional).

Alguns alunos ficaram em dúvida nessa questão e não responderam. A turma 1901 obteve um percentual de acertos maior que a turma 1903.

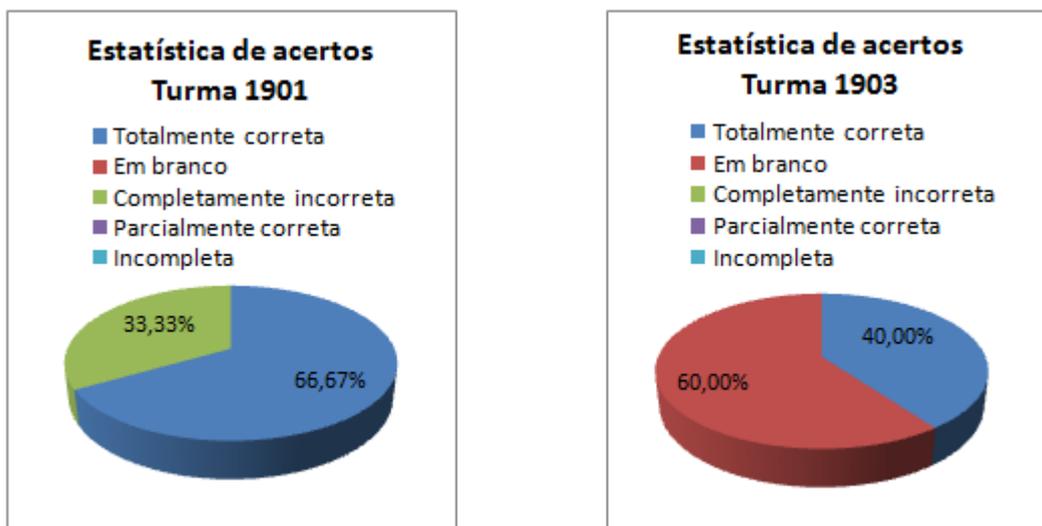


Figura 43: Estatística de acertos da atividade complementar b do 3º encontro

Ao término das questões propostas nas atividades complementares observamos que os alunos não tiveram dificuldades em verificar se a relação entre duas variáveis (quantidade de gasolina e o valor total a ser pago) era funcional. Portanto o objetivo dessa atividade foi alcançado. Mas, ao analisar a relação entre três variáveis (o valor da corrida, a distância percorrida pelo taxi e o tempo em que o táxi fica parado durante o trajeto), para verificar se ela era funcional ou não, os alunos ficaram em dúvida, e muitos não responderam a questão. Nesse caso, o objetivo não foi alcançado.

### **4.3- Avaliação da Aplicação das Atividades**

A aplicação de algumas das atividades constantes no arquivo referente ao Capítulo do livro (recorte) direcionado ao nono ano, denominado: “Relações entre variáveis”, do Projeto MatDigital, foi muito enriquecedora para os alunos que participaram dos encontros. Eles já haviam estudado Relações e Funções através do Caderno Pedagógico, disponibilizado pela Prefeitura Municipal do Rio de Janeiro e também através de outros materiais, inclusive o livro didático adotado na escola, denominado “Vontade de saber matemática”, de autoria de Joamir Souza e Patricia M. Pataro. Mas, as questões constantes no material do MatDigital proporcionaram uma outra visão, muito importante, do assunto.

Dentre as diversas aquisições que foram possibilitadas aos alunos, a partir do estudo das questões do MatDigital, podemos citar:

- a inserção no conhecimento de fenômenos determinísticos e fenômenos aleatórios, definições, as quais, eles ainda não haviam trabalhado e que foram abordadas, inicialmente, através de exemplos simples do cotidiano;
- a habilidade de identificação das relações entre variáveis em fenômenos determinísticos e aleatórios, a partir da observação das dispersões dos pontos que as representam no plano cartesiano;
- a análise de como os pontos obtidos na tabela parecem estar alinhados, se dispostos no plano cartesiano, em virtude da lei de formação;
- a constatação, intuitivamente, da existência da ideia de causalidade ou não causalidade entre variáveis, a partir da dispersão dos pontos no plano cartesiano dos fenômenos aleatórios.

Podemos destacar também, como importantes contribuições das atividades do MatDigital, a questão que explorou o conceito de Números Triangulares; a abordagem da ideia de gráficos de dispersão; a atividade que incluiu informações sobre como funciona uma corrida de táxi; e a utilização de exemplo de relação em que uma variável depende de outras **duas** variáveis. Já as atividades envolvendo questões de física e “entradas” e “saídas” de “máquinas” são mais frequentes em livros didáticos.

Em contrapartida, a realização das atividades do material pelos alunos possibilitou a análise do enunciado das questões, em virtude das respostas obtidas nas tarefas propostas, e, com isso, a indicação de sugestões de alterações em alguns enunciados objetivando uma melhor compreensão por parte do leitor, e, conseqüentemente, um resultado mais apropriado ao alcance dos objetivos propostos nas referidas questões.

De acordo com os resultados obtidos na análise das respostas dos alunos, nas questões do MatDigital aplicadas, também é possível verificar quais as questões que possuem um grau de dificuldade maior, cujo conteúdo precisa ser mais trabalhado antes da aplicação das atividades, como por exemplo, gráficos de dispersão.

A seguir, alguns comentários dos alunos com relação às atividades aplicadas.

Foi uma atividade muito legal  
divertida e interessante.

Eu achei todas as aulas muito interessantes, pois foi uma  
atividade diferente

As questões no geral é fácil, mas a interessante é  
que faz você pensar e refletir sobre coisas que você não  
se importa.

Nunca tínhamos ouvido neste assunto, mas nós achamos muito interessante.

Todas as atividades são interessantes e estimulantes

É diferente de outras atividades, tá no 10!

Gostei de todas as atividades achei muito interessante, poderia ter mais coisas nas aulas de matemática!

\* achei legal, pois podemos aprender sobre os dois fenômenos

Foi fácil, amei! Gostei, curti & compartilhei!

## 5. Diagramas de Dispersão e Ajuste de Curvas: Proposta de Atividades

Neste capítulo abordaremos a ideia de diagramas de dispersão e sua importância na visualização da relação entre duas variáveis; pois, conforme já foi visto em algumas das atividades apresentadas no Capítulo 3, seção 3.2, a representação por meio de diagramas de dispersão pode ser uma ferramenta bastante útil. Essa representação, apesar de ser muito interessante, pode apresentar alguma dificuldade, em relação à sua interpretação, como pode ser verificado, no Capítulo 4, seção 4.2, a partir da análise das respostas dos alunos, nas atividades do MatDigital que envolveram diagramas de dispersão.

Iremos verificar, também, neste capítulo, algumas opções de curvas que podemos obter, a partir dos gráficos de dispersão, e que, para isso, temos que observar qual é o modelo matemático mais coerente com a disposição dos pontos no gráfico em questão. O ajuste de curvas é a determinação da equação da função que melhor se ajusta aos pontos obtidos no gráfico de dispersão.

Portanto, pretendemos, além de reforçar a ideia de visualização da relação entre duas variáveis utilizando diagramas de dispersão, motivar o conceito de ajuste de curvas. Para isso, apresentaremos atividades que foram elaboradas para o presente trabalho: três delas com a proposta de trabalhar diagramas de dispersão, e uma delas com a proposta de trabalhar ajuste de curvas. As três primeiras atividades poderiam ser desenvolvidas em um momento anterior à apresentação das atividades constante no capítulo de Relações entre Variáveis do MatDigital. E a atividade relacionada à ideia de ajuste de curvas poderia dar sequência àquelas indicadas no MatDigital.

### 5.1. Diagramas de Dispersão

Um diagrama de dispersão representa uma variável quantitativa em relação à outra. Essa representação se apresenta muito eficiente quando se quer entender a relação entre duas variáveis quantitativas. Ao analisar um diagrama de dispersão podemos observar padrões, tendências, relações e também valores incomuns ocasionais, que diferem de outros. Os diagramas de dispersão são a melhor maneira de começar a observação de uma relação entre duas variáveis quantitativas. (SHARPE *et al.*, 2011, p.201)

Para analisar um diagrama de dispersão devemos considerar vários aspectos, tais como: direção, forma, força e características incomuns. Quanto à direção, podemos classificar em Negativo se o padrão (gráfico) for do canto superior esquerdo ao canto inferior direito do diagrama; e de Positivo, se o padrão for na outra direção. (SHARPE *et al.*, 2011, p.202)

Um segundo aspecto que deve ser analisado é a forma. Se existir uma relação linear, a forma irá parecer como uma nuvem ou um agrupamento de pontos estendido, normalmente em uma forma consistente e reta. Os diagramas de dispersão podem apresentar diferentes tipos de padrões. Na maioria das vezes eles não serão lineares, porém padrões de linhas retas são mais comuns e mais úteis para a estatística. Se a relação não for linear, mas se apresentar como uma curva suave, sempre crescente ou sempre decrescente, em geral, é possível encontrar formas de linearizá-la<sup>5</sup>. Porém se ela for uma curva aguda que sobe e desce, por exemplo, então serão necessários outros métodos, mais avançados, para a análise. (SHARPE *et al.*, 2011, p.202)

Uma terceira característica a ser observada é a força da relação. Podemos ter num extremo os pontos parecendo estar aglomerados num único bloco. Ou podemos ter os pontos variáveis e espalhados, e, nesse caso, não é possível identificar qualquer tendência ou padrão. (SHARPE *et al.*, 2011, p.202)

Por fim deve ser analisado o inesperado, algo fora do padrão geral que esteja ocorrendo no diagrama de dispersão. Essa análise pode indicar a necessidade de separar os dados em subgrupos, em vez de observá-los todos juntos. (SHARPE *et al.*, 2011, p.202)

Ao criar um diagrama de dispersão devemos colocar a variável que tem a função explanatória ou variável previsora no eixo x (variável independente) e a variável que possui o papel resposta no eixo y (variável dependente). Escalas iguais fornecem uma impressão mais precisa da força de associação. (SHARPE *et al.*, 2011, p.203-204)

Podemos destacar que algumas informações são mais fáceis de serem verificadas em um gráfico de dispersão do que em uma tabela.

---

<sup>5</sup> Procedimento para tornar uma curva que não é uma reta em uma reta.

### 5.1.1. Atividades

**Objetivo:** Explorar as informações que podem ser obtidas a partir da representação da relação entre duas variáveis através de diagramas de dispersão.

#### Atividade 1

Rodrigo é um pesquisador que gostaria de conhecer o peso dos ursos marrons sem precisar ter que pesá-los. Ele pensou então, que o peso poderia estar relacionado com a altura ou o perímetro do tórax do urso. Por exemplo: “ursos mais altos devem ser mais pesados”; ou “ursos com perímetro do tórax maior devem ter um peso mais elevado”. Ele comparou as seguintes medidas que já havia coletado em outras pesquisas: Altura (eixo vertical do urso) x Peso e Perímetro do Tórax (eixo horizontal do urso) x Peso. A partir dessas comparações ele obteve os gráficos de dispersão.

#### Analizando o gráfico Altura x Peso:

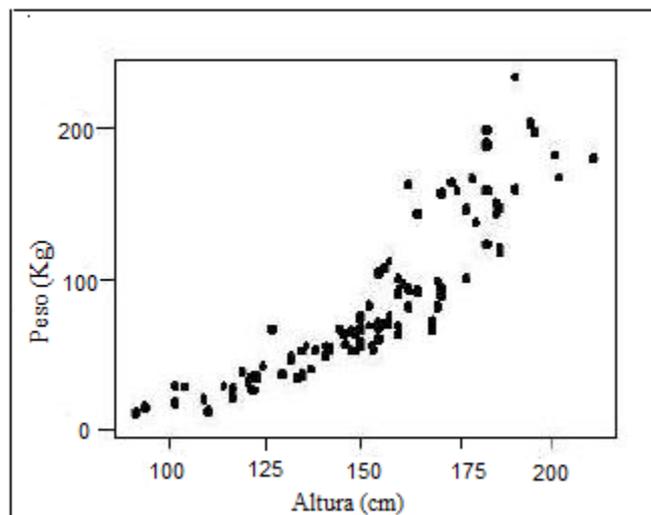


Figura 43: Diagrama de dispersão de Altura x Peso (SHIMAKURA, 2012)

- a) O que podemos observar em relação à disposição dos pontos no gráfico Peso x Altura?
- b) Quem é mais pesado, um urso de 150 cm de altura ou um urso de 200 cm de altura?

- c) E no caso de compararmos um urso com altura de 180 cm com um urso com altura de 200 cm. Quem pesa mais?
- d) Podemos afirmar que quanto maior a altura, mais pesado será o urso?
- e) Podemos ter ursos de alturas diferentes com o mesmo peso?
- f) Seria possível obter uma curva que se ajusta a esse conjunto de pontos?

**Analisando o gráfico Perímetro do Tórax x Peso:**

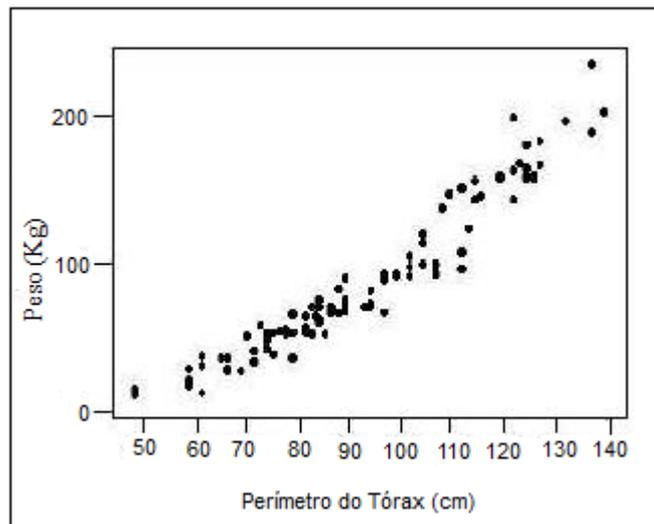


Figura 44: Diagrama de dispersão de Perímetro do tórax x Peso (SHIMAKURA, 2012)

- a) O que podemos observar em relação à disposição dos pontos no gráfico Peso x Perímetro do Tórax?
- b) Quem pesa mais, um urso cujo perímetro do tórax é de 130 cm ou um urso cujo perímetro do tórax é de 70 cm?
- c) E no caso de compararmos um urso cujo perímetro do tórax é de 90 cm com um urso cujo perímetro do tórax é de 110 cm. Quem pesa mais?
- d) Podemos afirmar que quanto maior a medida do perímetro do tórax do urso, maior será o seu peso?
- e) Podemos ter ursos com perímetro de tórax diferentes, mas com o mesmo peso?
- f) Seria possível obter uma curva que se ajusta a esse conjunto de pontos?

**Comparando os gráficos:**

- a) Em qual dos gráficos os pontos estão mais dispersos?

b) Em qual dos gráficos a disposição dos pontos está mais alinhada, ou seja, definindo uma reta?

c) Qual é então a melhor variável para estimar o peso dos ursos: altura ou perímetro do tórax?

## Atividade 2

Um produtor observou que morangos pequenos possuem pouco valor para vendas, pois os consumidores preferem morangos grandes. Ele analisou a produção de morangos e observou que a quantidade obtida de frutos por muda poderia estar influenciando ao tamanho dos frutos. Para analisar essa relação entre o número de frutos que uma planta produz (N) e o peso desses frutos, ele observou os dados de dez mudas de morangueiros na primeira safra<sup>6</sup>. A partir destes dados, o produtor montou uma tabela, onde, para cada muda, é apresentado o número de frutos e o peso de cada fruto, do menor para o maior (Adaptada de SHIMAKURA, 2012):

### Analizando a tabela Número de frutos por muda x Peso dos frutos:

**Tabela 23:** Quantidade de mudas de morangueiros na primeira safra; número de frutos por muda e peso de cada fruto por muda, do menor para o maior.

M	N	Peso dos Frutos (gramas)													
1	5	15,2	15,5	15,6	15,7	16,4									
2	6	14,0	14,5	15,4	15,9	15,9	16,1								
3	7	13,7	13,8	14,1	14,1	14,5	14,9	15,5							
4	8	11,0	11,5	12,4	12,4	12,9	14,5	15,5	16,6						
5	9	10,2	11,1	12,1	12,4	13,5	13,8	14,0	15,4	16,0					
6	10	9,0	9,3	10,7	11,6	11,7	12,6	12,8	12,8	13,4	15,1				
7	11	7,8	8,6	8,7	9,6	11,1	11,9	12,1	12,5	14,0	14,1	14,2			
8	12	7,3	9,4	10,2	10,3	10,6	10,8	11,1	11,5	11,5	12,9	13,4	15,0		
9	13	6,9	7,6	8,5	10,0	10,9	11,0	11,4	11,6	12,0	12,0	12,7	13,5	14,0	
10	14	7,0	8,0	9,0	10,0	10,0	10,5	11,0	11,2	11,2	11,7	12,5	12,9	13,5	13,5

a) O que acontece com o peso do maior fruto à medida que o número de frutos por muda aumenta?

b) Analisando a tabela acima, o que podemos verificar quanto ao peso dos frutos quando temos 5 frutos por muda e quando temos 14 frutos por muda?

<sup>6</sup> Safra: É o período compreendido entre o preparo do solo para o plantio até a colheita de determinada cultura.

**Analisando o gráfico de dispersão Número de frutos por muda x Peso dos frutos por muda:**

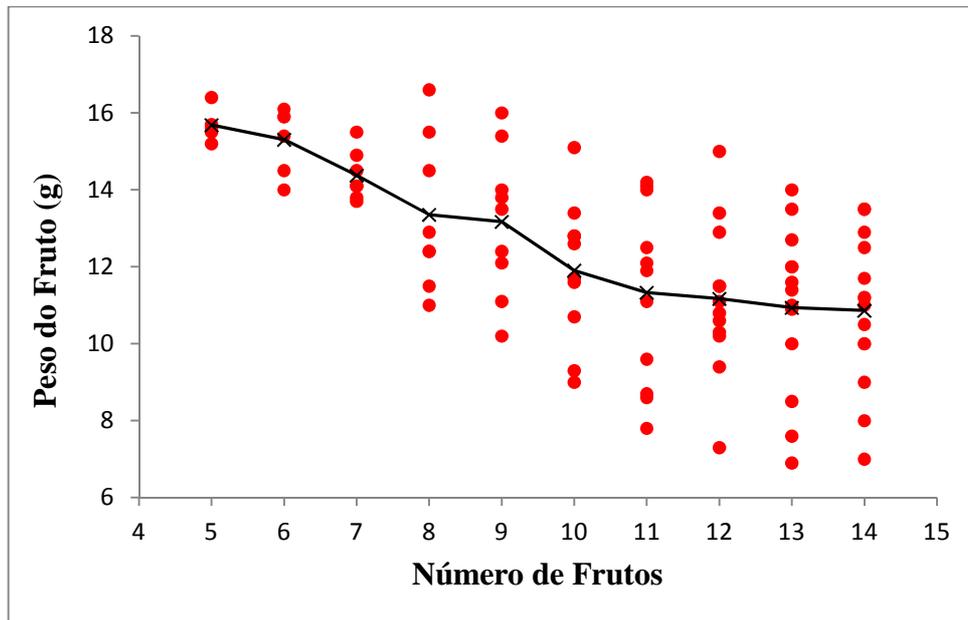


Figura 45: Diagrama de dispersão do número de frutos por muda x peso dos frutos por muda com linha unindo o peso médio dos frutos em cada muda.

a) Analisando o diagrama de dispersão, o que ocorre com o peso dos frutos quando o número de frutos produzidos por muda é menor?

b) E o que ocorre com o peso dos frutos quando o número de frutos produzidos por muda é maior?

c) É mais vantagem ter poucas plantas produzindo muitos frutos ou é melhor ter muitas plantas produzindo poucos frutos cada uma?

d) A variedade no tamanho dos frutos irá ocorrer com mais facilidade quando tivermos poucas plantas produzindo muitos frutos ou muitas plantas produzindo poucos frutos?

e) Seria possível obter uma curva que se ajusta a esse conjunto de pontos? Essa curva poderia estar próxima da linha que une os pesos médios dos frutos em cada muda?

### Atividade 3

A Dra. Mariana gostaria de verificar a eficácia de um medicamento para diminuir a pressão sistólica<sup>7</sup>. Para testar seu efeito, ele foi ministrado a 12 pacientes, tendo sido medida a pressão sistólica antes e depois dessa medicação (Adaptada de SHIMAKURA, 2012):

#### Analizando a tabela de Pressão Sistólica de doze pacientes:

Tabela 24: Pressão sistólica (mmHg) medida em 12 pacientes antes e depois da medicação

Paciente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Antes	200	174	198	170	179	182	193	209	185	155	169	210
Depois	191	170	177	167	159	151	176	183	159	145	146	177

- O que ocorre com a pressão sistólica dos pacientes depois da administração do medicamento?
- A eficiência do medicamento é a mesma para todos os pacientes?

#### Analizando o gráfico da Pressão Sistólica de doze pacientes:

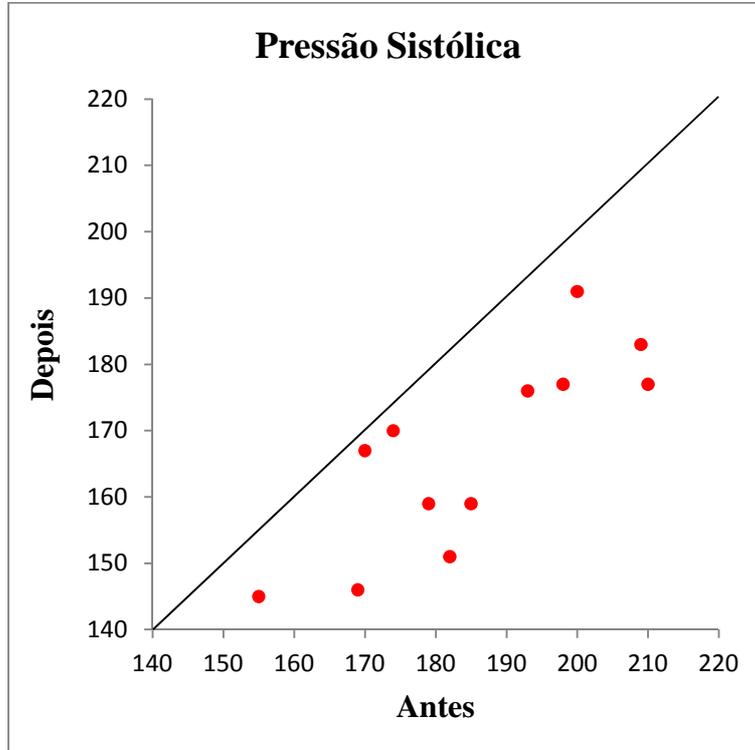


Figura 46: Diagrama de dispersão da pressão sistólica antes x depois da medicação e linha correspondendo ao não efeito individual da medicação.

<sup>7</sup> Pressão sistólica: Pressão Arterial máxima do ciclo cardíaco, ocorrendo durante a sístole ventricular.

a) Sabendo-se que a reta marcada no gráfico corresponde à situação em que a pressão sistólica não se alterou depois do paciente tomar o medicamento, há algum paciente que manteve a mesma pressão antes e depois da medicação?

b) Analisando o diagrama de dispersão observamos algum paciente que teve um aumento da pressão após o medicamento? Como podemos constatar isso?

c) Como podemos verificar, analisando o diagrama de dispersão, se o medicamento diminuiu a pressão sistólica dos pacientes?

d) Seria possível obter uma curva que se ajusta a esse conjunto de pontos?

## 5.2. Ajuste de Curvas

Em um diagrama de dispersão é pouco provável que haja uma curva que passe exatamente por cada ponto do gráfico. Por esse motivo, para se definir uma função analítica que descreva uma situação apresentada em um diagrama de dispersão, não se deve optar por uma forma polinomial de interpolar os pontos de que se dispõe. Deve-se preferir uma curva que melhor se ajusta a estes pontos e também considerar a existência de erros, que em geral não se podem prever. (CUNHA, 2014, p.34)

Uma grande vantagem de se obter a curva que melhor se ajusta aos pontos é a possibilidade de prever os valores da variável dependente a partir de determinados valores da variável independente (explicativa), que não constam nos dados fornecidos. Ou seja, fazer estimativas e uma análise de tendências para valores não testados. Obtendo assim respostas, a partir de uma extrapolação, com aproximações bem razoáveis. (CUNHA, 2014, p.35)

Para verificarmos as opções para essas curvas, a partir dos gráficos de dispersão, temos que observar qual é o modelo matemático mais coerente com a disposição dos pontos no gráfico em questão. Podemos ter uma tendência a um comportamento linear, parabólico ou exponencial. (CUNHA, 2014, p.35)

Para determinar a equação da função que melhor se ajusta aos pontos obtidos no gráfico de dispersão, temos o ajuste por retas, o ajuste por parábolas e o ajuste pelo gráfico de uma função exponencial. Mas é importante ressaltar que tanto a reta quanto a parábola, ou a função exponencial não deverão conter necessariamente todos ou até mesmo algum destes pontos. (CUNHA, 2014, p.39-43).

### 5.2.1. Atividade

**Objetivo:** Introduzir a noção de erro e da curva de ajuste, isto é, a curva que permite aproximar os dados. Explorar uma aplicação de funções à modelagem matemática.

O gerente de uma rede de supermercados pretende desenvolver um modelo com a finalidade de estimar as vendas médias semanais, sendo as variáveis (Adaptada de DÁVILA, 2014):

X - Número de clientes

Y - Vendas semanais.

Estas variáveis foram observadas em vinte supermercados diferentes, escolhidos aleatoriamente. Os dados seguem na tabela abaixo:

Tabela 25: Números de clientes x Vendas semanais

X	907	926	506	741	789	889	874	510	529	420
Y	11,20	11,05	6,84	9,21	9,42	10,08	9,45	6,73	7,24	6,12
X	679	872	924	607	452	729	794	844	1010	621
Y	7,63	9,43	9,46	7,64	6,92	8,95	9,33	10,23	11,77	7,41

**Analisando o gráfico de dispersão “Número de clientes x Vendas semanais”:**

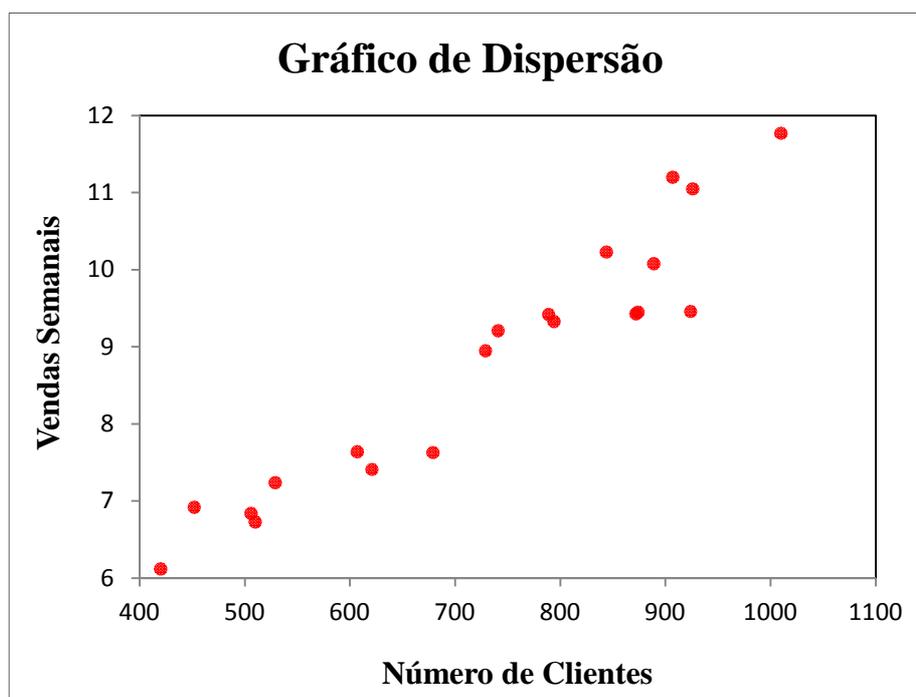


Figura 47: Gráfico de dispersão de Números de clientes x Vendas semanais

a) O que podemos dizer sobre o valor das vendas semanais, à medida que o número de clientes aumenta?

b) Podemos ter um mesmo número de clientes, em diferentes supermercados, com números de vendas semanais diferentes?

Obtendo o ajuste de reta no gráfico de dispersão “Número de clientes x Vendas semanais” temos que a reta ajustada para os dados obtidos é:

$$y = 2,423 + 0,00873 x$$

**Analisando a tabela “Número de clientes x Vendas mensais” e o gráfico de dispersão com ajuste de reta “Número de clientes x Vendas semanais”:**

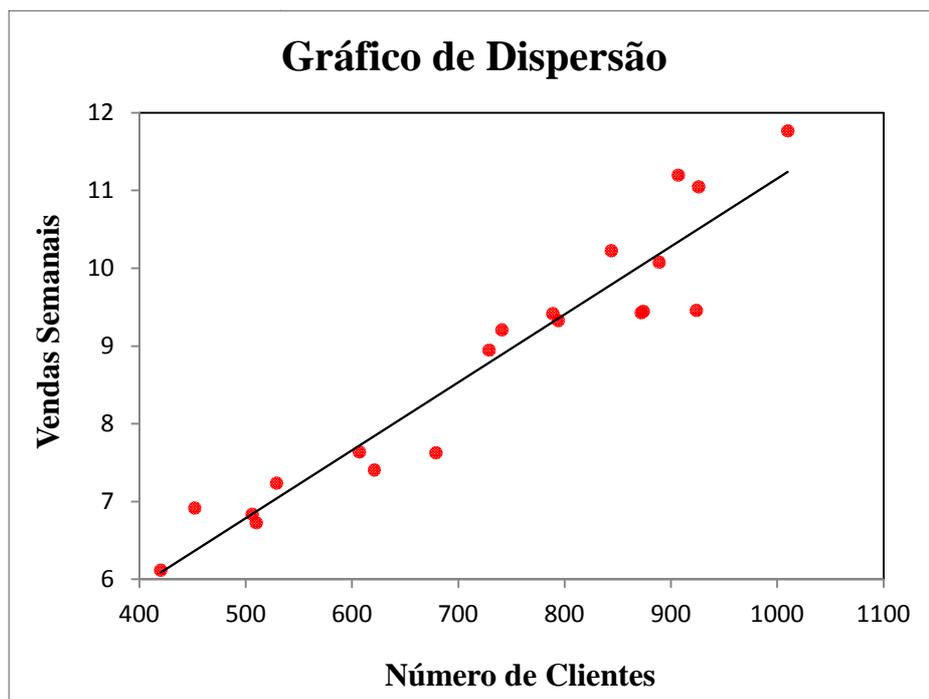


Figura 48: Gráfico de dispersão de Números de clientes x Vendas semanais com ajuste de reta

a) Consultando a tabela acima, determine o valor da venda mensal quando o número de clientes é de 679.

b) Compare o valor da venda mensal da tabela, quando o número de clientes é de 679, com o valor fornecido pela reta do segundo gráfico. O que podemos afirmar?

c) Faça uma previsão de quanto seriam as vendas semanais caso o número de clientes de um supermercado, em uma determinada semana, fosse de 980, utilizando a reta, ou seja, a equação  $y = 2,423 + 0,00873 x$ , que representa a reta.

Podemos observar, a partir da análise dos Gráficos de dispersão “Números de clientes x Vendas semanais” sem o ajuste de reta e “Números de clientes x Vendas semanais” com o ajuste de reta, que quando conseguimos obter uma curva que melhor se ajusta aos pontos podemos fazer previsões para outros pontos que ainda não constavam do gráfico de dispersão, utilizando a equação que representa a curva.

## 6. Considerações Finais

O presente estudo proporcionou uma contribuição ao Projeto MatDigital ao adaptar, para uma versão estática, e testar algumas atividades resultando em um feedback à comissão de redação do capítulo de Relações entre Variáveis. Essa contribuição vai ao encontro da proposta do projeto no que diz respeito a troca de saberes e experiências entre professores da educação básica e do ensino superior

A revisão histórica e as revisões na literatura sobre as dificuldades no ensino de funções realizadas foram de relevante importância para o desenvolvimento deste trabalho, pois ressaltaram os principais problemas no ensino e também na aprendizagem de funções, por parte dos alunos, tais como: dificuldades de entender corretamente as ideias de "constante", "variável", "incógnita" e "parâmetro"; confusão para discernir função de equação; tendência em identificar uma função com a sua expressão analítica, ou seja, confundir o objeto com uma de suas representações; e prática de igualar à zero qualquer expressão apresentada com o objetivo de tentar encontrar um valor para a variável envolvida.

A análise dos livros didáticos, realizada e apresentada neste trabalho, também foi de fundamental importância, pois proporcionou o contato direto com as diferentes abordagens iniciais de função, nas variadas bibliografias selecionadas, e apresentou uma coleção que aborda funções a partir do 6º ano. Essa coleção caracteriza uma experiência nova de aprendizagem no ensino de funções, para professores e alunos. Essa análise também poderá ser útil na escolha do livro didático a ser adotado em uma escola a partir do perfil de seus alunos.

As atividades relacionadas a funções apresentadas na versão estática do Projeto MatDigital, possibilitaram aos alunos um primeiro contato com as ideias de “fenômenos determinísticos” e “fenômenos aleatórios”. Eles também tiveram a oportunidade de verificar várias situações em que duas variáveis se relacionam de um modo não funcional, isto é, eles tiveram acesso a vários exemplos, e puderam concluir que há muitas relações entre variáveis que não são funções. Além disso, as atividades que exploraram gráficos de dispersão também foram uma novidade para eles, e contribuíram para a sua formação básica, tendo em vista o futuro ingresso no ensino médio.

Mas a total eficácia da proposta do MatDigital no ensino de funções não pode ser confirmada, em virtude do fato de que os alunos que participaram do

desenvolvimento das atividades já haviam estudado, à época da aplicação das atividades, os conteúdos relacionados ao conceito de funções no nono ano, do modo tradicional, constantes no material bibliográfico adotado.

Esperamos que este trabalho se torne uma relevante fonte de consulta de exercícios e bibliografias que abordam funções, tendo em vista a formação continuada de docentes. Podemos destacar também que este trabalho contempla algumas das demandas atuais da matemática, tais como a estatística e a modelagem matemática, corroborando com os objetivos do MatDigital.

O PROFMAT tem como uma de suas propostas o desenvolvimento de trabalhos que relacionem a teoria matemática com a prática. Este Trabalho de Conclusão contempla esse objetivo apresentando algumas questões constantes no capítulo de Relações entre Variáveis do Projeto MatDigital, e também propondo questões novas, que envolvem gráficos de dispersão e ajuste de curvas.

## Anexo 1: Atividades desenvolvidas no primeiro dia de encontro

ESCOLA MUNICIPAL MANOEL BOMFIM

NOME: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_

DATA: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

### ATIVIDADES EM MATEMÁTICA

#### RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS

Na vida, existem situações, fatos ou eventos que ocorrem com certeza, cujos resultados são previamente conhecidos. Por exemplo:

Quantos dias tem uma semana?

Depois de quarta-feira, que dia vem?

Quantos meses têm no ano?



Mas nem sempre é assim. Existem situações em que não sabemos previamente o que vai acontecer, estes eventos dependem do acaso ou da sorte. Não podemos determinar com antecedência o resultado. Por exemplo:

#### **Atividade 1**

No lançamento de uma moeda, é possível prever com antecedência qual lado (cara ou coroa) sairá, antes de cada lançamento?

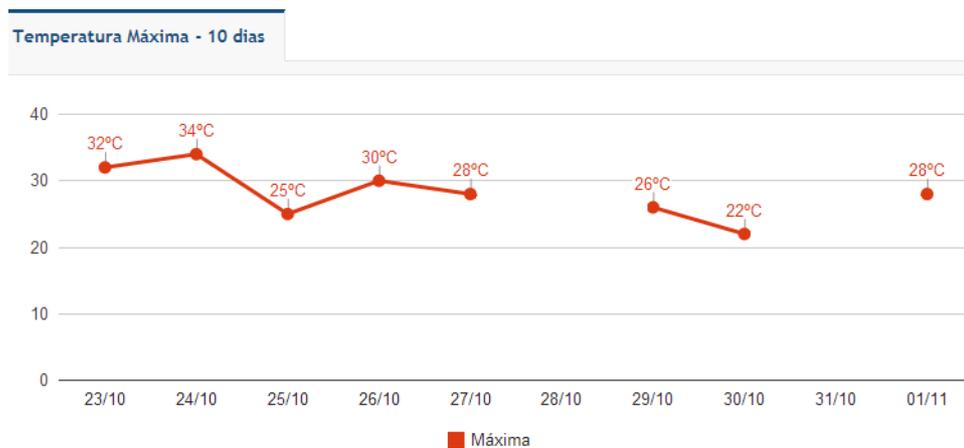


Qual será o resultado na quinta tentativa? Vamos verificar completando a tabela abaixo:

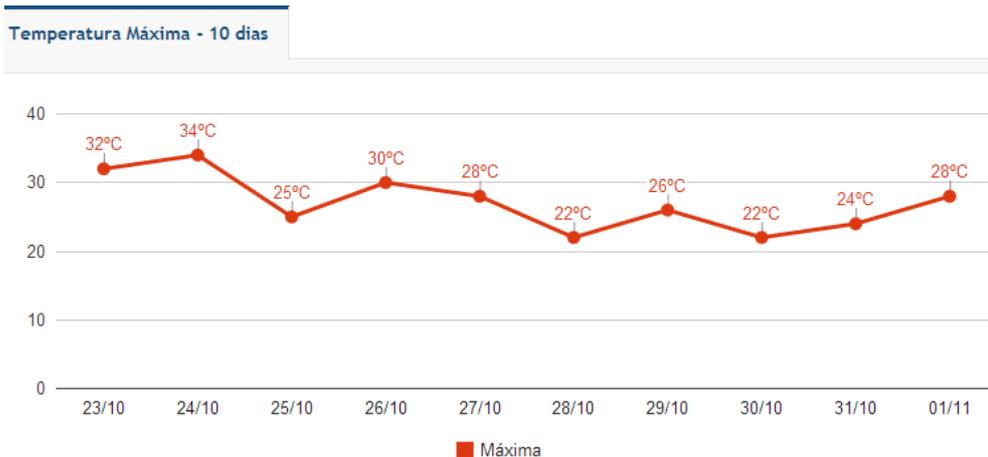
Lançamento	1°	2°	3°	4°	5°
Resultado					

## Atividade 2

Observe o gráfico abaixo que relaciona as temperaturas máximas registradas no período de 10 dias na cidade de São Paulo. Faça uma estimativa das temperaturas máximas nos dias 28 e 31/10 e complete o gráfico.



Agora, verifique abaixo, a temperatura registrada oficialmente, segundo o Clima Tempo. O que podemos perceber quando analisamos as estimativas realizadas de acordo com o gráfico anterior?



Fonte: <http://www.climatempo.com.br/>

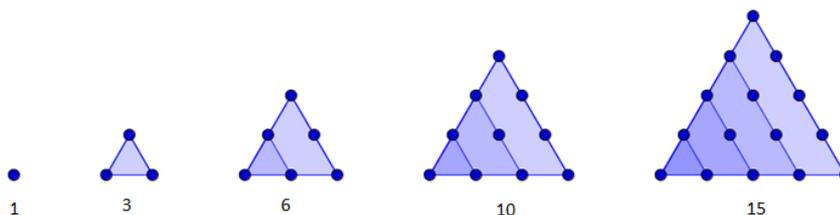
### Atividade 3

Jogando um dado (não viciado, cubo, numerado de 1 a 6), seis vezes consecutivas, é possível determinarmos que número irá aparecer com a face voltada para cima, na sexta jogada? Vamos verificar completando a tabela abaixo:

Lançamento	1º	2º	3º	4º	5º	6º
Resultado						

### Atividade 4

Números triangulares são aqueles que representam uma coleção de pontos que podem ser dispostos no formato de um triângulo, conforme a figura abaixo.



Esses são os 5 primeiros números triangulares. Complete então a tabela abaixo:

Posição	Número Triangular
1°	
2°	
3°	
4°	
5°	

É possível determinar o 6°, o 7° e o 8° números triangulares? Vamos completar a tabela abaixo:

Posição	Número Triangular
6°	
7°	
8°	

#### **Refletindo sobre o assunto**

Nas atividades acima, trabalhamos com dois tipos de fenômenos: determinísticos e aleatórios.

**Fenômenos determinísticos** são aqueles em que, conhecidas as condições iniciais, um resultado individual pode ser obtido sem que seja necessário realizar o experimento.

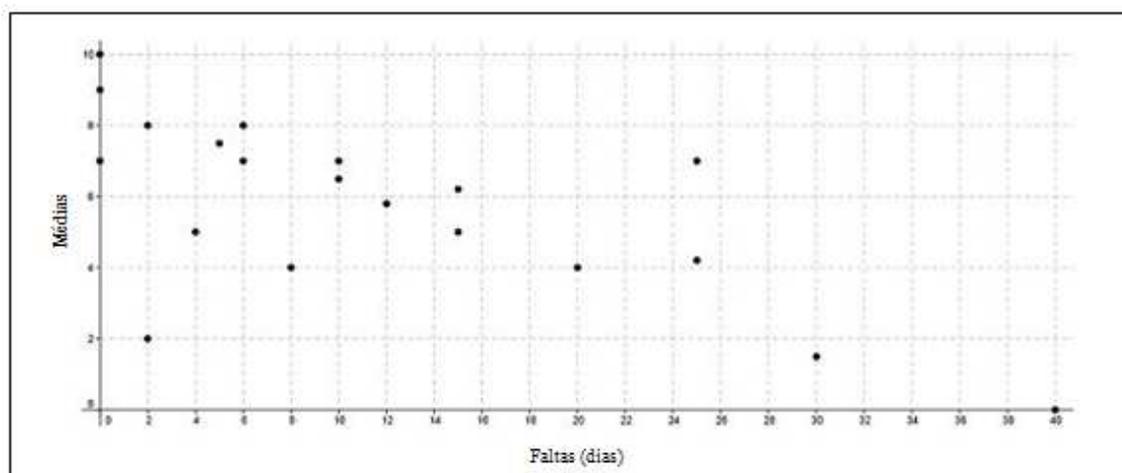
**Fenômenos aleatórios** (não determinísticos) são aqueles em que não se sabe ao certo o que vai acontecer, isto é, a variação dos resultados de diferentes eventos é inevitável, de modo que o resultado de um evento particular é incerto. Entretanto, em algumas situações, uma eventual regularidade dessa variação permitirá estimar o resultado de um caso particular.

#### **Atividade Complementar:**

A partir das observações acima, classifique as atividades 1, 2, 3 e 4 em fenômenos determinísticos ou fenômenos aleatórios.

#### **Atividade 5**

O gráfico abaixo mostra as faltas x médias finais em Matemática dos alunos de uma turma do sexto ano, durante o ano letivo. Ao todo são 20 alunos.



A relação “faltas dos alunos x média final em Matemática” expressa um fenômeno determinístico ou aleatório?

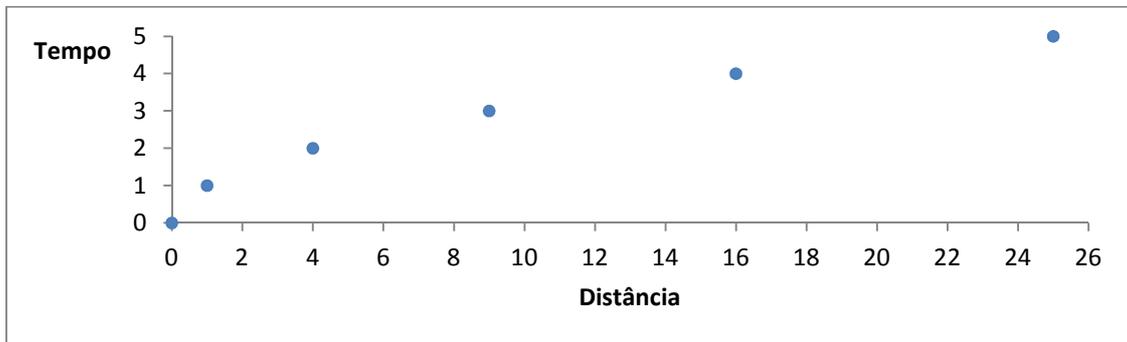
### Atividade 6

Duas bolas são lançadas, ao mesmo tempo, de uma torre. Os pesos das bolas são de 10 kg e de 5 kg. Qual delas chegará primeiro ao solo? Segundo Aristóteles, filósofo grego que nasceu no ano 384 a. C., corpos mais pesados caem mais rapidamente do que corpos mais leves. Ele dizia ainda que, objetos com o dobro da massa caíam duas vezes mais rápido. Mas Galileu, físico, matemático e filósofo, nascido em 15 de fevereiro de 1564, provou que isso não é verdade. Com o seu experimento, Galileu resolveu claramente esse problema. Segundo crença não comprovada ele lançava os objetos da Torre de Pisa, na Itália.



Sabe-se, no entanto, que ele utilizou um plano inclinado para realizar o experimento. Galileu observou que uma esfera rolando por um plano inclinado percorria uma distância 4 vezes maior em 2 segundos do que em 1 segundo. Assim ele provou que a distância percorrida a partir do repouso variava com o quadrado do tempo.

Observe o gráfico abaixo:



A relação “distância percorrida x tempo” expressa um fenômeno determinístico ou aleatório?

## **Anexo 2: Atividades desenvolvidas no segundo dia de encontro**

ESCOLA MUNICIPAL MANOEL BOMFIM

NOME: \_\_\_\_\_TURMA: \_\_\_\_\_

DATA: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

### ATIVIDADES EM MATEMÁTICA - RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS

#### **Atividade 1**

Pedro e Joaquim trabalham como vendedores em uma loja de eletrodomésticos e estão tentando compreender alguns fenômenos relacionados às vendas de alguns produtos em épocas de muito calor, e ainda tentam observar como isso pode se relacionar com os seus salários. Pedro trabalha na seção de condicionadores de ar e Joaquim na seção de televisores. Observe as situações a seguir e tente compreendê-las e perceber as diferenças entre elas.

#### **Situação 1**

O salário de Pedro é composto por uma parte fixa, no valor de R\$ 900,00, mais uma parte variável, que é a comissão de 15% sobre o valor total das vendas de condicionadores de ar no mês. A máquina abaixo indica como calcular o salário de Pedro. A tabela à esquerda registra o total de vendas de janeiro a novembro, pois dezembro é o mês de férias de Pedro.

a) Com base nessas informações, complete a tabela abaixo.

Total das vendas em reais.

JAN	10.000
FEV	7.500
MAR	8.000
ABR	2.200
MAI	3.000
JUN	2.000
JUL	1.000
AGO	1.000
SET	7.500
OUT	3.800
NOV	2.200

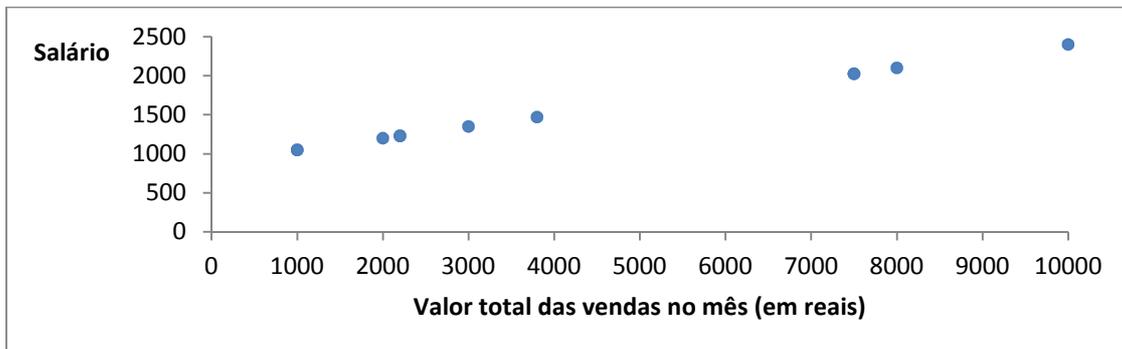


Salário de Pedro

JAN	
FEV	
MAR	
ABR	
MAI	
JUN	
JUL	
AGO	
SET	
OUT	
NOV	

- b) O que aconteceu com o salário de Pedro nos meses em que ele vendeu a mesma quantidade de condicionares de ar?
- c) É possível que o salário de Pedro seja diferente em meses em que o total de vendas é o mesmo?

Observe o gráfico abaixo, que relaciona o total das vendas de condicionadores de ar em reais e o salário de Pedro ao final do mês:



- d) Podemos perceber algum padrão em relação à posição desses pontos no gráfico? Em caso positivo, qual?

## Situação 2

Pedro observou que nos meses de janeiro a março as suas comissões são muito boas. O que será que pode ter influenciado no aumento das vendas de condicionares de

ar nesses meses? Veja a reportagem abaixo.

**Reportagem do Globo.com: Rio vive um relacionamento sério com o ar-condicionado.**

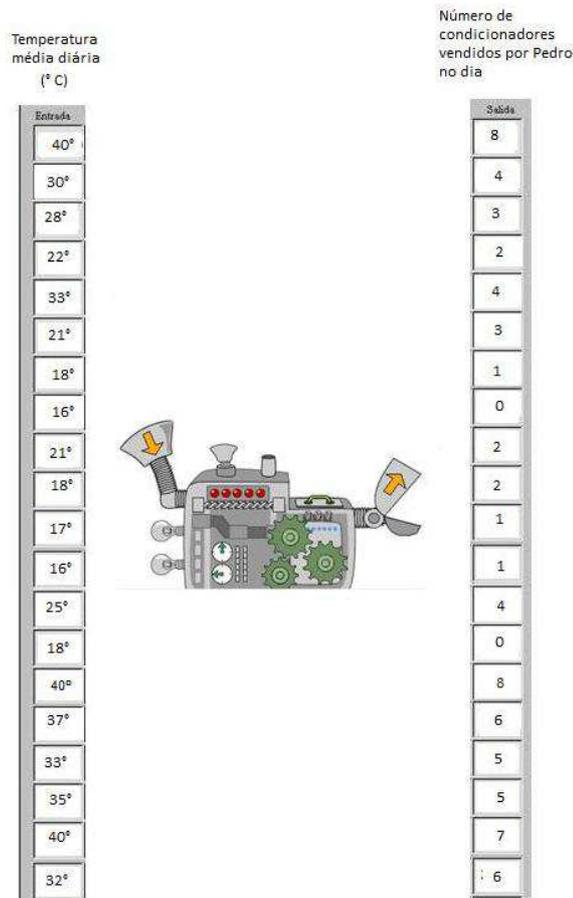
Contra a sensação térmica de 47°C, aparelhos ficam ligados o dia todo. Loja vendeu mais de 600 aparelhos até 23 de fevereiro.

**Mudança de perfil:**

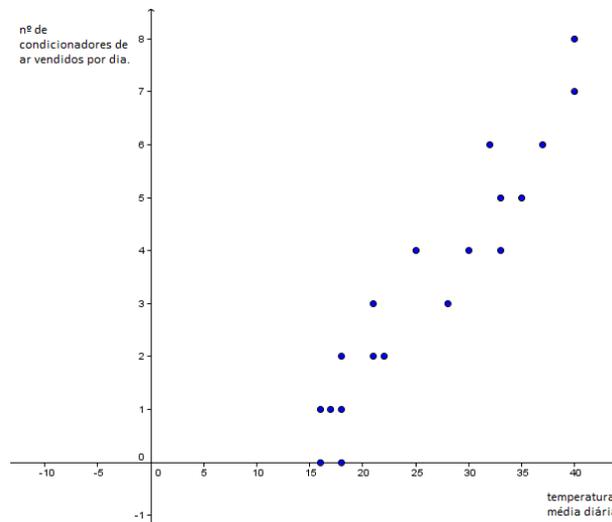
Numa loja especializada (AmbientAir) em aparelhos de ar-condicionado num shopping da Barra da Tijuca, Zona Oeste do Rio, até o vendedor se surpreende ao ver os números do mês: 662 aparelhos vendidos de 1 a 23 de fevereiro. "Tinha calculado 300 ou pouco mais, mas foi muito mais que isso", disse Flávio Conceição. Há oito anos na loja, ele explica que neste fevereiro encalorado as vendas cresceram 30% em relação a fevereiro do ano passado.

<http://g1.globo.com/rio-de-janeiro/noticia/2013/03/rio-vive-um-relacionamento-serio-com-o-ar-condicionado.html>

No esquema abaixo, a máquina produz como saída o número de condicionadores de ar vendidos por Pedro no dia (tabela da direita) a partir da temperatura média diária registrada em um período de 20 dias.



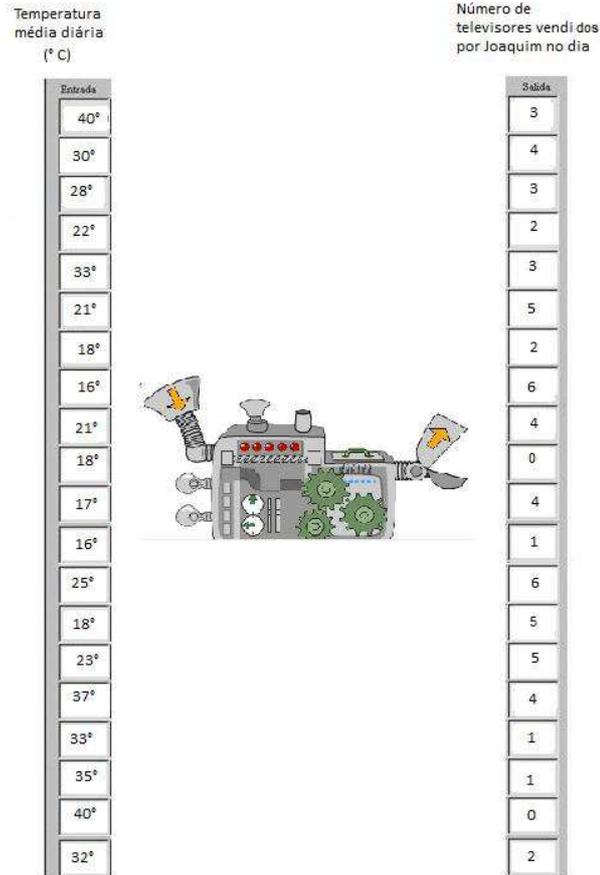
Observe agora a representação gráfica abaixo que relaciona a quantidade de condicionadores de ar vendidos por dia e a temperatura média diária registrada em um período de 20 dias.



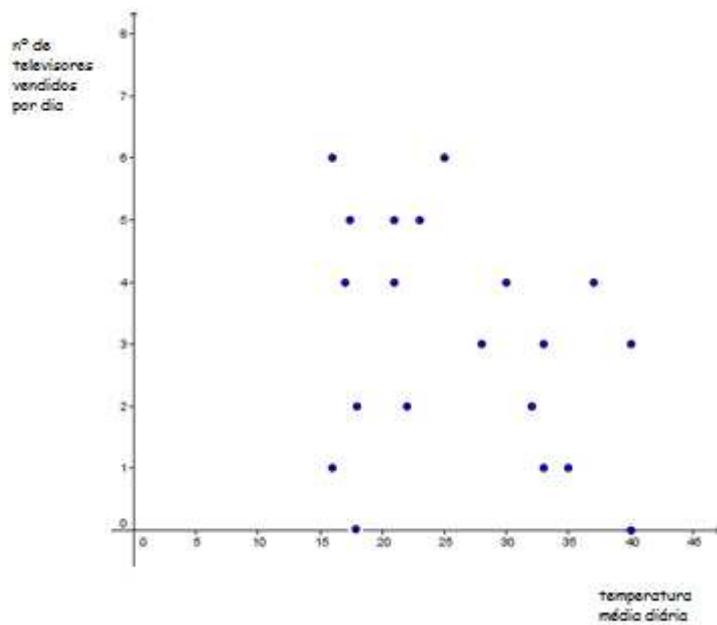
- f) É possível que em dias com a mesma temperatura média registrada Pedro tenha vendido números diferentes de condicionadores de ar?
- g) Podemos determinar exatamente quantos condicionares de ar foram vendidos a partir da temperatura do dia?
- h) Podemos fazer uma previsão do número de condicionadores de ar vendidos em um dia em que a temperatura média registrada foi de 40°?
- i) Podemos observar alguma tendência nas vendas se o dia foi mais quente ou menos quente?
- j) Você observa algum padrão em relação à posição desses pontos no plano? Tente justificar a sua resposta.

### Situação 3

Joaquim observou que em épocas de muito calor as suas comissões não mudaram muito em relação à outras épocas. Será que a temperatura pode ter influenciado nas vendas de televisores? Veja o esquema abaixo em que a máquina produz como saída o número de televisores vendidos por dia, por Joaquim (tabela da direita) a partir da temperatura média diária registrada no mesmo período de 20 dias.



Observe a representação gráfica abaixo que relaciona a quantidade de televisores vendida por dia e a temperatura média diária registrada em um período de 20 dias.



- e) Podemos determinar exatamente quantos televisores foram vendidos a partir da temperatura do dia?
- f) Podemos observar alguma tendência nas vendas se o dia foi mais quente ou menos quente?
- g) É possível que dias com a mesma temperatura média corresponda a números diferentes de televisores vendidos?
- h) É possível determinar quantos televisores seriam vendidos num dia cuja temperatura média registrada seja  $18^{\circ}\text{C}$ ?

### **Atividade Complementar**

Em cada situação anterior temos uma relação entre duas grandezas. Retorne às situações e analise:

- a) Em quais delas temos um fenômeno determinístico e em quais delas temos um fenômeno aleatório. Explique sua resposta.
- b) Compare as relações que expressam um fenômeno aleatório: Você diria que os gráficos apresentam o mesmo tipo de comportamento? Explique sua resposta.

### Anexo 3: Atividades desenvolvidas no terceiro dia de encontro

#### ESCOLA MUNICIPAL MANOEL BOMFIM

NOME: \_\_\_\_\_ TURMA: \_\_\_\_\_ DATA: \_\_\_\_\_

#### RELAÇÕES ENTRE VARIÁVEIS

Na vida, muitas vezes nos deparamos com situações em que duas grandezas se relacionam. A Matemática apresenta ferramentas que possibilitam investigar a existência ou não de padrões nas diversas relações entre variáveis.

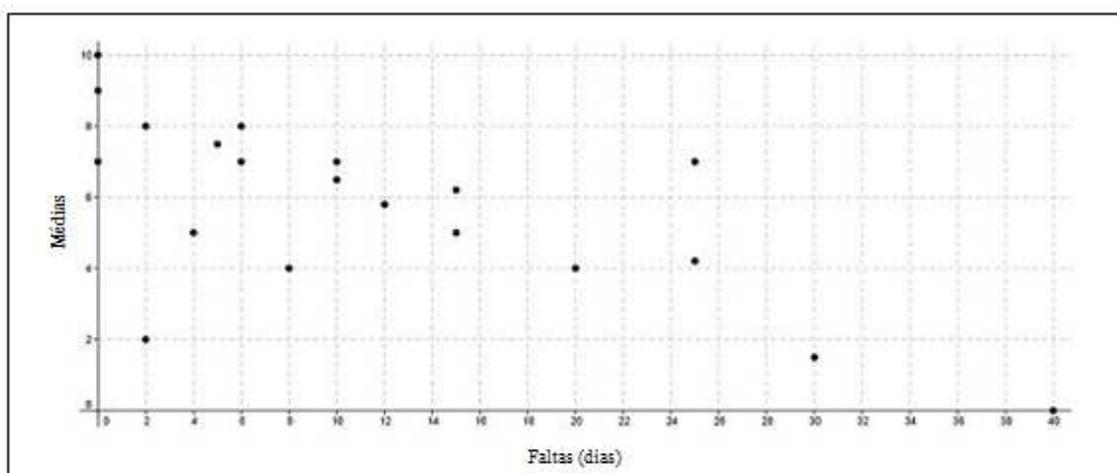
Você já reparou que quanto mais rápido você caminha para a escola, menos tempo você demora?

Você já percebeu que em dias mais quentes, as temperaturas medidas no decorrer do dia costumam ser mais elevadas?

Você já parou para pensar que quando sua mãe abastece o carro com combustível, o valor a ser pago se relaciona com a quantidade de combustível colocada?

#### **Atividade 1**

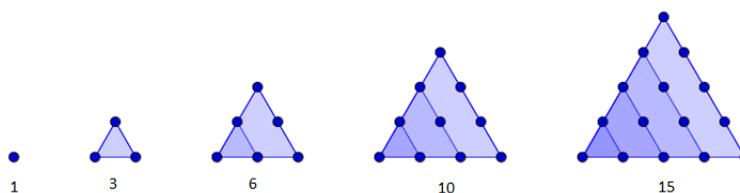
O gráfico abaixo representa a relação faltas x média final em Matemática dos alunos de uma turma do sexto ano, durante o ano letivo. Ao todo são 20 alunos.



Podemos garantir que todos os alunos que tiverem a mesma quantidade de faltas terão a mesma média final?

### Atividade 2

Observe a tabela abaixo que representa a relação posição x número triangular já vista anteriormente. Cada posição determina um único número triangular?



Posição	Número Triangular
1º	1
2º	3
3º	6
4º	10
5º	15

### Atividade 3

Daniel parou em um posto de gasolina com autosserviço a fim de abastecer o seu carro com 20 litros de gasolina. O valor do litro de gasolina indicado na bomba de combustível foi de R\$ 2,90.

- a) Quanto Daniel teve que pagar?
- b) Daniel observou que podia gastar R\$ 87,00 para abastecer o seu carro. Quantos litros de gasolina ele pode colocar com este valor?
- c) Quais as grandezas que estão envolvidas nesta atividade? Quais delas mudam e quais permanecem fixas?
- d) Descreva com suas próprias palavras como obter o valor a ser pago a partir da quantidade de litros de gasolina.

e) Chamando de  $x$  a quantidade de litros de gasolina e  $y$  o valor a ser pago pelo abastecimento, escreva uma igualdade que indique como calcular o valor a ser pago a partir da quantidade de litros de gasolina.

Você sabia que o valor a ser pago por uma corrida de um taxi é registrado no taxímetro, que é um aparelho instalado dentro dos taxis? Para calcular o valor desse serviço este aparelho faz uma conta que combina uma tarifa inicial, a distância percorrida e o tempo que o táxi fica parado durante o percurso. A tarifa inicial é conhecida como bandeirada e, em algumas cidades, há valores diferentes fixados dependendo do horário, do percurso e se o taxi é do tipo convencional ou especial.



#### **Veja como calcular o valor da corrida**

Suponha que o valor da bandeirada é R\$ 3,00, o preço por quilômetro rodado é R\$ 2,00 e o preço por hora em que o carro fica parado durante o trajeto é R\$ 10,00. O cálculo do valor da corrida é feito da seguinte forma:

- Multiplica-se a distância percorrida em quilômetros por R\$ 2,00 que é o preço por quilômetro rodado.
- Multiplica-se o tempo em horas em que o carro ficou parado por R\$ 10,00.
- Somam-se os resultados acima ao valor da bandeirada.

#### **Atividade 4**

Sofia está em um supermercado e deseja pegar um táxi até sua casa. Na cidade de Sofia o valor da bandeirada é R\$ 3,00 e o preço por quilômetro rodado é de R\$ 2,00.

- Sabendo que a distância do supermercado até a casa de Sofia é 20,5 km e que o táxi ficou parado durante 5 minutos em um engarrafamento, qual foi o valor pago pela corrida?
- Qual será o valor da corrida se a distância for o dobro da que Sofia percorreu, conforme o item anterior? O valor da corrida também será o dobro do resultado encontrado acima? Explique a sua conclusão.
- Em uma outra viagem de táxi feita por Sofia, o valor da corrida foi R\$ 38,00. A distância percorrida foi de 15 km, o valor da bandeirada foi R\$ 3,00, e o preço por quilômetro rodado foi de R\$ 2,00. O carro ficou parado durante essa corrida?

d) Quais são as grandezas relacionadas nesse problema? Quais delas variam?

**Organizando as ideias**

Quando, em uma relação entre variáveis, cada entrada determinar uma única saída, diremos que a relação é *funcional*. Nestes casos, a variável de saída depende da variável de entrada.

**Atividade Complementar:**

- a) A relação entre a quantidade de gasolina e o valor total a ser pago é funcional?
- b) A relação entre o valor da corrida, a distância percorrida pelo taxi e o tempo em que o táxi fica parado durante o trajeto é funcional?

## Anexo 4: Planilha de Conteúdos do MatDigital : Nono Ano

Capítulos	Áreas Envolvidas	Conteúdo
<b>9.1 Transformações geométricas no plano e no espaço</b>	Geometria Grandezas e Medidas	Comprimento, área e volume: razão de crescimento linear, quadrática e cúbica. Congruências e semelhanças. Teorema de Tales.
<b>9.2 Números Reais</b>	Aritmética Grandezas e Medidas	Preparação para a sistematização dos reais Operações com reais. Radiciação. Pi, o número de ouro. Aproximação, estimativa e erro.
<b>9.3 Relações entre Variáveis</b>	Álgebra Grandezas e Medidas	Principais: Variáveis, variáveis contínuas (tempo, por exemplo) e discretas, Relações (funcionais e não funcionais) entre variáveis, as ideias gerais e fundamentais do conceito de função Gráficos. Crescimento e Decrescimento. Relações afins, quadráticas, exponenciais, periódicas. Secundários: Proporcionalidade direta, inversa, dependência quadrática e de radiciação. Tratamento da informação.
<b>9.4 Relações Quadráticas Entre Variáveis</b>	Álgebra Grandezas e Medidas	Completamentos de quadrados, retomada de produtos notáveis. Resolução de equações quadráticas sem a fórmula, por meio de completamento de quadrados. Relações entre variáveis envolvendo funções quadráticas: área do quadrado. Máximos e mínimos.
<b>9.5 Relações Trigonômicas no Triângulo Retângulo</b>	Geometria Grandezas e Medidas Álgebra	Razões trigonométricas no triângulo retângulo. Determinação de distâncias inacessíveis por meio de seno e cosseno. 1. Triângulos com os mesmos ângulos têm lados em proporção. 2. Definição das razões trigonométricas tangente, seno e cosseno. 3. Definição de ângulo de visada; o instrumento teodolito (que mede o ângulo de visada): construção de um teodolito caseiro e explicação do seu funcionamento. 4. Análise dos triângulos do tipo “esquadros” quanto aos seus lados e ângulos. Deduzir os valores das razões trigonométricas para ângulos medindo 30, 45 e 60 graus. 5. Resolver novos problemas de distâncias inacessíveis usando triângulos retângulos, agora com ênfase no uso de razões trigonométricas 6. Retomar os casos de congruência LAL , LLL e

		<p>ALA para mostrar que necessariamente devem existir fórmulas para calcular, a partir do conhecimento de 3 elementos, os demais elementos do triângulo; a importância de ter-se fórmulas que calculam os elementos de um triângulo. Deduzir uma fórmula de área do triângulo conhecendo-se LAL ; falar na fórmula da área conhecendo-se LLL . Demonstrar as leis do seno e cosseno para triângulos acutângulos.</p> <p>7. Resolver novos problemas de distâncias inacessíveis, agora usando triângulos acutângulos (problemas que envolvem triângulos com ângulo obtuso podem ser transformados em triângulos acutângulos?)</p> <p>8. Aplicações variadas da trigonometria (rampa para cadeirantes, medida de terrenos, geografia, topografia)</p>
<b>9.6 Explorando Geometria no Espaço</b>	Geometria Grandezas e Medidas	<p>Planificações. Cortes no cubo, na esfera e no cone. Superfícies de revolução. Poliedros platônicos. Característica de Euler.</p>
<b>9.7 Contagem e Combinatória</b>	Tratamento da Informação Aritmética Grandezas e Medidas Álgebra	<p>Aprofundamento e sistematização de estratégias de contagem. Princípio Fundamental da Contagem.</p>
<b>9.8 Probabilidade</b>	Tratamento da Informação Aritmética Grandezas e Medidas Álgebra	<p>Relações entre probabilidade e contagem. Probabilidades contínuas.</p>
<b>9.9 Geometria, Números e Processos Infinitos</b>	Aritmética Geometria Grandezas e Medidas Álgebra	<p>Geometria, números e raciocínios generalizadores: somas infinitas (geométricas), áreas limitadas com perímetros infinitos.</p>

## Anexo 5: Livros indicados no PNLD

	<b>Título</b>	<b>Autores</b>	<b>Editora</b>	<b>PNLD 2008</b>	<b>PNLD 2011</b>	<b>PNLD 2014</b>
1	A Conquista da Matemática	José Ruy Giovanni Jr. e Benedicto Castrucci	FTD		X	
2	Aplicando a Matemática	Alexandre Luís Trovon de Carvalho e Lourisnei Fortes Reis	Casa Publicadora Brasileira	X	X	
3	Construindo Consciências Matemática	Elizabeth Soares e Jackson da Silva Ribeiro	Scipione	X		
4	Descobrimos e aplicamos a matemática	Alceu dos S. Mazzeiro e Paulo Antônio Fonseca Machado	Dimensão			X
5	Fazendo a Diferença Matemática	Ayrton Olivares e Bonjorno	FTD	X		
6	Idéias e Relações	Cláudia Miriam Tosatto Siedel, Edilaine do Pilar Fernandes Peracchi e Violeta Maria Estephan	Positivo	X		
7	Matemática	Edwaldo Bianchini	Moderna		X	X
8	Matemática	Imenes e Lellis	Moderna		X	X
9	Matemática	Maria Helena S. de Souza e Walter Spinelli	Ática	X		
10	Matemática em Movimento	Adilson Longen	Ed. do Brasil	X		
11	Matemática para todos	Imenes e Lellis	Scipione	X		
12	Matemática e Realidade	Gelson Iezzi, Osvaldo Dolce e Antônio Machado	Saraiva Livresiros Editores	X	X	
13	Matemática hoje é feita assim	Antonio José Lopes Bigode	FTD	X		
14	Matemática na vida e na escola	Ana Lúcia Gravato Bordeaux Rego, Clea Rubinstein, Elisabeth Ogliari Marques, Elizabeth Maria França Borges, Gilda Maria Quitete Portela	Ed. do Brasil	X		

15	Matemática na medida certa	Marília Ramos Centurión e José Jakubovic	Scipione	X	X	
16	Matemática: Teoria e Contexto	Marília Ramos Centurión e José Jakubovic	Saraiva Livreiros Editores			X
17	Matemática: Compreensão e prática	Ênio Silveira e Claudio Marques	Moderna			
18	Matemática: Ideias e desafios	Iracema e Dulce	Saraiva Livreiros Editores	X	X	X
19	Para Saber Matemática	Ednéia Poli, Fábio Vieira, Juliana Sosso e Luiz G. Cavalcante	Saraiva Livreiros Editores	X		
20	Praticando Matemática	Alvaro Andrini e Maria José Vasconcellos	Ed. do Brasil	X		X
21	Projeto Araribá	Editora Moderna	Moderna	X		X
22	Projeto Radix	Jackson da Silva Ribeiro	Scipione		X	
23	Projeto Telaris	Luiz Roberto Dante	Ática			X
24	Projeto Velejar	Antônio José Lopes Bigode	Scipione			X
25	Tudo é matemática	Luiz Roberto Dante	Ática	X	X	
26	Vontade de saber matemática	Joamir Souza e Patricia M. Pataro	FTD		X	X

## Referências Bibliográficas

ANDRINI, A.; VASCONCELLOS, M. J. **Praticando Matemática**. Nono ano. 3. ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2012.

BIANCHINI, E. **Matemática**. Nono ano. 7. ed. São Paulo: Moderna, 2011.

BIGODE, A. J. L. **Projeto Velear: Matemática**. Nono ano. 1.ed. São Paulo: Scipione, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática** - Brasília, MEC / SEF, 1998.

CARVALHO, A. L. T.; REIS, L. F. **Aplicando a Matemática**. Sexto, sétimo, oitavo e nono anos. 3. ed. São Paulo: Casa Publicadora Brasileira, 2010.

CENTURIÓN, M. R.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. **Matemática na Medida Certa**. Nono ano. 10. ed. São Paulo: Scipione, 2003.

CUNHA, J. C. V. **O Método dos Mínimos Quadrados: uma proposta ao Ensino Médio para o ajuste por retas**. 2014. 77 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Escola de Matemática, Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

DANTE, L. R. **Projeto Telaris: Matemática**. Nono ano. 1. ed. São Paulo: Ática, 2012.

DANTE, L. R. **Tudo é Matemática**. Nono ano. 3. ed. São Paulo: Ática, 2009.

DAVILA, V. H. L./Departamento de Estatística da UNICAMP. **Regressão Linear Simples**. Disponível em: <<http://www.ime.unicamp.br/~hlauchos/regresslide.pdf>>. Acesso em: 05 ago.2014.

DUVAL, R., Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). **Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica**. Campinas: Papyrus, 2008.

EDITORA MODERNA. **Projeto Araribá: Matemática**. Nono ano. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2010.

IMENES, L. M.; IMENES, M. L. **Matemática**. Nono ano. 1. ed. São Paulo: Moderna, 2009.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MACHADO, A. **Matemática e Realidade**. Nono ano. 6. ed. São Paulo: Atual, 2009.

MAZZIEIRO, A. S.; MACHADO, P. A. F. **Descobrimos e Aplicando a Matemática**. Nono ano. Belo Horizonte: Dimensão, 2012.

MENNA BARRETO, M., Tendências atuais sobre o ensino de funções no Ensino Médio. Artigo adaptado da Dissertação de Mestrado: **Matemática e Educação Sexual: modelagem do fenômeno da absorção/eliminação de anticoncepcionais orais diários**. Porto Alegre, 2008.

MORI, I.; ONAGA, D. S. **Matemática: Ideias e Desafios**. Nono ano. 14. ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

PALIS, G. L. R. Atividades que podem propiciar o desenvolvimento do raciocínio funcional no alunado do ensino médio e universitário inicial. **Revista eletrônica da SBM**. nº 1, v.1, 2013.

PONTE, J. P. The history of the concept of function and some educational implications. **Journal Educação e Matemática (of the Portuguese Association of Teachers of Mathematics)**. n. 15, p. 3-9, 1990.

ROQUE, T. **História da matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SECRETARIA MUNICIPAL DE EDUCAÇÃO. **Caderno Pedagógico**: Matemática. Nono ano. Rio de Janeiro: Ediouro, 2013.

SHARPE, N. R.; DE VEAUX, R. D.; VELLEMAN, P. F. **Estatística Aplicada**: Administração, Economia e Negócios. Porto Alegre: Bookman, 2011

SHIMAKURA, S. E./ Laboratório de Estatística e Geoinformação da UFPR. **Estudando a distribuição de frequências de uma variável**, 2012. Disponível em: <<http://leg.ufpr.br/~silvia/CE055/node15.html>>. Acesso em: 15 jul.2014.

SILVEIRA, E.; SILVEIRA, C. M. **Matemática**: Compreensão e Prática. Nono ano. 1 ed. São Paulo: Moderna, 2008.

SOUZA, J. R.; PATARO, P. R. M. **Vontade de Saber Matemática**. Nono ano. 2. ed. São Paulo: FTD, 2012.

TINOCO, L. A. A. **Construindo o conceito de função**. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática/UFRJ, 2001.