Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Centro de Tecnologia e Ciência

Instituto de Matemática e Estatística

Sérgio Leandro Bitencourt

Experimentos no ensino da trigonometria e a descrição dinâmica das funções seno e cosseno

Rio de Janeiro

2015

Sérgio Leandro Bitencourt

Experimentos no Ensino da Trigonometria e a descrição dinâmica das Funções seno e cosseno

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Orientador: Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva

Rio de Janeiro

2015

CATALOGAÇÃO NA FONTE

UERJ / REDE SIRIUS / BIBLIOTECA CTC-A

B624 Bitencourt, Sérgio Leandro.
Experimentos no ensino da trigonometria e a descrição dinâmica das funções seno e cosseno / Sérgio Leandro Bitencourt. - 2015.
64f.: il.

Orientador: Sérgio Luiz Silva.
Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT) - Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Instituto de Matemática e Estatística.

1. Funções trigonométricas - Teses 2. Triângulo.- Teses.3. Círculo - Teses I. Silva, Sérgio Luiz. II. Universidade do Estado do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática e Estatística . III. Título.

CDU 517.518.42

_______________________________ _______________________

Assinatura Data

Sérgio Leandro Bitencourt

Experimentos no Ensino da Trigonometria e a descrição dinâmica das Funções seno e cosseno

Dissertação apresentada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre, ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT, da Universidade do Estado do Rio de Janeiro.

Aprovada em 26 de fevereiro de 2015.

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Sérgio Luiz Silva (Orientador)
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof. Dr. Roberto Alfonso Olivares Jara
Instituto de Matemática e Estatística – UERJ

Prof^a Dr^a Cristiane de Mello
Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro

2015

DEDICATÓRIA

Dedico esse trabalho à minha mãe().

AGRADECIMENTOS

A todos que colaboraram na elaboração deste trabalho.

Aos meus amigos e à minha namorada que foram compreensivos e entenderam minha ausência enquanto estive produzindo esse trabalho.

Ao meu orientador, pela dedicação, disponibilidade e, principalmente, paciência comigo.

Se quer realmente buscar a verdade, deve pelo menos uma vez na vida,
e tão completamente quanto possível, duvidar de tudo.
René Descartes, Discurso do Método 1637

RESUMO

BITENCOURT, Sérgio Leandro. *Experimentos no Ensino da Trigonometria e a descrição dinâmica das Funções seno e cosseno*. 2015.64f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

O objetivo desse trabalho é relatar a construção de um material útil no ensino de trigonometria tanto para professores do último ano do segundo segmento do Ensino Fundamental quanto para professores do primeiro ano do Ensino Médio. Aqui procura-se aplicar uma possível fusão entre uma sequência didática experimental e a abordagem histórica no Ensino da Trigonometria, fazendo dessas um possível agente motivador, principalmente àqueles alunos com maior dificuldade de abstração algébrica e àqueles com maior interesse nas áreas humanas. As articulações pedagógicas entre a trigonometria e sua história expostas aqui serão complementadas de ideias práticas para melhor assimilação dos estudantes ao conteúdo em si, assim como a observação de seus resultados.

Palavras-chave: Triângulos. Funções Trigonométricas. Círculos. Experimentos.

ABSTRACT

BITENCOURT, Sérgio Leandro. *Experiments in Teaching Trigonometry and dynamics description of the sine and cosine Functions.* 2015. 64 f. Dissertação (Mestrado em Matemática em Rede Nacional -PROFMAT) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2015.

The aim of this work is to report the construction of useful material on Trigonometry teaching both the teachers of last year of Middle School and the first year of the High School. We seek for applying a possible fusion between didactic experimental sequence and the historical approach on Trigonometry teaching, making it possible for an agent motivator, especially those whose students have more difficulty in algebric abstraction and those more interested in human areas. The pedagogical joints between Trigonometry and its history exposed here will be supplemented by practical ideas for better students assimilation on content itself, just like the comment on its results.

Keywords: Triangles. Trigonometric functions. Circles. Experiments.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O surgimento do Mestrado Profissional em ensino, diferentemente do Mestrado acadêmico que se concentra no campo das pesquisas teóricas, procura priorizar as ações direcionadas para intervenções nas práticas em sala de aula. Não à toa, esses mestrandos, preferencialmente, devem ser professores em exercício não estando afastados da sala de aula enquanto o cursa.

> [...] deverá ter caráter de preparação profissional na área docente, focalizando o ensino, a aprendizagem, o currículo, a avaliação e o sistema escolar. Deverá, também, estar sempre voltado explicitamente para a evolução do sistema de ensino, seja pela ação direta em sala de aula, seja pela contribuição na solução de problemas dos sistemas educativos, nos níveis fundamental e médio. (Ostermann; Rezende, 2009, p.69).

Pensando nisso, é necessário apresentar aqui algum produto de natureza educacional, de forma destacável e explícita, para a conclusão desse curso. Alguma fonte que venha a ser útil ao professor do ensino básico na sua prática profissional.

É bastante comum que muitos alunos atribuam à matemática uma ciência estritamente exata, dissociada do contexto histórico-social. No entanto, muitos desses têm, por afinidade, uma performance mais destacada nas disciplinas de cunho social e humano e, muitas vezes, criando uma espécie de bloqueio ao aprendizado da matemática e de outras Ciências Exatas. Para esses resistentes às ciências exatas talvez seja interessante conhecer fatos da História da Matemática, pois essa possibildade, ainda que estes tratem de assuntos abstratos; há a oportunidade de trabalhar tal abstração, e até discutir diversos temas morais, que dizem respeito à sensibilidade apurando e desenvolvendo até mesmo alguma criticidade.

Sabemos que não há muito o que acrescentar no que se diz respeito às tecnologias motivadoras para o ensino e a aprendizagem da Matemática, já existem muitas plataformas tecnológicas na Internet que promovem games e atividades lúdicas nesse processo. Reconhecendo a importância de todo esse aparato e observando que essa tecnologia consegue abraçar um número maior de alunos para o interesse no campo da Matemática, é preciso reconhecer também que outro tipo de ferramenta ajudará a abraçar uma parcela talvez não tão interessada em plataformas tecnológicas ou que exija menor gasto financeiro para tal. Há alunos que se permitem encantar pelas ciências humanas, pelas questões políticas, histórico-sociais do tempo moderno e de outras épocas. Para esse público não há grande riqueza de trabalhos produzidos. Os apêndices dos livros didáticos que mostram parte da História da Matemática quando existem, passam despercebidos quase sempre, ora por desconhecimento e falta de interesse do professor de Matemática pela História, ora por falta de tempo para que seja discutida a questão e trabalhar com os conteúdos propriamente ditos.

> [...]Outro modo de melhorar as aulas de matemática tornando-as mais compreensíveis aos alunos é utilizar a própria história da matemática; esta mostra que a matemática surgiu aos poucos, com aproximações, ensaios e erros, não de forma adivinhatória, nem completa ou inteira. Quase todo pensamento matemático se deu por necessidade do homem, diante do contexto da época. (Lorenzato, 2008, p.107)

Abordaremos aqui, além das experiências reproduzidas pelos alunos que foram dinamizadas por personagens notórios da História da Matemática com ênfase no pioneirismo da Trigonometria, algo que possa vir a incentivar o seu uso no cotidiano. Trabalharemos sempre em busca da motivação, da importância da aplicabilidade, antes mesmo que possa ser mencionada a sua teoria.

> [...]O cotidiano como o não cotidiano são produtos histórico-sociais. É preciso, pois, que o cotidiano e o não cotidiano sejam entendidos como esferas onde se dá o processo de apropriação e elaboração do conhecimento não como “essencialidades” que antepõem a existência humana. Essas esferas são essenciais para a vida humana da sociedade altamente complexificada que se tem hoje. É preciso, porém, compreender que essas esferas foram surgindo dentro do processo de divisão social do trabalho, e como tal, refletem o processo de alienação decorrente dessa divisão social do trabalho. (Giardinetto, 1999, P.122-123)

A afirmativa é reforçada.

> [...]A História da Matemática e das Ciências não pode se afastar dos contextos sociais, políticos, econômicos e culturais. (D’Ambrosio, 2011, p.11)

As questões que envolvem uma necessidade específica de uma época fazem com que homens desenvolvam métodos, empíricos de maneira inicial, para contornar as dificuldades e dar conta de resolvê-las. Os fundamentos teóricos aparecem depois, de forma a resolver questões similares àquela. Assim a Matemática vai se desenvolvendo. Contextualizada e enraizada na sociedade, com grande importância naquela a que se refere. Compreender isso é compreender que, entre a Matemática abstrata e a Matemática aplicada existe uma linha tênue, cujo aluno com limitado grau de maturidade e abstração no início de sua adolescência precisa entender para aceitar. Não faz sentido para a maioria aprender a Ciência da Matemática como algo por si só, sem qualquer relevância cotidiana. O papel da História nos ajuda a compreender todo um contexto social e político vividos de uma época. A imagem da matemática independe dele, porém nos ajuda a estudá-la e desmistificá-la.

> [...]Entender o como e o porquê de sua construção nos ajuda a compreender que o papel da história não é acessório na formação de uma imagem da matemática: sua função é também social e política.(Roque, 2012, p.20)

Diante de tais argumentos, o objetivo da produção desse material é propor atividades práticas, se possível com breves relatos históricos, que poderão ser realizadas anteriormente à exposição das teorias e do conteúdo de Trigonometria, ou seja, fazer com que o estudante entenda o sentido de sua importância, antes mesmo de ser exposto a uma série de definições.

1 POR QUE ESTUDAR HISTÓRIA DA MATEMÁTICA?

Para mudar a imagem que algumas pessoas têm da matemática, a história pode ser fundamental. A história tradicional não foi a única responsável, mas contribuiu para que as pessoas vissem a matemática como uma ciência abstrata cheia de conceitos prontos e acabados, e ao alcance apenas de gênios. Isso faz com que as pessoas, primeiro, não a entendam; segundo não gostem dela; e, terceiro tenham uma visão mitificada da matemática. É comum ouvir dos amigos: "Ah, sou péssimo em matemática!". Essa é a imagem, infelizmente. Não se conhece os problemas que geraram os resultados, estuda-se esses resultados já prontos. Na educação básica é pior, as pessoas estudam as ferramentas, uma linguagem que não sabem para que serve. Por outro lado, quando demandam que aquilo serve para alguma coisa, pensam apenas no mundo concreto. Mas não é isso, ela pode servir para propósitos internos, da própria matemática.

> [...]Cada problema que eu resolvi tornou-se uma regra que serviu depois para resolver outros problemas. (Descartes, Raciocínio Rápido p.297)

1.1 E como a História pode ajudar no ensino?

Por exemplo, no ensino básico os alunos veem o conceito de função primeiro a partir da noção de conjuntos. Depois, deixam essa definição de lado e veem exemplos de funções lineares e a quadráticas, com exemplo de retas e parábolas. Qual a relação entre a função linear e quadrática em termos dos conjuntos? O aluno não entende. A noção de função como variação vem dos séculos XVI e XVII, com o estudo de curvas e trajetórias. A história toda passou a ter legitimidade com Leibniz e Newton. Depois os matemáticos do século XVIII as consideraram ilegítimas e propuseram a definição de função como expressão analítica. Então matemáticos, no fim do século XVIII e no início do século XIX começaram a se perguntar quando uma função qualquer é expressa como uma série trigonométrica (as séries de Fourier); para isso Dirichlet precisou definir função como um tipo específico de relação em que as variáveis têm de satisfazer certas condições como: um elemento do domínio não pode se associar a mais de um elemento no contradomínio. Depois Cantor e Dedekind criaram a definição dos números reais e de conjuntos, e só aí Bourbaki (pseudônimo de um grupo de matemáticos) quis fundamentar a matemática com base na definição de conjuntos. Especificamente essa parte da história não ajudaria o aluno a entender a definição de função, pois passa por teorias que ele não estuda, mas torna-se indispensável para o professor entender melhor suas dificuldades, e compreender que é preciso mostrar ao aluno a função como uma ideia de variação, não apenas de R em R, não apenas a linear e a quadrática, tornando assim seu embasamento com uma riqueza maior. A história pode ajudar até para repensar o currículo do ensino. O matemático não precisa saber toda a história para se interessar ou se motivar, mas para conhecer problemas e como se desenvolveram, sobretudo dentro de sua área de interesse. Todo bom matemático conhece um pouco da história de seu campo e sabe que isso pode ajudar. Às vezes não se consegue resolver um problema com certa teoria, e usa outra na qual não tinha pensado antes. E se for demonstrar um teorema realmente importante, em geral, é útil ter um conhecimento muito mais amplo da matemática, não só de sua área.

1.2 Para que serve?

– Professor, para que estamos estudando isso? Para que serve?

Quem na prática pedagógica da educação básica nunca ouviu alguma pergunta do tipo? Para o Professor Iran Abreu Mendes, quando o estudante levanta a mão e faz essa pergunta, ele não está querendo saber das aplicações práticas. Talvez ele pense que sim, que gostaria de conhecer as aplicações práticas, mas, na verdade, ele se contentaria com respostas de outro quilate. Segundo o Professor há três jeitos de responder a pergunta com propriedade:

(1) "Você está estudando isso para aprender a raciocinar corretamente sobre assuntos difíceis, que resistem a julgamentos apressados. No futuro, por exemplo, no vestibular, as pessoas vão querer saber se você tem a capacidade de se sentar à escrivaninha e de estudar por muitas horas, ou de pensar longamente sobre como resolver um problema difícil. Como elas poderão saber uma coisa dessas? Provavelmente vão investigar sua capacidade de resolver problemas matemáticos."Esse tipo de resposta só funcionará se o professor tiver o poder de vertê-la em palavras com elegância e estilo.

(2) "Você está estudando isso porque isso é útil na profissão X", e, logo depois de dizer tais palavras, o professor explica uma aplicação prática. Como esse método em geral funciona bem, os professores recorrem a ele sempre que podem, até porque os autores de livros didáticos recorrem a ele sempre que podem. "O risco disso", diz Iran, "é fazer o aluno pensar que tudo que ele estuda na escola deve ter uma aplicação imediata e direta. Acontece que que não estudamos na matemática só o que tem aplicação imediata e direta - ao contrário."

(3) Suponha que seja *logaritmos*. Daí o professor pede à classe que faça uma tabela com três colunas, cujo título é *Calculadoras rudimentares*, dá as instruções e ajuda os alunos a ver como multiplicação de dois termos da progressão geométrica tem algo a ver com a soma de dois termos da progressão aritmética. O que o professor fez aqui? Ele não precisou contar a história de John Napier, mas usou a história para dar sentido ao que os alunos fazem na escola. O que reforça a ideia da importância do professor conhecer a

História da matemática, mas não necessariamente narrá-la ponto por ponto. Iran diz que "A História é uma maneira importante de dar significado ao conteúdo de matemática."

O aluno que investigar a História da Matemática vai se dar conta da importância de entender a época em que o personagem vivia, o modo como o personagem encarava determinado problema, as ferramentas intelectuais e culturais que tinha em mãos, e como o personagem, vivendo naquela época, e dispondo daquelas ferramentas, resolveu o problema. Diz Iran : "Acontece que toda solução que o homem dá a um problema é, digamos assim, particular: ela é solução para aquele momento. Se o professor souber se colocar no lugar do personagem, e pensar como ele, cedo ou tarde atinará com um jeito de usar os elementos da história para dar sentido ao que ensina em sala de aula."

Por exemplo, durante a Renascença, os trabalhos dos algebristas italianos Ferro, Tartaglia, Cardano e Ferrari, culminaram com a descoberta das fórmulas de resoluções de equações de terceiro e quarto grau. A fórmula de terceiro grau envolve raízes quadradas e cúbicas. Cardano notou que algumas equações do terceiro grau têm as 3 raízes reais mas na fórmula que as fornece ocorrem raízes quadradas de números negativos. Assim, para chegar a essas raízes reais, é preciso primeiro passar pelos números complexos.

Para iniciar, o professor pode pedir à classe que resolva a equação abaixo:

$$x^2 + 1 = 0$$

Depois de duas manipulações algébricas, o estudante chegará à conclusão de que deve tirar a raiz quadrada de -1, mas ele sabe que o argumento da raiz quadrada deve ser igual ou maior que zero. Essa situação ocorreu no passado, e várias passagens da história de personagens como Stevin, Descartes, Bombelli, Girard, Gauss e Euler podem ser transformadas em atividades para o jovem brasileiro do século 21. O professor pode propor um jogo à classe:

– Suponham que existe um número, que chamaremos de i, cuja característica é: $\imath^2 = -1$. Daí seria possível resolver a equação?

O risco, como enfatiza Iran, é dar aula de História, e não de Matemática. "Na escola, durante as aulas de matemática, o objetivo é ensinar matemática, e não história", diz Iran.

"Eu, por exemplo, não dou aula de história, mas estudo História da Matemática para ver o que ela me oferece em termos conceituais."

Uma vez, lendo a obra "História do Brasil", escrita em 1627 pelo frei Vicente de Salvador, Ubiratan D'Ambrosio descobriu por que certas ideias matemáticas não se desenvolvem – e por que certos alunos se recusam a estudar matemática. Frei Vicente nota que os índios brasileiros têm uma linguagem "muito copiosa, muito sofisticada", mas que, na contagem, recorrem aos dedos de uma mão e, se for necessário, aos dedos de um pé, e aos dedos do outro pé..."E daí o autor faz uma observação que me pareceu notável", diz Ubiratan. "Ele diagnosticou a situação: os indígenas não tinham interesse em contagem mais sofisticadas que essas."Caso conheça a produção atual dos historiadores da ciência, o professor terá maior condição de despertar o interesse de seus alunos, e quando há interesse, a matemática se desenvolve até entre adolescentes.

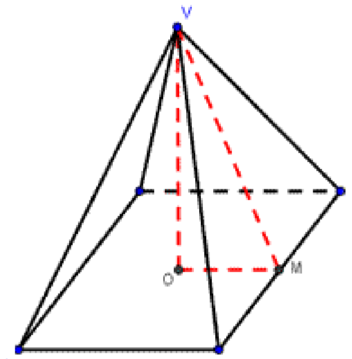
2 ABORDAGEM HISTÓRICA

2.1 As raízes da Trigonometria

A trigonometria parece ter surgido, de forma rudimentar, no Egito e na Babilônia, a partir de razões entre números e entre lados de triângulos semelhantes. No Egito, isto pode ser observado no Papiro de Ahmes, conhecido como Papiro Rhind, que data de aproximadamente 165 a. C., contendo 84 problemas, dos quais quatro fazem menção ao seqt de um ângulo.

Ahmes não deixou claro ao expressar o significado desta palavra mas, pelo contexto, pensa-se que o seqt de uma pirâmide regular seja equivalente, hoje, à cotangente do ângulo OMV (Figura1) . Na construção das pirâmides era essencial manter uma inclinação constante das faces, o que levou os egípcios a introduzirem o conceito de seqt, que representava a razão entre o afastamento horizontal e a elevação vertical.

Figura1



seqt = OM/OV (equivalente à cotangente)

Seria interessante lembrar que as pirâmides egípcias eram geralmente construídas com os ângulos de inclinação VMO aproximadamente constante de 52º e OMV com valor em torno de 42º, mas não se sabe, até hoje, o porquê dessas medidas. Além da utilização da trigonometria nas medições das pirâmides, apareceu no Egito (1500 a.C. aproximadamente) a ideia de associar sombras projetadas por uma vara vertical a sequências numéricas, relacionando seus comprimentos com horas do dia (relógios de sol). Poderíamos dizer então que essas ideias estavam anunciando a chegada, séculos depois, das funções tangente e cotangente. Os predecessores da tangente e da cotangente, no entanto, surgiram de modestas necessidades de medição de alturas e distâncias. Como já mencionamos, os primeiros vestígios de trigonometria surgiram não só no Egito, mas também na Babilônia. Os babilônios tinham grande interesse pela Astronomia, por suas ligações com os conceitos religiosos e por suas conexões com o calendário, as épocas de plantio e estações do ano.

Sabe-se que na Astronomia é impossível estudar as fases da Lua, os pontos cardeais e as estações do ano sem usar triângulos, um sistema de unidades de medida e uma escala. Os babilônios foram grandes astrônomos e influenciaram os povos posteriores, construíram no século XXVIII a.C., durante o reinado de Sargon, um calendário astrológico e elaboraram, a partir do século VII a.C., uma tábua de eclipses lunares. Este calendário e estas tábuas chegaram até os nossos dias.

Tudo leva a crer que foram os babilônios que escolheram o sistema sexagesimal. Possivelmente esta escolha estivesse relacionada com a facilidade de dividir o círculo em seis partes iguais, usando o raio como corda. O uso do sistema sexagesimal por esse povo pode ser observado na escrita de frações, cujos denominadores normalmente eram expressos por potências de 60. Parece ter existido uma relação entre o conhecimento matemático dos egípcios e dos babilônios. Ambos, por exemplo, usavam as frações de numerador 1. Também é plausível supor que os povos posteriores tivessem conhecimento da trigonometria primitiva egípcia.

O conceito de ângulo e de como efetuar suas medições é de grande interesse na Trigonometria, por ser fundamental em diversas situações, como na compreensão das razões trigonométricas em um triângulo retângulo (números que dependem dos ângulos do triângulo e não da particular medida dos lados).

Uma trigonometria primitiva também foi encontrada no Oriente. Na China, no reinado de Chóu-pei Suan-king, aproximadamente 1110 a.C., os triângulos retângulos eram frequentemente usados para medir distâncias, comprimento e profundidades. Existem evidências do conhecimento das relações trigonométricas, mas não se sabem os nomes dados pelos chineses para essas relações. Na literatura chinesa encontramos uma certa passagem que podemos traduzir por: "O conhecimento vem da sombra, e a sombra vem do gnômon", o que mostra que a trigonometria plana primitiva já era conhecida na China no segundo milênio a.C.. O conceito de ângulo e a forma de medi-lo também surgiram na China. Assim como aconteceu com os demais povos antigos, em razão do interesse astronômico dos chineses, fez-se necessário medir os ângulos, mas não sabemos como eram feitas as medições e quais as unidades de medida usadas.

No Ocidente, o saber egípcio foi seguido pelo dos gregos. É reconhecido que, se os egípcios foram seus mestres, não tardou para que estes fossem superados pelos discípulos. A Matemática teve então um grande desenvolvimento, e a civilização grega passou a servir de preceptora a todas as outras nações.

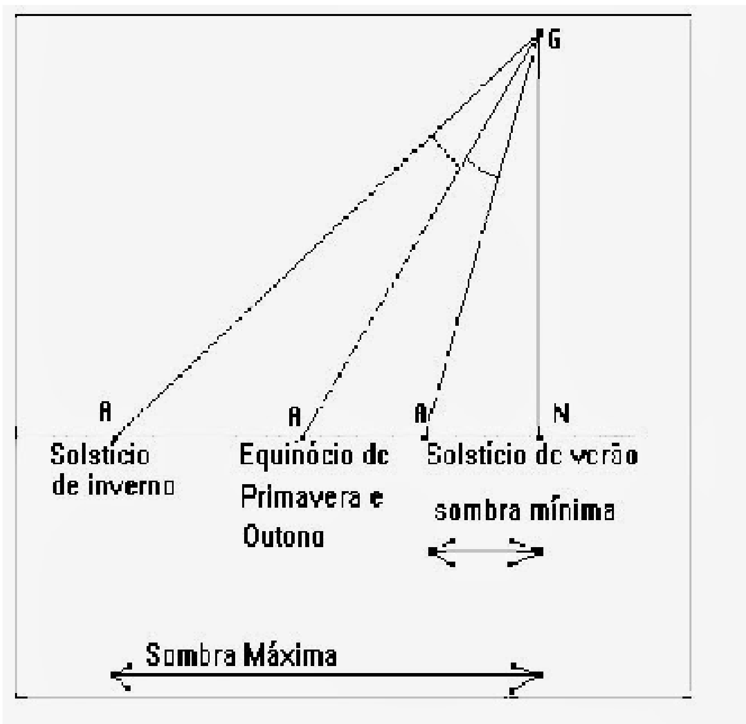
Os gregos tomaram a linha reta e o círculo como base de sua geometria e a partir daí desenvolveram a trigonometria. A convenção de 360º em um círculo de 60 segundos em um grau teve origem na matemática helênica – aparentemente já estava em uso no tempo de Hiparco da Bitínia (190-120 a.C.). Provavelmente teve origem na divisão astronômica babilônica do zodíaco em 12 signos ou 36 decanos, e o ciclo anual de aproximadamente 360 dias. O sistema superior usado pelos Babilônios para representar frações o tornou mais útil do que os sistemas egípcio e grego, e Ptolomeu (c. 90-168 d.C.) usou o sistema de base 60 ao dividir em graus e minutos (partes minuate primae), e cada minuto em 60 segundos (partes minutae secundae).

Relógio Zodíaco: foram os babilônios que dividiram o zodíaco em 12 signos ou 36 decanos refletindo seu ciclo sazonal de aproximadamente 360 dias.

2.2 O relógio de sol

Foram os gregos que batizaram como GNÔMON o relógio de sol que chegou até eles através dos babilônios, mas consta-se que já havia sido utilizado pelos gregos antes de 1500 a.C.. O mais antigo gnômon de que se há conhecimento evidencia a hipótese de que a trigonometria foi uma ferramenta para observação de fenômenos astronômicos, uma vez que a documentação relativa a esse período grego é praticamente inexistente.

O Gnômon era uma vareta que se espetava no chão, formando com ele um ângulo de 90^o, e o comprimento de sua sombra era observado ao meio dia. A vareta (o gnômon) era erguida e a sombra era observada. No solstício de verão, quando o sol está mais afastado do sul, a sombra é maior ao meio dia. No solstício de inverno ela é menor, pois o sol está mais afastado do norte. Uma observação dos limites da sombra permitia medir a duração do ano. O movimento lateral diário do ponto A permitia medir a duração do dia, enquanto o movimento ao meio dia ao longo de NA dizia respeito à medição do tempo anual. Como o tamanho do gnômon era constante, ou seja, usava-se sempre a mesma vareta, na mesma posição, o comprimento de NA ao meio dia variava com o ângulo A. Estudamos essa razão AN/comprimento do gnômon , hoje, como uma função do ângulo A conhecida como COTANGENTE. Da época, o único vestígio de sua nomenclatura é o seqt, conforme já falamos. Sabemos que os diversos ramos da Matemática evoluíram gradualmente. O desenvolvimento da trigonometria está intimamente ligado ao da geometria. Neste, a Grécia contribuiu com grandes sábios; entre eles Thales de Mileto (625 – 546 a.C.), com seus estudos de semelhança, e seus discípulos Pitágoras (570 – 495 a.C.), este último o primeiro a demonstrar o teorema que leva o seu nome: " Em todo triângulo retângulo a área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construídos sobre os catetos". Daí deriva-se a relação fundamental da trigonometria.



2.3 O comprimento da circunferência terrestre

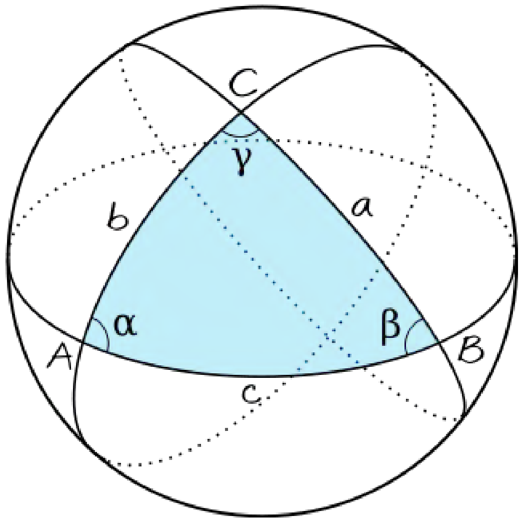
Por volta do ano 200 a.C. os astrônomos gregos estavam muito interessados em calcular a distância entre dois pontos da superfície terrestre e também o raio da mesma. Surgiu, então a figura de Eratóstenes de Cirene (276 – 196 a.C.), contemporâneo de Arquimedes (287 – 212 a.C.) e Aristarco (310 – 230 a. C.). Deve-se a ele a mais notável medida da Antiguidade para a circunferência da Terra, usando semelhança de triângulos e razões trigonométricas, o que levou a perceber a necessidade de relações mais sistemáticas entre ângulos e cordas. É importante salientar que, para tornar possível o trabalho de Eratóstenes, era determinante na época o conhecimento do conceito de ângulo e como medi-lo. Segundo Boyer (1974) “ de Hipócrates a Eratóstenes os gregos estudaram as relações entre retas e círculos e as aplicaram na Astronomia mas disso não resultou uma trigonometria sistemática”. Na segunda metade do século II a.C. Hiparco de Nicéia (180-125 a.C) bastante influenciado pela matemática babilônica defendeu que a melhor base de contagem era 60. Não se sabe exatamente quando se tornou comum dividir a circunferência em 360 partes, mas isto parece dever-se a Hiparco, assim como a atribuição do nome “arco de 1 grau” a cada parte em que a circunferência ficou dividida. Ele dividiu cada arco de 1^o em 60 partes obtendo o arco de 1 minuto, uma trigonometria baseada em uma única função, na qual para cada arco de circunferência de raio arbitrário, era associada a respectiva corda. Hiparco compilou então a primeira tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos de 0^o a 180^o, em cuja montagem utilizou interpolação linear, observando que num dado determinado círculo a razão do arco para a corda diminui quando o arco diminui de 180^o para 0^o. Resolveu então associar a cada corda de um arco o ângulo central correspondente. Hiparco representou um grande avanço para a Astronomia pois já calculava através de triângulos imaginários traçados sobre a esfera imaginária do céu à noite, de maneira que ele pudesse prever as posições dos planetas, e por isso ele recebeu o título de “Pai da Trigonometria”. Em seu texto sobre Astronomia, o Almagesto, o astrônomo grego Claúdio Ptolomeu (100-170 d.C) ampliou o trabalho de Hiparco, derivando melhores tabelas trigonométricas e definindo aproximadamente as funções trigonométricas inversas arco-seno e arco-cosseno. Ele usou um raio nominal de 60 como base de sua tabela de cordas e deu valores em passos de $1/2^o$ de 0o até 180^o com precisão de 1/3600 de uma unidade. Isto é equivalente a uma tabela de senos para $1/4^o$ de 0^o a 90^o. Ptolomeu trabalhou com axiomas de Euclides e concentrou-se em triângulos planares para desenvolver seu modelo dos corpos celestes girando ao redor da Terra. Ptolomeu viveu e trabalhou em Alexandria. Os detalhes de sua vida não foram preservados – é até possível que ele tenha origem grega. Seu trabalho foi o primeiro sobre trigonometria a circular pela Europa na Idade Média e foi usado por muitos séculos. Seu modelo sobre o céu sobreviveu intacto até o trabalho do astrônomo Polonês Mikolaj Kopernik (Copérnico, 1473-1543), que colocou o sol no centro do sistema solar.

O Universo Geocêntrico

2.4 Árabes e hindus

Depois dos gregos, os matemáticos hindus e árabes trabalharam com trigonometria. Os estudantes árabes traduziram e dominaram o trabalho de seus predecessores gregos e logo passaram além deles. Os matemáticos hindus trabalhavam amplamente com sua própria tradição, que foi obtida independentemente da herança egípcia e babilônica. Os matemáticos hindus foram os primeiros a trabalhar com senos da forma como definimos agora. No século IV, ou talvez mais tarde no século V, o autor desconhecido do tratado astronômico hindu Surya Siddhanta, calculou a função seno para intervalos de 3,75º até 90º. A data do texto não é conhecida – a versão que sobreviveu pode ser de uma data por volta de 400 d.C. -, mas afirma-se ter sido passada diretamente pelo deus sol em 2.163.101 a.C.! O texto Aryabhatiya de Aryabhata I (475 – 550), que resume a matemática hindu como ela era na primeira metade do século 6, inclui uma tabela de senos. Brahmagupta também publicou uma tabela de senos para qualquer ângulo em 628. A primeira tabela de tangentes e cotangentes foi criada por volta de 860 pelo astrônomo persa Ahmad ibn' Abdallah Habash al-Hasib al-Marwazi. O astrônomo sírio Abu ábd Allah Muhammad Ibn Jabir Sinanal-Battani al- Harrani as-Sabi' (c. 858-929) formulou uma regra para determinar a elevação do sol acima do horizonte medindo uma sombra (o princípio fundamental dos relógios de sol). Sua "tabela de sombras" é efetivamente uma tabela de cotangentes para ângulos de 1º até 90º, com intervalos de 1º. Ele calculou também a inclinação do eixo da Terra, 23º 35'. Foi através do trabalho de al-Battani que os senos chegaram até a Europa e ele pode tê-los descoberto independentemente do trabalho de Aryabhata. O matemático e astrônomo persa Abu al-Wafa al-Buzjani (940-

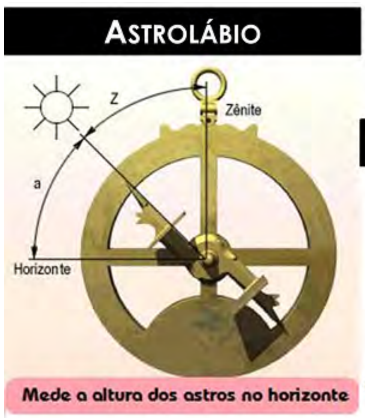
997) trabalhou principalmente com a trigonometria, mas grande parte de seu trabalho foi perdida. Ele introduziu a função tangente e métodos melhorados para calcular tabelas trigonométricas. Ele descobriu a fórmula do seno para a geometria esférica:



$$\frac{sen(CB)}{sen(\alpha)} = \frac{sen(AC)}{sen(\beta)} = \frac{sen(AB)}{sen(\gamma)}$$

Há uma cratera na lua com seu nome em homenagem a seus estudos extensivos sobre os movimentos da lua. Os matemáticos árabes continuaram a refinar as tabelas e a trigonometria exclusivamente a serviço da astronomia até que al-Tusi estabeleceu a trigonometria como uma disciplina separada em seu observatório em Maragheh no século 13. Um dos primeiros resultados foi a explanação matemática do arco-íris por Quatb al-Din al-Shirazi (1236-1311), aluno de al-Tuzi. Ulugh Beg, neto do grande conquistador Mongol Timur (Tamerlão, o Grande), estabeleceu um observatório em Samarkand no início do século 15 e criou tabelas de senos e tangentes para cada minuto de arco, com precisão de 5 casas sexagesimais. Foi uma das grandes conquistas na Matemática até os dias de hoje.

A necessidade de determinar a direção da Meca (qibla) foi um grande incentivo para os avanços Árabes na geometria e na topografia. Em qualquer lugar do mundo eles poderiam se voltar para a cidade sagrada e fazer suas orações, assim como manda o Alcorão. Com essa necessidade em mente, os geômetras árabes adotaram a projeção estereoscópica, que produz uma imagem plana de uma superfície esférica, com os círculos mapeados como círculos ou linhas retas. Consta-se que os primeiros a usar isso foram Apolônio e Ptolomeu. O astrolábio, instrumento astronômico projetado originalmente na Grécia Antiga, foi aperfeiçoado pelos mesmos árabes a partir do século IX. São anéis metálicos concêntricos marcados com as posições do sol, da lua, estrelas e planetas. O simples movimento dos anéis substituía uma grande quantidade de cálculos. O astrolábio podia ser usado na astronomia, controle da hora, levantamento topográfico e triangulação. Como se vê, a combinação de conhecimentos gregos e árabes sobre triângulos foi parar na Europa com a tradução de muitos textos árabes para o latim a partir do século XI. Os europeus aderiram o astrolábio entusiasticamente e ele permaneceu como principal instrumento de navegação até o desenvolvimento do sextante no século XVIII.



2.5 Na modernidade

Os estudiosos europeus da Idade Média nada contribuíram aos trabalhos árabes e gregos sobre trigonometria e geometria, limitando-se apenas à sua tradução. Somente após da explosão do conhecimento científico e matemático na Europa a partir da Renascença é que a trigonometria progrediu novamente. Johannes Müller von Königsberg (1436-76), também conhecido como Regiomontanus, foi o autor do primeiro livro dedicado inteiramente à trigonometria, "Sobre Triângulos de Todos os Tipos (On Triangles os Every Kind)", impresso em 1533. Ele reuniu todas as fórmulas necessárias para trabalhar com trigonometria plana e esférica, sendo muito admirado e influente. Seu trabalho foi usado e adaptado pelo grande astrônomo Polonês Kopernik (Copérnico) em seu novo modelo de um sistema centrado no Sol. Copérnico trabalhou com a ajuda do matemático prussiano Georg Rheticus (1514-76). Em seu próprio trabalho, Rheticus foi mais além que Regiomontanus, finalmente criando a Trigonometria sobre triângulos. Ele descartou a velha tradição de considerar as funções trigonométricas com relação ao arco do círculo, liberando o triângulo para que ficasse independente. Ele calculou tabelas detalhadas para as seis funções trigonométricas e iniciou uma série de tabelas calculadas com um grau de precisão maior, mas morreu antes de completá-las (elas froam terminadas por um de seus alunos).

Esses desenvolvimentos apareceram logo antes da trigonometria, e a geometria como um todo tomou uma nova direção envolvendo-se com a álgebra, com a lenta evolução da geometria algébrica. Com essa mudança fundamental, a trigonometria tornou-se mais teórica, separada das formas do mundo real com as quais ela estava originalmente relacionada, e mais tarde se envolveu com os números imaginários e complexos.

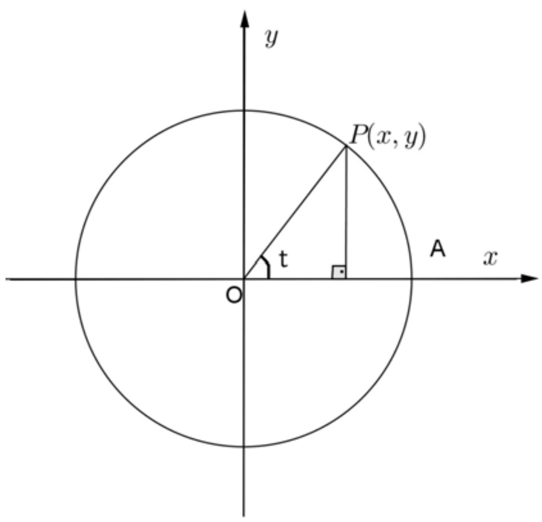
Ao mesmo tempo, porém, as aplicações práticas para a trigonometria estavam crescendo. A invenção de relógios precisos, melhores métodos de navegação e artilharia, bem como novas aplicações para óptica e avanços na astronomia, todos demandavam a aplicação da trigonometria e seu desenvolvimento tomava novos rumos e novas direções.

3 FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

3.1 Seno e Cosseno sendo definidos no círculo unitário

Em seu breve artigo, traduzido para o português pelo Professor Alberto Azevedo, Wu-Yi Hsiang discute a origem e o significado de duas funções trigonométricas básicas: a função seno e a função cosseno, e duas leis fundamentais da trigonometria: a lei do seno e a lei do cosseno. Historicamente, o seno e o cosseno foram introduzidos como razões entre lados de um triângulo retângulo. Entretanto, de um ponto de vista funcional moderno, é mais natural considerar as funções seno e cosseno como as funções definidas no círculo unitário. No sistema de coordenadas cartesianas do plano, o círculo unitário é descrito pela equação:

$$x^2 + y^2 = 1$$



Por outro lado, se um ponto P parte de A(1,0) e caminha sobre o círculo unitário no sentido anti-horário, com velocidade unitária, suas coordenadas x e y são funções do tempo t e são exatamente o par de funções trigonométricas.

Para fixar as ideias, vamos assumir as distâncias medidas em metros e os tempos em segundos. Decorrido, um tempo de t segundos, se $P(t)$ é a posição do ponto no instante t segundos, é claro que as coordenadas de $P(t)$ são funções de t. Definimos $cos(t)$ e $sen(t)$, colocando $P(t) = (cos\, t, sen\, t)$. Assim definimos as funções cos e sen para $t \geq 0$. Observe que para $t \geq 0$ t é a medida do ângulo central que compreende o arco de círculo percorrido pelo ponto P de A a $P(t)$ já que o comprimento do arco é 1 metro por segundo vezes t segundos, que é igual a t metros. Consequentemente a medida do ângulo central é t metros por 1 metro que é igual a t. Aqui, o metro por segundo é a velocidade unitária e 1 metro é o raio da circunferência.

$$x = cos\, t$$

$$y = sen\, t$$

Assim, $cos\, t$ e $sen\, t$ são as coordenadas de um ponto, no instante t segundos, que no instante zero está em (1,0) e percorre a circunferência de centro(0,0) e raio 1 no sentido anti-horário. Agora se $t \leq 0$ consideremos a partícula P inicialmente no ponto $A(1, 0)$ com velocidade unitária, percorrendo o círculo unitário em sentido horário, decorrido um tempo de $-t$ segundos escrevemos a posição da partícula no instante $-t$ segundos como sendo $(cos\, t, sen\, t)$.

A equação cartesiana pode ser considerada como uma descrição estática do círculo unitário, enquanto que o par de equações fornece uma expressão dinâmica do círculo unitário, ou melhor, do movimento circular fundamental. De qualquer maneira, a representação dinâmica acima fornece uma maneira natural de introduzir as funções seno e cosseno definindo-se como o par de funções circulares fundamentais. Na geometria plana, círculos e triângulos são objetos geométricos básicos, simples, dos mais fundamentais. Veremos que o par de funções seno e cosseno fornece as ferramentas analíticas adequadas para o estudo de várias propriedades do círculo. Já as leis do seno e cosseno mostram que essas funções também fornecem as ferramentas básicas para a análise quantitativa das diversas propriedades geométricas dos triângulos. Assim, as duas funções trigonométricas e as duas leis da trigonometria constituem um alicerce único que engloba tanto a geometria dos círculos quanto a dos triângulos, fornecendo uma base firme para toda a Geometria Analítica.

3.2 Propriedades geométricas do círculo e propriedades funcionais do seno e do cosseno

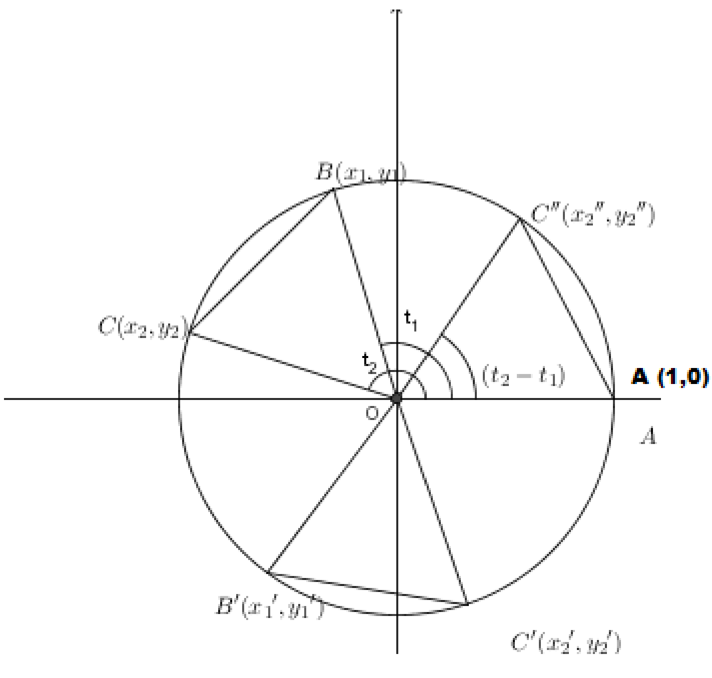
Por definição, funções seno e cosseno representam um par harmonioso; em conjunto representam movimentos periódicos mais fundamentais, a saber, o movimento circular com velocidade unitária, um exemplo interessante seria o movimento das rodas do qual a civilização industrial moderna depende constantemente. Podemos afirmar que há uma correlação direta entre essas e as propriedades geométricas básicas do círculo unitário. à seguir veremos a correlação existente entre as propriedades geométricas do círculo unitário e as propriedades funcionais do seno e do cosseno.

(i) $x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow sen^2t + cos^2t = 1$

(ii) A simetria por rotação do círculo unitário $\Leftrightarrow$ os teoremas de adição das funções seno e cosseno.

Sejam t_1, t_2, t'_1, t'_2, os parâmetros angulares de $B(x_1, y_1), C(x_2, y_2), B'(x'_1, y'_1)$ e $C(x'_2, y'_2)$, respectivamente.

Com essa notação, os triângulos OBC e OB'C' podem coincidir por uma rotação conveniente, isto é, serão congruentes, se, e somente se, $(t_2 - t_1) = (t'_2 - t'_1)$. Assim, tanto o comprimento BC como a área orientada do triângulo OBC dependem somente da diferença entre seus parâmetros angulares, ou, em outras palavras,, estes dois invariantes geométricos são funções de $(t_2 - t_1)$. Portanto, é conveniente calculá-los considerando o caso especial em que $B'' = A(1, 0)$ e $C''(x''_2, y''_2)$ com $t''_1 = 0, t''_2 = 0, t''_2 = t_2 - t_1$. Temos:



$$
\begin{aligned}
BC^2 &= (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \\
&= (cost_2 - cost_1)^2 + (sent_2 - sent_1)^2 \\
&= 2 - 2(cost_2 cost_1 + sent_2 sent_1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
AC''^2 &= (x_2'' - 1)^2 + (y_2'' - 0)^2 \\
AC''^2 &= (cos(t_2 - t_1) - 1)^2 + (sen(t_2 - t_1) - 0)^2 \\
&= 2 - 2cos(t_2 - t_1)
\end{aligned}
$$

O que demonstra a fórmula de adição para a função cosseno:
$cos(t_2 - t_1) = cost_2cost_1 + sent_2sent_1$.

Analogamente, pela fórmula usual para a área dos triângulos, indicaremos a área do triângulo ABC por:

$$A(OBC) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} cost_1 & cost_2 \\ sent_1 & sent_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(cost_1sent_2 - cost_2sent_1)$$

$$A(OAC'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & cos(t_2 - t_1) \\ 0 & sen(t_2 - t_1) \end{vmatrix} = \frac{1}{2}sen(t_2 - t_1)$$

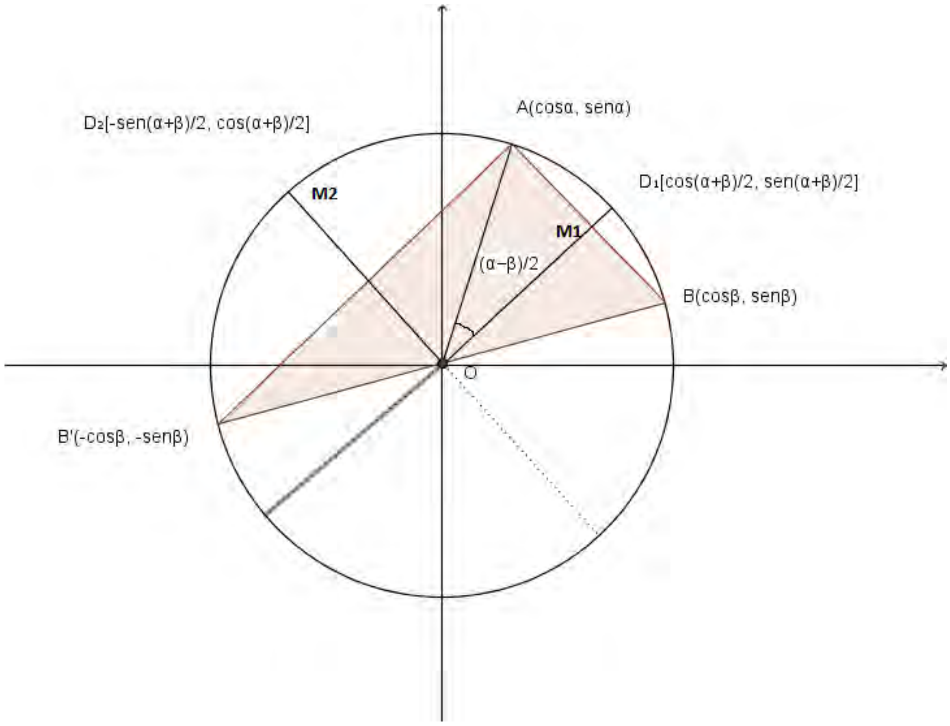
O que demonstra a fórmula de adição da função seno:
$sen(t_2 - t_1) = sent_2cost_1 - cost_2sent_1$

A breve discussão acima mostra que, tanto para o seno quanto para o cosseno, os teoremas fundamentais de adição são consequências diretas das definições e da simetria por rotação do círculo unitário.

(iii) A simetria por reflexão do círculo unitário $\Leftrightarrow$ as fórmulas que "convertem somas em produtos":

$$\begin{cases} cos\alpha + cos\beta & = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ cos\alpha - cos\beta & = -2sen\frac{\alpha+\beta}{2}sen\frac{\alpha-\beta}{2} \\ sen\alpha + sen\beta & = 2sen\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\ sen\alpha - sen\beta & = 2cos\frac{\alpha+\beta}{2}cos\frac{\alpha-\beta}{2} \end{cases}$$

As fórmulas acima podem ser facilmente deduzidas por manipulações algébricas, a demonstração geométrica que vamos dar a seguir mostra que elas estão diretamente relacionadas à simetria por reflexão, tanto no círculo quanto no triângulo isósceles.



Como indicado na figura acima, o triângulo OAB (respectivamente OAB') e o círculo unitário são ambos simétricos relativamente à reflexão em torno do diâmetro OM_1 (respectivamente OM_2). As coordenadas do ponto médio M_1 (respectivamente M_2) de AB (respectivamente AB') são dadas por $\frac{1}{2}(cos\alpha + cos\beta)$ e $\frac{1}{2}(sen\alpha + sen\beta)$ (respectivamente $\frac{1}{2}(cos\alpha - cos\beta)$ e $\frac{1}{2}(sen\alpha - sen\beta)$). Por outro lado, o comprimento de OM_1(respectivamente OM_2) é igual a $cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (respectivamente $sen\frac{\alpha-\beta}{2}$). Consequentemente suas coordenadas são também iguais a $cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (respectivamente $sen\frac{\alpha-\beta}{2}$) vezes as coordenadas de D_1 (respectivamente D_2). Isto fornece as equações:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(cos\alpha + cos\beta) & = cos\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{1}{2}(sen\alpha + sen\beta) & = cos\frac{\alpha-\beta}{2}sen\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{1}{2}(cos\alpha - cos\beta) & = -sen\frac{\alpha-\beta}{2}sen\frac{\alpha+\beta}{2} \\ \frac{1}{2}(sen\alpha - sen\beta) & = sen\frac{\alpha-\beta}{2}cos\frac{\alpha+\beta}{2} \end{cases}$$

A demonstração acima mostra claramente o significado geométrico das fórmulas:

(iv) O significado geométrico das fórmulas do ângulo-metade.

No caso especial em que $\beta = 0$, a primeira e terceira equações ficam:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\,(cos\alpha + 1) & = \cos^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \\ \frac{1}{2}\,(1 - cos\alpha) & = sen^2\frac{\alpha}{2} \Rightarrow sen\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \end{cases}$$

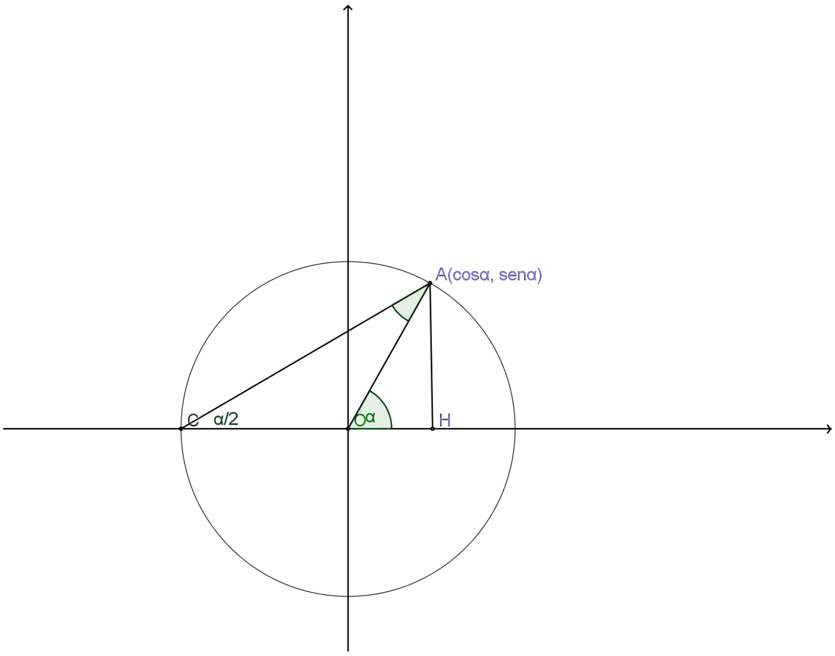
Como indicamos na figura abaixo , o triângulo OAC é isósceles e, portanto $\widehat{A} = \widehat{B} = \frac{1}{2}$. Ademais,

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{AH}{CH} = \frac{sen\alpha}{1 + cos\alpha}$$

Usando a fórmula acima e a identidade $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, deduzimos facilmente as fórmulas:

$$sen\alpha = \frac{2tg\,(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}$$
$$cos\alpha = \frac{1 - tg^2(\alpha/2)}{1 + tg^2(\alpha/2)}$$

que são de imensa utilidade no cálculo das integrais de funções racionais de $senx$ e $cosx$.



3.3 As leis da trigonometria e a análise quantitativa dos invariantes geométricos básicos dos triângulos

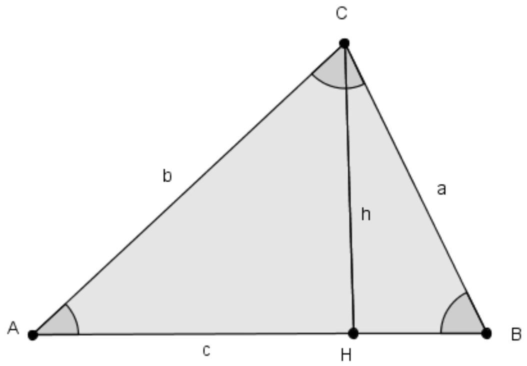
Como sabemos os seis elementos de um triângulo são os seus três ângulos e os seus três lados. Procuremos aqui indicar os três ângulos do triângulo ABC pelas letras A, B, C e por a, b, c os comprimentos dos seus respectivos lados opostos.

(i) Lei do Cosseno

As condições de congruência como L.A.L. (lado, ângulo, lado) e L.L.L (lado, lado, lado) mostram claramente que os seis elementos de um triângulo são relacionados funcionalmente. Por exemplo, L.L.L implica que os três ângulos são funções dos três lados. A Lei do cosseno fornece expressões explícitas dos cossenos dos ângulos como funções dos lados. Considerando a projeção ortogonal de AC e de BC sobre AB, vemos que $c = b \times cosA + a \times cosB$. De modo análogo, obtemos:

$$\begin{cases} c = bcosA + acosB \\ b = acosC + ccosA \\ a = bcosC + ccosB \end{cases}$$

Considerando o sistema de equações acima como um sistema de três equações lineares nas variáveis cosA, cosB e cosC e coeficientes a, b e c, obtemos a seguinte solução, que é a versão explícita da lei do cosseno:



$$\begin{cases} cosA = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \\ cosB = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \\ cosC = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} \end{cases}$$

(ii) Lei do seno

Como indicado anteriormente, a área do triângulo ABC, que será indicada por A, é igual a $\frac{1}{2}$AB.CH, ou seja,

$$A = \frac{c.h}{2} = \frac{c.b.senA}{2}$$

e, daí,

$$\frac{senA}{a} = \frac{2A}{abc}$$

e, portanto, obtemos a lei do seno:

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c} = \frac{2A}{abc}$$

À seguir, temos duas outras demonstrações da Lei do seno.

2ª demonstração: Expressando $\frac{sen^2 A}{a^2}$, em função dos lados, de modo que:

$$\frac{sen^2 A}{a^2} = \frac{1 - cos^2 A}{a^2} = \frac{4b^2c^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}{4a^2b^2c^2}$$
$$= \frac{2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)}{4a^2b^2c^2}$$

Como a expressão acima é simétrica em relação a a, b, c, é claro que

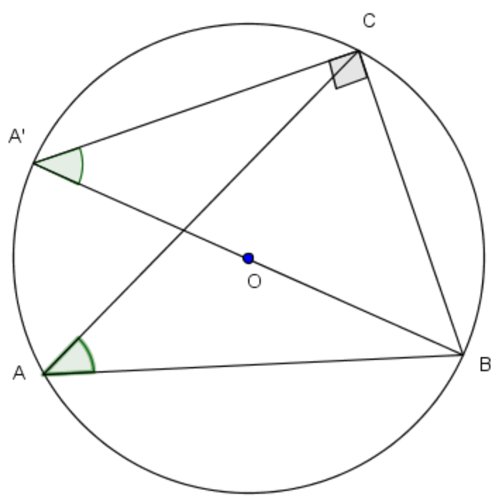
$$\frac{sen^2 A}{a^2} = \frac{sen^2 B}{b^2} = \frac{sen^2 C}{c^2}$$

e, portanto, visto que $senA, senB, senC$ são todos positivos:

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c}$$

3ª demonstração:

Como indicado na figura abaixo, BA' é um diâmetro do círculo circunscrito ao triângulo ABC. Consequentemente $\widehat{A} = \widehat{A'}$ e o triângulo A'BC é retângulo.



É claro que

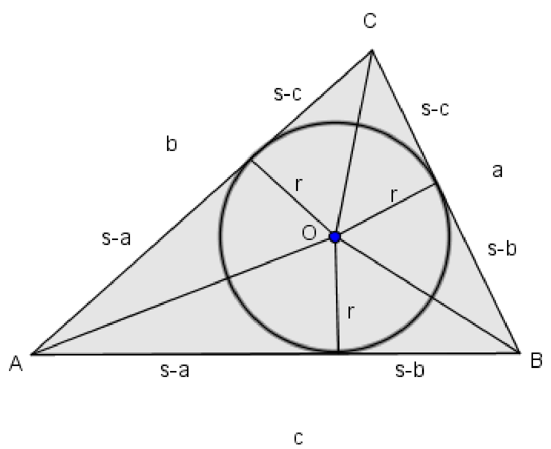
$$senA = senA' = \frac{a}{2R}$$

onde R é o raio do círculo circunscrito. Logo,

$$\frac{senA}{a} = \frac{senB}{b} = \frac{senC}{c} = \frac{1}{2R}.$$

(iii) Fórmulas do arco-metade e o círculo inscrito

Os círculos circunscrito e inscrito podem ser associados ao triângulo de uma maneira natural. O circuncentro é a intersecção comum dos três eixos de simetria dos lados, enquanto que o centro do círculo inscrito é a intersecção comum dos três eixos de simetria dos ângulos. A fórmula anterior expressa o raio R do círculo circunscrito em termos dos lados e da área. Analisaremos agora como se configura geometricamente com o círculo inscrito de maneira natural.



Como indicado na figura acima,

$$A = A_{ABC} = A_{OAB} + A_{OBC} + A_{OCA} = \frac{r(c+a+b)}{2} = rs$$

Segue-se que

$$r = \frac{A}{s} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Ademais, se indicarmos por x, y, z, respectivamente o comprimento das duas tangentes ao círculo inscrito, traçadas a partir de A, B,C, teremos:

$$\begin{cases} x + y = c \\ y + z = a \\ z + x = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = s - a \\ y = s - b \\ z = s - c \end{cases}$$

Portanto,

$$\begin{cases} tg\frac{A}{2} = \frac{r}{s-a} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} \\ tg\frac{B}{2} = \frac{r}{s-b} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} \\ tg\frac{C}{2} = \frac{r}{s-c} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} \end{cases}$$

A partir deste ponto é fácil deduzir as fórmulas para o seno e o cosseno do ângulo-metade

$$\begin{cases} cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \\ cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}} \\ cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} \end{cases} \qquad \begin{cases} sen\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \\ sen\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \\ sen\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}} \end{cases}$$

3.4 Algumas observações adicionais

(i) Geometricamente, cos t é o comprimento orientado de OX que, por sua vez, é a projeção ortogonal de OP; já sen t é o dobro da área orientada do triângulo OAP. Assim, é natural que a demonstração da lei do cosseno tenha usado a projeção ortogonal de um triângulo sobre seus três valores e a primeira demonstração da lei do seno, a fórmula da área de um triângulo. De forma análoga, a demonstração do teorema de adição da função cosseno usou a decomposição ortogonal do comprimento, isto é, o teorema de Pitágoras, enquanto que a do teorema de adição da função seno, a fórmula da área de um triângulo.

(ii) A primeira demonstração que demos da lei do seno é a mais natural das três apresentadas. Não é necessário saber a forma final da lei do seno pra descobrir o caminho da primeira demonstração; a expressão final para $\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c}$ simplesmente surge como resposta natural para a abordagem mais natural. Por outro lado, se já se sabe que $\frac{sen(A)}{a} = \frac{sen(B)}{b} = \frac{sen(C)}{c}$, então não há dificuldade em calcular, utilizando a lei do cosseno, o valor comum acima em termos apenas dos comprimentos dos três lados, e a resposta final deve ser uma função simétrica de a, b, c. Precisamente esta é a segunda demonstração.

(iii) As funções seno e cosseno formam um par harmonioso pois juntas representam um movimento periódico mais fundamental: a rotação circular com velocidade unitária. A rigor podemos até formalizar este casamento matemático do seno e cosseno dentro do contexto dos números complexos.

4 ALGUMAS ABORDAGENS PRÁTICAS

Tradicionalmente, a aula de Trigonometria funciona de forma estritamente expositiva, onde o professor introduz cada conceito formalmente, resolve alguns exemplos cuidadosamente enquanto os alunos copiam, e logo depois fornece uma série de exercícios graduais no nível de dificuldade para que os alunos resolvam. As definições abstratas são trabalhadas antes que possamos considerar quaisquer exemplos práticos.

4.1 Solidificando conceitos

Alguns experimentos práticos poderiam ser feitos antes mesmo que possamos introduzir seno, cosseno e tangente na vida dos alunos? Talvez possamos dar mais sentido ao estudo de Trigonometria se começarmos trazendo problemas simples que exigem um mínimo de recurso matemático e conhecimento algébrico antes mesmo de formalizar as Razões Trigonométricas. Foi o que demonstrou ter feito em seu breve artigo, Michael Cavanagh, onde introduziu sua nova abordagem ao Ensino de Trigonometria.

"...Foi só quando eu empreendi um estudo mais aprofundado alguns anos depois que foram expostas a formas alternativas de pensar sobre a natureza da matemática e sua pedagogia, que comecei a reavaliar minha prática em sala de aula. Não houve nenhuma luz ofuscante ou conversão repentina, mas, com o tempo, eu fazia algumas mudanças significativas em meu ensino. Em minhas aulas de trigonometria não mais ficava seguindo o livro tão servilmente, alterando a ordem em que estudantes abordavam as ideias básicas associadas com triângulos retângulos, e reconsiderando os tipos de atividades em sala de aula fornecidas para os alunos. Eu estava também consciente das Normas de Excelência em Ensino da Matemática em Escolas australianos (AAMT , 2002) e os conselhos sobre a prática profissional em Domínio 3. Em particular, eu queria usar uma variedade de estratégias de ensino e tentar tomar conta do conhecimento matemático prévio dos alunos."

O autor em seu artigo considerou que para o aluno de nono ano, o importante era compreender que "Seno ", "cosseno "e "tangente "são índices cujo valor depende relativamente ao tamanho dos lados de um triângulo retângulo. Isso foi possível através de um trabalho em classe em que os alunos dividiam-se em grupos e mediam os lados de um triângulo retângulo, faziam experimentos utilizando a ideia de gradiente, onde seu valor dependia da inclinação da reta. Em outras palavras, eles estavam descobrindo a necessidade da tangente antes mesmo de saber de sua existência. De forma também experimental, o professor os pediu para que tentassem medir a altura de um mastro localizado no pátio da escola usando a tabela com os valores encontrados no experimento anterior. Observou que havia uma grande propagação de valores, do sublime ao o ridículo, mesmo assim reconhecendo que havia se tratado de uma atividade interessante, pois mostrava aos alunos uma aplicação prática do trabalho que vinha fazendo. E concluiu:

"...Eu fui capaz de ganhar de volta uma parte do tempo extra gasto no início da unidade quando eu apresentei as outras relações, porque os alunos não precisaram tanta prática com eles. Eu já tinha ângulos de elevação cobertos de alguns detalhes para que o trabalho não precisasse ser feito novamente. Eu também passei menos tempo lidando com erros e equívocos por parte dos alunos, porque eles tinham uma base sólida nos conceitos. Eu tenho um palpite de que podem até lembrar-se de seu trabalho de trigonometria, a longo prazo também."

Fica bem óbvio que trabalhos experimentais são em boa parte, catastróficos. Mas isso está longe de ser negativo sob o ponto de vista da construção do conhecimento. Os erros são importantes. Através deles que descobrimos quais equívocos não deverão ser repetidos da próxima vez em que estivermos diante de situações iguais ou similares. Tão importante quanto a prática algébrica é entender o fundamento prático e a necessidade de uso daquela ferramenta matemática no cotidiano.

4.2 Ordem invertida

Rerforçando toda argumentação acima descrita, Sérgio Apparecido Lorenzato, professor na Faculdade de Educação da Universidade Estadual de Campinas, lembra que, quando dava aula na educação básica, não gostava de ensinar Trigonometria, por ser um conceito muito abstrato. "Quando divido o cateto oposto pelo cateto adjacente encontro o valor da tangente, mas o aluno que nem se lembra do que é seno e cosseno se pergunta: Como divido duas coisas que não entendi direito para encontrar uma terceira?"Nem ele via beleza em ficar jogando elementos de um lado para o outro para encontrar um número que representa um ângulo. Achava o assunto muito árido e difícil de manter os alunos interessados. "Só conseguia dar um argumento: cai no vestibular", conta Sérgio. "Isso é muito triste, mas faz parte da herança tradicional que temos."

Outra forma de ajudar os alunos é usar aplicações práticas. O engenheiro de uma ponte deve pensar de um jeito matemático para calcular a largura do rio e para isso usa a trigonometria. Sérgio também volta à importância dos sentidos na hora de ensinar. O professor tem de partir de onde a pessoa está em termos de conhecimento e, se puder mostrar desenhos ou usar objetos que possa pegar nas mãos, ajuda o aluno a entender as explicações tradicionais. "Quanto mais sentidos a pessoa puder usar, melhor, e para chegar ao rigor da fórmula é preciso primeiro abrir mão do próprio rigor."

A matemática pode ser dividida em três grandes áreas: aritmética, álgebra e geometria. Agora que dá aulas para futuros professores, Sérgio percebe que a maioria dos professores não gosta de ensinar geometria. "Seguramente, geometria é a preterida e é a parte da matemática que acho mais fácil e mais bonita."Para ele, é um desperdício não aproveitar a geometria para cativar os alunos, pois o primeiro contato da criança com a matemática é por meio de obejtos com formas e cores. "Há muitos anos a educação tem sido voltada para a aritmética", diz Sérgio. "Por isso quando perguntam o que é matemática, as pessoas respondem que são números, cálculos e problemas."

Sérgio diz que as crianças evoluem em três etapas diferentes da geometria: a topológica, a projetiva e, por fim, a euclidiana. No entanto, quem estuda no máximo até o ensino médio, provavelmente só estuda a geometria euclidiana. Aos dois ou três anos, a criança está na etapa topológica: "Vê um pufe e chama de bola, porque para ela tudo é redondo. Ela não vê ângulos, então se o objeto tem a curvatura fechada, será uma bola."Topólogos também pensam assim: uma caneca de chá e uma rosquinha são objetos topologicamente equivalentes; um triângulo, um quadrado e uma bola são tudo a mesma coisa, pois fazendo transformações topológicas o topólogo transforma um no outro.

A criança então chega à segunda etapa entre os quatro e os seis anos, quando começa a perceber que a forma dos objetos depende da posição do observador. Certo dia, Sérgio estava em um shopping em Campinas, e viu um menino de uns cinco anos brincando num banco daqueles envernizados e sem encosto. "Ele deslizava em cima do banco, curtindo a brincadeira, daí falou para si mesmo: 'Esse banco era pequeno, agora ele é grande.' Então encostou o rosto no banco e falou: 'Agora aquele lá é pequeno.'"O menino queria dizer que quando estava perto do banco, o outro parecia pequeno, mas se chegasse perto do outro banco, aquele que parecia grande se tornava pequeno. A escola não começa a ensinar topologia, segue para a geometria projetiva e depois para a euclidiana, ela começa mostrando as faces das figuras: um círculo, um quadrado, um paralelogramo, depois começa a perguntar a área das figuras. "A escola transforma tudo em números! E diz que tudo é fixo, quando a percepção da criança mostra o contrário."

> "A matemática é, essencialmente, construtiva: seus instrumentos geralmente são com base na intuição e no espírito inventivo e, somente, numa segunda fase, são estruturados axiomaticamente. No nosso modo de ver, ninguém assimilará Matemática começando pela segunda fase, pois não desenvolverá a capacidade inventiva necessária para acompanhar sua estruturação". (Brasil, 1977, p.22)

4.3 O teodolito

A atividade realizada na Estadual Prof. Teodoro Coelho – EEPTC, em Juiz de Fora, visa a construção e utilização de um instrumento óptico utilizado, em geral, na construção civil, chamado Teodolito, cuja funcionalidade é a de realizar medidas indiretas de grandes distâncias. Este mesmo objetiva demonstrar algumas aplicações práticas da

Trigonometria trabalhada no nono ano do Ensino Fundamental ou no1º ano do Ensino médio, levando os alunos a relacionar o conteúdo à realidade, estimulá-lo a tirar suas próprias conclusões antes da necessidade de memorização das fórmulas.

Após alguma explanação teórica a respeito do conteúdo referente à trigonometria no triângulo retângulo e uma pesquisa orientada pelo professor, a respeito das funcionalidades do teodolito, os alunos iniciaram a construção de seus próprios instrumentos de pesquisa para a realização das atividades práticas.

4.3.1 Material

– Uma folha A4 com um transferidor impresso e colado numa base de madeira ou papelão

– Um pote plástico com tampa

– Um pedaço de arame para servir de agulha

– Um canudo para servir de mira

– Uma tachinha.

4.3.2 Procedimento

Fixando a tampa no pote da base central do transferidor impresso, fazendo com que o sistema permaneça móvel.

Logo após a construção, foi proposto um problema de ordem prática, onde os alunos teriam que medir a altura da parede de sua sala de aula, de modo que poderiam estar se certificando, posteriormente, a respeito do resultado encontrado. Obviamente ocorreram divergências entre os resultados por conta das aproximações usadas por cada grupo de alunos e devido às imperfeições dos aparelhos construídos com materiais trazidos de casa. Mas em sua grande maioria, o resultado das contas não foi muito discrepante da real altura da parede.

Num segundo momento da atividade, os alunos foram levados para o pátio onde uma nova atividade foi proposta: descobrir a altura do mastro onde se hasteia a bandeira. Mas para uma posterior certificação dos cálculo, alguns alunos se prontificaram a medir a altura do mastro através de fita métrica. De certo, que a partir desta atividade, novamente percebemos a importância de aulas prática através de situações cotidianas, pois aumentam o interesse dos estudantes nas aulas, possibilitando um melhor aprendizado. E é principalmente, através de atividades como essa, que podemos eventualmente nos deparar com momentos bem interessantes, como por exemplo, o fato de um dos grupos usar o teodolito com um ângulo fixo em 45°. E, quando indagados do porquê, os mesmos responderam que desta maneira poderiam se utilizar das propriedades do triângulo retângulo isósceles, medindo apenas a distância do teodolito até o anteparo escolhido. A atividade mostrou-se muito proveitosa, pois o envolvimento dos alunos foi digno de elogios e a utilização de material concreto tirou um pouco daquele engessamento das aulas tradicionais.

4.4 Eratóstenes e a medida da circunferência terrestre

Uma situação também interessante, mas nitidamente muito mais complexa que medir a altura de um simples poste ou construir um teodolito com transferidor foi idealizada em duas escolas em turmas de 9° ano, uma no Rio de Janeiro e outra em São Paulo. A ideia era refazer o experimento que deu fama ao astrônomo grego Eratóstenes (276 a.C – 194 a.C) e estimar a circunferência da Terra com poucos instrumentos e matemática.

4.4.1 Um problema com São Pedro

Em dezembro de 2013, Juliana Jong e Ayrton Olivares, professores no Colégio Vital Brazil, e Cláudia Moura, professora na Escola Municipal Pará, foram convidados pela Revista Cálculo para participar de uma atividade. Muitos alunos já estavam de férias, então seria difícil reuni-los no solstício de verão do hemisfério sul (21 de dezembro), cinco dias antes do Natal. Por isso, combinaram a atividade para depois da volta às aulas, no dia 18 de fevereiro. Durante janeiro e fevereiro os paulistas não viram chuva por quase 20 dias seguidos, e os cariocas, por 29 dias seguidos. Mas a partir do dia 17, aconteceu a única coisa que não poderia acontecer: São Pedro mandou descer chuva, e chuva forte, por vários dias. Como é duro depender da boa vontade da meteorologia, dos corpos celestes, desse mundo imperfeito...Pelo menos não tinham marcado a atividade para o solstício de verão, senão nem a teoria das probabilidades iria justificar tanto azar.

No dia 21, o sol reapareceu. No Rio, às 11 horas da manhã, Cláudia reuniu 30 alunos do 9º ano para fazer a atividade e depois contar a experiência ao restante dos colegas. Cada um trouxe um aparato: um aluno levou a trena, outro levou o barbante, um pegou emprestado da escola a régua, o transferidor e o esquadro de madeira tamanha família, além do cabo de vassoura. Os alunos precisaram da autorização dos pais para ficar na escola até depois da aula, e mesmo quem não estava escalado quis participar. Um deles se aproximou de Cláudia com um bilhete em mãos: "Professora, posso ficar? Meu pai deixou eu ficar, olha só!" Até os professores de ciências, de geografia e de educação física quiseram ficar. Enquanto isso, em São Paulo, Juliana chamou as turmas de 9º ano para subir para a quadra esportiva no topo da escola. Mais de 40 alunos se sentaram no chão para observar o grupinho de voluntários que faria medições. Ayrton explicou o que os colegas iam fazer lá no círculo central da quadra. Eles marcaram com giz onde o cabo ficaria em pé e, enquanto um aluno segurava o cabo na perpendicular, Juliana amarrou a ponta do rolo de barbante no pé da bússola do celular, configurada para achar o norte verdadeiro, e a colocou bem abaixo do cabo. Alguém foi até mais ou menos um metro do cabo, e marcou um X na direção norte. Outro aluno pegou o rolo de barbante e o desenrolou até chegar no X, deixou o barbante bem retinho para que depois pudesse traçar a linha do cabo até o X. Então fizeram o mesmo na direção sul e, pronto, tinham marcado o meridiano local, uma linha imaginária indicando o círculo máximo que passa pelo lugar onde estavam e pelos polos norte e sul. No Rio, os alunos usaram uma bússola de celular para encontrar e marcar uma linha do cabo até um ponto X em direção ao norte magnético. Cláudia usou um transferidor para adicionar alguns graus ao ponto X e marcar o norte verdadeiro (essa compensação do norte magnético varia de cidade para cidade, e o estudante pode achá-la na internet). Então traçaram uma nova linha mais a leste da primeira linha para representar o meridiano local.

4.4.2 O meio dia verdadeiro

Com ambas as turmas a postos, ficaram esperando o sol chegar ao ponto mais alto de onde estavam: o meio-dia verdadeiro, um momento pouco antes ou depois do meio-dia oficial de Brasília, em que a sombra do cabo estaria bem em cima do meridiano. Lá pelas 11:40, todo mundo já estava nervoso: a sombra, tanto em São Pulo como no Rio, estava longe do meridiano, parecia que não ia chegar a tempo. As sombras, no entanto, começaram a "andar" com rapidez em direção ao sul – mas por que ao sul e não ao norte? Porque estavam em fevereiro e, portanto, mais perto do equinócio no dia 20 de março (quando o dia e a noite têm a mesma duração). Pouco depois, Cláudia enviou uma mensagem de celular para avisar a turma de São Paulo: "Chegou." "As crianças estavam numa agitação só", diz Cláudia. "Quando a sombra chegou no meridiano começaram a gritar, bater palmas, parecia que tinham visto um gol!" Uma aluna usou a trena para representar a hipotenusa do topo do cabo até a ponta da sombra e Cláudia usou o transferidor para medir o tamanho do ângulo entre o topo do cabo e a trena. Os outros alunos se agacharam em volta do cabo, enquanto um segurava o esquadro de madeira para manter o cabo de vassoura na perpendicular, um segundo coordenava as medições e outro segurava o barbante. O restante da turma desenhava no caderno o triângulo que formaram com o cabo e a sombra. Em seguida colocaram um barbante em cima da sombra para depois mostrar aos colegas que não estavam ali. Em São Paulo, alguns voluntários se sentaram no chão ao redor da vassoura e três deles (um segurava o transferidor de madeira e outros dois, o cabo) faziam o que podiam para manter o cabo na perpendicular. Juliana, a professora, ajustava ora o cabo, ora o transferidor, conversando com os alunos enquanto a sombra não chegava ao meridiano. Alguns alunos que antes estavam sentados no canto da quadra só observando começaram a se aproximar, queriam ver a sombra também. Faltava pouquíssimo para o fatídico momento quando (parecia piada de São Pedro) uma nuvem tapou o sol. "Ahhhhh." Inacreditável. Juliana brincou com um aluno: "Assopra, assopra para ele sair." Não levou muito e a nuvem se afastou, deixando aparecer no chão a sombra já no meridiano. Juliana desenrolou a trena e a entregou ao aluno que mediu a sombra. Nessa hora pareci uma gincana, os professores se ajoelharam no chão e começaram a fazer contas: dividiram o comprimento da sombra pelo comprimento do cabo (eles já tinham medido o cabo antes da atividade), e encontraram um número com muitas casas decimais – era a tangente do ângulo xSP (figura 1). Um aluno pegou a tabela de razões trigonométricas e, a pedido de alguém (ele ainda não estudou essa tabela), procurou a tangente e anunciou o ângulo formado entre o topo do cabo e o raio do sol: 14^o. No Rio, os alunos foram para uma sala de aula, cada um com uma ficha onde escreveram as medidas coletadas. Então a turma de São Paulo e do Rio trocaram os dados pelo telefone:

São Paulo: Que horas foi a medição?

Rio: Meio dia. E vocês?

São Paulo: Meio-dia e sete. Quanto mede o cabo de vocês?

Ao ouvir o tamanho do cabo, a turma comentou: "Nossa, que cabo grande! Como eles fazem para varrer com uma vassoura tão alta?" Era desse tamanho mesmo, Cláudia explicou depois: “Para que os alunos não tivessem de trazer uma vassoura de casa, usamos a vassoura da escola, e na escola as vassouras são grandes, do tipo industrial.” O cabo da turma em São Paulo era do tipo doméstico.

São Paulo: Nosso cabo mede 1 e 18. Quanto deu a sombra de vocês?

Rio: 19 centímetros. E a de vocês?

São Paulo: 30 centímetros. Mas com um cabo tão grande essa sombra não está pequena demais? Mesmo desconfiados, Ayrton e Juliana usaram os dados e chegaram a um resultado bem diferente da circunferência da Terra:aproximadamente16.503 quilômetros. O que deu errado? Algumas versões da história dizem que Eratóstenes – sem acesso ao Wolfram Alpha, sem telefone celular e sem uma teoria bem estabelecida sobre triângulos – estimou que a Terra tinha : aproximadamente 46.516 quilômetros. O grego deu um banho no pessoal do século 21. As duas turmas conferiram os dados e Cláudia se lembrou do barbante que guardaram com a medida da sombra. A medida da sombra no Rio era na verdade 28,5 centímetros. “Desculpe a falha”, disse Cláudia. Mais tarde explicou que os alunos estavam tão empolgados e nervosos e talvez por isso tivessem passado o valor errado. “Era um em cima do outro e eu dizia: Assim não dá para ver a sombra!” Feitos os ajustes na medida, Juliana refez as contas em São Paulo: “Já melhorou um pouco, mas ainda assim...” Encontrou um resultado de aproximadamente 28.000 quilômetros; muito longe da circunferência da Terra: aproximadamente 40.075 quilômetros. Já era mais de meio-dia quando as turmas terminaram de medir, anotar e fazer contas. Pais, irmãos e motoristas de van escolar esperavam na porta da escola. Os professores, no Rio e em São Paulo , tiveram de dispensar os alunos. Quando a quadra do Colégio Vital Brazil se esvaziou, Juliana ainda pensava em como consertar a estimativa, e de repente se deu conta de que não precisavam ficar naquele sol quente; ela e Ayrton desceram para a biblioteca com os poucos que restaram. Com o caderno na mesa, ela pensou na velocidade em que a Terra gira e estimou quanto devia ser a diferença entre o meio-dia no Rio e em São Paulo. Mudou o valor da sombra do Rio um pouquinho para cima e o de São Paulo um pouquinho para baixo para ver o que acontecia; melhorava, mas não o suficiente. Também reparou que a soma dos ângulos do triângulo que encontraram era maior que 180^o, um pecado na geometria euclidiana. Para que chegassem a uma estimativa boa, as duas turmas precisavam de medidas que após os cálculos levassem a um ângulo de aproximadamente 3^o. Já era quase uma hora; todos se despediram e Juliana ficou sem a resposta para o que havia de errado. No Rio, Cláudia combinou com a turma que na próxima aula os alunos participantes contariam para os colegas o que fizeram. Fariam uma simulação usando o barbante com a medida da sombra, o cabo e as tabelas para anotar os dados. “Eles se empolgaram muito ao pensar que, enquanto mediam aqui (no Rio), a outra turma fazia o mesmo em São Paulo; se sentiram muito importantes de calcular a circunferência da Terra.” Ela decidiu fazer o cálculo da estimativa quando estivesse com a sala toda e também preferiu não explicar os conceitos, como as razões trigonométricas, que os alunos ainda não haviam visto. Ao longo deste ano, os alunos do 9º ano da Escola Municipal Pará vão estudar essas razões, os números irracionais, o teorema de Tales e mais um monte de propriedades sobre triângulos. Cláudia terá um prato cheio de exemplos para explicar esses conceitos. "

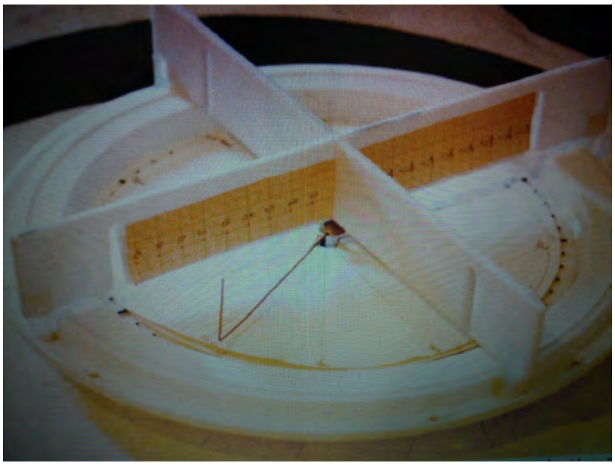
4.4.3 No mundo ideal

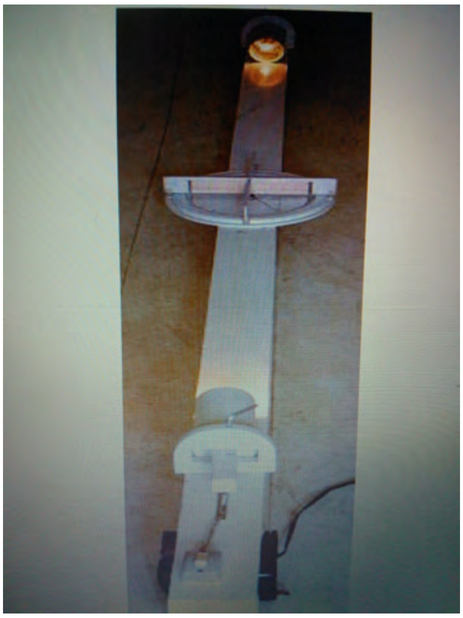
Para que chegássemos mais perto do ideal, o experimento da medição deveria ter sido dia 21 de dezembro, dia do solstício de verão no hemisfério sul. Rio de Janeiro e São Paulo deveriam ficar exatamente no mesmo meridiano. Os esquadros, transferidores e trenas teriam que ser matematicamente perfeitos. Os sistemas eletrônicos como a bússola do celular ou o Wolfram Alpha deveriam calcular com exatidão o norte ou a distância entre as cidades. Os olhos dos alunos e professores deveriam ser tão apurados a ponto de jurar, sob pena capital, que o cabo de vassoura estivesse perfeitamente perpendicular ao chão e que, ainda, o chão fosse uma esfera perfeita com os raios solares de fato incidindo paralelamente sobre o chão.

É claro que Eratóstenes também vivia nesse mundo imperfeito, e nem tinha uma cafeteira. Ele usou uma distância entre Alexandria e Assuã com aproximadamente 100 quilômetros de erro, supôs que as cidades ficavam no mesmo meridiano e que Assuã ficava no trópico de Câncer, onde o solstício não há sombra ao meio-dia. Ele admitiu que a Terra fosse uma esfera perfeita e que o Sol ficava tão distante que poderia considerar os raios paralelos. Ainda assim, com todos os seus erros, suposições e desvantagens típicas de uma época, ele se saiu melhor que muita gente depois dele, e melhor que as turmas de São Paulo e do Rio. Ele era um astrônomo respeitado e conhecia muito bem o céu. Não deve ter pensado no problema da circunferência da Terra da noite para o dia, mas sim por muitas noites e muitos dias. Naquela época, os astrônomos coletavam informações, pensavam e assistiam o céu e os astros como hoje as pessoas veem e discutem novela das oito. Em vez de conseguir todo o conhecimento que hoje o internauta consegue na internet, usavam o que tinham diante dos olhos para atinar com a máquina do mundo."

4.5 Simulador de alarme óptico

Desenvolvido a partir do mecanismo de rotação de um relógio, o equipamento possibilita efetuar medições, que relacionam um ponto, com suas projeções nos eixos. Utilizamos duas fontes de luz que iluminam um ponteiro e com isso provocam uma sombra em um papel milimetrado, simulando um Ponto do ciclo trigonométrico em movimento e suas projeções cosseno e seno.



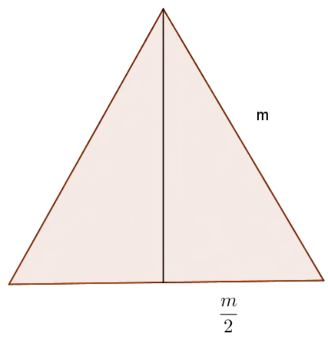


Os alunos serão divididos em dupla e a proposta será a seguinte:

“Você precisa desativar uma bomba nuclear instalada numa base secreta. A bomba é controlada por uma rede de computadores. Para impedir o acesso à rede foi retirado um dos chips do servidor. O seu problema é recolocar o chip que, uma vez acoplado, permite acessar a rede e desarmar a bomba. Este chip é protegido por um sistema de alarme óptico. Ele está em uma câmara fechada na qual existe uma abertura por onde é possível observar a luz proveniente do sistema de alarme, que “varre” constantemente o chip. O alarme pode ser desligado com um tiro na fonte de luz. Você naturalmente não pode ver a fonte de luz, mas nosso serviço de espionagem nos forneceu um modelo para simulação do movimento da fonte. O simulador não contém as mesmas dimensões do sistema a ser desarmado.” Com esse problema procuraremos apresentar um desafio ao aluno, para que ele vá em busca de novas assimilações, já que seus conhecimentos serão insuficientes para chegar à solução. Informaremos que no laboratório temos um equipamento que pode ser um simulador do alarme descrito no problema. Pretendemos, por meio dessa montagem, introduzir o ciclo trigonométrico. Na verdade, observamos no simulador um movimento circular uniforme de um ponto, no sentido anti-horário, com origem fixa. Notemos que esse experimento apresenta caráter quantitativo, pois o aluno deverá coletar dados e, a partir deles, produzir tabelas e gráficos. Assim, poderemos retomar os conceitos básicos de função, tais como Domínio e Imagem, analisar a ligação entre o arco e o seno e cosseno, e ainda as simetrias ao longo dos quadrantes, como por exemplo que $sena = sen(\pi - a)$. Ao longo da experiência, introduziremos o radiano e discutiremos a questão do erro experimental e da necessidade de se tabelarem os valores de seno e cosseno. Procuraremos, se houver oportunidade, dizer aos alunos como isto foi feito na História da Matemática e discutir a tabela trigonométrica e, ainda, como calcular os valores por outras formas, não experimentais. Por exemplo, geometricamente, pode-se calcular o cos 60º. Para isso, basta que os considere um triângulo equilátero e uma das alturas dividindo-o em dois triângulos retângulos. Então:

$$cos60^o = \frac{\frac{m}{2}}{m} = \frac{1}{2}$$

Sendo m a medida do lado do triângulo equilátero.



4.5.1 Material

– Um relógio com diâmetro aproximado de 20 cm. O ponteiro dos segundos fo substituído por uma haste feita com um fio de cobre de 2mm de espessura e comprimento 10 cm, contendo uma dobra em sua ponta final. Ela se desloca em Movimento Circular Uniforme, com período fixo e igual a 60 segundos. Os outros ponteiros foram retirados.

– Dois sarrafos aparelhados de 10 cm de largura por 2,5 cm de espessura e 1 m de comprimento, parafusados no relógio.

– Duas lâmpadas de 25 W w 12 V e dois soquetes.

– Dois transformadores para ligações elétricas individuais.

– Duas placas de acrílico com comprimento igual ao diâmetro do relógio e largura 2,5 cm.

– Dois cilindros metálicos em cujo interior foi feita a instalação das lâmpadas.

– Três rodelas de cartolina branca, de diâmetro igual ao do relógio (para cobrir seus números), todas com 12 divisões, a primeira sem numeração e a segunda com as divisões numeradas em radianos e a última numerada em graus.

– Um pedaço de barbante de comprimento um pouco maior que 20 cm.

– Papel milimetrado, régua, lápis e borracha.

– Gravador, filmadora, máquina fotográfica, lousa, giz colorido.

4.5.2 Procedimento

Iniciamos dizendo aos alunos que neste encontro teríamos um problema para resolver, que foi entregue por escrito e lido em voa alta com eles. Explicamos que foi montado no nosso laboratório um modelo para simular o alarme descrito no problema. Eles poderiam reproduzir o que estaria ocorrendo no momento da retirada do chip e analisar de que forma poderiam se orientar com o propósito de ter sucesso no desarme da bomba. O objetivo era auxiliar a análise do problema em todas as suas nuances, de modo a sugerir diversas formas de solução, que pudessem ser postas em prática sob as mais variadas circunstâncias e situações no momento do desarme. Mostramos então o modelo, dizendo a eles que:

1) A placa acrílica correspondia ao chip, e poderia ser colocada em duas posições: horizontal ou vertical. Previmos que eles deveriam analisar as duas situações, pois não se poderia determinar em qual delas o chip estaria no dia do desarme.

2) A haste do modelo correspondia à fonte de luz no alarme real.

3) A luz projetada no chip, no alarme real, correspondia, no modelo, à sombra da haste. Para produzir a sombra tínhamos lâmpadas, cuja única função era essa. Dissemos ainda que não havia necessidade de se preocupar com as distâncias entre as lâmpadas e o modelo.

4) A dimensões não eram as mesmas, mas o movimento ocorria exatamente como no alarme real.

Nossa expectativa era que os alunos tentassem relacionar os movimentos da haste e da sombra, de forma que pudéssemos fazer um paralelo com o ciclo trigonométrico e as projeções correspondentes a seno e cosseno.

Esperamos que viessem sugestões. Várias duplas tiveram a ideia de construir uma tabela para avaliar o comprimento da sombra em função do tempo. Quando isto não ocorreu procuramos apresentá-la, já que, em nosso entender, as tabelas seriam familiares e ligadas aos conhecimentos anteriores dos alunos, porque são ensinadas quando do estudo das funções. Logo em seguida passamos a discutir a inconveniência de seguir este raciocínio, uma vez que a sombra dependeria da velocidade do foco de luz que, se fosse alterada, tornaria nossos dados totalmente inúteis e nosso trabalho estaria todo perdido. Por fim, discutimos que mesmo a velocidade sendo constatnte, se não fosse possível marcar o tempo (não dispuséssemos de um relógio), teríamos dificuldades para o desarme.

Na situação descrita acima, lançamos as seguintes perguntas: "Conseguiríamos informações ou relações ligadas às características do objeto? Que instrumento matemático poderíamos usar?"

A partir disso, demos a cada dupla um pedaço de barbante e pedimos que com ele medissem a circunferência do simulador e constatassem a relação entre seu comprimento e a medida do raio. Discutimos a fórmula do comprimento da circunferência e também a questão de arcos orientados, que seriam necessários para o estudo. Procuramos induzí-los a construir uma tabela que ligasse o ângulo (em rad.) com a sombra.

Para as duplas que sugeriram o uso do ângulo e o grau como unidade de medida, apresentamos a questão da escala (como representar no eixo a medida de 1 grau). Sugerimos o uso do radiano e, para a medida da sombra, o dm. Estariam relacionando o comprimento do arco percorrido com a sombra e teríamos a mesma unidade de medida, por exemplo, dm para ambos.

Naturalmente o comprimento do arco depende do raio da circunferência a qual ele pertence e o comprimento da circunferência é $2\pi R$. Se considerássemos o raio da circunferência como sendo 1, a medida do arco e do ângulo (em rad.) seria representada pelo mesmo número.

Sugerimos então uma tabela contendo o comprimento do arco e a medida da sombra horizontal (cosseno), concluindo que os valores numéricos de arcos e ângulos eram os mesmos.

Para as duplas que não apresentaram a ideia de uso do ângulo, propusemos direto a ideia de se trabalhar com o comprimento do arco. Para tanto, apresentamos um papel contendo as seguintes sugestões:

arco x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
cos x									
arco x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	$\frac{13\pi}{6}$
cos x									

Nossa preocupação, ao introduzir esta etapa foi evitar que os alunos escolhessem valores para arcos e ângulos nos quais houvesse grande imprecisão, devido à montagem. Foi feita uma avaliação para determinar o erro percentual das medidas obtidas pelo equipamento, e observamos que ele era grande para os ângulos menores que 24º. Assim, procuramos evitar que fossem escolhidos.

Discutimos, a seguir, a questão do sentido do movimento e os arcos que receberão sinal negativo. Sugerimos, para as duplas que não apresentaram esta ideia, a confecção de um gráfico. Entregamos papel milimetrado para isso.

Pedimos que repetissem o procedimento supondo o chip na posição vertical. Nesta etapa nos afastamos e interferimos o mínimo possível no trabalho da dupla. Novamente, entregamos papel milimetrado para o gráfico.

Feito o gráfico, perguntamos se ele referia a uma função e discutimos o porquê. Foi bastante interessante mas o problema que deu origem ao estudo permanecia sem solução.

Discutimos então que, se imaginássemos que existe um sistema cartesiano acoplado ao nosso movimento, cada ponto ou ciclo (ou seja, cada ponto sobre a circunferência orientada, com o sentido anti horário sendo o positivo) poderia ser encontrado desde que conhecêssemos os valores de sua sombras horizontal e vertical, que são respectivamente a abcissa e a ordenada do ponto no plano cartesiano.

Sugerimos que calculassem os valores para as coordenadas de P em alguns casos. Para isso, analisaram a sombra vertical e a sombra horizontal e organizaram os dados em tabelas. Foi associado um sinal a cada sombra, usando a convenção do sistema cartesiano. Um exemplo, a tabela seguinte:

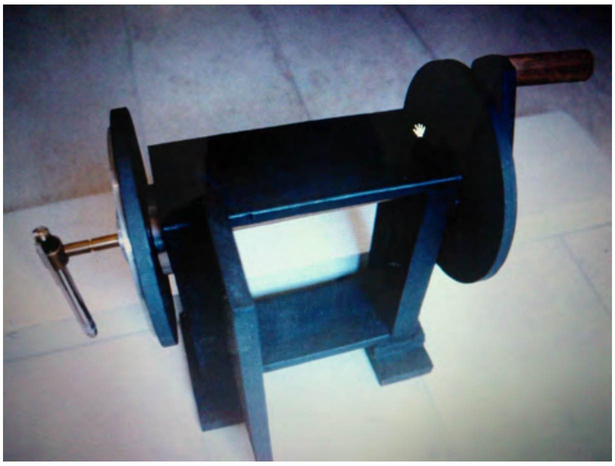
ângulo x(rad)	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π
sombra horizontal(cos x)								
sombra vertical(sen x)								
$cos^2x + sen^2$x								

Desta forma pudemos discutir a necessidade das duas projeções para determinar a posição correta do ponto.

4.6 Roda com a Caneta a Laser

Este segundo experimento foi concebido com o objetivo de estabelecer uma ligação entre o ciclo trigonométrico e as funções seno e cosseno. Nossa ideia foi construir um equipamento de madeira, que possuísse duas rodas acopladas. Em uma delas foi fixado um disco metálico com um suporte para uma caneta com a ponta de luz a laser. Uma vez girando a roda, teremos a projeção da luz sobre um anteparo, e poderemos observar o aparecimento da função cosseno compondo dois movimentos: o circular da roda e um retilíneo do conjunto todo.

Abaixo, a foto do equipamento usado, para melhor entendimento.



Nesta experiência pretendemos propor uma tarefa e não um problema. Os dois alunos da dupla provocarão o movimento de uma caneta em cuja ponta está uma fonte de luz a laser. Esta caneta está acoplada a um disco e um dos alunos irá movimentá-lo, no sentido anti-horário. Teremos assim um movimento circular do disco, aproximadamente uniforme que, por sua vez, provoca um movimento da luzinha da caneta a laser sobre a mesa. O aluno que estará vendo o movimento deverá relatar ao outro a trajetória da luz e, por isso, será chamado por nós de aluno "relator". O outro aluno estará sentado do lado oposto e irá contribuir na realização do movimento empurrando o conjunto todo sempre para a frente. Sua tarefa será fazer um desenho da tarjetória da luz sobre a mesa. Este aluno será denominado "desenhista". Na posição em que estará, não será possível ver a caneta, nem sequer a luz que ela produz, mas ele poderá perceber a roda girando.

A ideia desta atividade é que resulte uma figura com o formato do gráfico da função cosseno. esta experiência tem um caráter puramente qualitativo. Pretendemos colocar o aluno em ação, para que ele possa perceber os invariantes, no sentido dado por Vergnaud, isto é, propriedades tais como amplitude, período, e outras. Não pediremos aos alunos que façam medições, já que nosso objetivo é estabelecer a ligação entre o ciclo trigonométrico e o gráfico da função, percebendo sua forma.

Criamos esta tarefa para tentar observar o que os alunos pensam por intermédio do que dizem. Estaremos com ela, pesquisando a verbalização, que, segundo Vergnaud, está ligada à concepção.

Esperamos que o aluno relator, vendo o movimento, faça a ligação entre o movimento circular da roda e o rastro de luz da caneta que, no caso, é o gráfico da função cosseno. Pretendemos que ele perceba que a trajetória não é um simples desenho e sim uma figura, no sentido dado por Laborde, e que possa perceber o que interfere na formação do rastro de luz.

Pensamos que a dificuldade nesta tarefa está em o aluno perceber que ele deve descrever o efeito e não a causa. De nada adianta, por exemplo, dizer ao colega que o caminho descrito pela luz é a resultante de uma composição de dois movimentos: um circular (da roda) e outro retilíneo (do conjunto todo), pois tal descrição, embora procedente, não fornece subsídios suficientes para o colega, que não viu o efeito produzido pelo giro do disco, possa desenhar a trajetória da luz.

Para fazer uma descrição correta do fenômeno, o aluno relator precisará estar atento para as propriedades e características (os invariantes) que ele quer descrever e, ainda pensar em como descrevê-las. Para tanto surgirão, naturalmente, a necessidade de uma referencial, da observação do sentido e da direção do movimento da luz.

Provavelmente, na primeira tentativa, o aluno desenhista não será bem sucedido, porque nem sempre as informações dadas pelo colega serão suficientes. Por este motivo, daremos à dupla três oportunidades para efetuar o desenho. Feito o primeiro, ele será mostrado ao colega, que dirá se está correto ou não. O aluno relator poderá, a partir dos erros no desenho inicial, acrescentar informações que omitiu e deveriam ser explicitadas para uma melhor compreensão do colega, ou incluir correções nas ideias expostas pelo desenho desse colega. Desta forma, é nossa crença que estaremos permitindo ao aluno diversas aproximações com o objeto, como propõe Vergnaud, facilitando a assimilação dos conceitos.

4.6.1 Material

– Um conjunto composto por duas rodelas interligadas de madeira, um disco metálico acoplado a uma delas, uma manivela contendo um suporte para caneta e um cilindro de madeira para ligar o conjunto.

– Uma caneta com a ponta contendo uma fonte de luz a laser.

– Um apoio com o formato de um paralelepípedo reto retângulo com dimensões 1m, 20 cm e 2 cm, usado na posição indicada na figura.

– Uma mesa com 2m de comprimento por 1,5 m de largura.

– Uma cadeira.

– Gravador, filmadora, máquina fotográfica, lousa, giz colorido.

4.6.2 Procedimento

Explicamos à dupla que teríamos a seginte tarefa a realizar.

Um dos alunos da dupla seria o "aluno desenhista"e faria o papel de observador além de empurrar a base da roda e o outro componente seria o "aluno relator", o qual realizaria o movimento e o descreveria, usando apenas palavras, não podendo usar as mãos ou sinais. Terminada a experiência o aluno desenhista receberia uma folha e tentaria desenhar o movimento realizado pelo foco de luz da caneta a laser. Feito o desenho, ele seria mostrado ao aluno relator, que diria se este desenho coincidia ou não com aquele que ele havia visto. Se estivesse errado, a experiência poderia ser repetida no máximo mais duas vezes.

Pedimos ao aluno desenhista que saísse da sala. Explicamos então, em detalhes, como deveria ser o movimento e qual seria o papel do aluno relator. Pedimos a ele que se ocupasse a cadeira onde ficaria o seu par e, isto feito, ensaiamos como seria a situação. Chamamos a atenção para o fato de que, na posição em que ele estava, e que seria a do colega, não era possível ver a luz e nem saquer saber que ela existiria. Pedimos a ele que observasse bem quais deveriam ser as informações pertinentes para a confecção do desenho. Por fim fizemos um movimento com a caneta e a roda parada, para que ele observasse como iríamos descrever a trajetória resultante. Fizemos a descrição, no caso um segmento de reta, e pedimos que fosse feito um desenho.

Em seguida, o aluno desenhista foi chamado e a experiência realizada.

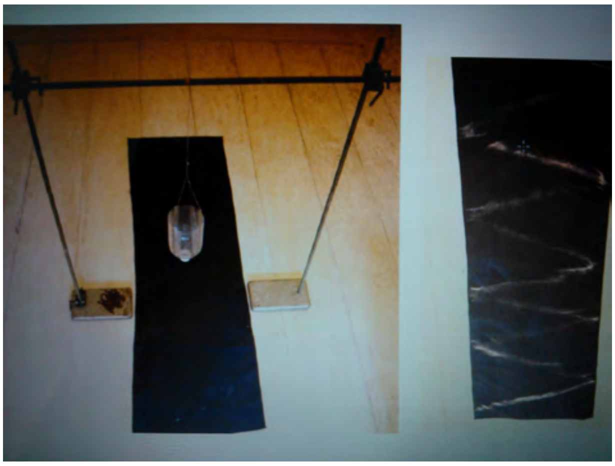
Na discussão da atividade procuramos fazer a conexão entre a trajetória encontrada e o gráfico obtido no experimento do "Simulador". Fizemos a institucionalização desenhando no quadro o ciclo trigonométrico e procurando estabelecer a ligação entre os arcos do ciclo trigonométrico, que por sua vez correspondem a números reais, e a função cosseno. Finalizando, discutimos os desenhos que eles realizaram e repetimos a experiência para que o aluno desenhista pudesse observar a trajetória.

4.7 Experimento Pêndulo de areia

Esse pode ser realizado com o objetivo de levar o aluno a estabelecer uma ligação entre fenômeno periódico e sua forma matemática. No caso, funções que envolvem seno e cosseno.

O equipamento usado será um pêndulo de areia que estará preso em uma haste metálica suspensa sobre uma mesa e um rolo de papel do tipo formulário contínuo para computador.

A figura abaixo refere-se ao equipamento "Pêndulo de areia"e ao rastro formado pela areia, quando da realização da experiência, e que se pode ser observado sobre o rolo de papel. Na foto substituímos o rolo de formulário contínuo por um tecido negro para facilitar a visualização.



A experiência será a seguinte: um dos alunos irá puxar, com velocidade aproximadamente constante, o papel em direção e sentido previamente determinados, enquanto o outro aluno da dupla irá provocar um movimento do pêndulo (paralelo à haste de sustentação, com velocidade não muito grande) ao mesmo tempo em que abrirá a tampa para que a areia caia sobre o papel.

Antes de realizar a experiência, pediremos que façam uma previsão do tipo de rastro de areia que surgirá no papel.

Com este experimento poderemos discutir, mais uma vez, a necessidade de um referencial, a importância da posição, no instante inicial, do furo por onde escapará a areia para a formação do rastro e, ainda, que este depende da direção e sentido para onde é puxado o rolo de papel.

Nossa preocupação aqui foi criar uma situação que desse origem a uma função periódica. Neste caso estaremos trabalhando com o movimento harmônico simples (MHS) do pêndulo de areia, que é um movimento periódico gerado por forças elásticas e que possui velocidade e aceleração variáveis.

Esperamos que com esta atividade os alunos possam perceber que um fenômeno periódico pode ser interpretado matematicamente por meio de funções cujo gráfico se assemelha ao das funções seno ou cosseno. Em outras palavras, esperamos que, a partir da manipulação e da realização do experimento, os alunos possam estabelecer a ligação entre a periodicidade e a função trigonométrica.

Poderemos ainda discutir a amplitude, mudando o comprimento do pêndulo e observando o que ocorre, voltando à questão do raio constante e igual a um, no ciclo trigonométrico, se os alunos levantassem a questão. Surgirá então um caráter interdisciplinar, já que poderemos estabelecer relações, promovendo um entrosamento entre a Física (ciência fenomenológica) e a Matemática. Tal entrosamento, que é altamente desejável, normalmente não surge em uma aula tradicional de trigonometria no Ensino Médio. Tal interação foi tratada anteriormente neste trabalho no item 3 no qual falamos sobre FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS.

4.7.1 Material

– Três hastes metálicas de um 1 m de comprimento cada uma.

– Engates e suportes para as hastes.

– Um invólucro de plástico, feito com uma garrafa de coca-cola de 2 L, cortada a aproximadamente 12 cm da tampa.

– Barbante e fita crepe.

– Areia fina e bem seca.

– Uma tampa para a garrafa com um furo central para escapar a areia.

– Papel formulário contínuo para computador.

– Mesa com 2 m de comprimento por 1,5 m de largura.

4.7.2 Procedimento

O experimento consistiria em provocar o movimento do pêndulo, empurrando-o logo após ter retirado a fita que vedava a saída de areia.

Em seguida, discutimos com os alunos quais os tipos de movimento que poderiam ser produzidos no pêndulo e entre estes, solicitamos que fosse escolhido o movimento horizontal paralelo a haste de sustentação. Enfatizamos, ainda que a velocidade não deveria ser muito grande, de maneira que, quando a tampa fosse retirada, a areia derramada não ultrapassasse o limite do papel.

Antes de iniciarmos o experimento, pedimos que o aluno relator da experiência anterior previsse onde cairia a areia e discutisse que "forma"a areia teria no papel. A seguir o outro aluno disse se concordava com o colega. Só então realizou a experiência e observou se as previsões estavam corretas. Todas as duplas tiveram grande facilidade em descrever o tipo de movimento e não hesitaram no momento de fazer a previsão do rastro como sendo um segmento de reta.

Dissemos então que gostaríamos que o aluno puxasse o papel enquanto o outro produzia o movimento do pêndulo. Nesta sutuação, perguntamos de que forma deveria ser o rastro de areia. Obviamente não mais um segmento de reta. Pensamos que poderia ser uma surpresa para eles o surgimento de um rastro muito parecido com a trajetória do foco de luz da caneta à laser sobre a mesa, porém a maioria das duplas fez a previsão correta do rastro. Os alunos que erraram o desenho apresentaram dificuldades maiores quanto a orientação do rastro do que propriamente quanto à sua forma.

Pedimos que relacionassem o tipo de rastro obtido nesta experiência com a trajetória do foco de luz da caneta a laser, e que estabelecem os porquês das semelhanças.

Na discussão procuramos mostrar que quando temos movimentos periódicos o tipo de gráfico que surge é sempre este que observamos no experimento. Analisamos, ainda, a amplitude, mudando o comprimento do pêndulo e observando o que ocorreu. Discutimos a questão do raio constante e igual a um, do ciclo trigonométrico.

5 UM TRABALHO MOTIVACIONAL

Não é incomum ouvirmos alunos questionarem qual a importância da Matemática em suas vidas, ou então o sentido de existir algo tão abstrato e irrelevante. Esse ano pude fazer algo diferente em sala de aula, motivado pelo trabalho que escrevo e com o objetivo de observar o comportamento dos alunos de uma turma de primeiro ano de ensino médio de uma escola particular. Para minha surpresa, percebi de imediato sua empolgação à possibildade de realizar um trabalho que não era de Matemática, e sim, de História da Matemática. Dentre os temas propostos por mim, havia um mais voltado à Trigonometria, que era justamente mostrar a experiência de Eratóstenes e seu árduo objetivo de medir a circunferência da Terra. Outros temas propostos também envolviam a História da Matemática, como a Civilização babilônica, a importância dos árabes e hindus, o número de ouro e a Escola Pitagórica. Os alunos que ficaram encarregados de apresentar a mim e aos demais colegas de turma o objetivo de Eratóstenes tiraram nota máxima e sua apresentação deixou a turma positivamente perturbada com a originalidade e a perspicácia de Eratóstenes mesmo tendo vivido séculos antes de Cristo. Patrick, o aluno mais extrovertido do grupo explicou através do data show e através de um mapa e uma lâmpada construídos pelo próprio grupo que era impossível raios paralelos e perpendiculares à superfície da Terra provocarem sombra em um determinado ponto e no outro não, sem que houvesse uma curvatura. Em outras palavras, se a superfície da Terra fosse realmente plana, naquele momento não haveria sombra em lugar algum. Eratóstenes foi além, ele através de um método simples para nós, procurou calcular considerando todos os erros já descritos anteriormente, a medida da circunferência terrestre.

Terminada a aula, pude ouvir uma aluna, bem resistente à aprendizagem da Matemática dizer : "Eu não via sentido nenhum em estudar isso, professor. Minhas dificuldades vão continuar, mas já vou olhar a Matemática com outros olhos."Procurando demonstrar apenas parte da tamanha felicidade de ouvir tal frase, eu respondi que todo o conhecimento adquirido e desenvolvido na humanidade em relação à Matemática, por mais abstrato que parecesse, haveria de acontecer uma aplicação, uma grande utilidade no mundo moderno.

5.1 O método de Eratóstenes

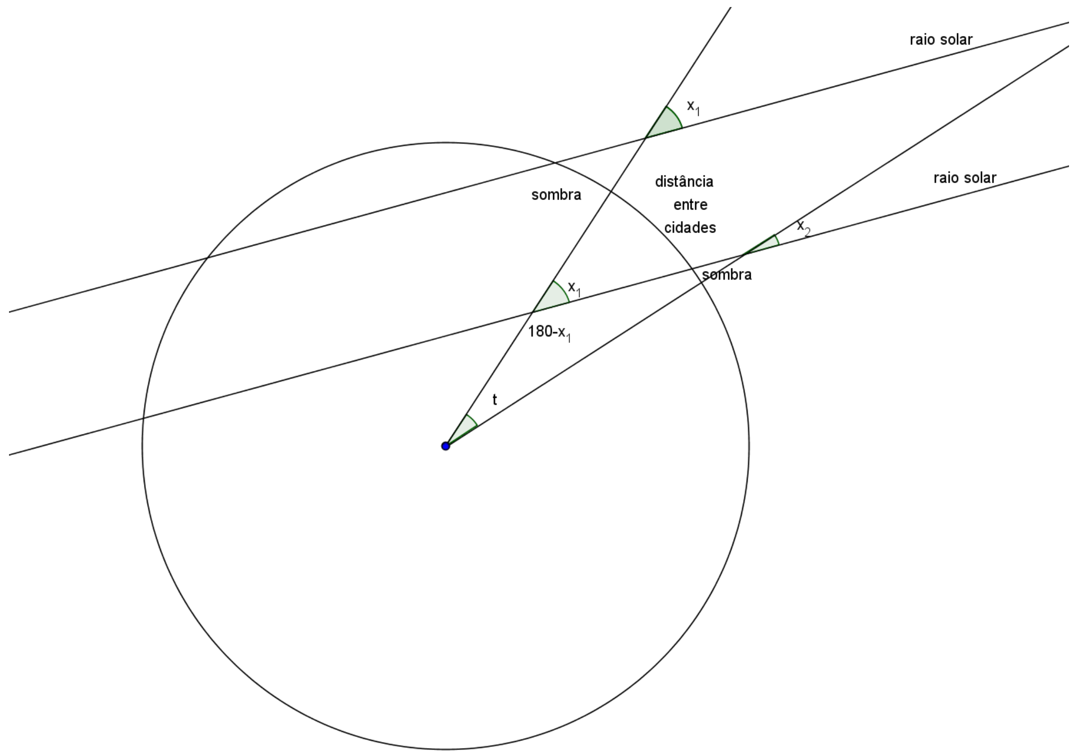
O método consiste em escolher duas cidades que estejam no mesmo meridiano, pois o meridiano é também o círculo máximo. A circunferência do meridiano é a circunferência da Terra. Quanto maior a latitude entre as cidades, melhor, pois aí elas formarão um triângulo com o centro da Terra que é grande o bastante.

Desenha-se o círculo para representar o corte que fez na Terra e marca as cidades no círculo com distâncias razoáveis para efeito de ilustração. Então desenha-se os cabos perpendiculares ao chão (gnômons) em cada uma dessas cidades e seus raios solares sendo projetados sobre eles. Em ambos os casos, divide-se o comprimento da sombra pelo comprimento do cateto oposto ao ângulo x pelo comprimento do cateto adjacente para encontrar a tangente.

$$\frac{sombra}{cabo} = \frac{cat.oposto}{cat.adjacente} = tanx$$

Com o valor da tangente, é possível encontrar na tabela de razões trigonométricas um valor aproximado para o ângulo x. No desenho, o estudante pode prolongar cada cabo até o centro da Terra, formando um triângulo. Sabe pelo teorema de Tales e a propriedade dos ângulos alternos que o ângulo x_1 forma um ângulo de 180º com um dos ângulos do triângulo. Anota-se que x_2 é um dos ângulos do triângulo; então usa o terorema da soma dos ângulos de um triângulo para calcular o ângulo desconhecido (t) no centro da Terra.

$$(180 - x_1) + x_2 + t = 180 \rightarrow t = x_1 - x_2$$



CONCLUSÃO

O que é feito em sala de aula, no que se diz respeito às abordagens didáticas, não somente na matemática quanto da Física, Química e Biologia precisa estar entrelaçado, pois estamos lidando de uma maneira geral com Ciências. Os novos métodos empregados nas escolas procuram fazer desse um norte, enquanto as avaliações e os vestibulares, de uma maneira geral, estão cada vez mais exigindo do aluno um senso crítico às leituras, assim sendo, questões transdisciplinares, multidisciplinares e interdisciplinares. Há quem tenha maior dificuldade de adaptar-se a esses novos tempos e prefira ainda o que possa vir de mais sucinto, tradicional e mecânico. É preciso quebrar alguns paradigmas da educação pública. As escolas particulares, em geral, possuem mais recursos e maior participação dos pais para o melhor desenvolvimento do estudante. Infelizmente, para muitas, há alguns casos de alunos que não gostam das chamadas Ciências exatas, e por conta disso vão deixando de lado todo o ganho que poderia ser adquirido série após série. Não aprendera quase nada na série anterior, e ainda assim de forma medíocre e com notas baixas, consegue ir para a série seguinte. O que é mais raro nessas escolas particulares acaba tornando-se bem mais comum nas escolas públicas.

A compreensão da nova escola pública dos novos tempos, tão citada pelos políticos em promessa de campanha, procura corrigir toda essa carência, pois visa o Ensino Integral, ou seja, o aluno estará na escola durante o período de dois turnos. Se a proposta dessa dissertação encontrar resistência por parte dos professores, o que seria compreensível, afinal, no modelo atual de escola mal há tempo de se trabalhar o conteúdo abstrato, então com esse novo modelo de escola isso será bem possível. Sabemos que é preciso investimentos em recursos didáticos e em qualificação profissional dos professores para que a meta da melhoria da educação pública seja alcançada. O aluno na escola em tempo integral poderá compreender melhor a importância das ciências pois terá tempo de vivenciar os processos práticos sem comprometer os processos abstratos.

A inserção dos recursos computacionais poderá auxiliar o aluno na problematização e na adequação dos dados obtidos nos experimentos. Experimentos esses de Trigonometria sugeridos nesse trabalho, porém com inúmeras possibilidades em outros campos da Matemática, além das disciplinas em que o uso de experimentos nos sempre foi evidente: Química, Física e Biologia.

É reconhecido na Psicologia Cognitiva a necessidade de o aluno estabelecer uma ligação com a vida cotidiana e seus conceitos espontâneos para chegar ao conhecimento científico. Vimos que em alguns casos as tentativas e erros provocados durante as experimentações foram de extrema relevância para o processo. Segundo Piaget o aluno aprende enquanto está resolvendo um problema e também com os próprios enganos, e, com essa sequência didática seguimos os princípios Construtivistas básico proposto pelo mesmo Piaget, no qual o aluno deve desempenhar um papel ativo na construção do conhecimento. Logo o processo se resume em fazer os alunos participarem diretamente na formação dos conceitos em questão, participando ativamente das etapas experimentais.

Com efeito, a "ordem invertida" proposta nesse trabalho defende justamente que os alunos percebam que, antes de qualquer formalização conceitual, existe sim uma necessidade de resolver um problema, um caso particular, histórico, vivido em uma determinada época cujos recursos tecnológicos ainda não permitiam tais resoluções. Desse modo, tocamos tudo aquilo que detona o estopim da motivação, que é justamente a sua curiosidade.

REFERÊNCIAS

Astrolábio e sextante. Disponível em <http://geografares.blogspot.com.br/2013/07/ cartografia.html> Acesso em 15 nov 2014.

BERLINGHOFF, William P. Gouvêa, Fernando Q. *A matemática através dos tempos: um guia fácil e prático para professores e entusiastas*, tradução Elza Gomide, Helena Castro 2ª edição. São Paulo, Blucher, 2010.

BOLEMA, Rio Claro (SP), v.27, n.46, p. 563-577, ago. 2013

BOYER, C. *História da Matemática*, Tradução de Elza Gomide, Ed. Edgard Blucher Ltda, São Paulo, 1974.

BRASIL, Luis Alberto S., *Aplicações da teoria de Piaget ao ensino da matemática*. Rio de Janeiro: Forense-Universitária, 1977.

BRASIL. Presidência da República. *Lei de diretrizes e bases da educação nacional* (Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996). Brasília,1996.

CAVANAGH, M., *Trigonometry from a Diferent Angle*. Australian Mathematics Teacher, v64 n1 p.25-30, 2008.

D'AMBRÓSIO, U. *Transdisciplinaridade* 3a Edição, São Paulo: Palas Athena, 2012.

DO CARMO, Manfredo P., Morgado, Augusto C.O. e Wagner, Eduardo *Trigonometria/Números Complexos Coleção do Professor de Matemática*, SBM, 3a Edição 2005.

FERREIRA, D., *A humanidade não marcha*, Cálculo - Matemática para todos 33, p. 40, ed. Segmento.

Geometria esférica. Disponível em <https://pt.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras> Acesso em 5 jan 2015.

GIARDINETTO, J. R. B. *Matemática Escolar e Matemática da Vida Cotidiana*, Campinas: Autores Associados, 1999.

GRUBER, H.E. Vomech, J.J. The essencial of Piaget Routledge and Kegan Paul Ltda, London, 1977.

HSIANG, Wu-yi, Funções *Trigonométricas e leis da Trigonometria*, RPM 23, p.23, SBM.

LIMA, E. L., Carvalho, Paulo C.P., Wagner, Eduardo e Morgado, Augusto C., *A Matemática do Ensino Médio* Vol 1, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 3ª edição, 1998.

LIMA, E. L., *Meu Professor de Matemática e outras histórias*, Coleção do Professor de Matemática, SBM, 5a Edição, 2006

LOBO DA COSTA, Nielce M., *Funções seno e cosseno: Uma sequência de ensino a partir dos contextos do mundo experimental e do computador*, Dissertação de Mestrado - PUC/SP - 1997

LORENZATO, S. *Para aprender matemática*, 2ª Edição. rev. Campinas: Autores Associados, 2008.

OSONE, M., *A História como problema, a História como remédio*, Cálculo - Matemática para todos 31, p.16, ed. Segmento.

OSONE, M., *Duas turmas, duas cidades, e a circunferência da Terra*, Cálculo - Matemática para todos 39, p.50, ed. Segmento.

OSTERMANN, F. Rezende, F. *Projetos de desenvolvimento e de pesquisa na área de ensino de Ciências e Matemática: uma reflexão sobre os mestrados profissionais*. Cadernos Brasileiros de Ensino de Física, Florianópolis, v.26, n.1, p.66-80, abr.2009.

PIAGET, J. Biology and Knowledge Routledge and Kegan Paul Ltda, London, 1977.

Relógio do zodíaco. Disponível em <http://pt.spiderpic.com/stock-photos/123rf/1590960-sephia-relogio-zodiaco-com-deatail-ouro-e-decoracao>. Acesso em 20 dez 2014.

ROONEY, A. *A História da Matemática - Desde a criação das pirâmides até a exploração do infinito*, M.Books do Brasil editora Ltda, São Paulo, 2012.

ROQUE, T. *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

Universo geocêntrico. Disponível em <http://hypescience.com/12-diagramas-que-mudaram-nossa-compreensao-do-sistema-solar/> Acesso em 20 dez 2014.

VIANA, A., *Eu não gosto de ensinar este tópico*, Cálculo - Matemática para todos 32, p.33, ed. Segmento.

VIGOTSKY, L.S. *Formação social da mente - O desenvolvimento dos Processos Psicológicos Superiores,* Tradução. De J. Cipolla Neto e outros, ed. Martins Fontes, 4ª Edição, São Paulo, 1991.