INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA

AUTOR: SILVIO LUIZ FERNANDES FREITAS

A ARITMÉTICA NO ENSINO MÉDIO.

RIO DE JANEIRO

2015

INSTITUTO NACIONAL DE MATEMÁTICA PURA E APLICADA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÉTICA

AUTOR: SILVIO LUIZ FERNANDES FREITAS

A ARITMÉTICA NO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática.

Sob a orientação do Prof. Dr. **Carlos Gustavo T. de A. Moreira**
Área de Concentração: Ensino de Matemática na Educação Básica

RIO DE JANEIRO

2015

SILVIO LUIZ FERNANDES FREITAS

A ARITMÉTICA NO ENSINO MÉDIO.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Banca Examinadora do Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre Profissional em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática na Educação Básica

DATA DA DEFESA: 25/02/2015

RESULTADO:____________________________

BANCA EXAMINADORA:

Prof. Dr. **Carlos Gustavo T. de A. Moreira (IMPA)**

____

Prof. Dr. **Luiz Amâncio Machado de Sousa Junior (UNIRIO)**

____

Prof. Dr. **Moacyr Alvim Horta Barbosa da Silva (FGV)**

____

“O que sabemos é uma gota, o que ignoramos é um oceano”

Isaac Newton

AGRADECIMENTOS

Ao término deste trabalho, deixo aqui meus sinceros agradecimentos ao Grande Arquiteto do Universo, que é Deus, que me proporcionou escolher este caminho me dando saúde e sabedoria para prossegui-lo.

À meus pais que com muito amor e carinho me conduziram até aqui, sendo exemplos de vida e dedicação a família.

À minha esposa Andreza Silva de Sales Freitas que com muita paciência soube suportar a ausência momentânea de seu esposo em várias noites de sono em busca de um propósito maior.

À meu filho Cauã de Sales Freitas que teve que suportar dias sem que o pai pudesse lhe dar atenção, embora seja uma criança, conduziu com a sabedoria de um ancião todas essas ocasiões.

Aos meus colegas de turma que, direta ou indiretamente, contribuíram para minha formação em especial ao amigo CARLOS WILSON VIEIRA DA SILVA, com quem tenho a honra de compartilhar este trabalho.

Aos professores que, com muita paciência, transformaram minha visão do saber matemático, contribuindo assim, para uma propósito de melhorar a educação dos jovens e adultos do nosso país.

Ao professor Luciano Castro com quem pude trocar informações que contribuíram muito para o desenvolvimento deste trabalho.

Enfim a CAPES, pelo provimento de bolsas de estudos, afim de que pudéssemos nos dedicar melhor aos nossos propósitos.

.

RESUMO

O objetivo principal deste trabalho é o desenvolvimento de uma sequência didática que possa auxiliar professores e alunos no processo de ensino-aprendizagem de conceitos de Aritmética básica no Ensino Médio. Será abordado, como parte introdutória, ao trabalho do Prof. Carlos Wilson Vieira da Silva os tópicos de Divisibilidade, Máximo Divisor Comum (***MDC***), Algoritmo de Euclides e Equações Diofantinas. Os assuntos aqui sugeridos são importantes ferramentas da Teoria dos Números e podem ser encontrados em inúmeras aplicações no nosso dia-a-dia. Para uma abordagem mais aprofundada foram desenvolvidas atividades lúdicas e interativas com aplicação direta no ensino básico com a intenção de demonstrar matematicamente com tais fatos são verdades, não só pela experimentação, mas com as demonstrações dos teoremas envolvidos.

Palavras-chaves: Sequência Didática. Ensino. MDC. Algoritmo de Euclides. Equações Diofantinas.

ABSTRACT

The main objective of this work is the development of a didactic sequence that can help teachers and students in the teaching- learning process of basic arithmetic concepts in high school. Will be addressed, such as introduction to the work of Prof. Carlos Wilson Vieira da Silva topics Severability, Greatest Common Divisor (MDC), Euclidean algorithm and Diophantine equations. The topics suggested here are important tools of number theory and can be found in numerous applications in our day -to-day. For a more in-depth approach were involved play and interactive activities with direct application in primary education with the intention of demonstrating mathematically with these facts are true, not only for experimentation, but with the statements of theorems involved.

Keywords : Teaching Sequence. Education. MDC . Euclidean algorithm . Diophantine equations.

Sumário

Lista de Figuras.

Nota ao Leitor.

O capítulo que se segue foi escrito em conjunto com o Mestrando CARLOS WILSON VIERA DA SILVA, seus parágrafos iniciais foram compilados do sítio digital do MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CULTURA doravante denominado MEC, mais especificamente dos Parâmetros Curriculares Nacionais, edição de 1997 as páginas 15 a 20.

Link: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf (Acesso em 10 de junho de 2014 às 21h00min).

1. INTRODUÇÃO

"O ensino de Matemática costuma provocar duas sensações contraditórias, tanto por parte de quem ensina como por parte de quem aprende: de um lado, a constatação de que se trata de uma área de conhecimento importante; de outro, a insatisfação diante dos resultados negativos obtidos com muita frequência em relação à sua aprendizagem.

A constatação da sua importância apoia-se no fato de que a Matemática desempenha papel decisivo, pois permite resolver problemas da vida cotidiana, tem muitas aplicações no mundo do trabalho e funciona como instrumento essencial para a construção de conhecimentos em outras áreas curriculares. Do mesmo modo, interfere fortemente na formação de capacidades intelectuais, na estruturação do pensamento e na agilização do raciocínio dedutivo do aluno.

A insatisfação revela que há problemas a serem enfrentados, tais como a necessidade de reverter um ensino centrado em procedimentos mecânicos, desprovidos de significados para o aluno. Há urgência em reformular objetivos, rever conteúdos e buscar metodologias compatíveis com a formação que hoje a sociedade reclama.

No entanto, cada professor sabe que enfrentar esses desafios não é tarefa simples, nem para ser feita solitariamente. O documento de Matemática é um instrumento que pretende estimular a busca coletiva de soluções para o ensino dessa área. Soluções que precisam transformar-se em ações cotidianas que efetivamente tornem os conhecimentos matemáticos acessíveis a todos os alunos. "(BRASIL, 1997, p.15)".

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para a área de Matemática estão pautados por princípios decorrentes de estudos, pesquisas, práticas e debates desenvolvidos nos últimos anos. São eles:

— A Matemática é componente importante na construção da cidadania, na medida em que a sociedade se utiliza, cada vez mais, de conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, dos quais os cidadãos devem se apropriar.

— A Matemática precisa estar ao alcance de todos e a democratização do seu ensino deve ser meta prioritária do trabalho docente.

— A atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.

— No ensino da Matemática, destacam-se dois aspectos básicos: um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados.

— A aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; apreender o significado de um objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações com outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos.

— A seleção e organização de conteúdos não deve ter como critério único a lógica interna da Matemática. *Deve-se levar em conta sua relevância social e a contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno*. Trata-se de um processo permanente de construção.

— O conhecimento matemático deve ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita ver a Matemática em sua prática filosófica, científica e social e contribui para a compreensão do lugar que ela tem no mundo.

E é justamente sobre essa vertente que se apoiará a parte inicial desse trabalho, a permanente evolução do conhecimento matemático. Mas antes precisamos entender o que pensam ambas as partes envolvidas nesse processo, o professor e o aluno.

Consultando os alunos a cerca das suas opiniões, por meio de uma pesquisa de sondagem, em anexo[1], quanto ao ensino de matemática chegamos aos resultados apresentados a seguir.

1. Grande parte dos alunos tem interesse em cursar matemática básica, conforme figura 3, isso é muito questionador do ponto de vista se o aluno sabe diferenciar um curso de matemática básica do curso de matemática avançada, o que é avançado ou básico para os alunos?

2. Para os nossos discentes em um curso de matemática básica deveriam constar assuntos como porcentagem, divisibilidade, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, análise de gráficos e razão, conforme figura 7.

3. Contraditoriamente a isso, das áreas do conhecimento matemático, os alunos são minoria no que diz respeito ao interesse por aritmética, conforme figura 4, onde se engloba a maior parte dos tópicos do item anterior.

---

[1] Pesquisa aos alunos..docx

4. Numa coisa os alunos são maioria, logaritmo foi desnecessário para sua formação. Segundo os mesmos não lhes foram apresentadas aplicações no nosso dia-a-dia que justificasse a utilização de logaritmo, ou seja, *aprendemos logaritmos para resolver problemas de logaritmo*, palavras dos próprios alunos.

5. Dos assuntos usualmente abordados no ensino médio, segundo nossos pesquisados, em sua grande parte deveriam ser abordados num curso de matemática avançada.

6. Do ponto de vista interpretativo nossos alunos são imediatistas e gostam de "receita de bolo", ou seja, de uma fórmula milagrosa onde possam resolver seus problemas, sem ao menos questionar o por quê. Mesmo eles acreditando que seus professores estejam preparados para explicá-los o motivo pelo qual aquela fórmula funciona.

Chegamos a crer que a insatisfação por parte de nossos alunos é enorme, poucos são os que veem uma justificativa plausível para o que se ensina.

Vejam os gráficos que se seguem:

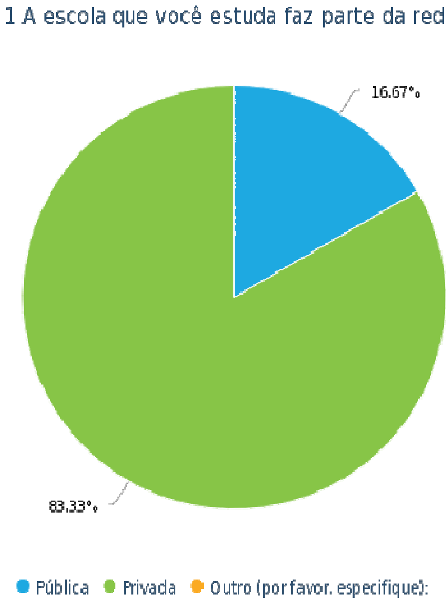
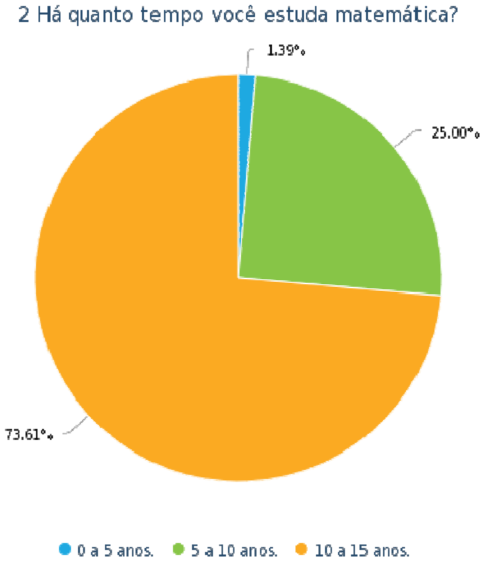
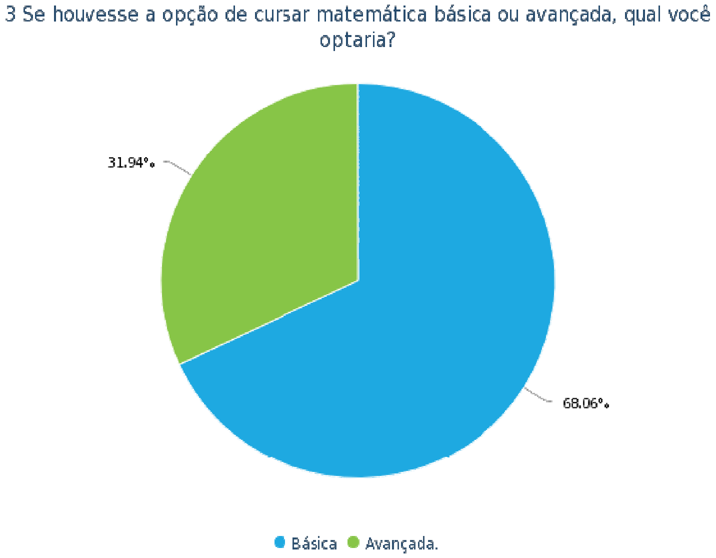


Figura 1



2 Há quanto tempo você estuda matemática?

Figura 2



3 Se houvesse a opção de cursar matemática básica ou avançada, qual você optaria?

Figura 3

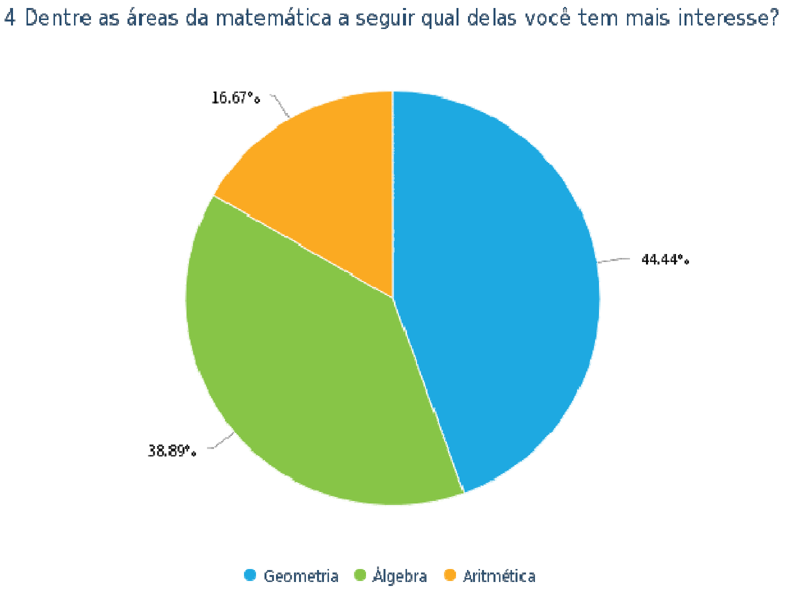


Figura 4

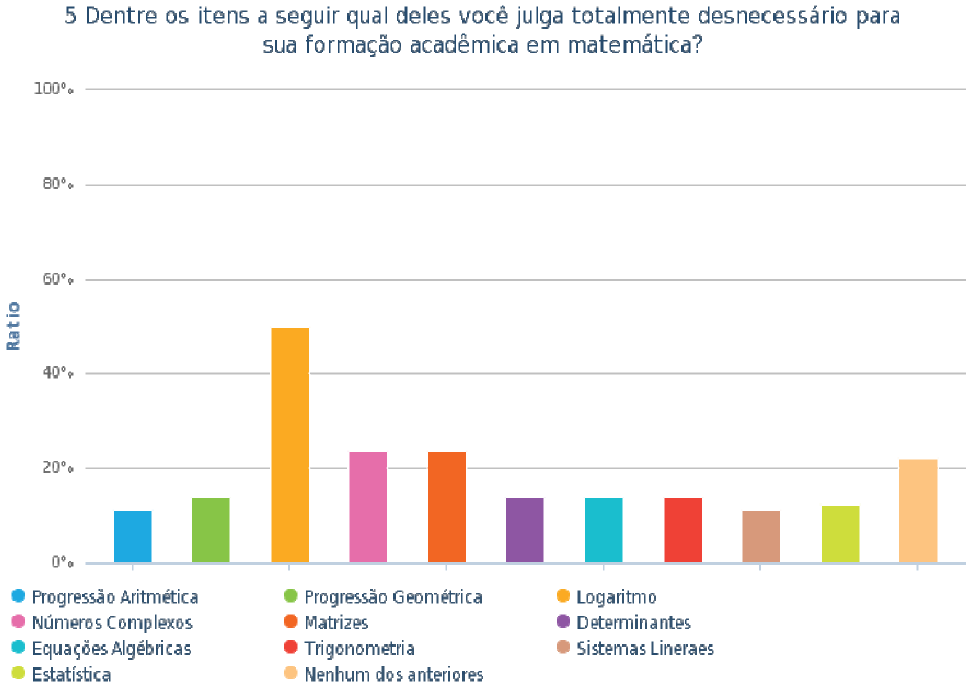


Figura 5

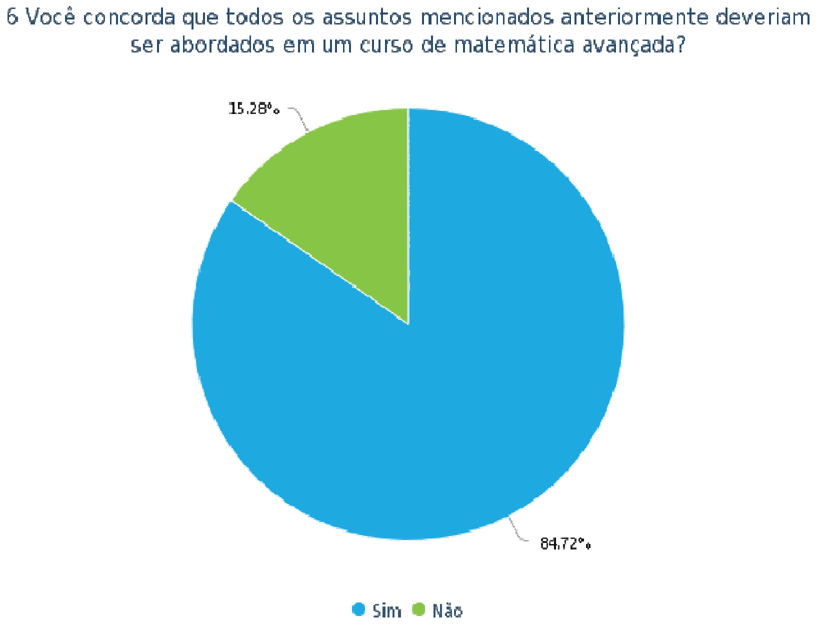


Figura 6

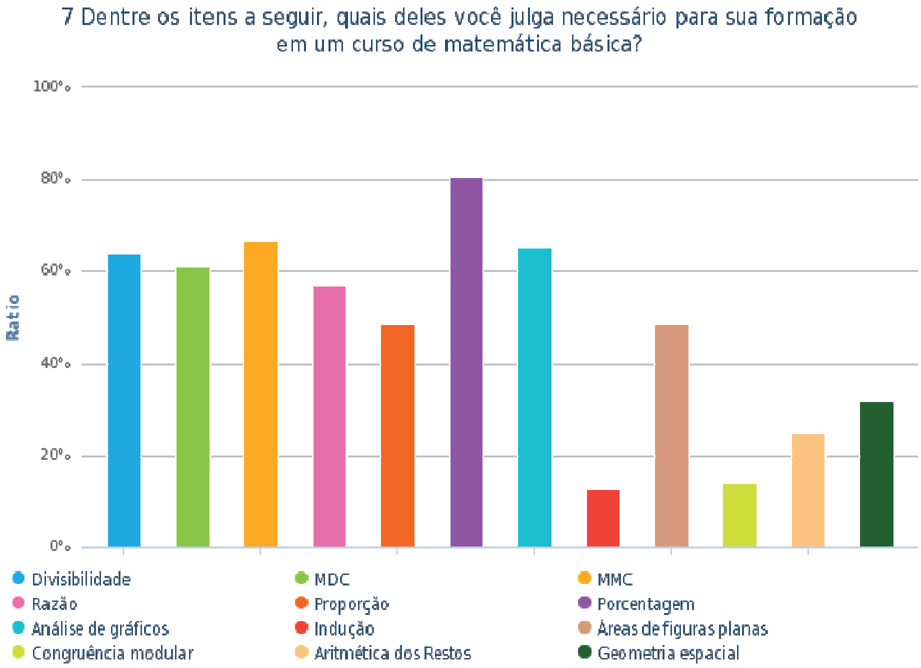


Figura 7

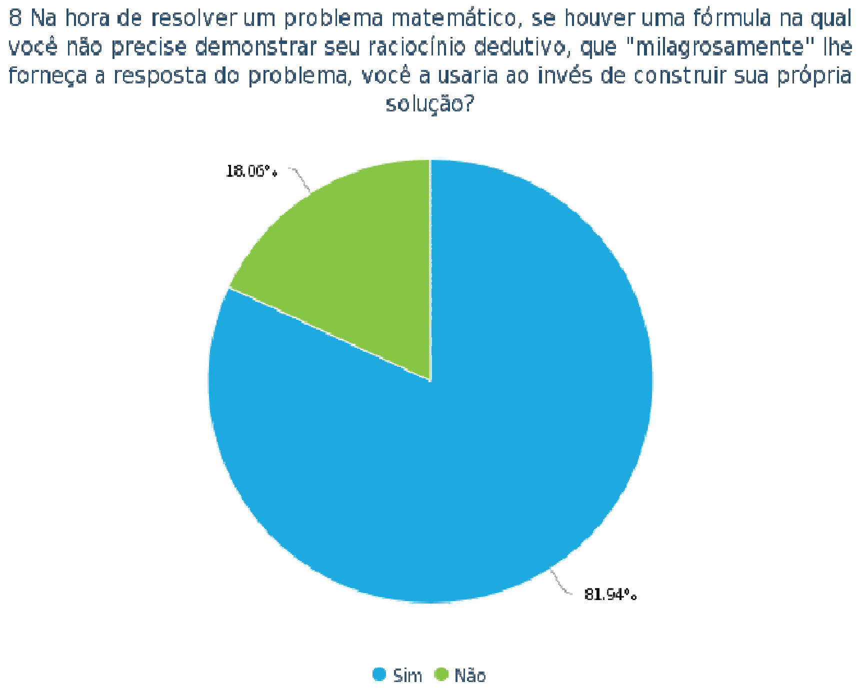


Figura 8

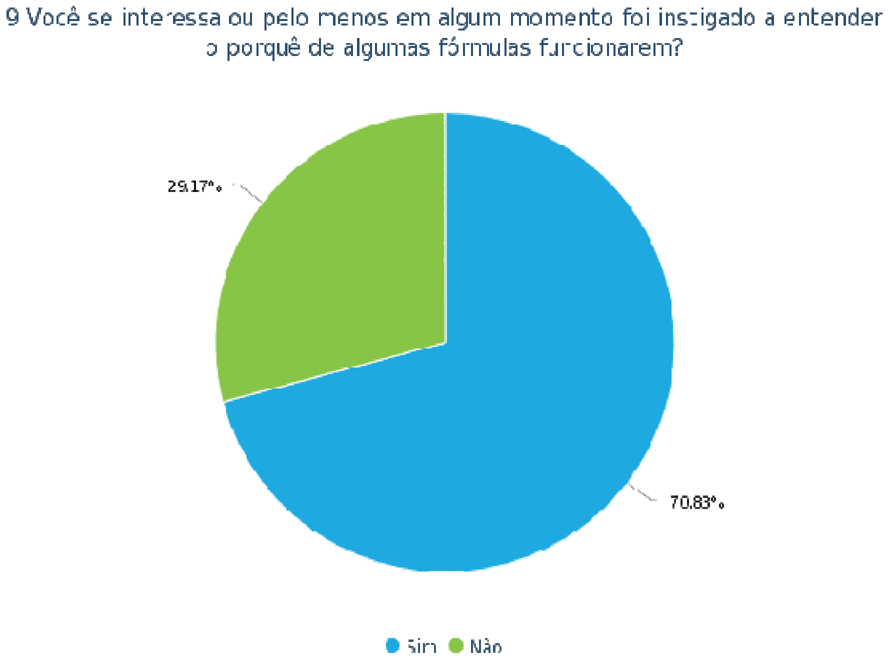


Figura 9

Figura 10

Da mesma forma, desenvolvemos uma sondagem para os professores, por meio de formulário eletrônico, também em anexo[2], nesse segundo momento fomos mais específicos e questionamos a cerca do ensino de aritmética no ensino médio, queríamos entender melhor o que já havia sido apontado pelos alunos, os resultados foram os seguintes:

1. A maior parte dos pesquisados concorda que esses assuntos, divisibilidade, mdc e suas aplicações, mmc, razão, proporção e porcentagem deveriam ser abordados já na 1° série do ensino médio conforme figura 15.

2. Os assuntos que mais se destacaram foram Divisibilidade, Máximo Divisor Comum, Mínimo Múltiplo Comum, Razão e Proporção.

3. Questionados se algum tópico deveria dar lugar aos "novos" assuntos tivemos dúvidas em substituir por Números Complexos ou simplesmente acrescentar sem perda de tópicos. Queríamos mesmo saber se os docentes julgam que algum dos tópicos já abordados no ensino médio é realmente significativo para um saber matemático concreto mais tangível a realidade dos alunos.

Seguem-se os gráficos.

---

[2] https://pt.surveymonkey.com/r/WLCVK7F

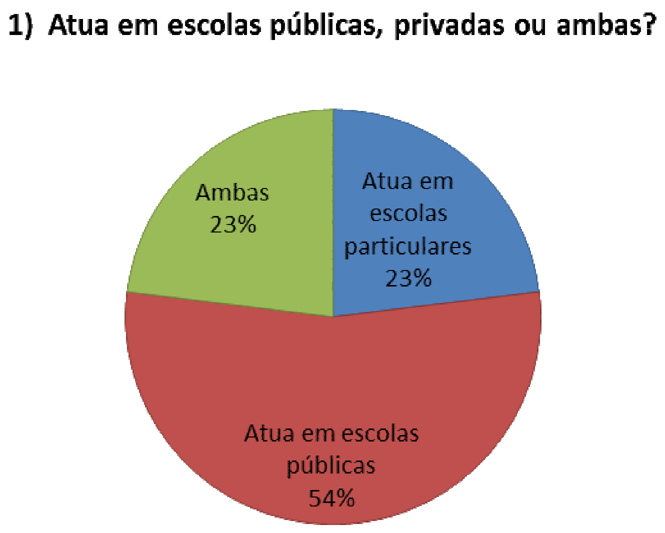


Figura 11

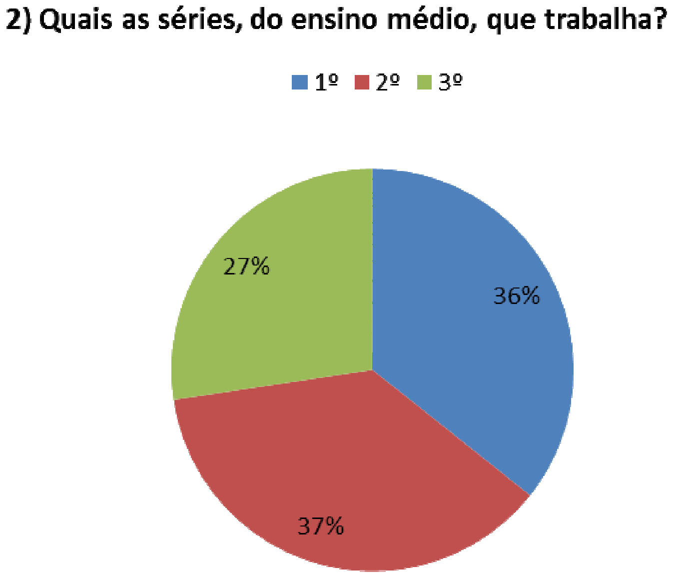


Figura 12

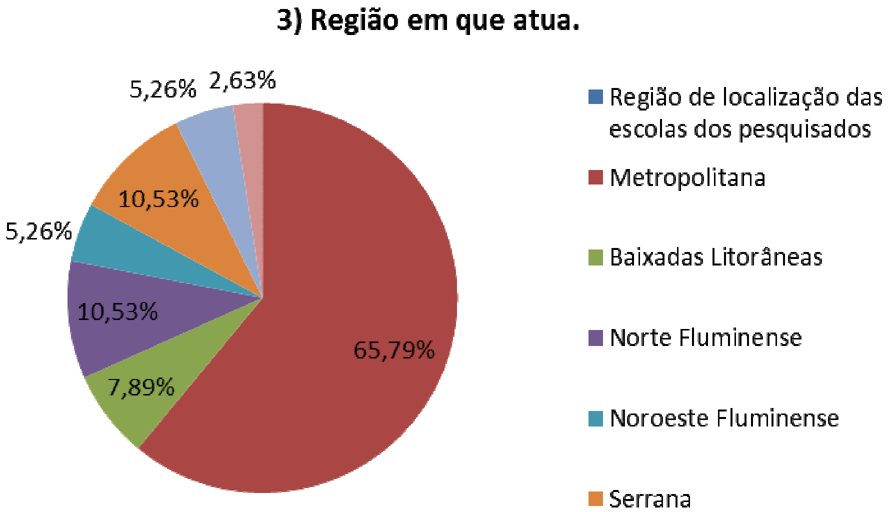


Figura 13

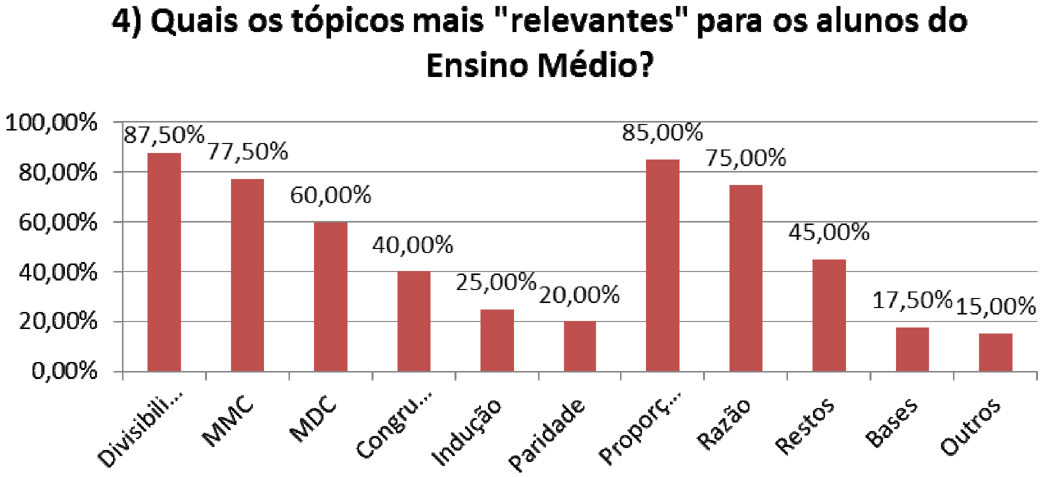


Figura 14

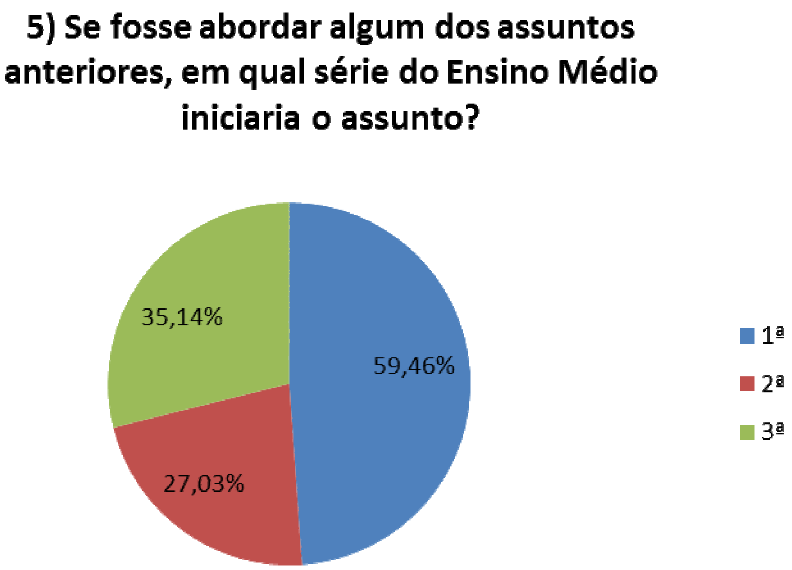


Figura 15

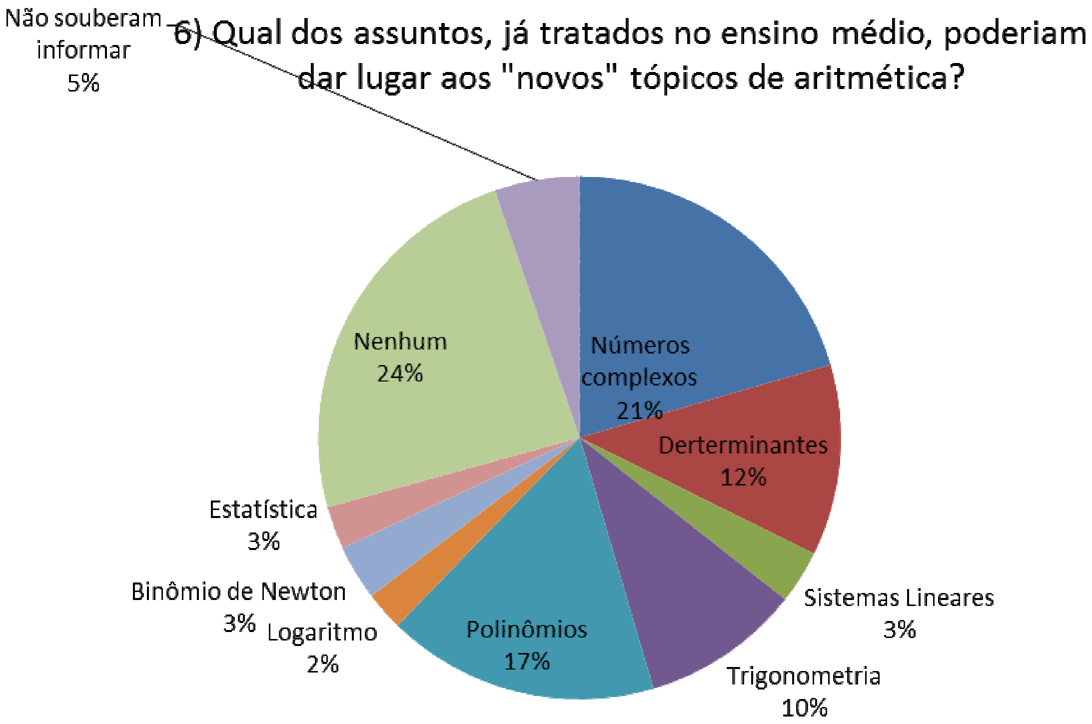


Figura 16

Com base nas respostas, tanto dos alunos quanto dos professores, decidimos apresentar uma proposta de inclusão mais precisamente um aprofundamento dos assuntos com uma visão amadurecida dos pontos que mais se destacaram na pesquisa, foram eles:

- Divisibilidade
- Máximo Divisor Comum e suas aplicações.

Mas não queremos que os alunos apenas façam “contas” queremos que eles entendam por qual motivo as coisas funcionam e mais, que vejam aplicações no dia-a-dia que possam justificar seu aprendizado. Nos capítulos seguintes abordaremos essas propostas com situações problemas motivadoras que levem os alunos a construírem um saber matemático-aritmético mais “requintado”. É claro que não temos a pretensão de crer que nosso espectador faça um “curso” completo de aritmética, queremos que ele perceba que existem mais coisas a serem tratadas, lembrando o “MESTRE” Morgado, em uma de suas aulas no Curso de Aperfeiçoamento para Professores do Ensino Médio, como pode o aluno depois de alguns anos de vivência matemática não conseguir decidir sobre uma compra à vista ou à prazo?

E agora nos perguntamos, como pode o aluno calcular raízes complexas de um polinômio, mas não saber o porquê se calcula o MDC entre dois naturais fazendo o “*jogo da velha?”*

O trabalho se desenvolverá com alunos da 1° série do ensino médio, os grupos serão formados por voluntários, serão ministradas 5 aulas num total de 250 minutos. As aulas serão expositivas com apoio de recursos multimídia tais como datashow e retroprojetor. As formas de avaliação compreenderão entre exercícios em aula ou coleta de resposta por meio de formulário eletrônico.

2. DIVISIBILIDADE

Queremos nesse capítulo que o aluno se aproxime de uma linguagem mais “formal” e que se assemelhe com o que é feito em cursos superiores, ou seja, diminuir o abismo notacional entre o ensino secundário e o ensino superior. Para tal começaremos com algumas definições.

Def.(1): Sejam a, b e c inteiros tal que $a = bc$ isso é análogo a dizer que a é múltiplo de b e a é múltiplo de c ou ainda que b divide a que denotaremos por $b|a$. Essa última definição pode ser reescrita como $b|a$ se existe um c tal que $a = bc$. Caso contrário se denotará por $b \nmid a$.

Exemplos:

a) $12 = 3.4 \therefore 3|12$ e $4|12$.

b) $18 = 2.9 \therefore 2|18$ e $9|18$.

c) $3 \nmid 5 \because \nexists c$ inteiro tal que $5 = 3.c$

Def.(2): Sejam $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$ temos que:

2.a) $1|c$

2.b) $a|a$

2.c) $a|0$

2.d) Se $a|b$ e $b|c$ então $a|c$.

2.e) Se $a|b$ e $a|c \Rightarrow a|(b + c)$

2.f) Se $a|b$ e $a|c \Rightarrow a|(b - c)$

Demonstrações:

Das definições 2.a, 2.b e 2.c decorre facilmente das igualdades $c = 1.c, a = 1.a$ e $a.0 = 0$.

Da definição 2.d temos que se $a|b$ então existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.f$ e se $b|c$ então existe $g \in \mathbb{N}$ tal que $c = b.g$. Substituindo b da primeira equação na segunda temos que $c = b.g = (a.f).g = a.(f.g)$. O que mostra que $a|c$.

Da definição 2.e temos que se $a|b$ então existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b = a\,.\,f$ e se $a|c$ então existe $g \in \mathbb{N}$ tal que $c = a\,.\,g$ e logo $(b + c) = a.f + a\,.g = a.(f + g)$. O que mostra que $a|(b + c)$. A demonstração para o caso 2.f é feita de modo análogo bastando acrescentar a condição de que $b \geq c$.

Def.(3): Sejam a, b e $c \in \mathbb{N}$, com $a \neq 0$ tais que $a|(b + c)$. Então $a|b \Leftrightarrow a|c$

Demonstração:

Se $a|(b + c), \exists\, f \in \mathbb{N}$ tal que $b + c = a\,.f$. E ainda se $a|b$, $\exists\, g \in \mathbb{N}$ tal que $b = a.g$. Juntando as duas equações acima, temos:

$a.g + c = a.f$ como $a.f > a.g$ e consequentemente $f > g$, daí $(f - g) \in \mathbb{N}$.

Logo podemos escrever que $c = a.f - a.g = a.(f - g)$. O que prova que $a|c$. ***c.q.d***

A prova da outra implicação é totalmente análoga.

Para a proposta deste trabalho estas definições são suficientes para as aplicações que vamos propor.

Não queremos que os alunos recebam uma gama de informações que possam vir a julgar desnecessárias, acreditamos que devemos instigar o aluno, motivar o aluno a buscar seu próprio saber matemático. Aos poucos vamos oferecendo novas ferramentas para que ele mesmo queira ir além.

Como sugestão para aula introdutória de divisibilidade, apresentaremos o problema dos armários, que a princípio pode parecer fora de contexto, mas aguçará ou pelo menos despertará a curiosidade do aluno e mostra que o que ele aprendeu no ensino fundamental não foi tão sem propósito como ele diz ter sido.

Problema 1 (Problema dos Armários)

Num corredor de uma universidade existem 50 armários numerados de 1 a 50 dispostos em ordem crescente que foram disponibilizados aos 50 alunos da turma de teoria dos números. Cada aluno recebeu um número de 1 a 50 também. Numa experiência o professor pede para que os alunos se enfileirem, um atrás do outro, neste corredor que estão os armários também em ordem crescente. Inicialmente todos os armários estão abertos e o professor pede que o aluno número 1 mude a posição da porta do armário tal que o número da porta seja múltiplo do seu número. E o aluno então fecha todas as portas. A seguir ele pede para que o aluno número dois mude a posição da porta tal que o número do armário é múltiplo do seu número e assim sucessivamente todos os 50 alunos cumprem essa missão, de mudar a posição da porta tal que o número da porta é um múltiplo do seu próprio número.

Pergunta 1) Qual a situação final da porta número 1?

Pergunta 2) Qual a situação final da porta número 5?

Pergunta 3) Quantas portas ao todo ficaram fechadas após a passagem dos 50 alunos?

A justificativa dessa questão é fazer com que o aluno se recorde do conceito de divisores naturais de um inteiro e que chegue a conclusão de que só os quadrados perfeitos tem uma quantidade ímpar de divisores.

Inicialmente apenas colhemos as respostas[3] dos alunos sem qualquer ponderação sobre a questão em sala de aula, dissemos que comentaríamos sobre o assunto depois. Quanto a resposta da pergunta 1 todos os alunos acertaram. Acerca da resposta da pergunta 2 também todos acertaram. A seguir o gráfico com os percentuais de acerto para a pergunta 3 onde podemos observar que pouco mais de 31% dos alunos acertaram a questão.

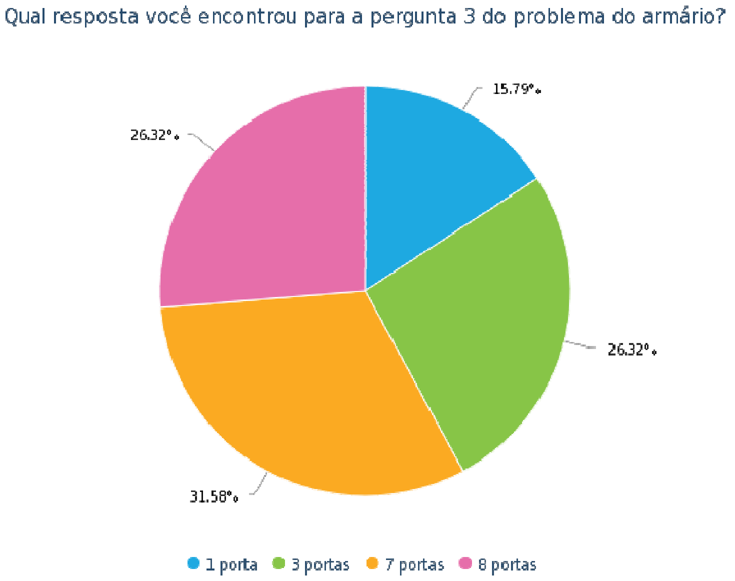


Figura 17

O que nos levou a pensar qual o motivo para o baixo percentual de acerto uma vez que as duas anteriores todos acertaram. Então fomos questionar os alunos sobre de que maneira eles resolveram a questão, como chegaram ao resultado. Muitos disseram que escreveram de 1 até 50 e a partir daí foram mudando as posições das portas escrevendo caso a caso, outros disseram que usaram a "lógica", alguns também comentaram que não conseguiram desenvolver nenhum algoritmo para tal solução. O aluno Guilherme Serrano até desenvolveu uma planilha no Excel para ilustrar melhor o caso, mas disse que foi extremamente cansativo e que desistiu no meio do caminho, pedi para que me enviasse a planilha que se encontra anexo[4].

---

[3] A coleta foi feita por meio de questionário eletrônico: (http://www.survio.com/survey/d/S8T9Z6A7R2X3D7G2J).

[4] C:\Users\Silvio Freitas\Documents\Trab. Prof Silvio.xlsx

Perguntamos ainda o que acharam da questão, fácil ou difícil? Vejam as respostas no gráfico a seguir:

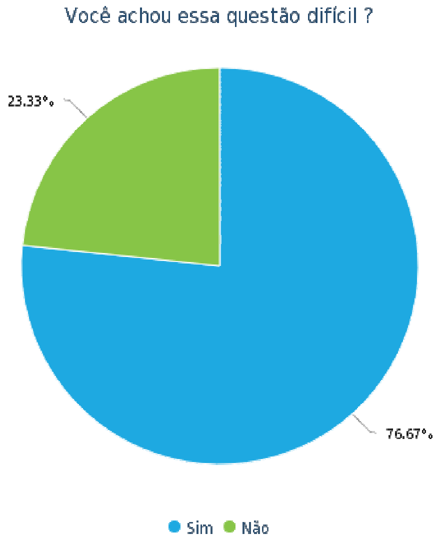


Figura 18

Então fizemos a explanação da solução da questão mencionando o fato de que:

1. Só muda a posição da porta o aluno cujo seu número é divisor do número da porta.
2. Que a cada duas mudanças a porta retorna a posição inicial.
3. Todos os armários que a quantidade de divisores for um número par, então, a posição da porta permanecerá inalterada.
4. E logo, apenas aqueles que possuem uma quantidade de divisores ímpares, terão sua posição inicial alterada e que isso só ocorre com os quadrados perfeitos.
5. Pedimos para que eles identificassem os quadrados perfeitos de 1 até 50 e encontrassem a solução do problema.

Após essa aula de motivação começamos a introduzir as demonstrações que foram mencionadas anteriormente nas definições 1, 2 e 3. Nesse primeiro momento queremos que os alunos possam desenvolver questões simples de divisibilidade para gradualmente podermos avançar. Nessa aula foram propostos 3 exercícios, são eles:

Ex.1) Assinale V para as afirmativas verdadeiras e F para as afirmativas falsas nas sentenças a seguir:

a) $2|5$ ( )

b) $4|52$ ( )

c) $x|x^2 \quad \forall x \in \mathbb{N}$ ( )

d) $9 \nmid 10^2 - 1$ ( )

Ex.2) Mostre que $9|10^n - 1$ para $n = \{1,2,3 \; e \; 4\}$.

Ex.3) Mostre que $3|a + (a+1) + (a+2)$ para qualquer que seja $a \in \mathbb{N}$.

Depois de se familiarizarem com a nova escrita começamos a demonstrar alguns critérios de divisibilidade mais simples, pelo menos os casos mais interessantes e aplicáveis para eles.

Critério1. Divisibilidade por 2.

Todo número natural é divisível por 2 se e somente se puder ser repartido em dois grupos iguais de mesma cardinalidade. Em outras palavras se o número for par então é divisível por 2.

Demonstração: Seja o número $n = a_{k\ldots}a_2a_1a_0$ um natural qualquer escrito em sua forma decimal, podemos reescrevê-lo como $n = 10^k.a_k + \ldots + 10^2.a_2 + 10^1.a_1 + 10^0.a_0$ e logo cada parcela dessa expansão, exceto a última, é um múltiplo de 10 e pelo fato de $2|10 \Longrightarrow 2|m.10 \; \forall m \in \mathbb{N}$ podemos nos preocupar apenas com o algarismo das unidades, se for par então pela definição 2.e $2 \mid n$ caso contrário $2 \nmid n$.

Critério2. Divisibilidade por 3.

Todo número natural é divisível por 3 se e somente se a soma de seus valores absolutos for um múltiplo de 3.

Demonstração:

Seja o número $n = a_{k\ldots}a_2a_1a_0$ um natural qualquer escrito em sua forma decimal, podemos reescrevê-lo como $n = 10^k.a_k + \ldots + 10^2.a_2 + 10^1.a_1 + 10^0.a_0$

$$= (10^k - 1).a_k + a_k + \ldots + (10^2 - 1).a_2 + a_2 + (10^1 - 1).a_1 + a_1 + (10^0 - 1).a_0 + a_0$$

$$= (10^k - 1).a_k + \cdots + (10^2 - 1).a_2 + (10^1 - 1).a_1 + (10^0 - 1).a_0 + (a_k + \ldots + a_2 + a_1 + a_0).$$

Já sabemos que todo número do tipo $(10^k - 1) \, \forall k \in \mathbb{N}$ é divisível por 9 e consequentemente divisível por 3, pela definição 2.e é necessário que $(a_k + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$ seja também divisível por 3.

Critério 3. Divisibilidade por 9.

Todo número natural é divisível por 9 se e somente se a soma de seus algarismos for um múltiplo de 9.

A demonstração da divisibilidade por 9 é feita de modo análogo ao que foi feito no item anterior exceto que a soma $(a_k + \ldots + a_2 + a_1 + a_0)$ deve ser divisível por 9.

Critério 4. Divisibilidade por 6.

Todo número natural é divisível por 6 se e somente se for, simultaneamente, divisível por 2 e 3. A demonstração segue ao que já foi mencionado.

Para essa etapa não foram propostas atividades, uma vez que queríamos apenas mostrar o que eles já usam em seu dia a dia só não sabiam o porquê. Também não apresentamos todos os critérios para que eles se sentissem instigados a procurar por si próprios tais respostas.

2.1 DIVISÕES COM RESTO

Dados inteiros positivos a e b existem naturais q e r tais que $0 \leq r < b$ e $a = q.b + r$. De fato como $\frac{a}{b} > 0$ existe $q \in \mathbb{N}$ com $q \leq \frac{a}{b} < q + 1 \Rightarrow q.b \leq a < q.b + b \Rightarrow 0 \leq a - q.b < b \Rightarrow 0 \leq r < b$.

Para os casos em que $r = 0$, diz então, que $a = b.q$ e portanto a é um múltiplo de b ou ainda que b é um divisor de a e denotamos por $b|a$.

Exemplo de aplicação.

Ex.1) Encontre um número natural n que ao ser dividido por 10 deixa resto 9 , ao ser dividido por 9 deixa resto 8 e ao ser dividido por 8 deixa resto 7.

Solução:

O número n é do tipo $10q + 9 \equiv 10q' - 1$ ou $9p + 8 \equiv 9p' - 1$ ou $8k + 7 \equiv 8k' - 1$ o que mostra que n é um múltiplo simultâneo de $8, 9$ e 10 menos uma unidade para algum natural q', p' e k'. Portanto um possível valor para n é $360 - 1 = 359$.

Teorema dos restos:

Teo. 1) Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2, respectivamente, quando divididos por a então $b_1 + b_2$ deixa o mesmo resto do que $r_1 + r_2$ quando dividido por a .

Demonstração:

$b_1 = a.q_1 + r_1$ com $0 \leq r_1 < a$ e $b_2 = a.q_2 + r_2$ com $0 \leq r_2 < a$, sendo $r_1 + r_2 = q.a + r$ com $0 \leq r < a$. Daí somando as duas equações iniciais, temos:

$b_1 + b_2 = a.q_1 + r_1 + a.q_2 + r_2 = a(q_1 + q_2) + (r_1 + r_2)$ e substituindo $r_1 + r_2$ por $q.a + r$ com $0 \leq r < a$, temos que
$b_1 + b_2 = a(q_1 + q_2) + q.a + r = a.(q_1 + q_2 + q) + r$ que mostra que $b_1 + b_2$ é um certo $a.q + r$. ***c.q.d***

Teo. 2) Se b_1 e b_2 deixam restos r_1 e r_2, respectivamente, quando divididos por a então $b_1.b_2$ deixa o mesmo resto do que $r_1.r_2$ quando dividido por a.

Demonstração:

Da demonstração anterior escrevemos que $r_1.r_2 = a.q' + r'$, com $0 \leq r' < a$ daí vamos multiplicar b_1 e b_2.

$b_1.b_2 = a^2.q_1.q_2 + a.q_1.r_2 + a.q_2.r_1 + r_1.r_2 = a.(a.q_1.q_2 + q_1.r_2 + q_2.r_1) + r_1.r_2$ e logo concluímos que $b_1.b_2 = a.(a.q_1.q_2 + q_1.r_2 + q_2.r_1 + q') + r'$. ***c.q.d***

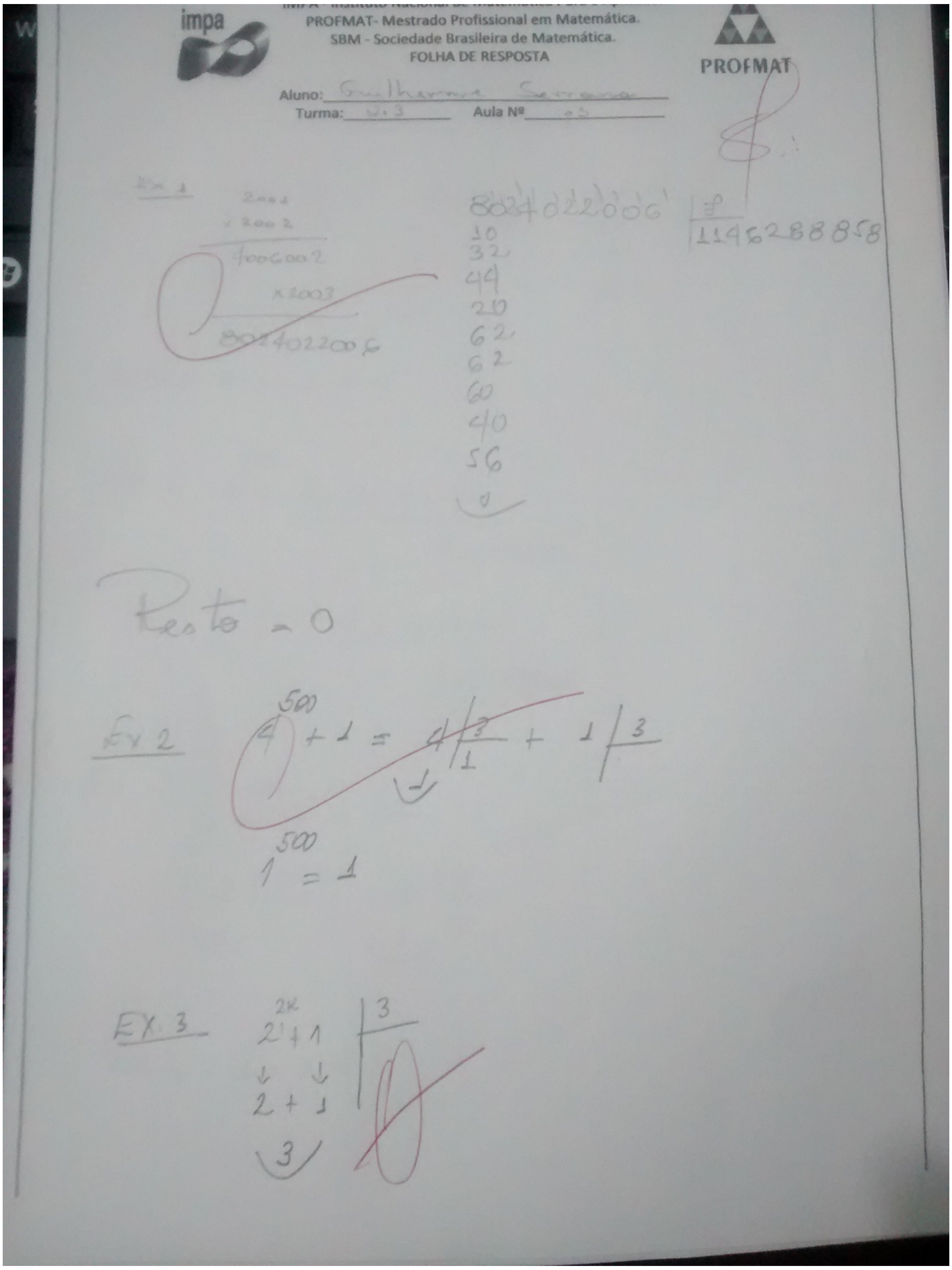
Após as demonstrações a cima, então, propomos alguns exercícios para que os alunos pudessem por em prática o que aprenderam, e fizessem a fixação do aprendizado. A seguir os exercícios propostos.

Ex.1) Qual o resto da divisão de $2001 .2002.2003$ por 7 ?

Ex.2) Qual o resto que o número 4^{500} deixa quando dividido por 3?

Ex.3) Qual o resto que o número $2^{2k} + 1$ deixa quando dividido por 3 ? ($k \in \mathbb{N}$)

Foi impressionante ver as respostas dos alunos para os exercícios 1 e 2 , todos os envolvidos acertaram esses itens, apenas no exercício número 3 é que se apresentaram algumas dificuldades. A seguir cópia de algumas respostas dadas pelos alunos.



PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática.
SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.
FOLHA DE RESPOSTA

PROFMAT

Aluno: Guilherme Serrano
Turma: 2.3 Aula Nº 03

8

Ex 1

$$2001 \times 2002 = 4006002$$

$$4006002 \times 2003 = 8024022006$$

$$8024022006 \div 7 = 1146288858$$

10
32
44
20
62
62
60
40
56
0

Resto = 0

Ex 2

$$4^{500} + 1 = 4 \mid 3 \quad 1 \quad + \quad 1 \mid 3$$

$$1^{500} = 1$$

Ex 3

$$2^{2k} + 1$$

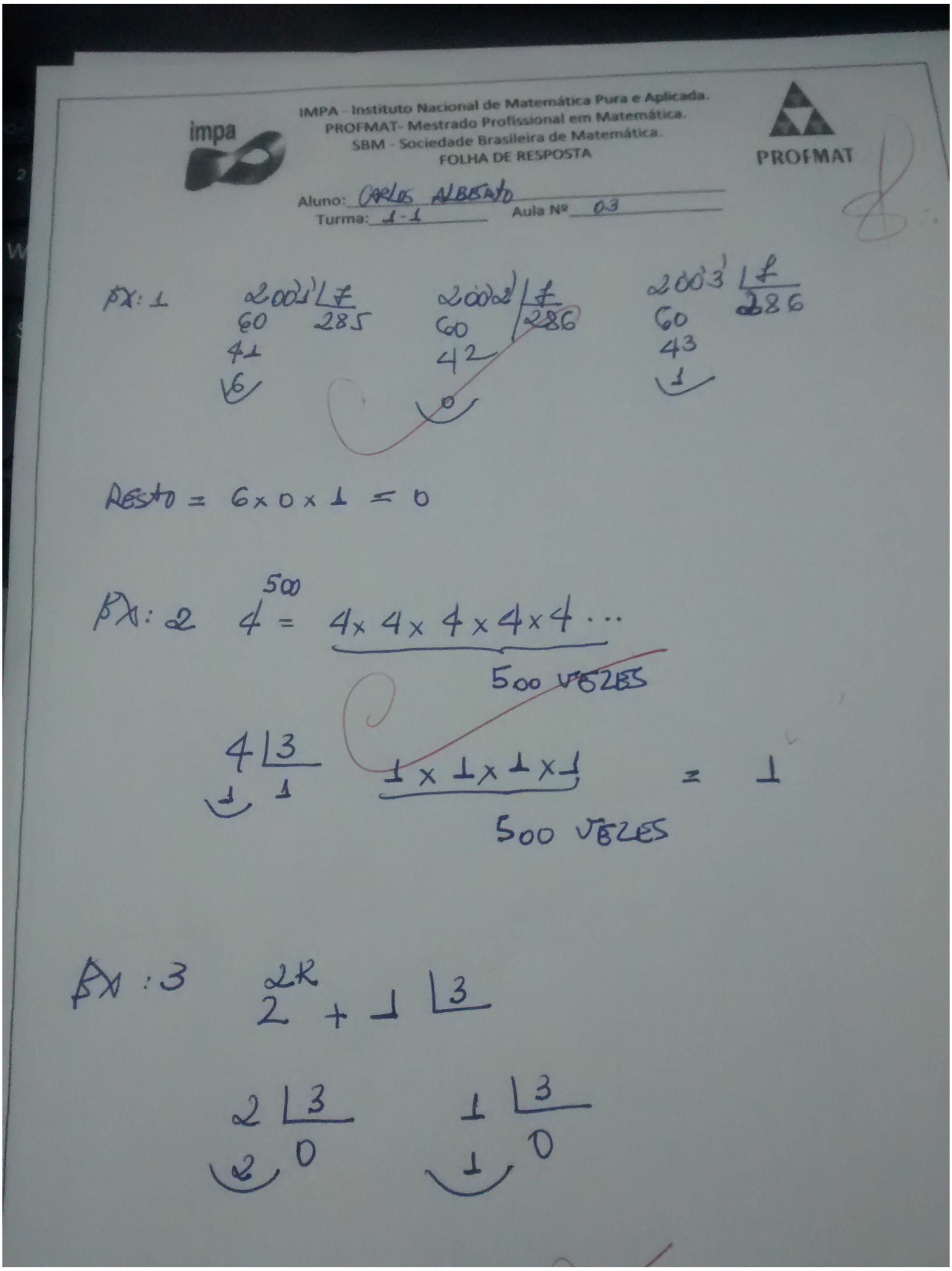
$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$2 + 1$$

$$3 \mid 3$$

$$0$$

Figura 19



IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática.
SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.
FOLHA DE RESPOSTA

PROFMAT

8

Aluno: CARLOS ALBERTO
Turma: 1-1 Aula Nº 03

EX: 1

2001 |7
60 285
41
6

2002 |7
60 286
42
0

2003 |7
60 286
43
1

Resto = 6 x 0 x 1 = 0

EX: 2 $4^{500} = \underbrace{4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \cdots}_{500 \text{ VEZES}}$

4 |3
1 1

$\underbrace{1 \times 1 \times 1 \times 1}_{500 \text{ VEZES}} = 1$

EX: 3 $2^{2k} + 1$ |3

2 |3
2 0

1 |3
1 0

Figura 20

3. MÁXIMO DIVISOR COMUM E O ALGORITMO DE EUCLIDES.

Neste capítulo queremos apresentar uma proposta para contextualização e aplicação do algoritmo de Euclides e o MDC de inteiros não negativos além das triviais aos quais os alunos já tomaram conhecimento no ensino fundamental. Queremos que eles compreendam o mecanismo por completo e não por meios de “fórmulas” já pré-estabelecidas. Muitas das vezes o aluno é mecanizado fazendo com que seu aprendizado seja efêmero, momentâneo, aprender apenas pelo fato de que em algum momento terá que prestar exame sobre aquele assunto. Primeiramente vamos expor a parte teórica e a seguir os exercícios que proporemos como forma de fixar o aprendizado, ou seja, criar um aprendizado significativo.

No capítulo anterior já mostramos para os alunos que se $d|a$ e $d|b$ então $d|a-b$ para $a \geq b$ e dizemos que d é divisor comum de a, b e $(a-b)$. Já sabemos que o conjunto dos divisores positivos de um inteiro é um conjunto finito, logo possui um maior elemento. Seja $D = \{d_1, d_2, d_3, \dots, d_n\}$ o conjunto dos divisores comuns de a e b, ordenados do menor para o maior, então o $MDC(a,b) = d_n$ que denotaremos simplesmente por $(a,b) = d_n$ e com consequência $(a, a-b) = d_n$.

Exemplo:

- Divisores de 12: $\{1,2,3,4,6,12\}$
  Divisores de 16: $\{1,2,4,8,16\}$
  Divisores comuns entre 12 e 16: $\{1,2,4\}$ logo $(12,16) = 4$.

- Divisores de 16: $\{1,2,4,8,16\}$
  Divisores de $16-12=4$: $\{1,2,4\}$
  Divisores comuns entre 16 e $16-12=4$: $\{1,2,4\}$ logo $(16,4) = 4$.

Logo por exemplo temos que:

$$(24,18) = (18,24-18) = (18,6) = (12,6) = (6,6) = 6$$

Vejamos agora um método prático que pode nos poupar muito tempo e economizar nas operações.

Lembrando que se $d|a$ e $d|b \Longrightarrow d|(a-b)$ e dado o número $N = a-2b$, temos que $N = a-2b = (a-b)-b$ e consequentemente $d|N$.

Supondo ainda um número $N' = a - 3b = (a - 2b) - b$ e consequentemente $d|N'$. De fato se mantivermos essa sequência, a cada passo subtraímos uma unidade de b que é divisível por d gerando um novo número também divisível por d. De uma forma geral, temos o seguinte lema.

Lema de Euclides: Sejam $a, b, n \in \mathbb{N}$ com $a < na < b$. Então $(a, b) = (a, b - na)$.

Daí segue que se:

$a > b$ com $a = bq_1 + r_1 \Rightarrow a - bq_1 = r_1$ tal que $0 \le r_1 < b$ e pelo lema de Euclides, $(a, b) = (a, bq_1) = (a, r_1)$.

Note que se:

$a = bq_1 + r_1$ com $0 \le r_1 < b$

$b = r_1q_2 + r_2$ com $0 \le r_1 < r_2 < b$

$r_1 = r_2q_3 + r_3$ com $0 \le r_1 < r_2 < r_3 < b$

$\vdots$

$r_k = r_{k+1}q_{k+2}$

Como o conjunto dos possíveis resto é limitado por 0 e b , logo encontraremos, em algum momento, uma divisão exata, ou seja, r_k é múltiplo de r_{k+1} . E daí o $(r_k, r_{k+1}) = r_{k+1} = (a, b)$.

Essa é uma prova de que o algoritmo de Euclides funciona para determinar o MDC entre dois números naturais.

Agora vamos apresentar uma propriedade importante do MDC.

Se $(a, b) = 1$ então dizemos que a e b são primos entre si.

Feitas essas explicações propomos aos alunos alguns exercícios para que pudessem por em prática esse “novo” conhecimento.

Ex.1) Seguindo o exemplo dado, determine o MDC dos pares de inteiros a seguir.

$(42,12) = 6$ pois:

O último resto é o mdc.

$42 = 12.3 + 6$ e

$12 = 6.2$

a) $(24, 10) =$

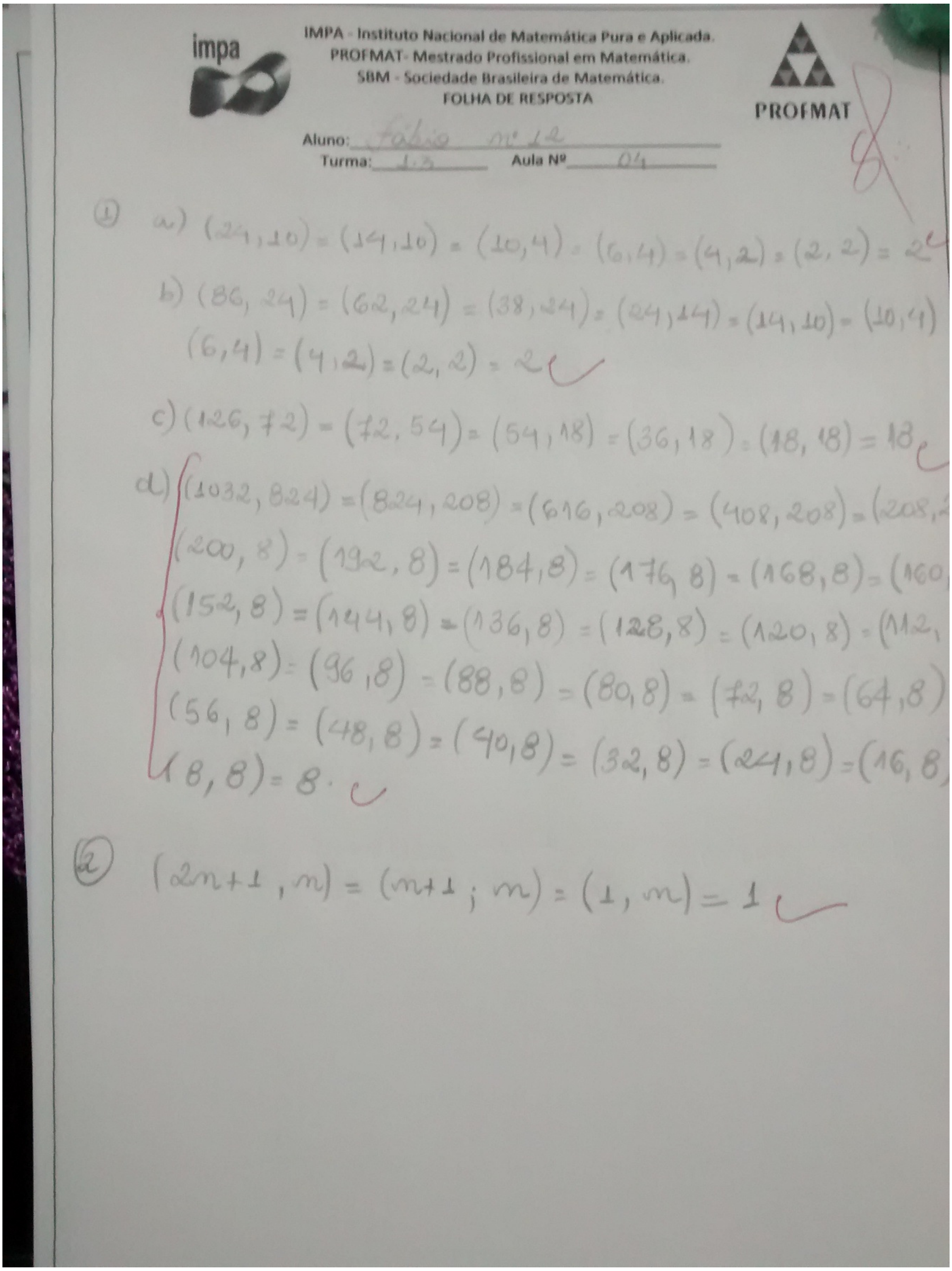
b) $(86, 24) =$

c) $(126, 72) =$

d) $(1032, 824) =$

Ex.2) Seja $n \in \mathbb{N}$ mostre que $(2n + 1, n) = 1$.

A seguir algumas respostas dadas pelos alunos.



IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática.
SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.
FOLHA DE RESPOSTA

Aluno: Fábio nº 12
Turma: 1.3 Aula Nº 04

8

① a) (24,10) = (14,10) = (10,4) = (6,4) = (4,2) = (2,2) = 2 ✓

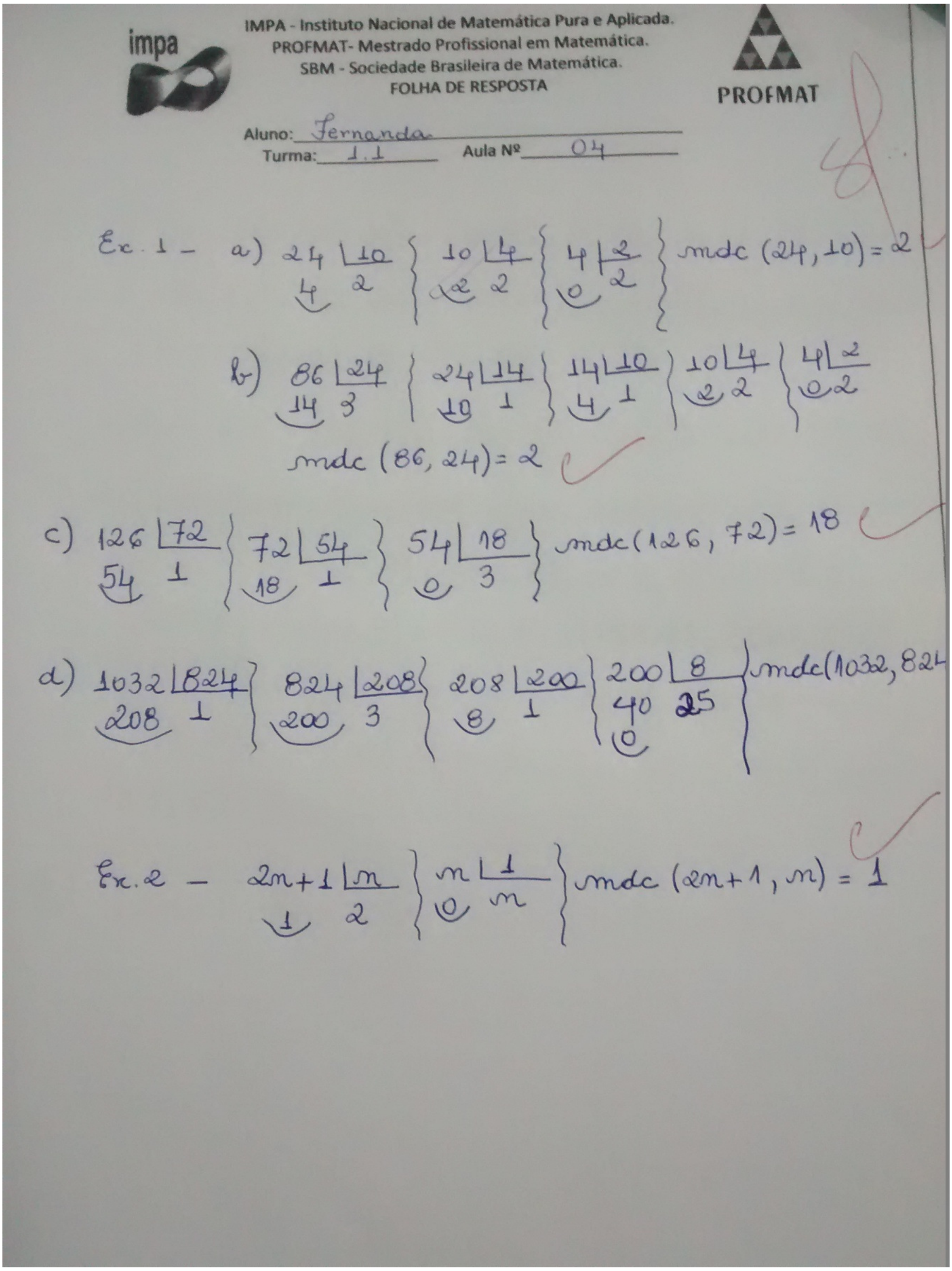
b) (86, 24) = (62,24) = (38,24) = (24,14) = (14,10) = (10,4)
(6,4) = (4,2) = (2,2) = 2 ✓

c) (126, 72) = (72, 54) = (54,18) = (36,18) = (18,18) = 18 ✓

d) (1032, 824) = (824, 208) = (616, 208) = (408, 208) = (208,
(200, 8) = (192, 8) = (184,8) = (176, 8) = (168,8) = (160,
(152, 8) = (144,8) = (136,8) = (128,8) = (120,8) = (112,
(104,8) = (96,8) = (88,8) = (80,8) = (72, 8) = (64,8)
(56, 8) = (48,8) = (40,8) = (32,8) = (24,8) = (16,8
(8,8) = 8. ✓

② $(2n+1\,,\,n) = (n+1\,;\,n) = (1\,,\,n) = 1$ ✓

Figura 21



IMPA - Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.
PROFMAT- Mestrado Profissional em Matemática.
SBM - Sociedade Brasileira de Matemática.
FOLHA DE RESPOSTA

Aluno: Fernanda
Turma: 1.1 Aula Nº 04

8

Ex. 1 – a) $\begin{array}{r|l} 24 & 10 \\ \cline{2-2} 4 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$ mdc (24, 10) = 2

b) $\begin{array}{r|l} 86 & 24 \\ \cline{2-2} 14 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 24 & 14 \\ \cline{2-2} 10 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 14 & 10 \\ \cline{2-2} 4 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} 2 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ \cline{2-2} 0 & 2 \end{array}$

mdc (86, 24) = 2 ✓

c) $\begin{array}{r|l} 126 & 72 \\ \cline{2-2} 54 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 72 & 54 \\ \cline{2-2} 18 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 54 & 18 \\ \cline{2-2} 0 & 3 \end{array}$ mdc(126, 72) = 18 ✓

d) $\begin{array}{r|l} 1032 & 824 \\ \cline{2-2} 208 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 824 & 208 \\ \cline{2-2} 200 & 3 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 208 & 200 \\ \cline{2-2} 8 & 1 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} 200 & 8 \\ \cline{2-2} 40 & 25 \\ 0 & \end{array}$ mdc(1032, 824

✓

Ex. 2 – $\begin{array}{r|l} 2n+1 & n \\ \cline{2-2} 1 & 2 \end{array}$ $\begin{array}{r|l} n & 1 \\ \cline{2-2} 0 & n \end{array}$ mdc (2n+1, n) = 1

Figura 22

3.1 RELAÇÃO DE BÉZOUT

Seja $(a,b) = d$ então $d = am + bn$ para algum $m,n \in \mathbb{Z}$. ***(Relação de Bézout)***

Exemplos de aplicações:

O $(124,48) = 4$, observe a sequência de divisões.

$$124 = 48.2 + 28$$

$$48 = 28.1 + 20$$

$$28 = 20.1 + 8$$

$$20 = 8.2 + 4$$

$$8 = 4.2$$

Agora vamos fazer o caminho de vota.

$$124 - 48.2 = 28$$

$$48 = (124 - 48.2).1 + 20 \rightarrow -124 + 48.3 = 20$$

$$124 - 48.2 = (-124 + 48.3).1 + 8 \rightarrow 124.2 - 48.5 = 8$$

$$-124 + 48.3 = (124.2 - 48.5).2 + 4 \rightarrow 124.(-5) + 48.13 = 4$$

Assim vemos uma combinação linear dos números 124 e 48 que resulta no MDC entre eles.

Feito isso, mais uma vez, propusemos exercícios aos alunos.

Exercícios:

Ex.1) Demonstre que a fração $\frac{21n+4}{14n+3}$ é irredutível.

Ex.2) Para o par de números 637 e 3887 mostre que existe algum par inteiro m,n tal que $(3887,637) = m.3887 \pm n.637$.

4. APLICAÇÕES DO MÁXIMO DIVISOR COMUM.

4.1. EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES.

Diversos problemas matemáticos, ligados ao campo da aritmética, recaem em equações, no campo dos naturais, do tipo $aX \pm bY = c$ com a, b e $c \in \mathbb{N}$. Tais equações são chamadas de equações diofantinas lineares em homenagem a Diofanto de Alexandria[5] , porém nem sempre equações desse tipo tem solução. Por exemplo, as equações $4X + 6Y = 3$ e $3X + 8Y = 2$ não possuem nenhuma solução natural pois, caso contrário, para a primeira equação teríamos $4X + 6Y$ par e, portanto nunca igual a 3 na segunda equação teríamos $3X + 8Y > 2$.

É muito conveniente perguntar, então, quais são as condições a serem feitas para que tais equações tenham solução e mais ainda, como encontrá-las?

Para responder a essa pergunta basta aplicar a seguinte proposição.

Prop.(1): Sejam $a, b \in \mathbb{N}^*$ e $c \in \mathbb{N}$. A equação $aX \pm bY = c$ admite solução em números naturais se, e somente se, $(a, b) | c$.

Exemplo: $12x - 7y = 9$

Como $(12,7) = 1$ e $1|9$, logo sabemos ser possível encontrar nos naturais um par ordenado (x, y) tal que satisfaça a equação acima.

$$12 = 7.1 + 5$$

$$7 = 5.1 + 2$$

$$5 = 2.2 + 1$$

$$2 = 2.1$$

Daí, pela relação de Bézout, sabemos que é possível escrever $(12,7)$ como uma combinação linear de 12 e 7. Veja:

$$12 - 7.1 = 5$$

$$7 = (12 - 7.1).1 + 2 \rightarrow 12.(-1) + 7.2 = 2$$

$$5 = 2.[12. -(1) + 7.2] + 1 \rightarrow 5 = 12.(-2) + 7.4 + 1 \therefore$$

$$12 - 7.1 = 12.(-2) + 7.4 + 1 \rightarrow 12.3 + 7.(-5) = 1$$

---

[5] **Diofanto de Alexandria** falecido entre 284 e 298 foi um matemático grego. É considerado por muitos como "o pai da álgebra".

Agora é só encontrar uma equação equivalente ao que precisamos, ou seja, multiplique ambos os lados da última equação por 9.

$12.27 + 7.(-45) = 9$ e encontramos um caso particular da equação $12x - 7y = 9$ que é

$$x = 27 \; e \; y = \; 45$$

Feita essa explicação é hora de por em prática esse novo aprendizado, propusemos alguns exercícios afim de que os alunos pudessem fixar melhor esse novo conteúdo.

Ex.1) Da equação $40x - 65y = 135$ verifique se é possível encontramos uma solução natural para as variáveis e apresente um caso particular.

Ex.2) Marcelo foi ao caixa eletrônico de sua cidade, que só opera com notas de $R\$ \; 20{,}00$ e $R\$ \; 50{,}00$ e sacou a quantia de $R\$ \; 1310{,}00$. Pergunta-se:

a) É possível obter essa quantia apenas com notas de $R\$ \; 20{,}00$?

b) É possível obter essa quantia apenas com notas de $R\$ \; 50{,}00$?

c) Quantas foram as notas de cada tipo que Marcelo retirou no caixa eletrônico?

5. CONCIDERAÇÕES FINAIS.

Este trabalho teve como objetivo principal mostrar quão interessante pode ser o ensino de Aritmética, utilizando a metodologia da resolução de problemas do cotidiano tendo como ponto de partida alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

A hipótese levantada no início da pesquisa foi a de que alunos que aprendem os conceitos de aritmética de uma forma mais amadurecida criam conexões mais tangíveis a sua realidade.

As hipóteses realizadas como ponto de partida da pesquisa e que despertaram o interesse inicial, a princípio se comprovaram.

Podemos concluir que o saber matemático, em constante evolução, depende mais da vontade de ensinar dos professores do que a vontade de aprender dos alunos. Vimos que é possível “ir além” e ensinar mais do que precisamos.

Após as duas primeiras aulas os alunos comentaram que se sentiram motivados para as próximas aulas e que gostariam que suas aulas ordinárias fossem desse mesmo modo.

Pude observar que as “amarras” pedagógicas impostas muitas das vezes nos impedem de irmos além. Pude concluir que deixar o aluno escolher qual caminho seguir, seja básico ou avançado, produz resultados melhores, uma vez que a motivação partiu deles.

É preciso rever o conteúdo a ser abordado no ensino médio, temos que desenvolver novos instrumentos avaliativos, seja quantitativo ou qualitativo, mas que reconheça o desenvolvimento individual e limitado de cada indivíduo.

6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

[1] C. G. Moreira, **Teoria dos números um passeio com primos e outros números familiares pelo mundo inteiro**. 15-26 2° Ed. (2013) –Projeto Euclides.

[2] A. Hefez, Textos Universitários-**Elementos de aritmética**. 30-73 2° Ed. (2011). SBM

[3] MICHAELIS: **Moderno Dicionário da Língua Portuguesa**. 1° ed. São Paulo: Melhoramentos, 2004.

[4] POMMER, W.M. **A Engenharia Didática em sala de aula:** Elementos básicos e uma ilustração envolvendo as Equações Diofantinas Lineares. São Paulo, 2013. 72 p.Disponível em: http://stoa.usp.br/wmpommer/files/3915/20692/Livro+Eng%C2%AA+Did%C3%A1tica+2013.pdf. Acesso em 11/12/2014.

[5] D'AMBROSIO, U. **Educação Matemática: Da teoria á prática.** 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

[6] Wikipédia acesso eletrônico http://pt.wikipedia.org/wiki/Diofanto_de_Alexandria em 10/11/2014.

[7] K. IURY, I. F. Mendes. **Aritmética Elementar.** Ed XYZ.

[8] C. Kamil, G. Declark. **Reinventando a aritmética.** 5° Ed. Editora popular 2011.

[9] Link: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro03.pdf (Acesso em 10 de junho de 2014 às 21h00min).