SIMONE PAES GONÇALVES NOGUEIRA

Poliedros de Platão como estratégia no ensino da Geometria Espacial

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Santo André - SP

2014

SIMONE PAES GONÇALVES NOGUEIRA

Poliedros de Platão como estratégia no ensino da Geometria Espacial

Dissertação apresentada como exigência parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática à Comissão Julgadora da Universidade Federal do ABC, sob orientação do Prof. Dr. André Ricardo Oliveira da Fonseca

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ABC

Santo André - SP

2014

SIMONE PAES GONÇALVES NOGUEIRA

POLIEDROS DE PLATÃO COMO ESTRATÉGIA NO ENSINO DA GEOMETRIA ESPACIAL

Dissertação de Mestrado sob o título *Poliedros de Platão como estratégia no ensino da Geometria Espacial*, defendida por Simone Paes Gonçalves Nogueira, no Programa de Pós-graduação PROFMAT, da Universidade Federal do ABC, na área de matemática, perante a banca examinadora constituída pelos doutores:

Aprovada em AGOSTO de 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. ANDRÉ RICARDO OLIVEIRA DA FONSECA - Orientador
UFABC

Prof. Dr. MONICA KARRER
DM-FEI

Prof. Dr.BIRAJARA SOARES MACHADO
INCE-IIEP

Prof. Dr. MÁRCIO FABIANO DA SILVA
UFABC

Prof. Dr. ARMANDO CAPUTI
UFABC

Santo André - SP
2014

Dedico este trabalho ao meu orientador e à banca examinadora por toda contribuição que me prestaram, para conclusão desse trabalho.

Agradecimentos

A Deus pela oportunidade de a cada dia , com saúde, poder continuar aprendendo, evoluindo e prosseguindo na missão de lecionar.

Ao Professor Doutor André Ricardo Oliveira da Fonseca por sua orientação tão solícita, sua atenção, dedicação e incentivo, dando-me a oportunidade de desenvolvermos em parceria este trabalho.

Aos Professores Doutores da banca examinadora, pelas contribuições e sugestões para a conclusão desse trabalho.

A coordenação e professores doutores do Programa de Pós-graduação Profmat, da Universidade Federal do ABC, que muito contribuíram para o meu aprendizado.

Ao Professor Sandro Ramos e Professora Solange Santos pelo auxílio na revisão gramatical e ortográfica do trabalho.

A Direção e coordenação da Escola Luiz Bianconi, que oportunizou o desenvolvimento do Projeto, sempre se dispondo a ajudar na execução das atividades.

Ao meu marido, Marcelo, ao meu filho Guilherme, e a minha mãe Mariângela, pelo apoio e compreensão pela falta da minha presença em função do tempo dispensado ao curso .

Resumo

Nosso trabalho tem como objetivo fazer um breve estudo dos poliedros, especialmente os poliedros platônicos. Faremos uma apresentação do momento histórico em que estes foram tratados, bem como dos matemáticos que contribuíram para tal estudo. Abordaremos o que são os polígonos regulares, o conceito de diedros e os poliedros regulares. Mostraremos os porquês de só existirem cinco poliedros platônicos e uma demonstração da Relação de Euler, por indução. Deixaremos modelos de atividades práticas que podem ser trabalhadas em sala de aula, a fim de motivar o processo de aprendizagem e favorecer o entendimento dos conteúdos, podendo favorecer a compreensão das relações , além das "fórmulas" decoradas. Será apresentada também uma ideia intuitiva do cálculo das áreas e dos volumes dos Poliedros de Platão, dificilmente abordadas nos livros didáticos. Faremos um acompanhamento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), dando uma visão do desenvolvimento do assunto deste trabalho (Poliedros de Platão) durante as série iniciais, até chegar ao 2o. Ano do Ensino Médio, onde o conteúdo é mais profundamente tratado, mostrando alguns exemplos de questões aplicadas em avaliações externas: Saresp e Enem, que abordam a geometria Espacial. Deixamos ao longo do trabalho um registro de imagens, de um projeto aplicado ao 2o. Ano do Ensino Médio de uma escola pública durante o desenvolvimento de atividades práticas.

Palavras chave: Geometria Espacial, Polígonos regulares, Poliedros de Platão e Práticas de sala de aula

Abstract

Our work aims to make a brief study on polyhedrons, focusing specially on solid platonics. First, we will present the historical moment in which this topic was discussed, as well as mention the mathematicians who contributed to the first studies about it. Then, we will explain what are regular polygons, dihedral angle and regular polyhedron. We will also discuss the reasons why there are only five solid platonics and we will demonstrate the Euler Characteristics, through induction. We will provide sample activities, which can be used in classrooms, in order to influence positivetly the learning process of students. Therefore, such students will be able to better learn and understand the content, rather than just decorating the "formulas". We will also show an intuitive idea of calculating the area and volumes of solid platonics, which is something rarely demonstrated in textbooks. Further on, we will demonstrate how this topic is presented by the National Curriculum Parameters "Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)", and relate it to how it is developed and and taught since the first years of schools until the second year of High School, time in which this topic is more deeply studied. There are sample questions, which can be found in national examinations, such as Saresp (São Paulo's government exam) and ENEM (Federal government exam). Throughout this work you will be able to see imagens that were taken during a project envolving students from a second High School year, which was taken place a public school.

Keywords: Spatial Geometry, Regular Polygons, Platonic Solids and Practices in the classroom.

Sumário

Lista de Figuras

Capítulo 1

Introdução

É de conhecimento de todos a grande dificuldade enfrentada em relação ao ensino da Matemática. As causas são diversas: a falta de formação profissional qualificada, problemas ligados às condições de trabalho, a ausência de políticas educacionais que surtam efeitos positivos, problemas sociais e a má interpretação e aplicação de práticas pedagógicas. Sabemos, porém, que há professores que realmente se preocupam e buscam uma prática pedagógica eficiente. Estes ainda se empenham em mudar o quadro crítico em que se encontra o Brasil no " Ranking da Matemática".

Durante o ensino da Matemática, assim como das demais disciplinas, é importante levar-se em conta a realidade do aluno, valorizando sua realidade social e não ignorando toda a riqueza de conteúdos que sua experiência de vida traz. Mas, não é possível que os assuntos a serem trabalhados girem em torno somente desta realidade, afinal estaríamos ignorando assuntos importantes e essenciais que impediriam o educando de ampliar seus conhecimentos e competir no mercado de trabalho. Torna-se então importante ressaltar a necessidade de uma abordagem concreta, ou seja, da prática dos conteúdos tratados, a fim de que o aluno vivencie o assunto. É necessário então uma observação das dificuldades apresentadas pelo educando, através de atividades diagnósticas, partindo destas dificuldades para um estudo de conceitos, como citado em pesquisa feita por colegas que atuam na educação [21].

A Matemática tem uma parcela importantíssima de contribuição na formação do cidadão, através da aplicação de metodologias diversas, técnicas e estratégias, bem como do entendimento de sua validação que comprovam a resolução de problemas do cotidiano, auxiliando no desenvolvimento da criatividade, criticidade e principalmente na satisfação de tornar o educando um cidadão participativo e interado dos acontecimentos sociais.

Para ensinar os conteúdos, não há um único, ou melhor caminho, é necessário conhecer diversas possibilidades de trabalho em sala de aula, de forma que o aluno se motive a aprender. Devemos tomar posse de recursos que estimulem o aluno como: A História da Matemática, as tecnologias da comunicação, os jogos pedagógicos, além é claro dos livros e artigos que trazem as definições, demonstrações e propriedades essenciais ao desenvolvimento de práticas.

Durante nosso trabalho falaremos sobre os poliedros, dando ênfase aos Poliedros de Platão, que teve um tratamento matemático no livro XIII dos "Elementos" de Euclides (cerca de 300 a.C.) que é dedicado inteiramente aos sólidos regulares mostrando cálculos que determinam, para cada um, a razão entre o comprimento da aresta e o raio da esfera circunscrita. Chamados erroneamente de poliedros platônicos, já que três deles: o tetraedro, o cubo e o dodecaedro se devem aos Pitagóricos, e o octaedro e o icosaedro a Teeteto, discípulo de Platão na Academia.

De qualquer forma Platão apresentou descrição dos cinco poliedros regulares e mostrou modelos de como construí-los. No trabalho de Platão, Timeo, misticamente associa estes elementos aos elementos da natureza.

Abordaremos os porquês de só existirem os cinco poliedros platônicos e apresentaremos também a demonstração da Relação de Euler, por indução, assim como a o cálculo das áreas e volumes dos Poliedros de Platão. Ficam registradas algumas sugestões de atividades pedagógicas práticas, retiradas de outras Obras já conhecidas [4] e [7], que podem ser utilizadas com os alunos, a partir de uma plano elaborado e adaptado pelo professor, de acordo com a realidade da turma visando a motivação e compreensão dos conceitos, destacando as Habilidades, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo (2012) [13] e os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) [12].

Capítulo 2

Um pouco da história de Platão

"Outrora na minha juventude experimentei o que tantos jovens experimentaram. Tinha o projeto de, no dia em que pudesse dispor de mim próprio, imediatamente intervir na política."
"À sua convicção entusiástica de que o estudo da Matemática fornecia o mais refinado treinamento do espírito e, portanto, era essencial que fosse cultivado pelos filósofos e pelos que deveriam governar seu Estado ideal."

Ambas as falas acima, referem-se a um homem, que não contente com a condição estática da sociedade e das ditas "verdades absolutas", procurou dar movimento a dinâmica dessa sociedade. Estamos falando de Platão, que segundo FLOOD(2013) [5] e PLATÃO, Diálogos (1991) [6], que nasceu por volta de 428-7 a.C. e morreu em 348-7 a.C.. É inegável a contribuição que Platão legou às sociedades posteriores a ele. Essas contribuições transitam facilmente pelo campo da política, ética, moral, e o que muitos desconhecem também, o campo da Matemática e da Geometria.

Sua origem é de uma família tradicional ateniense, o que lhe permitiu conhecer de perto, todos os aspectos legais e ilegais da política ateniense. Aliás, foram justamente esses aspectos na política, segunda a sua concepção de política, que o motivaram a criticá-la quando fosse necessário. Portanto, as críticas eram muito bem fundamentadas, uma vez que, desde a sua infância, adquiriu conhecimento suficiente das manobras políticas e de seus verdadeiros motivos.

A formação intelectual de Platão consolidou-se através do encontro, com outro grande filósofo grego, Sócrates. Platão absorveu o que pode de seu mestre, que segundo ele "*era o mais sábio e o mais justo de todos os homens*", mas que viu perecer, porque não abriu mão de seus preceitos éticos e morais, em nome de uma política, que privilegiava a um grupo restrito da elite ateniense. Diante da pena de morte imposta a Sócrates - ingerir cicuta, pois foi acusado de corromper a juventude e por difundir ideias contrárias à religião tradicional, Platão totalmente depreciado dessa política e com aquela democracia, disse: "*vendo isso e vendo os homens que conduziam a política, quanto mais considerava as leis e os costumes, quanto mais avançava em idade, tanto mais difícil me pareceu administrar os negócios do Estado*" (Carta VII). No entanto, o ganho de todo conhecimento e aprendizado propagado por Sócrates, levou a reflexão política de Platão, surge daí a infinita necessidade de fundamentar qualquer atividade em conceitos claros e seguros, isso é, primeiro tem de encontrar os fundamentos teóricos da ação política - e de toda a ação - para orientá-la corretamente.

Após a morte de Sócrates, Platão dá início a uma série de viagens, onde encontrou com filósofos e matemáticos, entre outros, que legaram seus conhecimentos contribuindo na estruturação de sua academia. Passando por Megara, pode conhecer Euclides, muito respeitado hoje por sua obra Elementos. Chegando ao sul da Itália (Magna Grécia), passa a ter contato com Arquitas de Tarento, famoso político e matemático, que lhe mostra um exemplo de sábio-governante, usado posteriormente em uma de suas obras mais emblemáticas, a *República*. De passagem pelo norte da África, para ser mais exato pelo Egito, quase não se tem nada a confiar. A única ação de Platão, que se pode assegurar é, que em Cirene, uma antiga colônia grega na atual Líbia, aprofundou-se de pesquisas matemáticas, desenvolvidas por Teodoro, essencialmente as que se referem aos "*irracionais*" (grandezas como $\sqrt{2}$, cujo valor exato não se podia determinar). Os irracionais matemáticos inspirariam várias doutrinas políticas de Platão, pois representam uma "*justa medida*" que nenhuma linguagem consegue exaurir.

Depois de longas viagens e a absorção de vastos conhecimentos, Platão se sente preparado a conceber um espaço, que segundo a sua tese, seria necessário para a união e organização de todo tipo de conhecimento e de todas as atividades matemáticas e filosóficas, a fim de que fossem discutidos e colocados a prova. Portanto, em 387 a.C. é fundada a Academia em Atenas e, assim Platão se torna dirigente da primeira instituição preocupada com a pesquisa e a investigação de tudo ao seu redor, pois de acordo com o pensamento de seu fundador "*prevalece-se a pesquisa original como resultado de esforços de um grupo que vê no conhecimento algo mutável, dinâmico e não só um corpo de doutrinas a serem simplesmente resguardadas e transmitidas*". Outras academias foram surgindo, antes e depois da de Platão, como exemplo temos uma fundada por Isócrates (436 - 338 a. C.), que divergia totalmente em termos de estrutura. Enquanto Platão presidiu uma academia, preocupada com a pesquisa, a investigação de novos conhecimentos, Isócrates primava pela formação de bons oradores, que aspiravam a vida política e, que deveriam convencer, defender de forma persuasiva o seu ponto de vista. Diga-se de passagem, que, se Platão foi um crítico sistemático da democracia ateniense, tão logo seria também um crítico desse modelo de academia, defendido por Isócrates.

Entretanto, após tantas viagens, a fundação de uma Academia e, com tantos conhecimentos a sua volta, com tantas situações a serem pensadas e estudadas, Platão ainda sentia que existia uma lacuna a ser preenchida. A resposta a isso veio pelo conhecimento da Matemática, que de acordo com a sua visão era a promessa que sobreporia as perguntas feitas por Sócrates, mas que ficavam sem respostas. Além disso, a Matemática passa a ser o paradigma de todo o processo de compreensão. Portanto, percebe-se que, se a função da Filosofia é descobrir a verdade, que ultrapasse os limites da opinião e da aparência, a Matemática por si só, é um exemplo exímio de conhecimento de verdades eternas e necessárias independente da experiência dos sentidos. Como Platão defende na República, o filósofo deve saber Matemática porque "*ela tem um efeito muito grande na elevação da mente compelindo-a a raciocinar sobre entidades abstratas*".

Partindo do pressuposto de que a Filosofia e a Matemática seriam, disciplinas necessárias para aqueles que ocupariam os cargos de maior responsabilidade no Estado, Platão aprofunda-se cada vez mais os seus estudos nessas áreas, principalmente na Matemática. Tido como um entusiasta, os grandes matemáticos do seu tempo, ou foram seus alunos, ou seus amigos. Nesse sentido, não se poderá deixar de referir que, à entrada da Academia, segundo fontes posteriores, se lia a máxima: "*Que não entre quem não saiba geometria*". Outras áreas também seduziram Platão, como: Aritmética, Geometria, Astronomia e a Música. Em mais uma de suas obras "*Timeu*", que assim como a "*República*" fazem menções à Matemática, ele pode desenvolver de uma forma mais complexa, sua teoria sobre os sólidos regulares, também chamados de "*sólidos platônicos*" ou "*poliedros de Platão*" (tetraedro, cubo, octaedro, dodecaedro e icosaedro).

Em sua obra já citada "*Timeu*" Platão tratou de associar os conhecimentos de sua academia à natureza, isso é, ele tratou de fazer uma conexão entre os seus estudos matemáticos, aliados aos filosóficos, mostrando o vínculo di-reto que existe entre o Universo e os elementos da natureza. A afirmação tanto é verdade, que em sua obra ele deixa explícito essa ligação. Platão explica que o dodecaedro é representante do Universo, pois o cosmos seria formado por átomos em forma de dodecaedros. Assim, para os quatro poliedros faltantes, estariam representados pelos elementos gregos: terra, ar, fogo e água. O cubo representaria a terra, pois seus átomos seriam cubos, que organizados de uma forma precisa, daria-lhe mais estabilidade. O ar estaria sendo representado pelo octaedro, pois segundo Platão o seu átomo era um poliedro de oito faces. O tetraedro seria o fogo, porque seu átomo teria a forma de um poliedro de quatro lados. E por fim, a água que seria representada pelo icosaedro, com a justificativa de que seus átomos teriam a forma de um poliedro de vinte faces. Vale ressaltar ainda, que todas essas teorias serviram de base para outros filósofo e matemáticos, desde aquela época até os dias atuais.

Em suma, todas as teorias criadas e, caminhos percorridos por Platão, seja no campo da Filosofia, seja no campo da Matemática, acaba que por si só, sendo uma contribuição um tanto quanto extensa, para um melhor entendimento de uma parcela bem satisfatória de acontecimento que nos cercam e que nos ajudam a entendermos o meio.

Capítulo 3

Poliedros

3.1 Polígonos regulares

Antes de estudarmos os Poliedros de Platão, cujas faces são formadas por polígonos regulares, precisamos definir o que são os polígonos regulares e os diedros.

Um polígono convexo é regular se, e somente se, tem todos os lados congruentes (é equilátero) e todos os ângulos congruentes (é equiângulo).

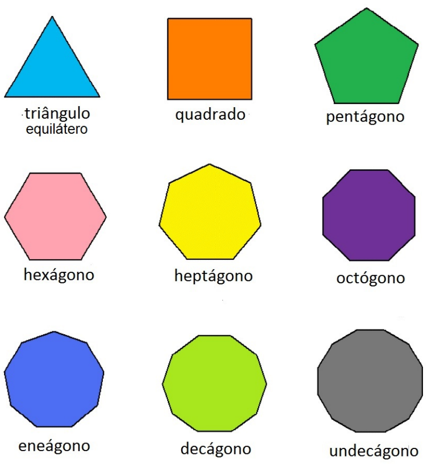


Figura 3.1: Polígonos Regulares

Fonte: < *http : //miscosasdemaestra.blogspot.com.br*/2013/06/*poligonos.html* >
Acesso em: 02 *maio* 2014.

Nos Poliedros de Platão, estaremos reconhecendo os seguintes polígonos regulares: *triângulo equilátero*, no tetraedro regular, no octaedro regular e no icosaedro regular, *o quadrado* no hexaedro regular e *o pentágono regular* no dodecaedro regular. Entenderemos através de uma demonstração e de uma atividade prática aplicada, o pôrque de só serem utilizados esses polígonos regulares.

3.2 Poliedros regulares

Segundo DOLCE(1985, p. 77), [3] um **diedro** ou um ângulo diédrico ou ângulo diedro é a reunião de dois semiplanos de mesma origem não contidos num mesmo plano.

A origem comum dos semiplanos é a aresta do diedro e cada um dos semiplanos, será uma das faces.

Assim, α e β são dois semiplanos de mesma origem r, distintos e não opostos.

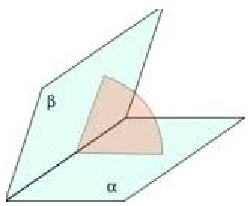


Figura 3.2: Diedro

Fonte: $< http://pt.wikipedia.org/wiki/Diedro >$
Acesso em: 02 *maio* 2014.

Agora, segundo DOLCE(1985, p. 97), [3] podemos definir *triedros*:

Dadas três semirretas V_a, V_b e V_c, de mesma origem V, não coplanares, consideremos os semi-espaços $E_1, E2$ e E_3, como segue:

E_1, com origem no plano (bc) e contendo V_a;

E_2, com origem no plano (ac) e contendo V_b;

E_3, com origem no plano (ab) e contendo V_c;

Triedro determinado por V_a, V_a e V_c é a intersecção dos semi-espaços E_1, E_2 e E_3.

$$V(a,b,c) = E_1 \cap E_2 \cap E_3$$

Sob outra orientação, o ente definido acima é chamado setor triedral ou ângulo sólido de três arestas. Assim, o triedro é a reunião dos três setores angulares definidos por V_a, V_b e V_c.

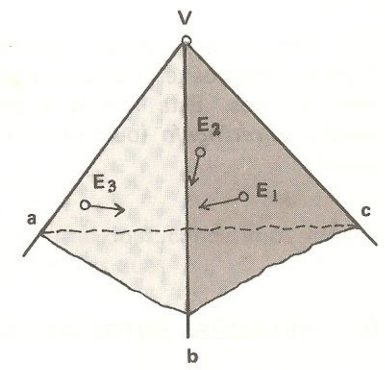


Figura 3.3: Triedro

Fonte: Matemática Elementar [3]

É importante ressaltar que:

1) Em qualquer triedro

Cada face é menor que a soma das outras duas e a soma das medidas (em graus) das faces é menor que 360^0.

2) Uma condição necessária e suficiente para que f_1, f_2 e f_3 sejam medidas (em graus) das faces de um triedro é:

$0^0 < f_1 < 180^0$, $0^0 < f_2 < 180^0$, $0^0 < f_3 < 180^0$

$f_1 + f_2 + f_3 < 360^0$ e $\mid f_2 - f_3 \mid < f_1 < f_2 + f_3$

Um **ângulo poliédrico é regular**, se e somente se, as faces são todas congruentes entre si.

Vamos então definir poliedro convexo.

DOLCE (1985, p.120),[3] define poliedros convexos:

"Considerando um número finito n ($n \geq 4$) de polígonos planos convexos (ou regiões convexas), tais que:

- Dois polígonos não estão num mesmo plano;
- Cada lado de um polígono é comum a dois e somente dois polígonos;
- O plano de cada polígono deixa os demais polígonos num mesmo semi-espaço;"

Assim, poliedro convexo é a intersecção desses semiespaços, sendo cada um deles possui uma origem no plano de um polígono e contém os restantes.

Um poliedro convexo possui:

- Faces: polígonos convexos;
- Arestas: são os lados do polígono;
- Vértices: vértices do polígono;

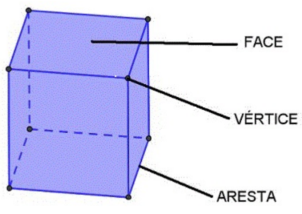


Figura 3.4: Elementos de um poliedro

Fonte: < *http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula* = 28865 >
Acesso em: 02 *maio* 2014.

Os poliedros podem ser convexo ou não convexos. Os poliedros convexos, que estudaremos em nosso trabalho, possuem: faces que são os polígonos convexos, arestas que são os lados dos polígonos e vértices, que são os vértices dos polígonos.

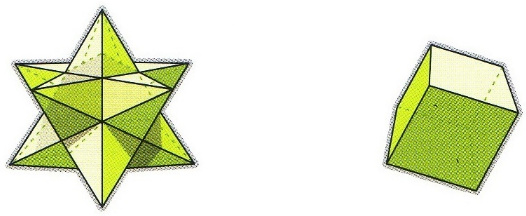


Figura 3.5: Poliedro não convexo e poliedro convexo

Fonte: $< http : //matematicacinco.blogspot.com.br/2010_{1}0_{0}1_{a}rchive.html >$
Acesso em: 02 *maio* 2014.

3.3 Relação de Euler

Os poliedros para as quais é válida a relação de Euler são chamados de Poliedros Eulerianos. Importante ressaltar que todo poliedro convexo é Euleriano, mas nem todo poliedros Euleriano é convexo.

DOLCE (1985, p.120)[3]

“Para todo poliedro convexo, ou para superfície, vale a relação:

$$V - A + F = 2$$

onde V é o número de vértices, A é o número de arestas e F é o número de faces do poliedro”.

Demonstração Por indução finita referente ao número de faces, vamos provar primeiramente que para uma superfície poliédrica limitada convexa aberta, vale a relação:

$$V_a - A_a + F_a = 1$$

onde V_a é o número de vértices, A_a é o número de arestas e F_a é o número de faces de uma superfície poliédrica.

Para $F_a = 1$, ou seja, temos uma superfície poliédrica reduzida a um único polígono convexo de n lados e assim:
$V_a = n$ e $A_a = n$ logo,
$V_a - A_a + F_a = 1$
$n - n + F_a = 1$
$F_a = 1$, o que verifica a afirmação.

Se a relação vale para uma superfície F' faces (que possui A' arestas e V' vértices), devemos provar se é válida para $F' + 1$ faces (que possui $F' + 1 = F_a$ faces,V_a vértices e A_a arestas). Por hipótese, para a superfície de F' faces, A' arestas e V' vértices:

$$V' - A' + F' = 1$$

Acrescentando a esta superfície (que é aberta) uma face de p arestas (lados) e considerando que q destas arestas (lados) que coincidem com arestas já existentes, obtemos uma nova superfície com F_a faces, A_a arestas e V_a vértices tais que:
$F_a = F' + 1$
$A_a = A' + p - q$ (q arestas que coincidem)
$V_a = V' + p - (q + 1)$ q arestas coincidindo, $q + 1$ vértices coincidem).

Tomando a expressão:
$V_a - A_a + F_a$ e substituindo as relações acima temos:
$V' + p - (q + 1) - (A' + p - q) + F' + 1 =$
$V' + p - q - 1 - A' - p + q + F' + 1 =$
$V' - A' + F'$ e como
$V' - A' + F' = V - A + F$

Provamos que a expressão é válida para $F' + 1$ faces, ou seja, que não se alteram quando retiramos (ou acrescentamos) uma face da superfície.

Como inicialmente $V' - A' + F' = 1$, temos $V - A + F = 1$.

Agora tomemos a superfície de qualquer poliedro convexo, com V vértices, A arestas e F faces, e dela retiremos uma face. Ficamos então com uma superfície poliédrica aberta (com V_a vértices, F_a faces e A_a arestas) para a qual

vale a relação:
$V_a - A_a + F_a = 1$, como
$V_a = V$, $F_a = F - 1$ e $A_a = A$, temos:

$$\boxed{V - A + F = 2}$$

que chamamos de **Relação de Euler**.

É importante lembrar, que o Teorema de Euler está ligado a um conceito que engloba o de poliedros convexos, pois vale para estes.

Durante a aplicação do Projeto, na escola pública, os alunos construíram alguns poliedros e verificaram inicialmente através da contagem, a veracidade da Relação de Euler, veja foto 8.14, p.97, só então fizemos uma demonstração desta relação, conforme apresentamos abaixo.

3.4 Quais são os poliedros regulares? Quantos são? Por quê?

Vejamos algumas definições, antes de demonstrarmos o porquê de só existirem os cinco Poliedros de Platão.

LIMA, Elon Lages (2006, p.241)[9]

"Um poliedro convexo é regular quando todas as faces são polígonos regulares iguais e em todos os vértices concorrem o mesmo número de arestas".

Agora, já podemos definir os Poliedros de Platão.

DOLCE, (1985, p.126)[3]

Um poliedro é chamado poliedro de Platão, se e somente se, satisfaz as três afirmações:

- Todas as faces têm o mesmo número n de lados;
- Todos os ângulos poliédricos tem o mesmo número m de arestas;
- Vale a Relação de Euler ($V - A + F = 2$)

Teorema: Existem apenas cinco poliedros de Platão

Consideremos n o número de lados de cada face e p o número de arestas que concorem em cada vértices. Vamos então, contar os vértices e as faces, a partir das arestas:

$nF = 2.A$, pois cada aresta está em duas faces. Logo,

$$F = \frac{2A}{n} \tag{3.4.1}$$

$pV = 2.A$, pois cada aresta contém dois vértices. Logo,

$$V = \frac{2A}{p} \tag{3.4.2}$$

Substituindo (3.4.1) e (3.4.2) na Relação de Euler, temos:

$$V - A + F = 2$$

$$\frac{2A}{p} + \frac{2A}{n} = A + 2$$

Dividindo a expressão, membro a membro, por $2A \neq 0$, temos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \tag{3.4.3}$$

Podemos observar na última equação que sendo $\dfrac{1}{A} > 0$, temos:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{n} > \frac{1}{2} \tag{3.4.4}$$

Sabemos também, que $n \geqslant 3$ e $p \geqslant 3$, pois número de arestas de uma face ou de um ângulo poliédrico, não podem ser simultaneamente maiores que 3, pois:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

Observamos também, que o segundo membro de 3.4.3 deve ser maior que $\dfrac{1}{2}$.

Vamos assim, fixar n=3 e temos então em 3.4.4:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{3} > \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$$

$$p < 6$$

O que significa que se p<6, temos p=3,4,5.

Da mesma forma, podemos fixar p=3 e obter n=3,4,5.

Agora, sabendo que não podemos ter simultaneamnete n e p maiores que 3, temos apenas 5 possibilidades de combinações de n e p, o que demonstra o teorema.

Para visualizarmos melhor, vamos observar a seguinte tabela:

POLIEDRO	n	p	A	V	F
Tetraedro	3	3	6	4	4
Hexaedro	4	3	12	6	8
Octaedro	3	4	12	6	8
Dodecaedro	5	3	30	20	12
Icosaedro	3	5	30	12	20

Acabamos de demonstrar o porquê de só existirem os cinco Poliedros de Platão. Agora, de forma prática, fica mais fácil compreender estas características e propriedades dos poliedros, tendo-os em mãos. Uma das formas de fazer isso é através das construções que podem ser feitas de várias formas.

Vamos agora mostrar algumas sugestões de atividades que podem ser aplicadas nas escolas. Com elas, os alunos poderão construir os sólidos geométricos muito mais motivados a participar das aulas, podendo compreender mais facilmente suas características e desenvolver os cálculos que a disciplina de Matemática exige, de maneira tranquila, não ficando o aluno preso somente à aplicações de “fórmulas” decoradas sem nenhuma compreensão do que está fazendo.

Capítulo 4

Construindo Poliedros em sala de aula

Após a verificação anterior de que só existem cinco poliedros de Platão, vamos mostrar algumas atividades que podem ser aplicadas em classe. Não se trata de um plano de aula, mas de sugestões de atividades que devem ser planejadas e adaptadas pelo professor, de acordo com a turma a ser aplicada, cujo objetivo é motivar os alunos na construção de conceitos, reforçando o aprendizado. É melhor que seja trabalhada em grupo, pois possibilita a discussão entre os alunos e a troca de explicações numa linguagem informal comum entre eles, podendo ser feita num ambiente fora da sala de aula, por exemplo: no pátio ou laboratório, com mesas grandes, o que já é bastante motivador para o educando.

É importante ressaltar que as atividades práticas proporcionam o entendimento dos conceitos que são trabalhados muitas vezes de forma abstrata, somente com cálculos na aplicação de "fórmulas", ou mesmo na demonstração dos Teoremas, que na maioria das vezes não são compreendidas pelo aluno, feitas de forma mecânica, sem nenhuma relação com o mundo que os cerca. Assim, o aluno partindo da prática, pode desenvolver tal demonstração fazendo as relações do que construiu com o que está demonstrando.

As atividades práticas: planificações com papel, utilização de canudinhos e barbante ou palitos de churrascos com elásticos, ou até mesmo tubos de PVC e conectores desenvolvem a capacidade de representar objetos geométricos; sua capacidade de visualizar, perceber e criar imagens; caracterizar elementos e situações geométricas; interpretar os desenhos diferenciando suas dimensões (plana e espacial); aprender a conjecturar e intuir soluções para problemas matemáticos elementares.

Tais atividades práticas de planificação e construção dos "esqueletos" dos poliedros podem favorecer a percepção de espaço e forma auxiliando a relação entre o abstrato e o concreto. Com tal manipulação, deve-se também reconhecer e identificar as formas planas e espaciais, bem como a compreensão dos cálculos de áreas e volumes, onde o aluno não mais "decora fórmulas prontas" , mas compreende e interpreta o que está calculando. É necessário e fundamental que ao longo das atividades o professor vá juntamente com a prática, mostrando aos alunos como devem ser feitos os registros, formalizando as demonstrações. Inicialmente utilizamos tabelas para contagem de arestas, vértices, faces, nomenclaturas, classificações e verificação da Relação de Euler e posteriormente , registros de cálculos de áreas e volumes.

Com estas atividades, espera-se que o aluno desenvolva as seguintes habilidades, de acordo com o Currículo do Estado de São Paulo, p.68 [13] :

- Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas).
- Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos geométricos, utilizando-se em diferentes contextos.

Todas as atividades que serão sugeridas, foram retiradas de outras obras, citadas posteriormente e aplicadas numa turma de 2^oAno do Ensino Médio, na E.E.Luiz Bianconi, em Suzano. Ao longo da aplicação das atividades, foi percebido uma grande melhora no interesse e no aprendizado dos alunos. Foi feita uma atividade diagnóstica (veja em anexos: 11.1 p. 115 e 11.2 p.11.2) com questões que verificavam as habilidades, de acordo com os Currículo do Estado de São Paulo (2012), das séries/anos anteriores. O resultado foi alarmante, mas os índices não são o foco do nosso trabalho e sim os procedimentos pedagógicos para que estes melhorem. Notou-se que os alunos, na grande maioria, não tinham conhecimento/domínio dos conteúdos desenvolvidos até então. Tinham alguns conceitos fragmentados, mas não possuíam as habilidades propostas necessárias para acompanhar os conceitos a serem desenvolvidos na série. Foi necessário fazer em paralelo aulas com retomada de alguns conceitos necessários: classificação de polígonos, Teorema de Pitágoras, semelhança de triângulos, cálculo de áreas, entre outros.

4.1 Mostrando o porquê de só existirem os cinco Poliedros de Platão - Recortes de polígonos regulares - Prática I

Anteriormente, definimos e demonstramos formalmente o porquê de só existirem cinco poliedros platônicos, vamos agora observar alguns processos mais simples que comprovam esta afirmativa. Estes podem ser aplicados inicialmente com nossos alunos, ver foto 8.1, p. 95, para depois então desenvolvermos uma demonstração formal.

É realmente intrigante o porquê de só existirem cinco poliedros platônicos. Essa constatação chamou à séculos a atenção de muitos filósofos. Platão sabia disso e estudou algumas dessas propriedades. Por isso ficaram esses sólidos conhecidos como Poliedros de Platão.

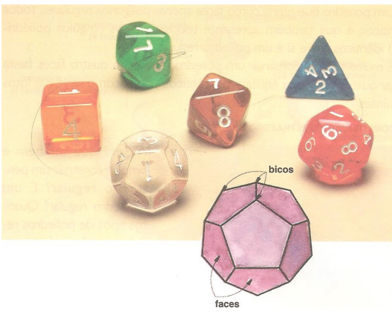


Figura 4.1: Identificando os Poliedros de Platão

Fonte: Os Poliedros de Platão e os dedos da mão [7]

Utilizaremos um processo bastante simples, conforme pesquisa feita em: Machado [7], que pode ser aplicado em sala de aula. Vamos recortar polígonos regulares, a fim de cumprirmos as propriedades dos Poliedros Platônicos e, com eles, construir poliedros. Dessa forma, procuraremos compreender as razões dessa limitação.

É importante lembrar que a medida de um ângulo externo é o suplemento de um ângulo interno, ou seja, somam 180^0.

Precisaremos ter a nossa disposição, uma série de polígonos regulares (podendo ser cópias reproduzidas a partir de um molde, veja em anexos figura:

11.4, p.118) e iniciaremos construindo poliedros quaisquer, onde perceberemos as primeiras limitações. Não podemos esquecer que só temos os cinco poliedros platônicos.

Observando as construções, percebe-se que é necessário independente dos polígonos escolhidos, formarmos um “bico” [1]. O que nos mostra, que essa escolha não é totalmente livre. Não é possível, por exemplo, construirmos tal poliedro com seis triângulos equiláteros, pois $6 \cdot 60^0 = 360^0$, o que nos dá um ângulo plano. Nem com quatro quadrados, pois $4 \cdot 90^0 = 360^0$. Da mesma forma com três hexágonos, sendo que $3 \cdot 120^0 = 360^0$, o que nos faz concluir que: além de precisarmos utilizar, no mínimo três polígonos, estes precisam ter soma dos ângulos menor que 360^0. E assim, se dá a confirmação, através da prática, da construção e existência de somente cinco Poliedros de Platão, que será resumidamente descrita nos itens abaixo utilizando uma linguagem acessível para nossos alunos.

4.1.1 Construindo o Tetraedro Regular

Formamos o primeiro “bico” utilizando três triângulos equiláteros e depois preenchemos os demais “bicos” com três triângulos, para que fiquem idênticos. Assim, temos o tetraedro regular.

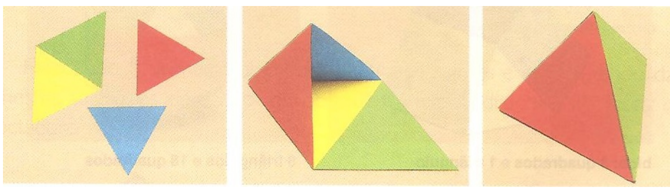


Figura 4.2: Verificação do Tetraedro

Fonte: Os Poliedros de Platão e os dedos da mão [7]

4.1.2 Construindo o Octaedro Regular

Da mesma forma do tetraedro, formaremos o primeiro “bico” agora com quatro triângulos equiláteros e completaremos os demais bicos, lembrando que é necessário que em cada um deles incida o mesmo número de arestas, obtendo assim um poliedro de oito faces chamado octaedro regular.

[1]chamaremos um ângulo poliédrico de “bico”

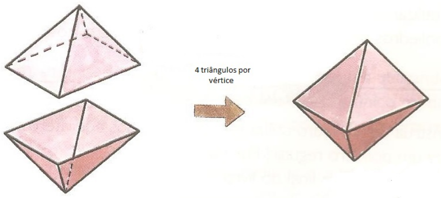


Figura 4.3: Verificação do Octaedro

Fonte: Os Poliedros de Platão e os dedos da mão [7]

4.1.3 Construindo o Icosaedro Regular

Ainda podemos utilizar para formar o primeiro "bico" cinco triângulos, o que nos dá um ângulo de 300^o e então da mesma maneira completaremos os demais "bicos", obtendo assim o icosaedro., poliedros com 20 faces.

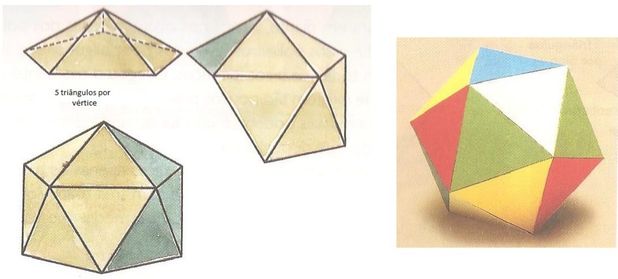


Figura 4.4: Verificação do Icosaedro

Fonte: Os Poliedros de Platão e os dedos da mão [7]

4.1.4 Construindo o Hexaedro Regular

Neste poliedro , utilizaremos apenas quadrados. Este poliedro é bastante conhecido com cubo. Iniciamos com três quadrados, formando um ângulo de 270^o e completamos da mesma forma os outros "bicos", obtendo assim o hexaedro regular.

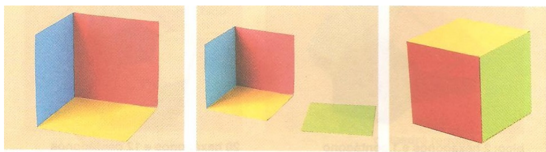


Figura 4.5: Verificação do hexaedro

Fonte: Os Poliedros de Platão e os dedos da mão [7]

4.1.5 Construindo o Dodecaedro Regular

Finalmente, vamos construir o último poliedro platônico, o dodecaedro regular. Reuniremos inicialmente três pentágonos regulares, formando o primeiro "bico" ($3.108^o = 324^o$) e então completaremos da mesma forma cada um dos outros bicos, obtendo assim o dodecaedro regular.

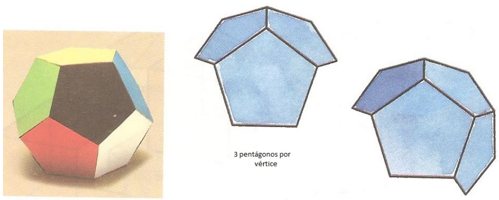


Figura 4.6: Verificação do Dodecaedro

Fonte: Os Poliedros de Platão e os dedos da mão [7]

4.2 Planificações dos Poliedros Platônicos - Prática II

Com esta atividade de recorte e colagem, veja fotos: 8.2 p.96, 8.3 p.96 e 8.4 p.96, utilizando apenas papel e cola (veja moldes em anexos: 11.5 p.119, 11.6 p. 120, 11.7 p. 121, 11.8 p. 122 e 11.9 p. 123), podemos aprimorar a observação e relação entre o plano e após montagem, o espacial e seus cálculos de áreas. Inicialmente percebemos uma grande defasagem quando um número significativo de alunos, numa atividade diagnóstica aplicada (veja em anexos: 11.1 p. 115 e 11.2 p.11.2), que chama o cubo de quadrado e pirâmide de triângulo, dentre outros erros que cometem.

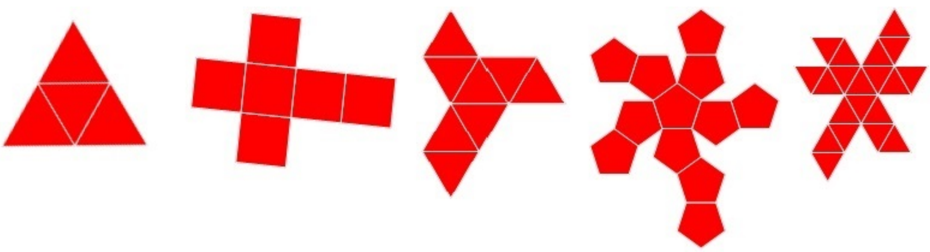


Figura 4.7: Planificação dos Poliedros de Platão

Uma observação importante a ser feita, durante a prática, comparando esta atividade com a atividade anterior, em que tínhamos os polígonos regulares, é a relação entre o número total de lados dos polígonos e o número de arestas do poliedro formado. Já mostramos anteriormente que $N = 2.A$ (número de lados é o dobro do número de arestas). Assim, fica bem evidente a constatação de tal fato. Os alunos conseguem agora perceber, através da prática, tal propriedade, devendo o professor sempre fazer interferências e questionamentos para observar se realmente estão tendo esta compreensão.

Mostraremos agora, mais uma sugestão de atividade para ser aplicada em classe, onde os alunos utilizando canudos e linhas, constroem os Poliedros de Platão.

4.3 Construindo e representando a estrutura das arestas dos Poliedros Regulares de Platão - Prática III

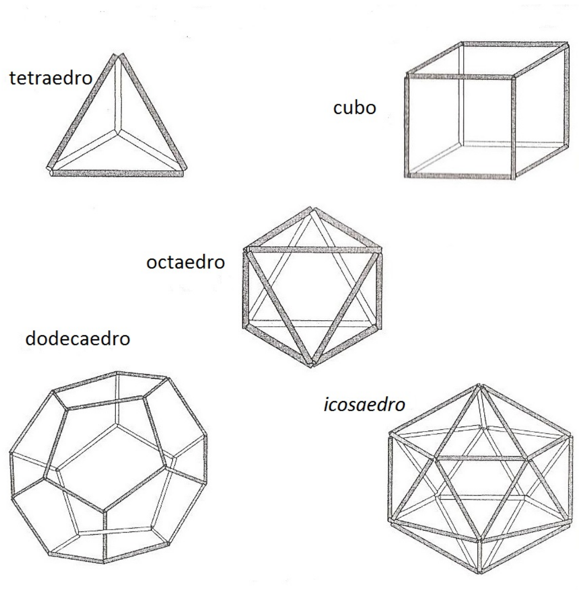


Figura 4.8: Estrutura das arestas dos Poliedros de Platão

Fonte: Vendo e entendendo poliedros [4]

Esta atividade, conforme pesquisa na obra: Kaleff [4], foi uma das mais interessantes e motivadora, veja fotos: 8.17 p.101 e 8.18 p.102, do projeto aplicado a turma do $2^0 ano$, onde os alunos se dividiram em grupos e trabalharam com os mais diferentes tipos de materiais. Utilizamos a sala de informática e aparelhos eletrônicos para auxiliar na construção através de vídeos disponíveis na internet. Esta atividade gerou uma concorrência positiva na sala. Após a construção, cada grupo tinha que colocar para turma suas experiências, pontos positivos e negativos.

Deve-se dispor de canudinhos rígidos, o que facilita bastante o manuseio e linha de pesca (pode ser barbante, mas pode não dar um acabamento tão bonito). Sugerimos canudos de 8cm. Poderá ser uma atividade orientada aplicada pelo professor, que através de recursos tecnológicos mostra aos alunos vídeos que auxiliam tais construções ou até mesmo através de modelos prontos e reproduzidos de construção.

4.3.1 Construindo do tetraedro regular

Para esta atividade precisaremos de seis de canudos e linha. Passe a linha nos três primeiros canudos, formando um triângulo e dê um nó. Agora passe o restante da linha por mais dois canudos, formando mais um triângulo com um dos lados do primeiro triângulo formado. Então passe a linha por um dos lados desse triângulo não usado e finalize com um nó, veja figura 4.9.

Durante a prática, tivemos a construção com tubos de PVC, onde os alunos no pátio, construíram, pintaram e fixaram os sólidos (móbiles) na sala de aula (sala de vídeo), ver fotos: 8.5 p. 97 e 8.6 p. 97.

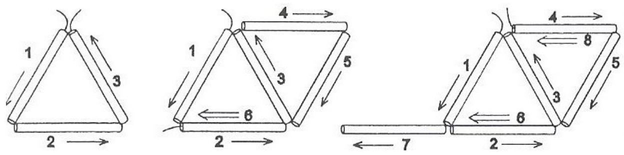


Figura 4.9: Construindo o tetraedro regular

Fonte: Vendo e entendendo poliedros [4]

4.3.2 Construindo o octaedro regular

Para esta atividade precisaremos de 12 canudos e linha (aproximadamente 2 metros). Construa inicialmente quatro triângulos e una os dois a dois, conforme mostra a figura.

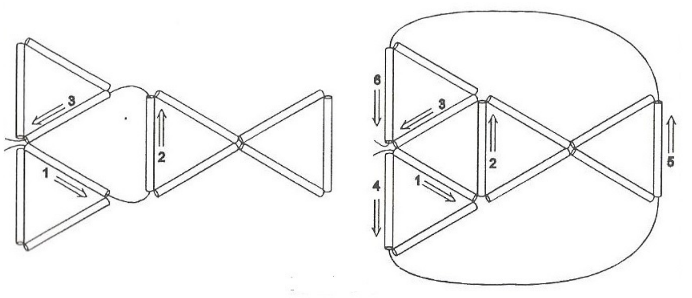


Figura 4.10: Construindo o octaedro regular

Fonte: Vendo e entendendo poliedros [4]

Veja também, fotos: 8.8 p.98, 8.9 p.99 e 8.15 p.101 do projeto desenvolvido.

4.3.3 Construindo o icosaedro regular

Para realizar esta atividade, veja fotos: 8.12 p.100 e 8.13 p.100, serão necessários 30 canudos (7cm) e linha (aproximadamente 3 metros). Construa 4 triângulos, conforme figura 4.11 (a). Una-os obtendo uma pirâmide pentagonal, veja figura 4.11 (b). Repita a construção formando mais uma pirâmide. Agora uma as pirâmides através dos vértices das bases, utilizando canudos de tal forma que em cada vértice se encontre 5 canudos, figura 4.11 (c).

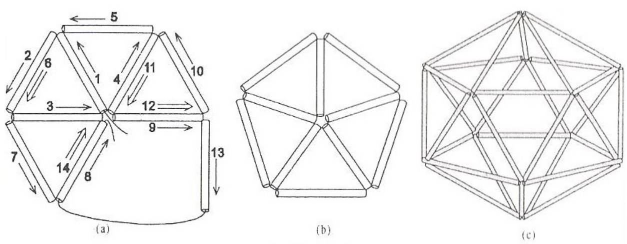


Figura 4.11: Construindo o icosaedro regular

Fonte: Vendo e entendendo poliedros [4]

4.3.4 Construindo o cubo e suas diagonais

Faremos o cubo com suas diagonais, para que tenha melhor rigidez. Inicialmente serão necessários 12 canudos. Passe a linha através de 4 canudos e novamente por dentro do primeiro canudo, construindo um quadrado. Utilizando agora um desses lados e passando a linha por mais 3 canudos, forme outro quadrado. Repita essa última formação novamente. Agora ainda faltam dois canudos. Prenda-os de maneira a completá-lo, veja figura 4.12 .

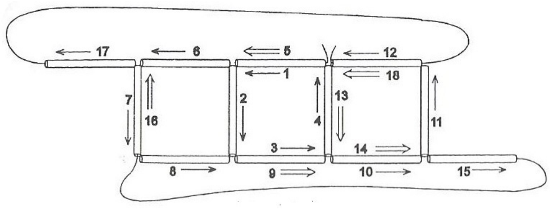


Figura 4.12: Construindo o cubo e suas diagonais

Fonte: Vendo e entendendo poliedros [4]

Lembre-se que ainda não temos a rigidez. Então vamos construir suas diagonais. Utilize para isso mais 6 canudos. Prenda-os aos vértices.

Para sabermos as medidas dos canudos das diagonais, devemos aplicar o Teorema de Pitágoras: $d = l.\sqrt{2}$, o que nos leva a conclui que esses últimos canudos são maiores.

Durante o projeto aplicado, não foi necessário a utilização das diagonais, quando utilizamos os tubos de PVC, já que possui melhor rigidez, veja foto: 8.7 p.98

4.3.5 Construindo o dodecaedro regular

Também encontraremos dificuldades em relação a rigidez. Porém, nesta atividade com os alunos, não nos preocuparemos com tal problema. Para que isso seja minimizado, utilizaremos canudos de tamanho reduzido. Senão, seria necessário utilizar como fizemos no hexaedro, canudos auxiliares (no hexaedro as diagonais)e estes ligariam cada um dos pentágonos ao centro, formando pirâmides. O problema para os nossos alunos seria calcular tal aresta.

Utilizaremos 30 canudos como arestas do dodecaedro. Inicia-se construindo a base que é um pentágono regular e repete-se esse procedimento a partir de cada uma das arestas, fechando assim o nosso dodecaedro. Veja fotos: 8.10 p.99, 8.11 p.99 e 8.16 p.101.

Capítulo 5

Superfícies e volumes dos Poliedros de Platão

Nesse momento do nosso trabalho, iremos mostrar como calcular as áreas e volumes de cada um dos Poliedros de Platão.

É importante ressaltar que as aulas expositivas, normalmente empregadas pelos professores, têm sua importância, não podendo o professor abdicar delas, mas há muitos outros recursos que podem ser empregados para auxiliar estas aulas, como as atividades que utilizam os recursos tecnológicos e atividades práticas, como as anteriormente apresentadas.

5.1 Superfície e volume do Tetraedro Regular

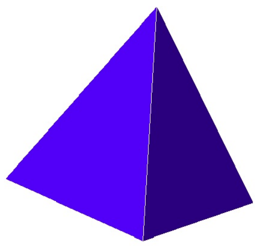


Figura 5.1: Tetraedro regular

Iniciaremos os cálculos de superfície e volumes pelo Tetraedro regular, o poliedro que segundo Platão está relacionado ao elemento da natureza: fogo. É a única pirâmide regular que é um poliedro regular.

O tetraedro regular é formado por quatro triângulos equiláteros. Tomemos um desses triângulos de lado l.

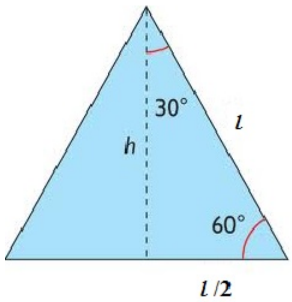


Figura 5.2: Triângulo equilátero de lado l

Fonte: Áreas e Volumes - Matemática: Temas e Metas [14]

Com base na figura, observamos que é possível aplicarmos o Teorema de Pitágoras, ou até mesmo, relações trigonométricas. Vamos calcular então a altura h desse triângulo.

$$l^2 = (\frac{l}{2})^2 + h^2$$

Assim, isolando h, temos:

$$h = \frac{l\sqrt{3}}{2} \tag{5.1.1}$$

Agora vamos calcular a área de cada uma das faces triangulares, em função de l:

$$A_t = \frac{b.h}{2} \tag{5.1.2}$$

onde A_t é a área do triângulo equilátero de cada uma das faces,b é a base do triângulo de lado l ($b = l$) e h é a altura do triângulo, já calculada.

Substituindo (5.1.1) em (5.1.2), temos:

$$A_t = \frac{l^2.\sqrt{3}}{4}$$

Assim, a área total do tetraedro A_T é dada pela soma das áreas dos quatro triângulos equiláteros de lado l. Temos:

$$\boxed{A_T = l^2.\sqrt{3}}$$

Já o volume do tetraedro, que chamaremos de V_T é o volume de uma pirâmide cuja área da base é $A_t = \dfrac{l^2.\sqrt{3}}{4}$ e cuja altura (H) da pirâmide iremos calcular:

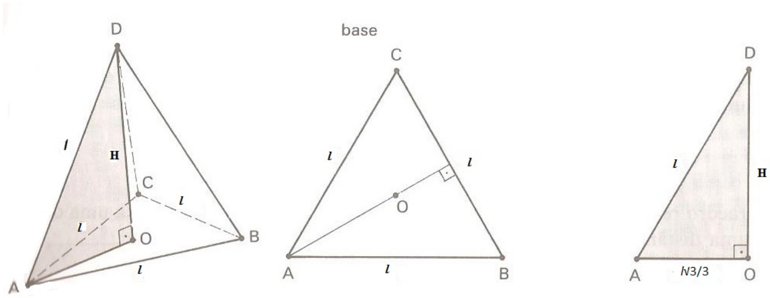


Figura 5.3: Relações no Tetraedro

Fonte: Áreas e Volumes - Matemática: Temas e Metas [14]

Observando a figura acima, e sabendo que a altura de um triângulo equilátero é dada em função da medida do lado (5.1.2),temos:

$$AO = \frac{2}{3}.\frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l\sqrt{3}}{3}$$

$$H^2 = l^2 - (\frac{l\sqrt{3}}{3})^2$$

$$H = \frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Portanto o volume do tetraedro será:

$$V_T = \frac{1}{3}.A_t.H$$

$$V_T = \frac{1}{3}.\frac{l^2.\sqrt{3}}{4}.\frac{l\sqrt{6}}{3}$$

Assim, temos finalmente o volume do tetraedro dado por:

$$\boxed{V_T = \frac{l^3.\sqrt{2}}{12}}$$

5.2 Superfície e volume do Hexaedro Regular

O único prisma regular que é um poliedro regular é o hexaedro regular, citado por Platão como o elemento da natureza Terra, comumente chamado por cubo.

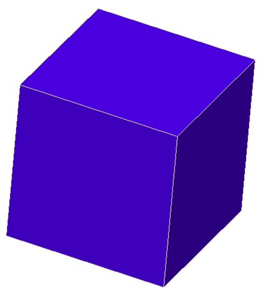


Figura 5.4: Hexaedro regular

O hexaedro regular é formado por seis faces quadradas. É o poliedro em que os alunos apresentam mais facilidade em encontrar a área e o volume, segundo observações feitas em atividades desenvolvidas em sala de aula. Como sugestão, podemos aplicar com os alunos que apresentam muitas dificuldades na compreensão do volume, o uso do Material Dourado, criado por Maria Montessouri, a fim de que o aluno compreenda as dimensões: comprimento, largura e altura. Apesar de ser um material bastante simples, normalmente utilizado no Ensino Fundamental, pode ser aplicado em qualquer nível, sendo o objetivo principal a aprendizagem. É gratificante ver que durante as aulas, em que manusearam o material dourado, os alunos puderam compreender melhor a visão espacial dos sólidos.

Sabendo que a área de um quadrado de lado l é dada por l^2, a área do hexaedro regular (A) será dada por:

$$\boxed{A = 6.l^2}$$

O volume V, do hexaedro regular de aresta l é dado por:

$$V = l^2.l$$

$$\boxed{V = l^3}$$

5.3 Superfície e volume do Octaedro Regular

O octaedro regular, que representa segundo Platão o elemento Ar, é composto por duas pirâmides quadrangulares regulares.

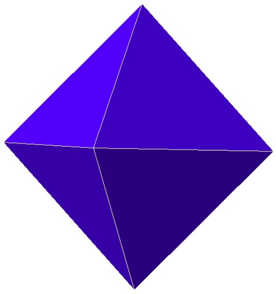


Figura 5.5: Octaedro regular

Vamos agora calcular a área da superfície e o volume de um octaedro regular de aresta l.

Anteriormente,mostramos como calcular a área de um triângulo equilátero de lado l (5.1.2). O tetraedro tem superfície formada pela soma das áreas dos oito triângulos equiláteros. Assim, sua área é dada por:

$$A = 8.\frac{l^2.\sqrt{3}}{4}$$

$$\boxed{A = 2.l^2.\sqrt{3}}$$

O volume V, do octaedro regular, é igual a soma dos volumes de duas pirâmides quadrangulares regulares de altura H, as arestas são todas congruentes e medem l e área da base (A_b)

Observando a figura, temos em cada uma das pirâmides:

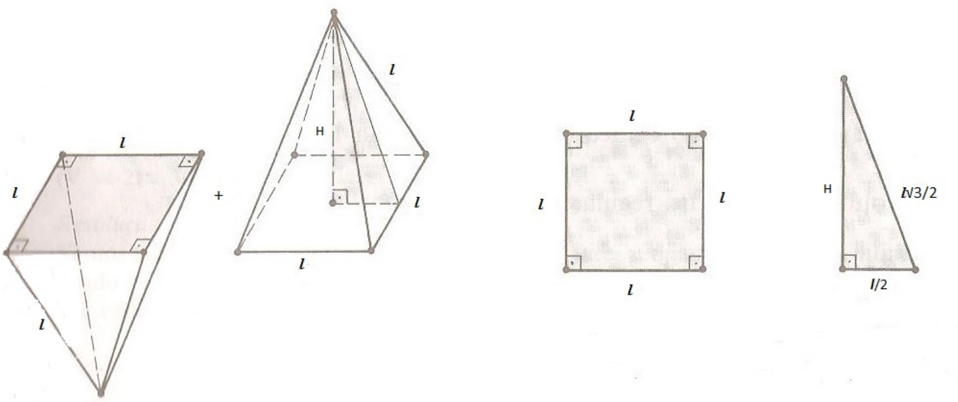


Figura 5.6: Decomposição do octaedro

Fonte: Áreas e Volumes - Matemática: Temas e Metas [14]

$$A_b = l^2,$$

No triângulo retângulo:

$$H^2 = (\frac{l.\sqrt{3}}{2})^2 - (\frac{l}{2})^2$$

$$H = \frac{l.\sqrt{2}}{2}$$

Assim, o volume V, do octaedro regular seá dado por:

$$V = 2.(\frac{1}{3}.A_b.H) = 2.\frac{1}{3}.l^2.\frac{l.\sqrt{2}}{2}$$

Simplificando, temos que o volume do octaedro é dado por:

$$\boxed{V = \frac{l^3.\sqrt{2}}{3}}$$

5.4 Superfície e volume do Icosaedro Regular

É o poliedro de Platão que representa na natureza, o elemento: Água. É composto por 20 faces. Estas são triângulos equiláteros.

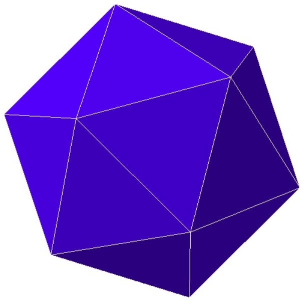


Figura 5.7: Icosaedro regular

A área da superfície do icosaedro é dada pela soma das áreas dos vinte triângulos equiláteros (A_t) que formam o poliedro.

Já vimos que a área de um triângulo equilátero é dada por:

$$A_t = \frac{l^2.\sqrt{3}}{4}$$

Assim, a área da superfície do icosaedro (A_i) será:

$$A_i = 20.\frac{l^2.\sqrt{3}}{4}$$

simplificando:

$$\boxed{A_i = 5.l^2.\sqrt{3}}$$

Vamos apresentar uma ideia intuitiva de como calcular o volume do icosaedro. Supondo que este seja formado por vinte tetraedros, não regulares, cuja base é um triângulo equilátero de lado l, ou seja, cada uma das faces do icosaedro.

Precisamos então calcular o valor das medidas da aresta lateral, a altura e então o volume de cada tetraedro não regular. Assim, o volume do icosaedro será o volume deste tetraedro multiplicado por vinte.

Para que o encaixe seja perfeito, as arestas devem convergir para o centro do icosaedro, que chamaremos de C.

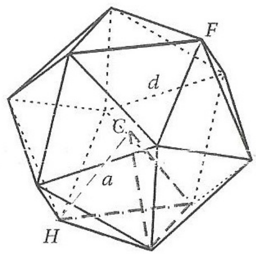


Figura 5.8: Centro do Icosaedro

Fonte: Revista do Professor de Matemática [15]

Tomando dois vértices opostos (F e H), conforme figura 5.8, podemos traçar uma diagonal, que passa por C, ou seja, o valor da diagonal corresponderá ao dobro da medida da aresta lateral do tetraedro.

Partindo da simetria do poliedro, podemos calcular a medida da diagonal, e assim, teremos a medida da aresta lateral.

Tomemos duas secções planas do icosaedro:

- um pentágono regular, conforme figura 5.9, que forma a base de uma pirâmide pentagonal cujo vértice é um vértice do icosaedro.

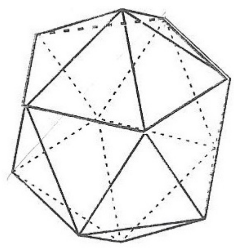


Figura 5.9: Secção do Icosaedro - pentágono

Fonte: Revista do Professor de Matemática [15]

- um hexágono, conforme figura 5.10, que é obtido ao dividirmos o icosaedro ao meio, utilizando-se vértices opostos.

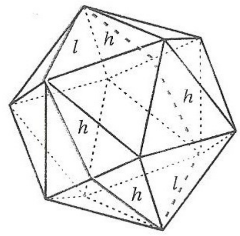


Figura 5.10: Secção do Icosaedro - hexágono

Fonte: Revista do Professor de Matemática [15]

Ao interseccionarmos estas duas secções, veja figura 5.11, teremos o segmento i.

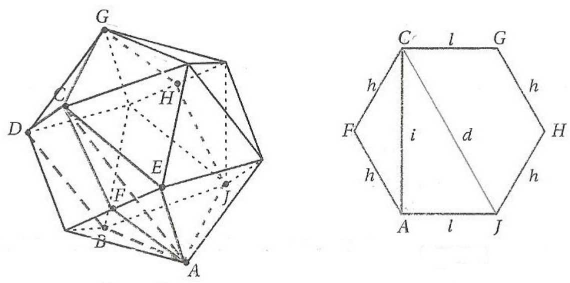


Figura 5.11: Intersecção das secções

Fonte: Revista do Professor de Matemática [15]

A partir do pentágono regular, o segmento que chamamos de i, será a diagonal do pentágono regular.

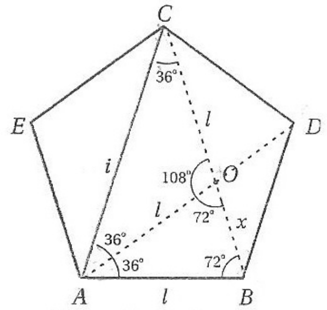


Figura 5.12: Segmento áureo no pentágono regular

Fonte: Revista do Professor de Matemática [15]

Podemos calcular o ângulo interno (a_i), do pentágono regular:

$$a_i = \frac{(n-2).180^o}{n}$$

onde n é o número de lados do polígono, no caso o pentágono,

$$a_i = \frac{(5-2).180^o}{5} = 108^o$$

Assim podemos determinar através de semelhanças de triângulos, conforme figura 5.12, que o Δ ABC é semelhante ao Δ BOA, logo:

$$\frac{l}{x} = \frac{l+x}{l}$$

$$l^2 = x.l + x^2$$

$$x^2 + l.x - l^2 = 0 \tag{5.4.1}$$

Resolvendo essa equação , em x , temos:

$\Delta = l^2 - 4.1.(-l^2)$

$\Delta = l^2 + 4.l^2$

$\Delta = 5l^2$

$x = \dfrac{-l \pm \sqrt{5l^2}}{2}$

$x = \dfrac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$

Voltando a figura, temos:

$BC = i = l + x = l + \dfrac{l\sqrt{5}-l}{2}$

$i = \dfrac{2l + \sqrt{5} - l}{2} = \dfrac{l + l\sqrt{5}}{2}$

$$i = \frac{l(\sqrt{5}+1)}{2}$$

Observamos que i está na proporção áurea, em relação ao lado:

$$i = l.\frac{(\sqrt{5}+1)}{2}$$

Chamando $\phi = \dfrac{(\sqrt{5}+1)}{2}$, a razão áurea, temos que $i = l.\phi$.

Agora, vamos calcular a diagonal maior do icosaedro e a aresta lateral do tetraedro.

Observando na figura do hexágono, uma das secções citadas anteriormente, que apresenta duas arestas l e quatro arestas h, sendo h a altura dos triângulos equiláteros que formam as faces do poliedro, podemos obter a medida da diagonal maior do icosaedro (d), aplicando o teorema de Pitágoras:

$$d^2 = l^2 + i^2$$

$$d^2 = l^2 + (\frac{l(\sqrt{5}+1)}{2})^2$$

$$d^2 = \frac{4l^2}{4} + \frac{l^2(\sqrt{5}+1)^2}{4}$$

$$d^2 = \frac{10l^2 + 2\sqrt{5}l^2}{4} = \frac{2l^2(5+\sqrt{5})}{4}$$

$$d = \frac{l}{2}.\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

Agora, conhecendo a diagonal (d) e lembrando que a aresta do tetraedro (a) é a metade desta, temos:

$$a = \frac{d}{2} = \frac{l}{4}.\sqrt{2(5+\sqrt{5})}$$

Sabendo que o icosaedro é formado por vinte tetraedros, não regulares, cuja base é um triângulo equilátero, conforme figura 5.13, de lado l, temos :

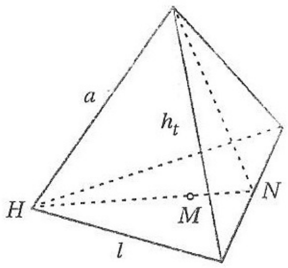


Figura 5.13: Tetraedro não regular

Fonte: Revista do Professor de Matemática [15]

Sendo $MN = \frac{1}{3}.HN$ e $HN = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, temos:

$MN = \frac{l\sqrt{3}}{6}$

$HM = \frac{2}{3}.HN$, assim $HM = \frac{2}{3}.\frac{l\sqrt{3}}{2}$

$HM = \frac{l\sqrt{3}}{3}$

Aplicando o Teorema de Pitágoras, no triângulo, calcularemos a altura do tetraedro (h_t).

$a^2 = {h_t}^2 + HM^2$

$(h_t)^2 = a^2 - HM^2$

$(h_t)^2 = (\frac{l}{4}\sqrt{2.(5+\sqrt{5})})^2 - (\frac{l\sqrt{3}}{3})^2$

$(h_t)^2 = \frac{l^2[2(5+\sqrt{5})]}{16} - \frac{3l^2}{9}$

$(h_t)^2 = \frac{9l^2.(10+2\sqrt{5}) - 48l^2}{144}$

$h_t = \sqrt{\frac{l^2.(42+18\sqrt{5})}{144}}$

$h_t = \frac{l}{12}\sqrt{6.(7+3\sqrt{5})}$

Calculada a altura do tetraedro e sabendo que a área de sua base é a área de um triângulo equilátero de lado l, dada por $\dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$, temos que o volume do tetraedro será:

$$V_t = \frac{A_B.h_t}{3}$$

$$V_t = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.\frac{l}{12}\sqrt{6(7+3\sqrt{5})}.\frac{1}{3}$$

$$V_t = \frac{l^3\sqrt{18(7+3\sqrt{5})}}{144}$$

$$V_t = \frac{l^3\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{48}$$

Assim, o volume do icosaedro (V_i) regular, poderá ser representado, multiplicando-se o volume do tetraedro por 20:

$$V_i = 20.V_t$$

$$V_i = 20.\frac{l^3\sqrt{2(7+3\sqrt{5})}}{48}$$

$$V_i = \frac{5}{12}l^3\sqrt{14+6\sqrt{5}}$$

$V_i = \dfrac{5}{12}l^3\sqrt{3^2+2.3.\sqrt{5}+5}$ e finalmente o volume do icosaedro é dado por:

$$\boxed{V_i = \frac{5}{12}l^3(3+\sqrt{5})}$$

5.5 Superfície e volume do Dodecaedro Regular

É o único poliedro em que as faces são pentágonos regulares. Possui 12 faces. Por Platão foi representado como o Universo, em “Timeo”.

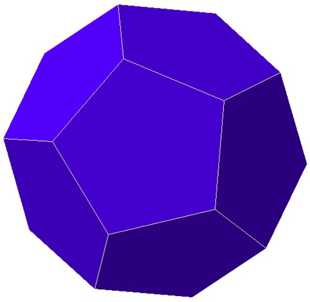


Figura 5.14: Dodecaedro regular

O dodecaedro regular (de aresta s) tem como superfície a soma das áreas de *doze pentágonos regulares*.

Para calcular a área dos pentágonos é necessário mostrarmos antes como calcular o valor do $sen(36^0), cos(36^0)$ e $cotg(36^0)$.

Tomemos uma pentágono regular ABCDE.

Mostramos anteriormente que este possui ângulos internos medindo 108^0. Traçando algumas de suas diagonais dividimos este pentágono em triângulos e por semelhanças de triângulos, temos as seguintes congruências:

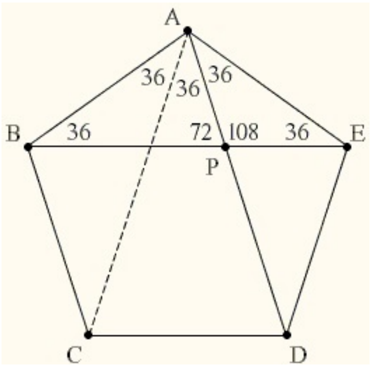


Figura 5.15: Relações trigonométricas no pentágono regular

Fonte: http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/cos36.shtml [17]
Acesso em: 11 *maio* 2014.

$\angle BAC = \angle DAE = 36^0$ e temos que:

$\triangle\ ABP, \triangle\ ABEe\ \triangle\ AEP$ são isósceles e destaca-se que:
AB = BP,
AB = AE,
AP = EP, logo:

Os triângulos ABE e AEP são semelhantes, assim:
$\dfrac{BE}{AB} = \dfrac{AE}{EP}$, ou seja,

$BE.EP = AB^2$

$(BP + EP).EP = AB^2$

$(AB + EP).EP = AB^2$

$\dfrac{AB.EP}{EP} + \dfrac{EP^2}{EP} = \dfrac{AB^2}{EP}$

$AB + EP = \dfrac{AB^2}{EP}$, sendo que $x = \dfrac{AB}{EP}$

$AB + EP = \dfrac{AB}{EP}.AB$, assim:

$x.EP + EP = x.x.(EP)$, dividindo todos os termos por (EP), temos:

$x + 1 = x^2$

$x^2 - x - 1 = 0$, onde podemos usar x como sendo a solução positiva, desta equação, ou seja, $x = \phi$.

Agora, observando o $\triangle\ AEP$, temos: $AE = AB$ e EP é um dos lados, de tal modo que $\dfrac{AE}{EP} = \phi$, então podemos calcular os valores de:

$sen(36^0), cos(36^0)$ e $tg(36^0)$.

$cos(AEP) = cos(36^0) = \dfrac{\frac{AE}{2}}{EP} = \dfrac{AE}{EP}.\dfrac{1}{2} = \phi.\dfrac{1}{2}$, mas:

$AEP = 36^0 \longrightarrow cos(36^0) = \dfrac{\phi}{2}$

$cos(36^0) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$

Assim, aplicando o valor calculado do $cos(36^0)$, na relação fundamental:

$sen^2x + cos^2x = 1$, temos:

$sen(36^0) = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$ e aplicando a relação: $cossec^2x = 1 + cotg^2x$, encontramos que:

$cotg(36^0) = \dfrac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}$

Após demonstrarmos os valores das relações trigonométricas necessárias, voltemos ao nosso pentágono ABCDE, cujo lado chamaremos de s e apótema (que também é a altura dos triângulos) chamaremos de h.

A área do pentágono (A_p) pode ser dada através da soma das áreas dos triângulos $AOB, BOC, COD, DOEeEOA$. Veja figura:

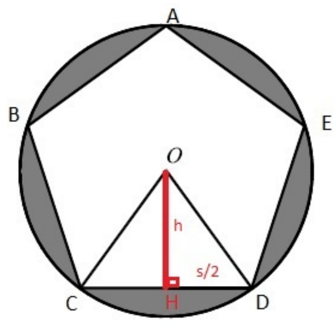


Figura 5.16: Pentágono regular de centro O

Onde temos que $\angle COD = 72^0$ e $\angle HOD = 36^0$ e aplicando a relação trigonométrica $\triangle\ HOD$, temos:

$tg(36^0) = \dfrac{\frac{s}{2}}{h}$

$h = \frac{s}{2}.cotg(36^0)$

Assim a área de cada um dos triângulos, que formam o pentágono, será dada por:

$A_t = s.\frac{s}{2}.cotg(36^0).\frac{1}{2}$ e a área do pentágono, consequentemente dada por:

$A_p = \frac{5}{4}.s^2.cotg(36^0)$.

Finalmente substituindo o valores encontrados podemos determinar a área da superfície do dodecaedro regular (A_d), dada pela soma das áreas dos doze pentágonos regulares:

$A_d = 12.(\frac{5}{4}.s^2.cotg(36^0))$

$A_d = 3.(5.\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{5}.s^2)$

$$\boxed{A_d = 3.(\sqrt{25+10\sqrt{5}}).s^2}$$

Para calcularmos o volume do dodecaedro regular, vamos decompô-lo em um cubo e seis outros sólidos iguais, conforme figura 5.17. Uma das arestas deste sólido, que chamaremos de c, será uma das diagonais do pentágono (de lado s) que forma a face do dodecaedro, bem como a aresta do cubo.

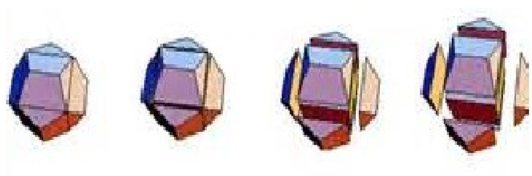


Figura 5.17: Decomposição do dodecaedro regular

Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br [16]
Acesso em: 24 *fev*. 2013.

Anteriormente, como mostrado no icosaedro, calculamos que uma das diagonais do pentágono, que chamamos agora de c, será dada por $c = s.\phi$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a razão áurea, veja figura 5.18:

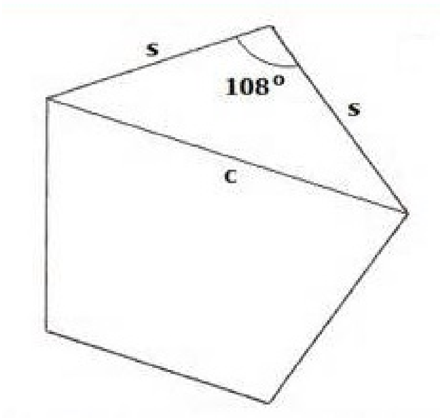


Figura 5.18: Cálculo da diagonal c do pentágono regular

Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br [16]
Acesso em: 24 fev. 2013.

Cada sólido formado nas faces do cubo, pode ser decomposto em um prisma triangular e uma pirâmide formada pela justaposição dos sólidos, conforme figura 5.19.

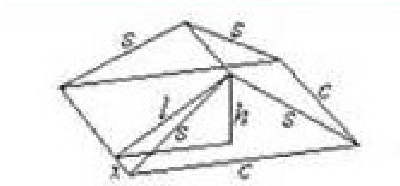


Figura 5.19: Decomposição do dodecaedro

Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br [16]
Acesso em: 24 fev. 2013.

Baseado na figura e aplicando o Teorema de Pitágoras, temos:
$s^2 = l^2 + x^2$ e sendo $2x = c - s$, ou seja, $x = \dfrac{c-s}{2}$, temos:

$$s^2 = l^2 + (\frac{c-s}{2})^2 \tag{5.5.1}$$

e temos também que:

$l^2 = h^2 + s^2$ e sendo $s = \dfrac{c}{2}$

$$l^2 = h^2 + (\frac{c^2}{4}) \tag{5.5.2}$$

Substituindo (5.5.2) em (5.5.1):

$s^2 = l^2 + (\frac{c-s}{2})^2$

$s^2 = h^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}(c^2 - 2cs + s^2)$

$s^2 = h^2 + \frac{c^2}{4} + \frac{c^2}{4} - \frac{cs}{2} + \frac{s^2}{4}$

$$h^2 = \frac{3s^2}{4} - \frac{c}{2}(c-s) \tag{5.5.3}$$

Sendo $c = s.\phi$, temos:

$\frac{c(c-s)}{2} = \frac{s\phi.(s\phi - s)}{2} = \frac{s^2\phi^2 - s^2\phi}{2} = \frac{s^2\phi.(\phi-1)}{2}$ e tendo que:

$\phi - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e observando que:

$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

Assim: $\phi - 1 = \frac{1}{\phi}$, então podemos utilizar que:

$\frac{s^2\phi.(\phi-1)}{2} = \frac{s^2\phi}{2}.(\phi-1) = \frac{s^2\phi}{2}.\frac{1}{\phi}$

então:

$$\frac{c(c-s)}{2} = \frac{s^2}{2} \tag{5.5.4}$$

Portanto, substituindo (5.5.4) em (5.5.3), podemos calcular o valor de h:

$h^2 = \frac{3s^2}{4} - \frac{c}{2}(c-s)$

$$h^2 = \frac{3s^2}{4} - \frac{s^2}{2}$$
$$h^2 = \frac{3s^2 - 2s^2}{4}$$

$$h = \frac{s}{2} \tag{5.5.5}$$

Com base nas figuras, observamos um prisma triangular cua área da base é $\frac{ch}{2}$ e altura s, e uma pirâmide de base $2x.c$ e altura h. Assim, calculando a soma de seus volumes teremos o volume do prisma (V_p), sobre as faces do cubo, veja figura 5.20.

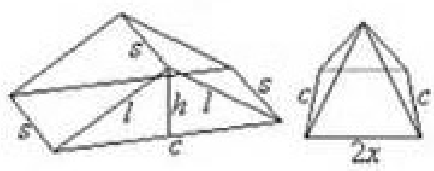


Figura 5.20: Decomposição do dodecaedro

Fonte: http://fatosmatematicos.blogspot.com.br [16]
Acesso em: 24 fev. 2013.

usando o fato de que:

$\frac{c(c-s)}{2} = \frac{s^2}{2}$ e que $2x = c - s$

$$V_p = \frac{c.h.s}{2} + \frac{2x.c.h}{3}$$
$$V_p = s.\phi.\frac{s}{2}.s.\frac{1}{2} + (c-s).c.\frac{s}{2}.\frac{1}{3}$$
$$V_p = \frac{s^3\phi}{4} + \frac{s^3}{6}$$
$$V_p = \frac{s^3.(3.\phi + 2)}{12}$$

Agora podemos finalmente calcular o volume do dodecaedro (V_d) regular, pela soma dos sólidos:

$V_d = V_{cubo} + 6.V_p$

$V_d = c^3 + 6.\dfrac{s^3.(3.\phi + 2)}{12}$

$V_d = s^3\phi^3 + \dfrac{s^3.(3.\phi + 2)}{2}$ e observando que:

$\phi^3 = \phi^2.\phi = (\phi + 1).\phi = \phi^2 + \phi = 2\phi + 1$ para

$\phi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

$\phi + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$

Potanto, podemos aplicar que: $\phi^2 = \phi + 1$ e $\phi^3 = 2\phi + 1$

Assim:
$V_d = s^3\phi^3 + \dfrac{s^3.(3.\phi + 2)}{2} = \dfrac{s^3.(7\phi + 4)}{2}$

$V_d = (\dfrac{7\phi + 4}{2}).s^3$ e sendo $\phi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$, temos finalmente que:

$$\boxed{V_d = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4}s^3}$$

Capítulo 6

Estudando os Poliedros em alguns documentos oficiais

6.1 Estudando os Poliedros segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais 3^o. e 4^o. Ciclos

Nesta parte do nosso trabalho vamos analisar os documentos oficiais: Parâmetros Curriculares Nacionais (1998)[12] e o Currículo do Estado de São Paulo (2012) [13], além de algumas questões aplicadas durante o Ensino Fundamental e do Ensino Médio, tanto no Saresp como no Enem, as quais abordam o assunto que estamos tratando.

Observamos que o conteúdo : Poliedros é trabalhado desde as séries iniciais e que gradativamente os alunos vão aprimorando as habilidades neste assunto, partem do reconhecimento dos sólidos e chegam, Ensino Médio, ao cálculo de áreas e volumes: dos prismas, pirâmides, cilindros, cones e esferas. Só não podemos deixar de colocar que os livros adotados nas Escolas Públicas, bem como o Caderno do Aluno [1], somente citam os Poliedros de Platão, e neles verificam a Relação de Euler e cálculo de superfícies (cubo e tetraedro), mas não abordam o cálculo de volumes que mostramos anteriormente.Assim, estes cálculos não foram abordados durante as atividades, mas comentados como poderiam ser feitos durante a construção dos poliedros (esqueletos).

[1] material de apoio ao Currículo do Estado de São Paulo. Governo do Estado de São Paulo. FDE

Faremos neste momento, gradativamente, o estudo destes documentos oficiais iniciando do Ensino Fundamental e passando para o Ensino Médio, focando sempre a Geometria, em específico a Geometria Espacial. Nosso objetivo agora é mostrar que segundo o Conteúdo Programático proposto, os alunos teriam condições plenas de sucesso nestas avaliações externas aplicadas, se não houvessem diversos fatores externos que comprometessem tal desenvolvimento e entendimento.

É importante salientar que o Ensino Fundamental está organizado em ciclos. Abordaremos aqui o terceiro e quarto ciclos, o que correspondem a 5^a.série /6^o.ano até 8^a.série/9^oano.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998, p.47-48) as finalidades do Ensino da Matemática visando a construção da cidadania indicam como objetivos do ensino fundamental levar o aluno a:

- identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da Matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas;
- fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo interrelações entre eles, utilizando o conhecimento matemático (geométrico, métrico, algébrico, estatístico, combinatório, probabilístico);
- selecionar, organizar e produzir informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las criticamente;
- resolver situações-problema, sabendo validar estratégias e resultados, desenvolvendo formas de raciocínio e processos, como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa, e utilizando conceitos e procedimentos matemáticos, bem como instrumentos tecnológicos disponíveis;
- comunicar-se matematicamente, ou seja, descrever, representar e apresentar resultados com precisão e argumentar sobre suas conjecturas, fazendo uso da linguagem oral e estabelecendo relações entre ela e diferentes representações matemáticas;
- estabelecer conexões entre temas matemáticos de diferentes campos e entre esses temas e conhecimentos de outras áreas curriculares;

- sentir-se seguro da própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções;
- interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente na busca de soluções para problemas propostos, identificando aspectos consensuais ou não na discussão de um assunto, respeitando o modo de pensar dos colegas e aprendendo com eles.(BRASIL, 1998, p.47-48)[12]

Os conteúdos a serem trabalhados devem identificar-se com os saberes culturais, assim devem envolver explicações, formas de raciocínio lógico, linguagem matemática, interesses, sentimentos e condutas, que estarão dimensionados em procedimentos e atitudes. Os procedimentos devem ser ligados ao "saber fazer", não somente aos métodos de resolução, tornando o aprendizado efetivo, as atitudes envolvem o interesse, a motivação e predisposição a aprender, fatores fundamentais no processo da aprendizagem.

Estes conteúdos são divididos em blocos:

- Números e Operações;
- Espaço e Forma;
- Grandezas e Medidas;
- Tratamento da informação;

No bloco de Espaço e Formas são trabalhados os conceitos geométricos, parte fundamental do currículo, onde o aluno é estimulado a compreender, descrever e representar o meio em que vive. Este bloco foi o enfocado em nosso trabalho, já que as atividades desenvolvidas, no capítulo anterior, tinham tais objetivos.

No **terceiro ciclo**, os alunos aprofundam os conhecimentos sobre Espaço e Forma abordados anteriormente, visando agora um aprofundamento em classificação das figuras geométricas (dimensionalidade) e as relações entre figuras espacial e suas representações planas.

É fundamental que nesse ciclo o professor proporcione à turma atividades diversas que valorizem as construções (práticas), a fim de que o aluno saiba relacionar e identificar os poliedros com objetos do seu cotidiano, bem como a diferença entre as dimensões (plana e espacial).

Devem ser trabalhados neste ciclo, de acordo com o PCN (BRASIL, 1998, p.72-73) , os seguintes Conceitos e Procedimentos, em Espaço Forma:

- Interpretação, a partir de situações-problema (leitura de plantas, croquis, mapas), da posição de pontos e de seus deslocamentos no plano, pelo estudo das representações em um sistema de coordenadas cartesianas.
- Distinção, em contextos variados, de figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
- Classificação de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros; poliedros regulares e não-regulares; prismas, pirâmides e outros poliedros; círculos, polígonos e outras figuras; número de lados dos polígonos; eixos de simetria de um polígono; paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados.
- Composição e decomposição de figuras planas.
- Identificação de diferentes planificações de alguns poliedros.
- Transformação de uma figura no plano por meio de reflexões, translações e rotações e identificação de medidas que permanecem invariantes nessas transformações (medidas dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Ampliação e redução de figuras planas segundo uma razão e identificação dos elementos que não se alteram (medidas de ângulos) e dos que se modificam (medidas dos lados, do perímetro e da área).
- Quantificação e estabelecimento de relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.
- Construção da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e pelo seu reconhecimento em figuras planas.
- Verificação de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180^o.(BRASIL, 1998, p.72-73)

Já no **quarto ciclo**, devem ser trabalhados os seguintes Conceitos e Procedimentos, de acordo com o PCN (1998, p.88-89):

- Representação e interpretação do deslocamento de um ponto num plano cartesiano por um segmento de reta orientado.

- Secções de figuras tridimensionais por um plano e análise das figuras obtidas.
- Análise em poliedros da posição relativa de duas arestas (paralelas, perpendiculares, reversas) e de duas faces (paralelas, perpendiculares).
- Representação de diferentes vistas (lateral, frontal e superior)de figuras tridimensionais e reconhecimento da figura representada por diferentes vistas.
- Divisão de segmentos em partes proporcionais e construção de retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso.
- Identificação de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais.
- Estabelecimento da razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro.
- Determinação da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer.
- Verificação da validade da soma dos ângulos internos de um polígono convexo para os polígonos não convexos.
- Resolução de situações problema que envolvam a obtenção da mediatriz de um segmento, da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos notáveis, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor.
- Desenvolvimento do conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície).
- Verificar propriedades de triângulos e quadriláteros pelo reconhecimento dos casos de congruência de triângulos.
- Identificação e construção das alturas, bissetrizes, medianas e mediatrizes de um triângulo utilizando régua e compasso.
- Desenvolvimento da noção de semelhança de figuras planas a partir de ampliações ou reduções, identificando as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro).
- Verificações experimentais e aplicações do teorema de Tales.
- Verificações experimentais, aplicações e demonstração do teorema de Pitágoras.(BRASIL, 1998, p.88-89)

É de fato muito importante que o aluno ao concluir o Ensino Fundamental, tenha conhecimento dos conceitos citados acima, já que ao prosseguir no Ensino Médio, estes serão aprofundados e ampliados. Estes conceitos serão muitas vezes necessários no mercado de trabalho, em diversas profissões como: as engenharias, astrônomia, bioqímica, arquitetura, etc.

6.2 Estudando os Poliedros segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática no Ensino Médio - Parte III - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias

A medida que nosso aluno vai crescendo ele precisa estar integrado com a sociedade globalizada. Precisa saber resolver problemas, tomar decisões, criar e trabalhar cooperativamente.

A Matemática no Ensino Médio deve ajudar a estruturar o pensamento e o raciocínio, sendo importante como ferramenta dentro de qualquer profissão ou simplesmente na vida de um cidadão participativo e prudente.

A minha prática indica que é neste nível de ensino que os alunos apresentam maiores dificuldades, de acordo com as avaliações aplicadas. Isto pode estar ligado ao acúmulo dos conteúdos, já que é necessário aplicar e resgatar tudo o que se aprendeu no Ensino Fundamental, além de uma dificuldade maior em relacionar os conteúdos aplicados com o cotidiano. Assim, durante a aplicacão das atividades do projeto, na Escola Pública citada, houve a necessidade de trabalharmos a interdisciplinaridade, no caso com o professor de História e de Artes.

As finalidades, segundo PCN do ensino de Matemática no nível médio indicam como objetivos levar o aluno a:

- compreender os conceitos, procedimentos e estratégias matemáticas que permitam a ele desenvolver estudos posteriores e adquirir uma formação científica geral;
- aplicar seus conhecimentos matemáticos a situações diversas, utilizando-os na interpretação da ciência, na atividade tecnológica e nas atividades cotidianas;

- analisar e valorizar informações provenientes de diferentes fontes, utilizando ferramentas matemáticas para formar uma opinião própria que lhe permita expressar-se criticamente sobre problemas da Matemática, das outras áreas do conhecimento e da atualidade;
- desenvolver as capacidades de raciocínio e resolução de problemas, de comunicação, bem como o espírito crítico e criativo;
- utilizar com confiança procedimentos de resolução de problemas para desenvolver a compreensão dos conceitos matemáticos;
- expressar-se oral, escrita e graficamente em situações matemáticas e valorizar a precisão da linguagem e as demonstrações em Matemática;
- estabelecer conexões entre diferentes temas matemáticos e entre esses temas e o conhecimento de outras áreas do currículo;
- reconhecer representações equivalentes de um mesmo conceito, relacionando procedimentos associados às diferentes representações;
- promover a realização pessoal mediante o sentimento de segurança em relação às suas capacidades matemáticas, o desenvolvimento de atitudes de autonomia e cooperação.(BRASIL, 1998, p.42)

Observando os itens acima, só nos faz atentar para a necessidade de uma prática cada vez mais motivadora, intrigante e crítica para o nosso aluno, levando-o a querer descobrir e participar ativamente do mundo que o cerca.

A prática nos mostra a grande dificuldade no trabalho interdisciplinar nas Escolas Públicas, devido a fatores diversos que assombram o Sistema Educacional Público. Um dos problemas mais graves é a grande carga horária assumida pelos professores, o que gera uma dificuldade no planejamento e organização destas atividades. Estas seriam essenciais e motivadoras para o educando perceber as relações e aplicações do que está aprendendo com a prática, onde ele poderia perceber a importância dos conteúdos tratados na Matemática em todos os seus ramos.

6.3 Estudando os Poliedros segundo o Currículo do Estado de São Paulo

Estamos fazendo uma análise deste documento: Currículo do Estado de São Paulo (2012) [13] a fim de percebemos a preocupação, agora do nosso

Estado, com a aproximação dos conceitos/ conteúdos escolares do universo da cultura. Estes conteúdos precisam ser tratados de forma abrangente, com argumentações corretas, contextualizadas e significativas, afim de que não se tornem um ensino básico.

Neste documento, trataremos a Matemática no Ensino Fundamental(Ciclo II) e Ensino Médio.

Aqui os conteúdos básicos são organizados em três blocos (tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio): NÚMEROS, GEOMETRIA e RELAÇÕES.

A Geometria trata as percepções de formas e relações entre figuras planas e espaciais; a construção de formas geométricas e a compreensão do mundo físico que nos cerca (objetos, construções, etc).Não podemos deixar de comentar que a Geometria está ligada o tempo todo com os outros blocos: Números e Relações, sendo impossível trabalhar cada um separadamente.

Conteúdos e habilidades de Matemática 5^a.**série** /6^o.**ano**

3^o**Bimestre**
Geometria/Relações - **Conteúdos**

Formas planas;

- Formas espaciais; Perímetro e área
- Unidades de medida;
- Perímetro de uma figura plana;
- Cálculo de área por composição e decomposição;
- Problemas envolvendo área e perímetro de figuras planas;

Geometria/relações - **Habilidades**

- Saber identificar e classificar formas planas e espaciais em contextos concretos e por meio de suas representações em desenhos e em malhas.
- Saber planificar figuras espaciais e identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.

- Compreender a noção de área e perímetro de uma figura, sabendo calculá-los por meio de recursos de contagem e de decomposição de figuras.
- Compreender a ideia de simetria, sabendo reconhecê-la em construções geométricas e artísticas, bem como utilizá-la em construções geométricas elementares.(SÃO PAULO, 2012, p.58)[13]

Nesta série os conteúdos ainda são de identificação de figuras e suas nomenclaturas, com noções do significado de áreas e perímetros.

Conteúdos e habilidades de Matemática 6^a**.série /**7^o**.ano**

2^o**Bimestre**
Geometria - **Conteúdos**

Ângulos;

- Polígonos;
- Circunferência;
- Simetrias;
- Construções geométricas;
- Poliedros;

Geometria - **Habilidades**

- Compreender a ideia de medida de um ângulo (em grau),sabendo operar com medidas de ângulos e usar instrumentos geométricos para construir e medir ângulos.
- Compreender e identificar simetria axial e de rotação nas figuras geométricas e nos objetos do dia a dia.
- Saber calcular a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e estender tal cálculo para polígonos de n lados.
- Saber aplicar os conhecimentos sobre a soma das medidas dos ângulos de um triângulo e de um polígono em situações práticas.
- Saber identificar elementos de poliedros e classificar os poliedros segundo diversos pontos de vista.
- Saber planificar e representar (em vistas) figuras espaciais.(SÃO PAULO, 2012, p.59) [13]

Neste momento os alunos já devem compreender os conceitos de ângulos e suas medidas, bem como as propriedades dos ângulos de um triângulo, utilizando corretamente os instrumentos para suas construções.

Conteúdos e habilidades de Matemática 7^a**.série /**8^o**.ano**

4^o**Bimestre**
Geometria - **Conteúdos**

Teorema de Tales;

- Teorema de Pitágoras;
- Área de Polígonos;
- Volume de Prismas;

Geometria - **Habilidades**

- Reconhecer e aplicar o teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, na solução de problemas em diferentes contextos.
- Compreender o significado do teorema de Pitágoras, utilizando-o na solução de problemas em diferentes contextos.
- Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares.
- Saber identificar prismas em diferentes contextos, bem como saber construí-los e calcular seus volumes.(SÃO PAULO, 2012,p.62) [13]

Já é possível neste momento, demonstrar e aplicar alguns Teoremas. Estes são fundamentais na Geometria Espacial para determinar medidas desconhecidas (diagonais, lados, apótemas, alturas, arestas), necessárias nos cálculos de áreas e volumes. A partir de agora, será cada vez mais importante desenvolver no educando a habilidade de relacionar o concreto com o pensamento abstrato, pois ele terá que contextualizar os conteúdos aprendidos com situações propostas, sabendo relacioná-las.

Conteúdos e habilidades de Matemática 8^a**.série /**9^o**.ano**

3^o**Bimestre**
Geometria / Relações - **Conteúdos**
Proporcionalidade na Geometria;

O conceito de semelhança;

- Semelhança de triângulos;
- Razões trigonométricas;

Geometria / Relações - **Habilidades**

- Saber reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da igualdade das medidas dos ângulos e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes.
- Saber identificar triângulos semelhantes e resolver situações-problema envolvendo semelhança de triângulos.
- Compreender e saber aplicar as relações métricas dos triângulos retângulos, particularmente o teorema de Pitágoras, na resolução de problemas em diferentes contextos.
- Compreender o significado das razões trigonométricas fundamentais (seno, cosseno e tangente) e saber utilizá-las para resolver problemas em diferentes contextos.

4^o**Bimestre**
Geometria / Números - **Conteúdos**
Corpos redondos;

- O número π; a circunferência, o círculo e suas partes; área do círculo.
- Volume e área do cilindro.

Geometria / Números - **Habilidades**

- Conhecer a circunferência, seus principais elementos, suas características e suas partes.
- Compreender o significado do π como uma razão e sua utilização no cálculo do perímetro e da área da circunferência.
- Saber calcular de modo compreensivo a área e o volume de um cilindro.
- Saber resolver problemas envolvendo processos de contagem (princípio multiplicativo).

- Saber resolver problemas que envolvam ideias simples sobre probabilidade.(SÃO PAULO, 2012,p.64) [13]

Agora, concluindo esse nível de aprendizado, os alunos já dominam as principais propriedades e conhecem alguns Teoremas e suas aplicações. Começam a saber interpretar e abstrair as figuras espaciais e nelas as relações existentes. Identificam os polígonos regulares e calculam seus elementos: lado, apótema, ângulo internos, ângulo central e outras relações de semelhanças.

Conteúdos e habilidades de Matemática 1^a.série do Ensino Médio

4^o**Bimestre**
Geometria / Relações - **Conteúdos**
Geometria - Trigonometria

Razões trigonométricas nos triângulos retângulos;

- Polígonos regulares: inscrição, circunscrição e pavimentação de superfícies;
- Resolução de triângulos não retângulos: Lei dos Senos e Lei dos Cossenos;

Geometria / Relações - **Habilidades**

- Saber usar de modo sistemático relações métricas fundamentais entre os elementos de triângulos retângulos, em diferentes contextos;
- Conhecer algumas relações métricas fundamentais em triângulos não retângulos, especialmente a Lei dos Senos e a Lei dos Cossenos;
- Saber construir polígonos regulares e reconhecer suas propriedades fundamentais;
- Saber aplicar as propriedades dos polígonos regulares no problema da pavimentação de superfícies;
- Saber inscrever e circunscrever polígonos regulares em circunferências dadas;(SÃO PAULO, 2012,p.66) [13]

Conteúdos e habilidades de Matemática 2^a.série do Ensino Médio

4^o**Bimestre**
Geometria - **Conteúdos**
Geometria: Geometria métrica espacial

Elementos de geometria de posição

- Poliedros, prismas e pirâmides
- Cilindros, cones e esferas

Geometria / Relações - **Habilidades**

- Compreender os fatos fundamentais relativos ao modo geométrico de organização do conhecimento (conceitos primitivos, definições, postulados e teoremas;
- Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro, utilizando-as em diferentes contextos;
- Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone, utilizando-as em diferentes contextos;
- Saber identificar propriedades características, calcular relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes, utilizando-as em diferentes contextos
- Compreender as propriedades da esfera e de suas partes, relacionando-as com os significados dos fusos, das latitudes e das longitudes terrestres;(SÃO PAULO, 2012,p.68)

Observamos, que é nesta série que está centrada a aplicação em sala de aula, do nosso trabalho. Os Poliedros de Platão são citados em séries anteriores, mas serão mais fortemente investigados no 2^oano do Ensino Médio, onde conhecerão as demonstrações da Relação de Euler, o cálculo dos elementos de um poliedro (arestas, alturas, apótemas), suas áreas e volumes.

As atividades pesquisadas aplicadas no projeto e sugeridas ao leitor são ferramentas para melhorar a compreensão dos conteúdos. Todas as atividades aqui citadas foram aplicadas em sala de aula, durante a aplicação do projeto e tiveram um aproveitamento muito positivo, verificado a partir de avaliações e exposição dos trabalhos.

No 3^o ano do Ensino Médio, como veremos a seguir, trata-se da Geometria Analítica que também pode ser aplicada a Geometria Espacial. Poderemos aplicar esta geometria, baseando os cálculos nas coordenadas dos vértices dos poliedros regulares inscritos numa esfera de raio 1 centrada na origem de um sistema cartesiano ortogonal.

Conteúdos e habilidades de Matemática 3^a.série do Ensino Médio

1^o**Bimestre**
Geometria - **Conteúdos**
Geometria/Relações Geometria analítica

Pontos: distância, ponto médio e alinhamento de três pontos;

- Reta: equação e estudo dos coeficientes; problemas lineares;
- Ponto e reta: distância;
- Circunferência: equação;
- Reta e circunferência: posições relativas
- Cônicas: noções, equações, aplicações

Geometria / Relações - **Habilidades**

- Saber usar de modo sistemático sistemas de coordenadas cartesianas para representar pontos, figuras, relações,equações;
- Saber reconhecer a equação da reta,o significado de seus coeficientes, as condições que garantem o paralelismo e a perpendicularidade entre retas;
- Compreender a representação de regiões do plano por meio de inequações lineares;
- Saber resolver problemas práticos associados a equações e inequações lineares;
- Saber identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida e conhecer as propriedades características das cônicas;(SÃO PAULO, 2012,p.69) [13]

Observando e analisando os documentos legais, fica clara a construção dos conhecimentos proposta durante a vida escolar do aluno, onde vai gradativamente aprimorando seus conceitos, sua capacidade de abstração e generalização, a interpretação geométrica e a leitura das imagens constantemente encontradas ao seu redor.

Estaremos agora, analisando algumas questões propostas nas provas externas, aplicadas aos alunos que abordam os sólidos geométricos. Utilizaremos questões do Saresp, aplicadas no Ensino Fundamental e Médio e questões do Enem (Exame Nacional do Ensino Médio), aplicado somente ao Ensino Médio, hoje um exame utilizado pelas instituições de Ensino Superior, como parte da avaliação do processo de seleção.

6.4 Questões propostas em avaliações externas de desempenho educacional dos alunos

SARESP - 2012

Neste momento estaremos selecionando algumas questões, que abordam o conteúdo de sólidos geométricos, aplicadas no SARESP -2012 [18], onde identificamos as habilidades e competências citadas anteriormente, analisando cada uma delas, conforme Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - Matemática (Anexo 2).

Nosso objetivo aqui é mostrar que o conteúdo Sólidos Geométricos, especialmente os Poliedros de Platão são abordados nestas avaliações externas de forma simples, na maioria das vezes. Mas, se não for feito um trabalho efetivo, com comprometimento do educando e do educador que deve oportunizar métodos para que este conteúdo se desenvolva de forma satisfatória, ficará difícil de realizar as questões cobradas.

6^a.**série** / 7^o.**ano**

Questão 1:

Observe os objetos abaixo e pense nas figuras espaciais que podem ser associadas a eles.

Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

Assinale a alternativa que mostra a relação correta entre os objetos I, II e III e as figuras geométricas.

a) esfera, cubo e cilindro

b) esfera, cilindro e cubo

c) cilindro, esfera e cubo

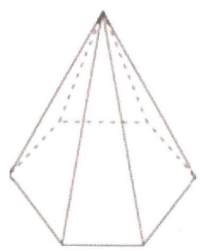
d) cubo, esfera e cilindro

Nesta questão a habilidade avaliada foi H17 - Classificar formar planas e espaciais(GII).

Trata-se de uma questão onde o aluno precisa identificar e reconhecer, através de objetos do seu cotidiano, os sólidos geométricos.

Questão 2:

A figura abaixo representa uma pirâmide de base hexagonal.



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

O número de vértices dessa pirâmide é:

a) 06

b) 07

c) 10

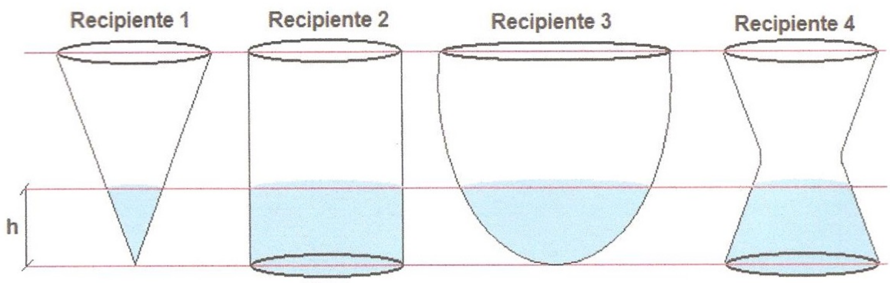
d) 12

Nesta questão a habilidade avaliada foi H21 -Identificar elementos e classificar poliedros(GII).

Trata-se de uma questão bastante simples de reconhecimento e identificação dos elementos de um poliedros, que não exige nenhum cálculo, apenas contagem simples do número de vértices.

Questão 3:

Se dobrarmos o volume de água contida em cada um dos recipientes indicados na figura, a altura h da água dobrará apenas no(s) recipiente(s):



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar.* 2014.

a) 4

b) 3

c) 2

d) 1

Nesta questão a habilidades avaliada foi H20 - Identificar simetria axial na leitura das representações dos objetos e das figuras geométricas(GI), H40 - resolver problemas que envolvam noções de volume.

É uma questão que de forma intuitiva pode ser resolvida. Mostra uma compreensão do conceito de volume e proporcionalidade em relação a altura, bem como a observação dos sólidos e suas simetrias.

Questão 4:

O número de faces de um prisma, em que a base é um polígono de n lados é:

a) n - 1

b) n

c) n + 2

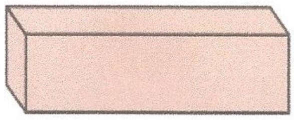
d) 2n + 1

Nesta questão a habilidades avaliada foi H21 - Identificar elementos e classificar poliedros(GII) e H12 - Ler e escrever expressões algébricas correspondentes a textos matemáticos escritos em linguagem corrente e, vice-versa (GII)

Aqui o aluno precisa além de identificar os prismas saber escrever uma expressão algébrica, o que exige uma leitura e interpretação mais sensível, além de saber generalizar um raciocínio para uma expresssão.

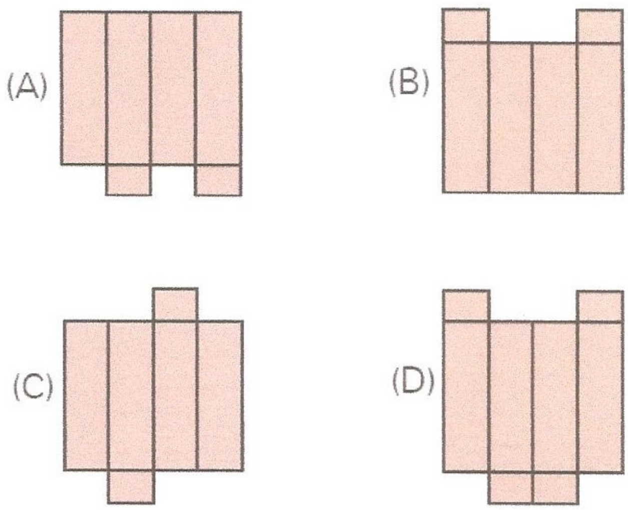
Questão 5:

Observe a caixa representada abaixo:



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

Uma planificação dessa caixa é:



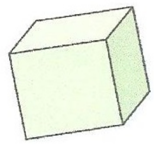
Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

Nesta questão a habilidades avaliada foi H18 - Identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.(GI)

O aluno precisa saber relacionar a forma plana e espacial, reconhecendo o prisma. Necessita ter uma compreensão da construção do poliedro.

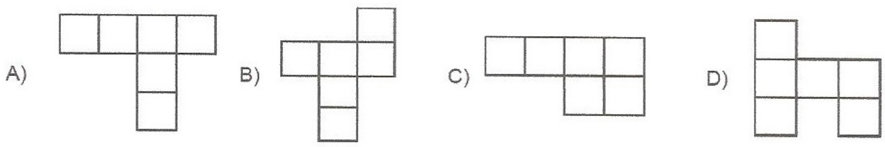
Questão 6:

Observe abaixo o modelo de um cubo. Ele tem 11 planificações diferentes, isto é, existem 11 diferentes moldes possíveis para se montar um cubo, por meio de dobradura.



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar.* 2014.

Identifique dentre as alternativas abaixo, uma dessas planificações:



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar.* 2014.

Nesta questão a habilidades avaliada foi H18 - Identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.(GI)

Já observamos o reconhecimento da planificação de um Poliedros de Platão: o hexaedro regular.

Nessa série, percebemos que as questões propostas são bastante simples, basicamente de identificação e contagem. Vamos agora ver algumas questões propostas já no final do Ensino Fundamental.

8^a.**série** / 9^o.**ano**

Questão 1:

Uma menina recortou vários triângulos equiláteros iguais em cartolina. Resolveu então construir poliedros com aqueles triângulos, colando-os com fita adesiva uns aos outros. Ela lembrava que havia aprendido na escola que seria possível construir três dos poliedros de Platão com aqueles triângulos. Ela construiu, com 4 triângulos, o tetraedro, e com 20 triângulos, o icosaedro. Mas esqueceu qual era o terceiro poliedro regular convexo que podia construir apenas com triângulos equiláteros. Esse poliedro é o poliedro regular convexo que podia construir apenas com triângulos eqüiláteros. Esse poliedro é o:

a) pentaedro

b) hexaedro

c) octaedro

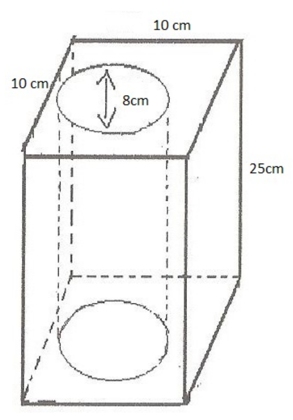
d) dodecaedro

Nesta questão a habilidade avaliada foi H23 - Classificar formar planas e espaciais(GII).

Trata-se de uma questão onde o aluno precisa somente identificar e reconhecer, os Poliedros de Platão.

Questão 2:

Na confecção de uma peça de base quadrada, como a indicada a seguir, o volume aproximado de acrílico necessário é (considere $\pi = 3,14$):



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

a) $1244cm^3$

b) $1872cm^3$

c) $1900cm^3$

d) $2500cm^3$

Nesta questão a habilidade avaliada foi H32 - Calcular o volume de prismas em diferentes contextos; H33 - Utilizar a razão π, no cálculo de perímetro e da área da circunferência; H34 - Calcular área e volume de um cilindro; H40 - resolver problemas que envolvam noções de volume.

Trata-se de uma questão onde o aluno precisa identificar os sólidos geométricos, no caso, cilindro e prisma quadrangular, calcular corretamente áreas e volumes, além de interpretar a relação entre os sólidos para o cálculo do volume final.

Questão 3:

Observe na figura que cada barra do jogo possui:

Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

a) 8 faces retangulares

b) 6 faces retangulares

c) 8 faces quadradas

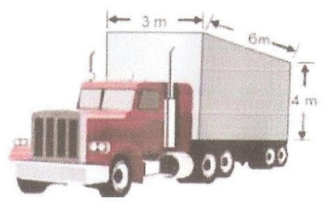
d) 6 faces quadradas

Nesta questão a habilidade avaliada foi H23 - Classificar formar planas e espaciais(GII);

Aqui os alunos deverão identificar as figuras que formam as faces dos poliedros mostrados. Não envolve nenhum cálculo, sendo uma questão bastante simples.

Questão 4:

A carroceria de um caminhão-baú, como o da figura abaixo, tem medidas 3 m x 6 m x 4 m. Quantas viagens, no mínimo, este caminhão deve fazer para transportar $360m^3$ de papel?



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

a) 3

b) 5

c) 8

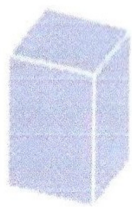
d) 10

Nesta questão a habilidade avaliada foi H40 - Resolver problemas que envolvam noções de volume;

Aqui os alunos deverão identificar o sólido que forma a carroceria do caminhão e então calcular o seu volume, bem como calcular o volume de papel e relacionar as medidas. Importante colocar, que durante as aulas, sugere-se que este tipo de atividade esteja presente quando possível. Questões em que o aluno consegue ver uma relação e aplicação com o cotidiano, tendo uma maior motivação e facilidade em aprender.

Questão 5:

Um restaurante oferece suco para seus clientes em copos com formato de prisma, cuja base é um quadrado de área $0,25dm^2$. Sabendo que $1dm^3$ = 1 litro, se a altura de cada copo e 1,2 dm, então a quantidade de copos equivalente a uma jarra com 1,8 litro é:



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar.* 2014.

a) 7

b) 6

c) 5

d) 4

Nesta questão a habilidade avaliada foi H40 - Resolver problemas que envolvam noções de volume; H41 - Resolver problemas que utilizam relações entre diferentes unidades de medida;

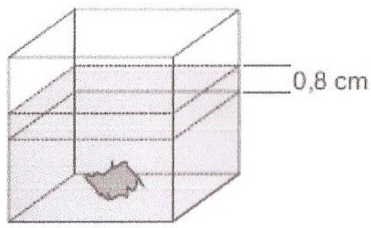
Aqui os alunos deverão identificar no sólido que forma a embalagem, um objeto que faz parte do cotidiano, calcular o seu volume e relacionar corretamente as equivalências de unidades de volume e capacidade.

Durante as aulas, podem ser feitas comparações diversas entre as diversas embalagens. Estaremos trabalhando juntamente aos poliedros, outros assuntos como: proporcionalidade, porcentagen, custos, funções, etc.

3^a.**série / Ensino Médio**

Questão 1:

Um aquário tem a forma de um paralelepípedo reto-retângulo e contém água até certa altura. As medidas internas da base do aquário são 40 cm por 25 cm. Quando uma pedra é colocada dentro do aquário, ficando totalmente submersa, o nível da água sobe 0,8 cm. O volume da pedra é, em cm^3, igual a:



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 21 *mar.* 2014.

a) 25,7

b) 24,4

c) 19,4

d) 11

e) 19,5

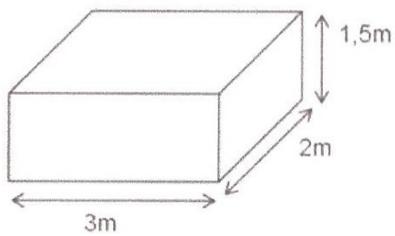
Desenvolver a habilidade de identificação dos sólidos. Calcular o volume corretamente, além de perceber a variação do volume do aquário em função do volume do objeto colado.

Esse tipo de questão pode ser bastante explorada durante o estudo dos sólidos, podendo ser trabalhada em laboratório. Pode ser um conteúdo interdisciplinar, contextualizado, com a disciplina de Física.

Questão 2:

Um tanque para conservação de líquidos tem o formato de um bloco retangular (paralelepípedo reto retângulo) como o da figura, com 1,5 m de altura, 3 m de comprimento e 2 m de largura e para que fique impermeabilizado todo o interior do tanque, inclusive o da tampa, e revestido com epóxi. Ao comprar os materiais devemos considerar que para a preparação dessa tinta epóxi são misturados dois componentes: uma pasta própria e um catalisador. A cada galão de 3,6 litros de pasta é necessário adicionar 1 litro de catalisador e essa mistura é suficiente para pintar aproximadamente $22m^2$ da superfície do tanque.

Assinale a alternativa que mostra, respectivamente, o número mínimo necessário de galões de pasta e de litros de catalisador.



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 21 *mar.* 2014.

a) 1 e 1

b) 1 e 2

c) 2 e 2

d) 2 e 3

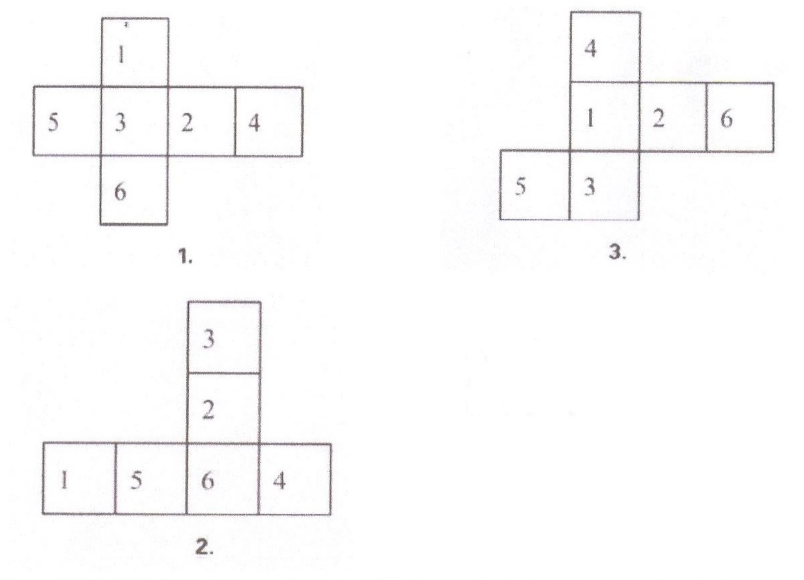
e) 3 e 3

Nesta questão a habilidade avaliada foi H40 - Resolver problemas que envolvam noções de volume; H41 - Resolver problemas que utilizam relações entre diferentes unidades de medida;

Aqui os alunos deverão identificar o sólido que forma a embalagem, um objetos que faz parte do cotidiano, e então calcular o seu volume e relacionar corretamente as equivalências de unidades de volume e capacidade.

Questão 3:

Num dado cúbico, ficam em faces opostas os números: 1 e 6, 2 e 5, 3 e 4. Observe as figuras dadas e responda quais representam planificações possíveis de um dado.



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 21 *mar.* 2014.

a) 1 e 2

b) 1 e 3

c) 2 e 3

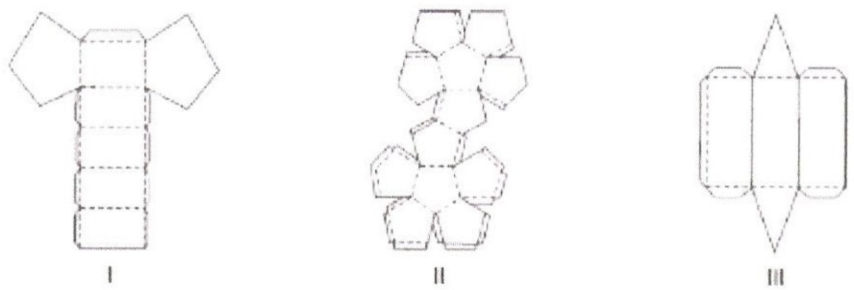
d) Nenhuma

Nesta questão a habilidade avaliada foi H18 - Identificar figuras espaciais a partir de suas planificações.

O aluno precisa saber relacionar a forma plana e espacial, reconhecendo o Poliedro de Platão. É importante também o raciocínio lógico para identificar os pares de números.

Questão 4:

Observe as planificações I, II, e III de três sólidos. Assinale a alternativa que mostra corretamente os nomes dos sólidos associados às planificações I, II e III, respectivamente:



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 21 *mar.* 2014.

a) prisma reto base pentagonal; dodecaedro; prisma reto de base triangular.

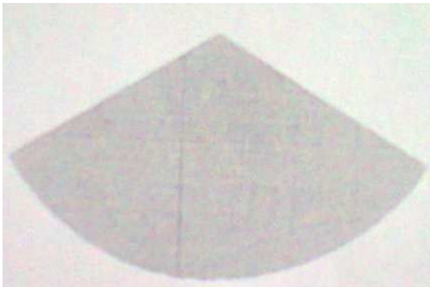
b) icosaedro; dodecaedro; tetraedro.

c) pirâmide reta de base triangular; icosaedro; prisma reto base pentagonal.

d) dodecaedro; prisma reto de base triangular; tetraedro.

Questão 5:

Teresa desmanchou o chapéu de Raquel e encontrou a figura . Qual era a forma do chapéu de Raquel?



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 21 *mar.* 2014.

a) cilindro.

b) cone.

c) pirâmide.

d) prisma.

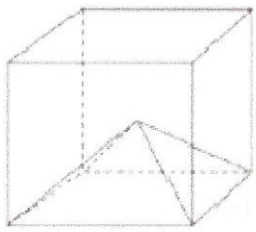
e) círculo.

Nesta questão a habilidade avaliada foi H25 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.

O aluno precisa saber relacionar a forma plana e espacial, reconhecendo o sólido geométrico e relacionando este com um objeto utilizado no cotidiano.

Questão 6:

O centro de um cubo de 12 cm de aresta, forma com uma de suas bases uma pirâmide cujo volume, em cm^3, é:



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 21 *mar.* 2014.

a) 328.

b) 288.

c) 144.

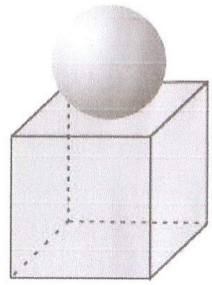
d) 136.

Nesta questão a habilidade avaliada foi H30 - Resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como a pirâmide e o cone. (GIII).

O aluno precisa inicialmente identificar o cubo (Poliedro de Platão) e a pirâmide, suas arestas, relacionando corretamente a aresta do cubo, seu centro e a altura da pirâmide, e então aplicar corretamente as relações entre suas arestas, calculando o volume.

Questão 7:

Na figura, está representado um projeto de uma escultura em cimento para o jardim de uma escola, constituída por uma esfera colocada sobre um cubo. Admita agora que o raio da esfera mede 0,5 m e a aresta do cubo, 1 m. Pretende-se pintar toda a superfície da escultura, exceto, naturalmente, a face do cubo que está assentada no chão. A medida da área a ser pintada, em m^2, é aproximadamente igual a:



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 21 *mar.* 2014.

a) 4,35.

b) 5,24.

c) 6,48.

d) 8,14.

d) 9,09.

Lembre-se que a área de uma superfície esférica é dada por A=$4.\pi.r^2$.

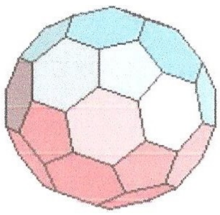
Use $\pi = 3,14$

Nesta questão a habilidade avaliada foi H25 - Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações e H31 - Resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes.

O aluno precisa inicialmente identificar o cubo (Poliedro de Platão) e a esfera, relacionar estes sólidos com suas planificações e então calcular suas superfícies.

Questão 8:

Observe na figura o “poliedro bola”, poliedro convexo de 32 faces formado apenas por pentágonos e hexágonos regulares. Por sua semelhança com uma esfera, sua forma é utilizada na confecção de bolas de futebol. Sabendo que o “poliedro bola” possui, ao todo, 90 arestas. É correto concluir que os números de faces pentagonais e hexagonais são iguais, respectivamente, a



Fonte: http://saresp.fde.sp.gov.br/2012 [18]
Acesso em: 20 *mar*. 2014.

a) 8 e 24.

b) 12 e 20.

c) 16 e 16.

d) 18 e 14.

Nesta questão a habilidade avaliada foi H26 - Identificar a relação entre o números de faces, vértices e / ou arestas de um poliedros expressas em um problemas (GII)

Trata-se de uma questão onde o aluno deve identificar as faces que formam o poliedro, bem com saber aplicar a relação de Euler .

ENEM - 2013

Questão 1:

As torres Puerta de Europa são duas torres inclinadas uma contra a outra, construídas numa avenida de Madri, na Espanha. A inclinação das torres é de 15° com a vertical e elas têm, cada uma, uma altura de 114 m (a altura é indicada na figura como o segmento AB). Estas torres são um bom exemplo de um prisma oblíquo de base quadrada e uma delas pode ser observada na imagem.

Fonte: http://guiadoestudante.abril.com.br/vestibular-enem [18]
Acesso em: 01 *junho* 2014.

Utilizando 0,26 como valor aproximado para a tangente de 15° e duas casas decimais nas operações, descobre-se que a área da base desse prédio ocupa na avenida um espaço:

(a) menor que $100m^2$

(b) entre 100 e $300m^2$

(c) entre 300 e $500m^2$

(d) entre 500 e $700m^2$

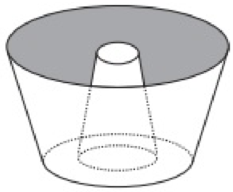
(e) maior que $700m^2$

ALTERNATIVA CORRETA: e

Nesta questão as habilidades empregadas são: H7, H8 e H9 veja matriz 10.1

Questão 2:

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Fonte: http://guiadoestudante.abril.com.br/vestibular-enem [18]
Acesso em: 01 *junho* 2014.

Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:

(a) um tronco de cone e um cilindro.

(b) um cone e um cilindro.

(c) um tronco de pirâmide e um cilindro.

(d) dois troncos de cone.

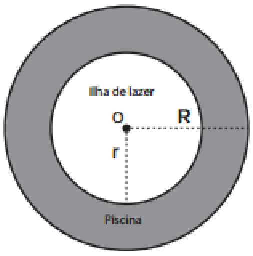
(e) dois cilindros.

ALTERNATIVA CORRETA: d

Nesta questão a habilidade empregada é H7 veja matriz 10.1 .

Questão 3:

Num parque aquático existe uma piscina infantil na forma de um cilindro circular reto, de 1 m de profundidade e volume igual a $12m^3$, cuja base tem raio R e centro O. Deseja-se construir uma ilha de lazer seca no interior dessa piscina, também na forma de um cilindro circular reto, cuja base estará no fundo da piscina e com centro da base coincidindo com o centro do fundo da piscina, conforme a figura. O raio da ilha de lazer será r. Deseja-se que após a construção dessa ilha, o espaço destinado à água na piscina tenha um volume de, no mínimo, $4m^3$



Fonte: http://guiadoestudante.abril.com.br/vestibular-enem [18]
Acesso em: 01 *junho* 2014.

Considere 3 como valor aproximado para π. Para satisfazer as condições dadas, o raio máximo da ilha de lazer r, em metros, estará mais próximo de:

(a) 1,6.

(b) 1,7.

(c) 2,0.

(d) 3,0.

(e) 3,8.

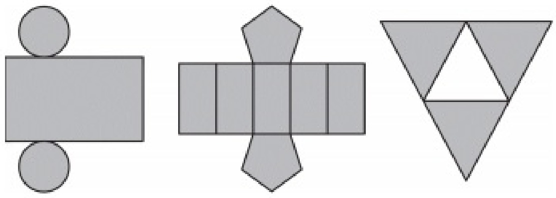
ALTERNATIVA CORRETA: a

Nesta questão as habilidades empregadas: H7, H8 e H9 veja matriz 10.1 .

ENEM - 2012

Questão 4:

Maria quer inovar em sua loja de embalagens e decidiu vender caixas com diferentes formatos. Nas imagens apresentadas estão as planificações dessas caixas.



Fonte: http://vestibular.brasilescola.com/enem/gabarito-oficial-enem-2012 [18]
Acesso em: 01 *junho* 2014.

Quais serão os sólidos geométricos que Maria obterá a partir dessas planificações?

(a) Cilindro, prisma de base pentagonal e pirâmide.

(b) Cone, prisma de base pentagonal e pirâmide.

(c) Cone, tronco de pirâmide e pirâmide.

(d) Cilindro, tronco de pirâmide e prisma.

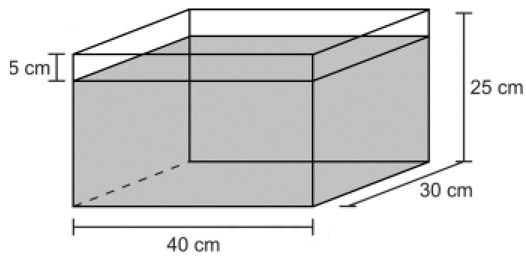
(e) Cilindro, prisma e tronco de cone.

ALTERNATIVA CORRETA: a

Nesta questão a habilidade empregada é H7 veja matriz 10.1 .

Questão 5:

Alguns objetos, durante a sua fabricação, necessitam passar por um processo de resfriamento. Para que isso ocorra, uma fábrica utiliza um tanque de resfriamento, como mostra a figura.



Fonte: http://vestibular.brasilescola.com/enem/gabarito-oficial-enem-2012 [18]
Acesso em: 01 *junho* 2014.

O que aconteceria com o nível da água se colocássemos no tanque um objeto cujo volume fosse de $2.400cm^3$?

(a) O nível subiria 0,2 cm, fazendo a água ficar com 20,2 cm de altura.

(b) O nível subiria 1 cm, fazendo a água ficar com 21 cm de altura.

(c) O nível subiria 2 cm, fazendo a água ficar com 22 cm de altura.

(d) O nível subiria 8 cm, fazendo a água transbordar.

(e) O nível subiria 20 cm, fazendo a água transbordar.

ALTERNATIVA CORRETA: c

Nesta questão as habilidades empregadas: H7, H8 e H9 veja matriz 10.1.

É importante ressaltar que as questões selecionadas, no SARESP, possuem um grau de dificuldade não muito grande, mas que o aluno precisa ter domínio dos sólidos geométricos, suas características, calcular corretamente áreas e volumes e em alguns casos, ter habilidades na aplicação de relações métricas e Teoremas. Em contrapartida, temos os índices que mostram que os alunos, não possuem tantas habilidades para tais questões. Fica a dúvida: falta empenho dos alunos na resolução, pois muitas vezes acham que não serão beneficiados com tal dedicação, ou faltam habilidades e competências para tal resolução, normalmente agravada pela forma com que o conteúdo é tratado, partindo de "fórmulas decoradas", sem nenhuma relação com o cotidiano através de aulas expositivas, sem nenhuma prática motiviadora?

Nas questões selecionadas do ENEM, observa-se que as questões propostas, que envolvem Geometria Espacial, sólidos geométricos, não apresentam um grau de dificuldade elevado, mas um pouco mais eleaborado e contextualizado. São questões principalmente de identificação dos sólidos. Algumas abordaram cálculos de áreas e volumes, mas com um desenvolvimento bastante simples.

É fato que nossos alunos teriam condições plenas de resolver tais questões, se realmente as práticas pedagógicas tivessem sido até então desenvolvidas com eficiência e sucesso.

Capítulo 7

Considerações Finais

Este trabalho iniciou-se com a preocupação do ensino da Geometria Espacial nas turmas do 2^o ano, do Ensino Médio.

O assunto foi abordado com o objetivo de estudar os Poliedros de Platão, como uma estratégia para o ensino da Geometria Espacial. Trata-se de um assunto cuja parte histórica é muito rica e interessante, onde conhecemos os estudos relacionados a Euclides e seus discípulos, principalmente Platão, que em sua obra *"Timeo"*, relaciona os Poliedros de Platão aos elementos da natureza.

Após a parte histórica, no capítulo 3, tivemos algumas definições importantes sobre polígonos regulares, já que são estes polígonos que formam os Poliedros de Platão, diedros e poliedros regulares. Assim como, uma demonstração do porquê de só existirem os cinco Poliedros de Platão, e uma demonstração da relação de Euler por indução.

No capítulo 4, dedicamos a exemplos de atividades onde os alunos, sentem-se motivados a desenvolver o conteúdo. Partimos da prática e então os conhecimentos foram sendo equacionados e aprimorados, gradativamente, sendo o aluno agora o protagonista do seu aprendizado. Assim, partimos do fato de que a Escola pode ser considerada como uma oficina de produção e articulação de ideias e não simplesmente uma "distribuidora" de conteúdos fragmentados e sem nenhuma ligação entre eles. Nela, o professor poderá ao longo das práticas enriquecer suas aulas com o uso de tecnologias e entrelaçar os diversos conteúdos que contribuem para o desenvolvimento de um certo assunto, enriquecendo o aprendizado.

Como vimos, a Geometria não pode ser dada de forma isolada. Depende de diversas grandezas envolvidas, sendo todos os conteúdos importantes nessa construção de conhecimento. As aulas não precisam ser por si só, aulas expositivas, mas também não pode o professor abdicar delas. Há vários outros recursos, como os mostrados durante o trabalho que podem servir de ferramentas ajudando a criação de centros de interesses para os alunos. Importante lembrar que os alunos possuem suas necessidades e trazem para a escola uma bagagem de conhecimentos e expectativas. Isso tudo precisa ser considerado, a fim de que se desenvolvam as capacidades de: expressão, compreensão, argumentação, contextualização e abstração, uma das mais envolventes e difíceis, sem atividades práticas, na Geometria.

As atividades citadas foram todas aplicadas em sala de aula. Surgiram construções com os mais diversos tipos de materiais, durante a aplicação do Projeto de estudo dos Poliedros de Platão. Os alunos dividiram-se em grupos e procuraram os mais diferentes materiais para a construção: madeiras, palitos de churrasco, canudos, tubos de PVC, placas de acrílico e papel cartão. Muito envolvente, já que partiu deles o interesse e iniciativa de diversificar as construções. Agora, estes materiais fazem parte do material pedagógico da escola, disponível a todos os professores, assim como os comprados pela direção (escola), que acreditou no Projeto.

Foi feita a exigência de que todos os sólidos construídos, fossem catalogados, com uma ficha (nome, vértices, arestas, faces, polígonos que formam o poliedro, elemento na natureza representado por Platão, etc).

Houve a cada momento uma preocupação em rever muitos conteúdos, que analisando os PCN foram tratados em séries anteriores, e que os alunos não mostravam as habilidades e competências esperadas.

Foi necessário então mobilizar outros professores, numa atividade interdisciplinar, já que a aula de Matemática ficou encarregada dos cálculos e demonstrações, e outros professores ajudaram com um “reforço” ou “estudo dirigido”. Nas aulas de Artes foram orientadas as construções, já iniciadas nas aulas de Matemática, além de pesquisa no laboratório de informática. Em História, estudaram a parte histórica do assunto, também através de pesquisas e construção dos “resumos” que os alunos apresentaram através de seminários para a classe.

O capítulo 5 mostrou uma demonstração do cálculo das áreas e volumes dos Poliedros. Interessante observar a relação existente entre esses e a razão áurea (Número de Ouro), no cálculo de diagonais do pentágono e sua área, também presente no icosaedro regular e dodecaedro regular. Importante salientar que tais demosntrações não são encontradas em livros didáticos usados no Ensino Médio, principalmente no dodecaedro e icosaedro.

Para finalizar, fizemos uma análise dos PCN, bem como da Proposta Curricular do Estado de São Paulo para compreender como o assunto vem sendo trabalhado durante o desenvolvimento da vida escolar do aluno. Nota-se que é feito de forma gradativa e a cada nível de ensino vem sendo aprimorada. Analisamos algumas questões das Provas externas aplicadas aos alunos das escolas Públicas: SARESP e de maneira geral o ENEM, observando que tratam de questões relativamente simples, mas que os alunos de forma geral, não apresentam as habilidades esperadas.

Fica a discussão dos motivos de tal posição do Brasil em relação a outros países, saindo-se tão mal no ensino da Matemática. Fatores são diversos, estudados por diversos autores, mas um dos fatores abordados neste trabalho, é a falha na aprendizagem, gerada pela falta da prática em parceria com a teoria, de forma gradativa, onde o aluno é o agente participativo nesta construção do conhecimento. As demonstrações em parceria com a prática / laboratório, devem ser valorizadas para não ficarem só nos livros, na maioria das vezes não sendo investigada pelo aluno.

Finalizamos com uma mostra dos registro dessas práticas, aplicadas durante o estudo para este trabalho, onde concluímos que é maior a possibilidade de aumentarmos os índices medidos anualmente. Já que foi observado que com as atividades práticas, houve uma grande melhora na participação dos alunos e principalmente no interesse pelo desenvolvimento e estudo dos cálculos, conforme resultados em avaliações internas aplicadas. É um trabalho árduo que deve envolver toda a sociedade escolar, o Sistema Educacional e Políticas Públicas, através de um comprometimento real, de investimentos maciços nas práticas educacionais, promovendo capacitações dos profissionais da área e o acompanhamento efetivo deste processo, observando, analisando e aprimorando todo o seu desenvolvimento.

Referências Bibliográficas

[1] EVES, H.: *Introdução à história da matemática.* 5. ed. Campinas - São Paulo, Ed. da Unicamp, 2011, 848 p.

[2] DOLCE, Osvaldo ; POMPEO, José N.: *Fundamentos de Matemática Elementar 9: geometria plana.* 4. ed. São Paulo, Atual, 1985. 342 p.

[3] DOLCE, Osvaldo ; POMPEO, José N.: *Fundamentos de Matemática Elementar 10: geometria plana.* 4. ed. São Paulo, Atual, 1985. 414 p.

[4] KALEFF, Ana Maria M . R.: *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo de volume através de quebra cabeças e outros materiais concretos.* 2. ed. Niterói : EdUFF, 2003.

[5] FLOOD, Raymond; WILSON, Robin. *OS GRANDES MATEMÁTICOS - As descobertas e a propagação do conhecimento através das vidas dos grandes matemáticos.* São Paulo: M. Books, 2013. 208 p.

[6] PLATÃO. *Diálogos / Platão* - Tradução de José Cavalcante de Souza, Jorge Paleikat e João Cruz Costa. São Paulo: Nova Cultural, 1991. 261 p.

[7] MACHADO, Nilson José. *Os poliedros de Platão e os dedos da mão.* São Paulo. Ed. Scipione, 2000.

[8] DUVAL, Raymond. *Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas / organização.* 1.ed. São Paulo: PROEM, 2011. 160 p.

[9] LIMA, Elon Lages. *A Matemática do Ensino Médio* - V.2 / Elon Lages Lima, Paulo Cezar Pinto Carvalho, Eduardo Wagner, Augusto César Morgado.- 6.ed.- Rio de Janeiro: SBM 2006.

[10] NETTO, Scipione Di Pierro. *Quanta - Matemática em fascículos para o Ensino Médio* - Fascículo 7/ Scipione di Pierro Netto, Sérgio Orsi Filho. - 1. ed.- São Paulo :Editora Saraiva 2000. 61 p.

[11] GARBI, Gilberto G.: *A Rainha das Ciências: um passeio histórico pelo maravilhoso mundo da Matemática.* 1. ed. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2010. 403 p.

[12] Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais : Matemática Secretaria de Educação Fundamental.* - Brasília: MEC SEF, 1998.

[13] SÃO PAULO (ESTADO) SECRETARIA DA EDUCAÇÃO.: *Currículo do Estado De São Paulo: Matemática e suas Tecnologias.* São Paulo, SEE, 2012.

[14] MACHADO,Antônio dos Santos. *Matemática Temas e Metas: Áreas e Volumes* v.4 / Antônio dos Santos Machado - São Paulo: Atual, 1988

[15] Revista do Professor de Matemática N^o74. Ano 29 - 1^oquadrismestre. Ano: 2011

[16] http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2010/04/o-volume-do-dodecaedro-regular.html . Acesso em 24/02/14

[17] http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/cos36.shtml Acesso em 11/05/2014

[18] http://saresp.fde.sp.gov.br/2012. Acesso em 20/03/2014

[19] http://guiadoestudante.abril.com.br/vestibular-enem/enem-2013-correcao-completa-prova-758579.shtml

[20] http://vestibular.brasilescola.com/enem/gabarito-oficial-enem-2012.html

[21] http://www.sapientia.pucsp.br/tde$_arquivos/3/TDE - 2007 - 05 - 08T08:20:04Z - 3058/Publico/EDM$

Capítulo 8

Anexos 1 - Fotos

Neste capítulo ficam registradas as fotos tiradas durante a aplicação do projeto, no 2^oAno. Estas mostram os alunos no desenvolvimento das atividades práticas.

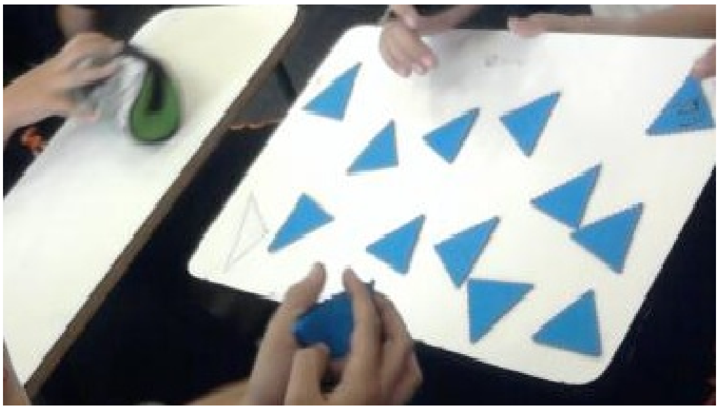


Figura 8.1: Provando a existência dos cinco Poliedros de Platão

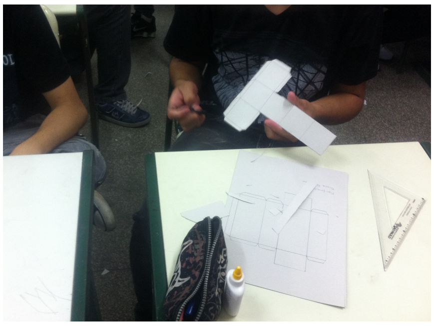


Figura 8.2: Planificação

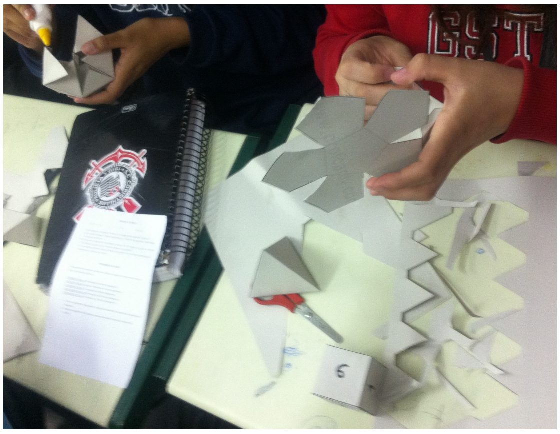


Figura 8.3: Planificação

Figura 8.4: Planificação

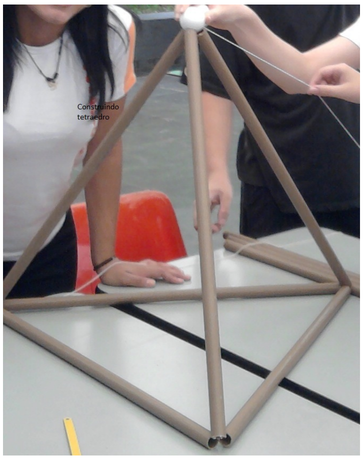


Figura 8.5: Tetraedro PVC

Figura 8.6: Tetraedro PVC

Figura 8.7: Hexaedro PVC

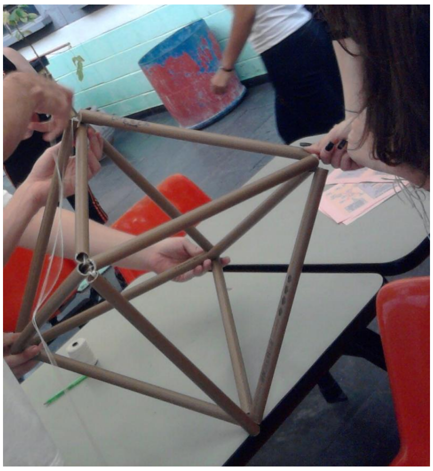


Figura 8.8: Construindo octaedro de canos - PVC

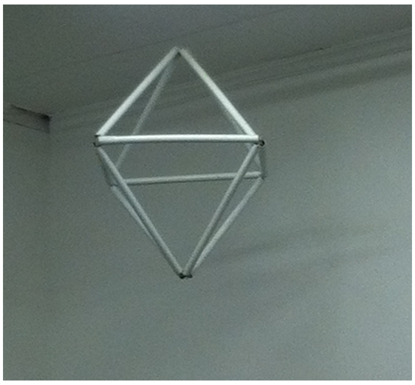


Figura 8.9: Octaedro PVC

Figura 8.10: Construindo dodecaedro de canos - PVC

Figura 8.11: Dodecaedro PVC

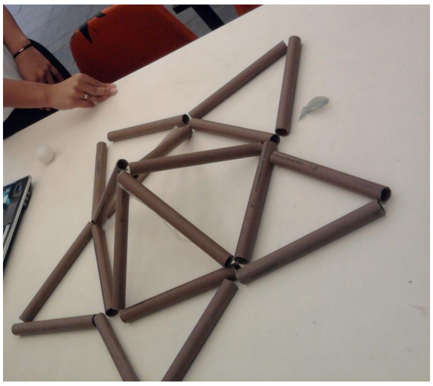


Figura 8.12: Construindo icosaedro de canos - PVC

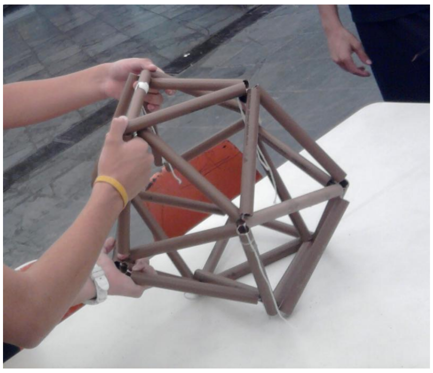


Figura 8.13: Construindo icosaedro de canos - PVC

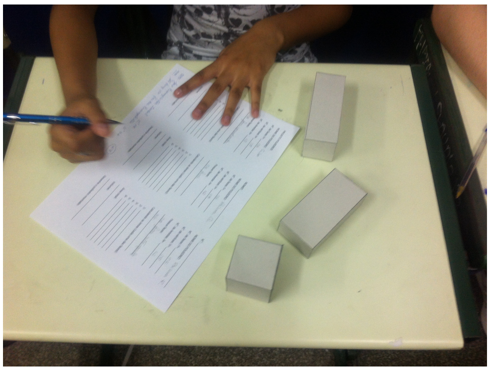


Figura 8.14: Verificação da Relação de Euler

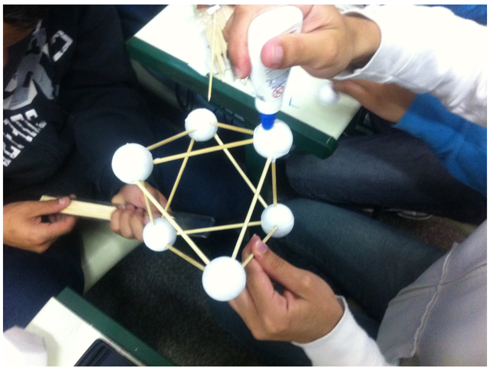


Figura 8.15: Construindo as estruturas dos poliedros de Platão

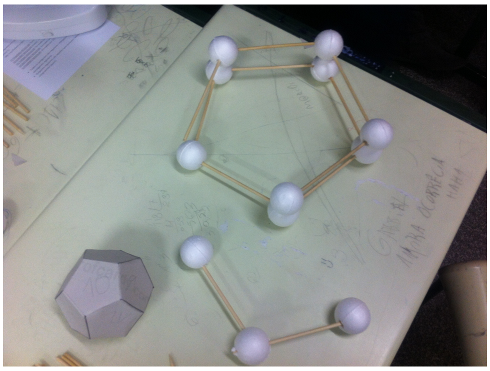


Figura 8.16: Construindo as estruturas dos poliedros de Platão

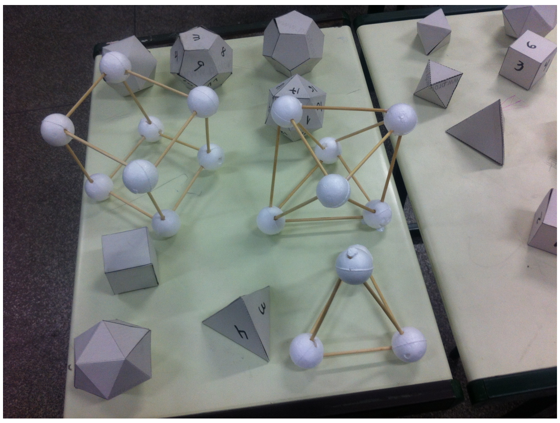


Figura 8.17: Construindo as estruturas dos poliedros de Platão

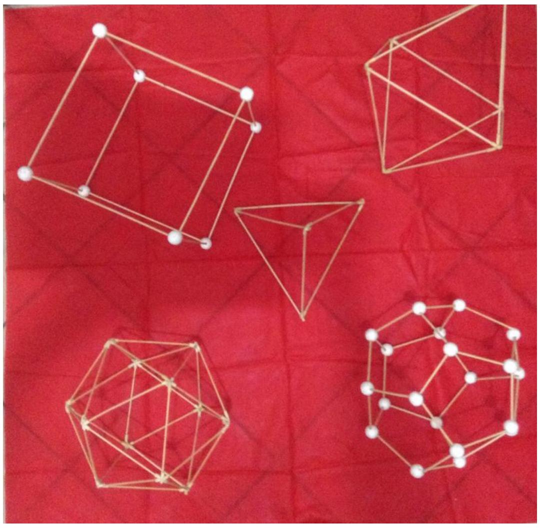


Figura 8.18: Construindo as estruturas dos poliedros de Platão

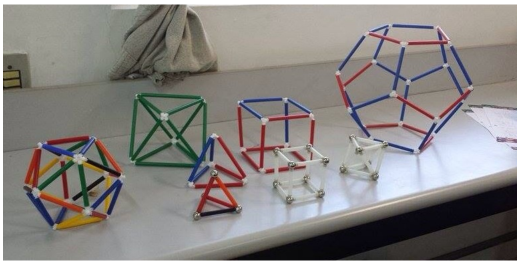


Figura 8.19: Construindo as estruturas dos poliedros de Platão

Capítulo 9

Anexos 2 - Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - Matemática

6^a. **série do Ensino Fundamental**

	COMPETÊNCIAS DO SUJEITO		
	GRUPO I **Competências para observar**	**GRUPO II** **Competências para realizar**	**GRUPO III** **Competências para compreender**
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 1 – Números, operações, funções, iniciação à Álgebra	H01 Reconhecer as principais características do sistema decimal: contagem, base, valor posicional. H04 Representar medidas não inteiras utilizando frações. H06 Representar quantidades não inteiras utilizando notação decimal. H08 Compreender a relação entre as representações fracionária e decimal de um número.	H05 Fazer cálculos que envolvam adições e subtrações de frações. H07 Fazer cálculos que envolvam adições e subtrações de números decimais. H09 Efetuar cálculos com potências. H10 Efetuar cálculos com multiplicação e divisão de números decimais. H11 Efetuar cálculos com adição, subtração, multiplicação e divisão com negativos. H12 Ler e escrever expressões algébricas correspondentes a textos matemáticos escritos em linguagem corrente e, vice-versa. H14 Resolver equações do 1º grau.	H02 Estabelecer relações entre números naturais tais como "ser múltiplo de", "ser divisor de" e reconhecer números primos e números compostos. H03 Resolver problemas que envolvam as quatro operações básicas entre números inteiros (adição, subtração, multiplicação e divisão). H13 Aplicar uma ordem de operações ao resolver problemas (parênteses, multiplicação, divisão, adição e subtração). H15 Expressar e resolver problemas por meio de equações.
Tema 2 – Espaço e forma	H16 Identificar formas planas e espaciais em situações do cotidiano e por meio de suas representações em desenhos e em malhas. H18 Identificar figuras espaciais a partir de suas planificações. H20 Identificar simetria axial e de rotação na leitura das representações dos objetos no dia a dia e das figuras geométricas.	H17 Classificar formas planas e espaciais. H19 Determinar área e perímetro de uma figura utilizando composição e decomposição de figuras. H21 Identificar elementos e classificar poliedros.	
Tema 3 – Grandezas e medidas / Proporcionalidade	H26 Identificar a soma das medidas dos ângulos de um triângulo (180º) e de um polígono de n lados (por decomposição em triângulos).	H22 Realizar medidas usando padrões e unidades não convencionais ou de outros sistemas de medida dados. H23 Aplicar as principais características do sistema métrico decimal: unidades, transformações e medidas. H24 Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos. H25 Efetuar cálculos que envolvam medidas de ângulos. H28 Reconhecer situações que envolvam proporcionalidade. H30 Reconhecer o conceito de razão em diversos contextos: proporcionalidade, escala, velocidade, porcentagem etc. H31 Reconhecer pi como uma razão constante da geometria.	H27 Resolver problemas que envolvam medidas de ângulos de triângulos e de polígonos em geral. H29 Resolver situações-problema que envolvam grandezas direta ou inversamente proporcionais. H32 Usar desenhos de escalas para resolver problemas do cotidiano que incluam distância (como em leitura de mapas).

Figura 9.1: Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - 6^a. série do Ensino Fundamental

	COMPETÊNCIAS DO SUJEITO		
	GRUPO I Competências para observar	GRUPO II Competências para realizar	GRUPO III Competências para compreender
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 4 – Tratamento da informação / Probabilidade / Estatística	H36 Identificar o gráfico adequado para representar um conjunto de dados e informações. (gráficos elementares – barras, linhas, pontos).	H33 Resolver problemas que envolvam probabilidade de eventos simples. H34 Identificar e interpretar informações transmitidas por meio de tabelas. H35 Identificar e interpretar informações transmitidas por meio de gráficos. H37 Utilizar diagramas de árvore para resolver problemas simples de contagem. H38 Resolver problemas que envolvam a ideia do princípio multiplicativo de contagem.	

Figura 9.2: Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - 6^a. série do Ensino Fundamental

8^a. série do Ensino Fundamental

	COMPETÊNCIAS DO SUJEITO		
	GRUPO I **Competências para observar**	**GRUPO II** **Competências para realizar**	**GRUPO III** **Competências para compreender**
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 1 – Números, operações, funções (racionais / potenciação, número reais, expressões algébricas, equações, gráficos cartesianos, equações do 2º grau, funções)	H01 Reconhecer as diferentes representações de um número racional. H02 Identificar fração como representação que pode estar associada a diferentes significados. H03 Reconhecer as representações decimais dos números racionais como uma extensão do sistema de numeração decimal, identificando a existência de "ordens" como décimos, centésimos e milésimos. H04 Representar os números reais geometricamente na reta numerada. H05 Identificar a expressão algébrica que expressa uma regularidade observada em sequências de números ou figuras (padrões). H06 Identificar um sistema de equações do 1º grau que expressa um problema. H07 Identificar a relação entre as representações algébrica e geométrica de um sistema de equações do 1º grau. H08 Reconhecer a representação geométrica dos produtos notáveis.	H09 Utilizar a notação científica como forma de representação adequada para números muito grandes ou muitos pequenos. H10 Efetuar cálculos que envolvam operações com números racionais (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação – expoentes inteiros e radiciação). H11 Efetuar cálculos simples com valores aproximados de radicais. H12 Realizar operações simples com polinômios. H13 Simplificar expressões algébricas que envolvam produtos notáveis e fatoração. H14 Expressar as relações de proporcionalidade direta entre uma grandeza e o quadrado de outra por meio de uma função do 2º grau.	H15 Resolver problemas com números racionais que envolvam as operações (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação). H16 Resolver problemas que envolvam porcentagem. H17 Resolver problemas que envolvam equações com coeficientes racionais. H18 Resolver sistemas lineares (métodos da adição e da substituição). H19 Resolver problemas que envolvam equações do 2º grau. H20 Resolver problemas envolvendo relações de proporcionalidade direta entre duas grandezas por meio de funções do 1º grau.
Tema 2 – Espaço e forma	H22 Identificar a localização/movimentação de objeto em mapas, croquis e outras representações gráficas. H23 Identificar propriedades comuns e diferenças entre figuras bidimensionais e tridimensionais, relacionando-as com as suas planificações. H28 Usar o plano cartesiano para representação de pares ordenados; coordenadas cartesianas e equações lineares.	H21 Reconhecer a semelhança entre figuras planas, a partir da congruência das medidas angulares e da proporcionalidade entre as medidas lineares correspondentes. H24 Identificar propriedades de triângulos pela comparação de medidas de lados e ângulos. H25 Reconhecer a conservação ou modificação de medidas dos lados, do perímetro, da área em ampliação e/ou redução de figuras poligonais usando malhas quadriculadas. H26 Reconhecer ângulos como mudança de direção ou giros, identificando ângulos retos e não retos. H27 Reconhecer círculo/circunferência, seus elementos e algumas de suas relações.	H29 Resolver problemas que utilizam propriedades dos polígonos (soma de seus ângulos internos, número de diagonais, cálculo da medida de cada ângulo interno nos polígonos regulares). H30 Resolver problemas em diferentes contextos, que envolvam triângulos semelhantes.

Figura 9.3: Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - 8^a. série do Ensino Fundamental

	COMPETÊNCIAS DO SUJEITO		
	GRUPO I **Competências para observar**	**GRUPO II** **Competências para realizar**	**GRUPO III** **Competências para compreender**
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 3 – Grandezas e medidas (Tales, Pitágoras / Áreas, volumes, proporcionalidade / Semelhança / Trigonometria, corpos redondos)	H31 Calcular áreas de polígonos de diferentes tipos, com destaque para os polígonos regulares. H32 Calcular o volume de prismas em diferentes contextos. H33 Utilizar a razão pi no cálculo do perímetro e da área da circunferência. H34 Calcular a área e o volume de um cilindro.	H35 Aplicar o Teorema de Tales como uma forma de ocorrência da ideia de proporcionalidade, em diferentes contextos. H36 Resolver problemas em diferentes contextos, que envolvam as relações métricas dos triângulos retângulos. (Teorema de Pitágoras). H37 Resolver problemas em diferentes contextos, a partir da aplicação das razões trigonométricas dos ângulos agudos. H38 Resolver problemas que envolvam o cálculo de perímetro de figuras planas. H39 Resolver problemas que envolvam o cálculo de área de figuras planas. H40 Resolver problemas que envolvam noções de volume. H41 Resolver problemas que utilizam relações entre diferentes unidades de medida.	
Tema 4 – Tratamento da informação / Probabilidade / Estatística		H43 Associar informações apresentadas em listas e/ou tabelas simples aos gráficos que as representam e vice-versa.	H42 Resolver problemas que envolvam informações apresentadas em tabelas e/ou gráficos. H44 Resolver problemas que envolvam processos de contagem; princípio multiplicativo. H45 Resolver problemas que envolvam ideias básicas de probabilidade.

Figura 9.4: Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - 8^a. série do Ensino Fundamental

3^a. série do Ensino Médio

	COMPETÊNCIAS DO SUJEITO		
	GRUPO I **Competências para observar**	**GRUPO II** **Competências para realizar**	**GRUPO III** **Competências para compreender**
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 1 – Números, operações, funções	**H05** Descrever as características fundamentais da função do 1º grau, relativas ao gráfico, crescimento/decrescimento, taxa de variação. **H06** Descrever as características fundamentais da função do 2º grau, relativas ao gráfico, crescimento, decrescimento, valores máximo ou mínimo. **H09** Identificar os gráficos de funções de 1º e de 2º graus, conhecidos os seus coeficientes. **H10** Reconhecer a função exponencial e suas propriedades relativas ao crescimento ou decrescimento. **H16** Identificar os resultados de operações entre números complexos representados no plano de Argand-Gauss. **H17** Identificar a localização de números reais na reta numérica.	**H12** Resolver equações e inequações simples, usando propriedades de potências e logaritmos. **H13** Resolver equações trigonométricas simples, compreendendo o significado das condições dadas e dos resultados obtidos.	**H01** Expressar matematicamente padrões e regularidades em sequências numéricas ou de imagens. **H02** Resolver problemas que envolvam Progressões Aritméticas. **H03** Resolver problemas que envolvam Progressões Geométricas. **H04** Representar, por meio de funções, relações de proporcionalidade direta, inversa, e direta com o quadrado. **H07** Resolver problemas que envolvam equações do 1º grau. **H08** Resolver problemas que envolvam equações do 2º grau. **H11** Aplicar o significado de logaritmos para a representação de números muito grandes ou muito pequenos, em diferentes contextos. **H14** Resolver situações-problema por intermédio de sistemas lineares até a 3ª ordem. **H15** Aplicar as relações entre coeficientes e raízes de uma equação algébrica na resolução de problemas.
Tema 2 – Espaço e forma	**H20** Representar pontos, figuras, relações e equações em sistemas de coordenadas cartesianas. **H21** Reconhecer a equação da reta e o significado de seus coeficientes. **H22** Representar graficamente inequações lineares por regiões do plano. **H23** Identificar as equações da circunferência e das cônicas na forma reduzida, com centro na origem. **H24** Identificar figuras semelhantes mediante o reconhecimento de relações de proporcionalidade. **H26** Identificar a relação entre o número de vértices, faces e/ou arestas de poliedros expressa em um problema.	**H19** Caracterizar polígonos regulares inscritos e circunscritos em circunferências. **H25** Relacionar diferentes poliedros ou corpos redondos com suas planificações.	**H18** Aplicar as propriedades fundamentais dos polígonos regulares em problemas de pavimentação de superfícies. **H27** Resolver problemas que envolvam razões trigonométricas no triângulo retângulo (seno, cosseno, tangente).

Figura 9.5: Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - 3^a. série do Ensino Médio

	COMPETÊNCIAS DO SUJEITO		
	GRUPO I Competências para observar	GRUPO II Competências para realizar	GRUPO III Competências para compreender
OBJETOS DO CONHECIMENTO (CONTEÚDOS) Tema 3 – Grandezas e medidas			H28 Resolver problemas que envolvam as relações métricas fundamentais em triângulos retângulos. H29 Resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos como o prisma e o cilindro. H30 Resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) de sólidos, como a pirâmide e o cone. H31 Resolver problemas que envolvam relações métricas fundamentais (comprimentos, áreas e volumes) da esfera e de suas partes. H32 Identificar fusos, latitudes e longitudes com as propriedades características da esfera terrestre.
Tema 4 – Tratamento da informação			H33 Resolver problemas que envolvam probabilidades simples. H34 Aplicar os raciocínios combinatórios aditivo e/ou multiplicativo na resolução de situações-problema. H35 Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidades de eventos que se repetem seguidamente; o binômio de Newton e o triângulo de Pascal. H36 Interpretar e construir tabelas e gráficos de frequências a partir de dados obtidos em pesquisas por amostras estatísticas. H37 Calcular e interpretar medidas de tendência central de uma distribuição de dados (média, mediana e moda) e de dispersão (desvio padrão). H38 Analisar e interpretar índices estatísticos de diferentes tipos.

Figura 9.6: Matriz de Referência para Avaliação do SARESP - 3^a. série do Ensino Médio

Capítulo 10

Anexos 3 - Matriz de Referência ENEM 2013

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

MATRIZ DE REFERÊNCIA

EIXOS COGNITIVOS (comuns a todas as áreas de conhecimento)

I. **Dominar linguagens (DL)**: dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreender fenômenos (CF)**: construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico-geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentar situações-problema (SP)**: selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representados de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. **Construir argumentação (CA)**: relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. **Elaborar propostas (EP)**: recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Figura 10.1: Matriz de Referência ENEM 2013

Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias

Competência de área 1 – Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 – Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações – naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 – Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 – Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 – Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

Competência de área 2 – Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 – Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 – Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 – Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

Competência de área 3 – Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 – Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 – Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 – Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 – Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 – Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

Competência de área 4 – Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

5

Figura 10.2: Matriz de Referência ENEM 2013

H15 – Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 – Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 – Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.

H18 – Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

Competência de área 5 – Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 – Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.

H20 – Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.

H21 – Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.

H22 – Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.

H23 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

Competência de área 6 – Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 – Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.

H25 – Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.

H26 – Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

Competência de área 7 – Compreender o caráter aleatório e não determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 – Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.

H28 – Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.

H29 – Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de

6

Figura 10.3: Matriz de Referência ENEM 2013

argumentação.

H30 – Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Figura 10.4: Matriz de Referência ENEM 2013

Capítulo 11

Anexo 4 - Exercícios e Moldes

Aqui ficam anexas as atividades aplicadas como Avaliação diagnóstica, fichas para aplicação de atividades práticas (Relação de Euler) e moldes para atividades práticas.

- Atividades diagnóstica veja figuras (anexos):11.1 e 11.2;
- Verificação da Relação de Euler veja figura (anexos): 11.3;
- Polígonos regulares - Prática I veja figura (anexos): 11.4;
- Planificação dos Poliedros de Platão - Prática II veja figuras (anexos): 11.5, 11.6, 11.7, 11.8 e 11.9.

ATIVIDADE DIAGNÓSTICA DE GEOMETRIA

1) Relacione as colunas corretamente:
   (a) Ponto
   (b) Reta
   (c) Segmento de reta
   (d) Plano

   ( ) $\overline{AB}$ ( ) π ( ) $\overrightarrow{AB}$ ( ) R

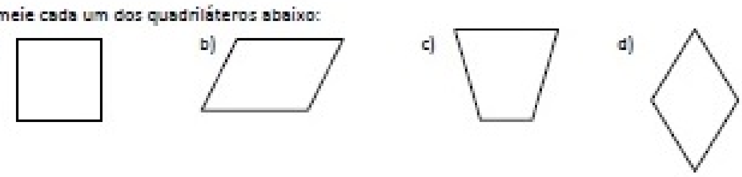
2) Como é chamado um polígono que possui 4 lados, 6 lados e 10 lados respectivamente?

3) O que é um polígono REGULAR?

4) Um triângulo quanto a medida de seus lados pode ser EQUILÁTERO, ISÓSCELES OU ESCALENO. Diferencie cada um deles.

5) Nomeie cada um dos quadriláteros abaixo:

a) b) c) d)



6) Nomeie cada um dos sólidos abaixo:

a) b) c) d)

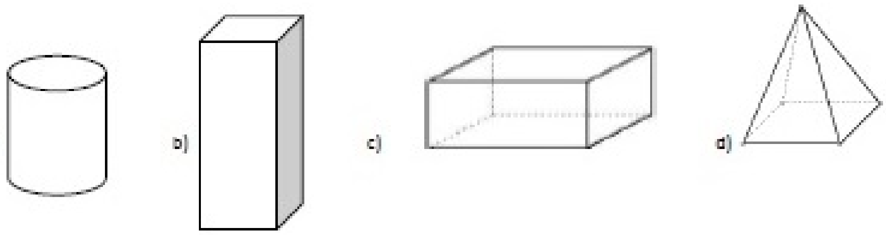
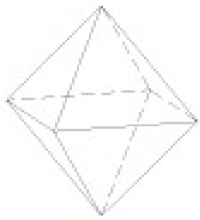
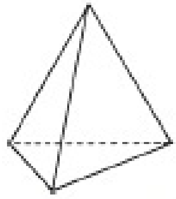


Figura 11.1: Atividade diagnóstica p.1

7) Como se chama cada um dos Poliedros abaixo? Indique em cada um deles o número de vértices, arestas e faces.

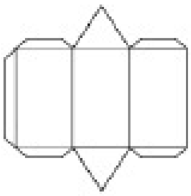
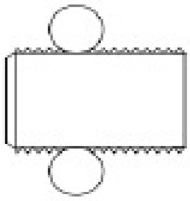
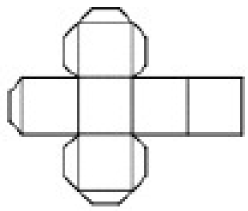
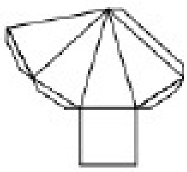
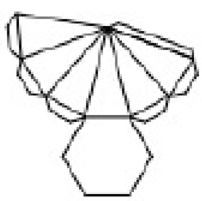
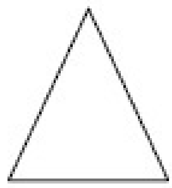




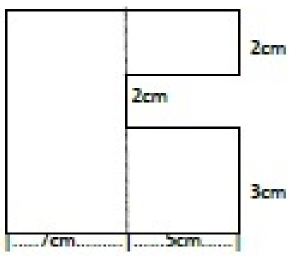
V= F= A= V= F= A=

8) Uma piscina tem formato de um prisma retangular, 10m x 4m x 2m . Quantos litros serão necessários para encher completamente esta piscina?

9) Marque na alternativa (C) para a planificação do cubo, (P) para a planificação da Pirâmide e (M) para a planificação do cilindro:

( ) 	( ) 	( ) 
( ) 	( ) 	( ) 

10) Calcule a área da figura dada:



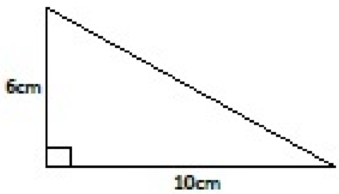


Figura 11.2: Atividade diagnóstica p.2

Poliedros de Platão X Relação de Euler

São exclusivamente 5 os poliedros de Platão:

POLIEDROS	POLÍGONO DE CADA FACE	VÉRTICES	FACES	ARESTAS	RELAÇÃO: V+F=A+2

EXERCÍCIO:

Em cada um dos poliedros acima, a partir do NOME (Ex. Tetraedro possui 4 faces triangulares) e utilizando as relações: V + F = A + 2 e N = 2.A, determine o número de arestas e vértices .

Figura 11.3: Verificando a relação de Euler

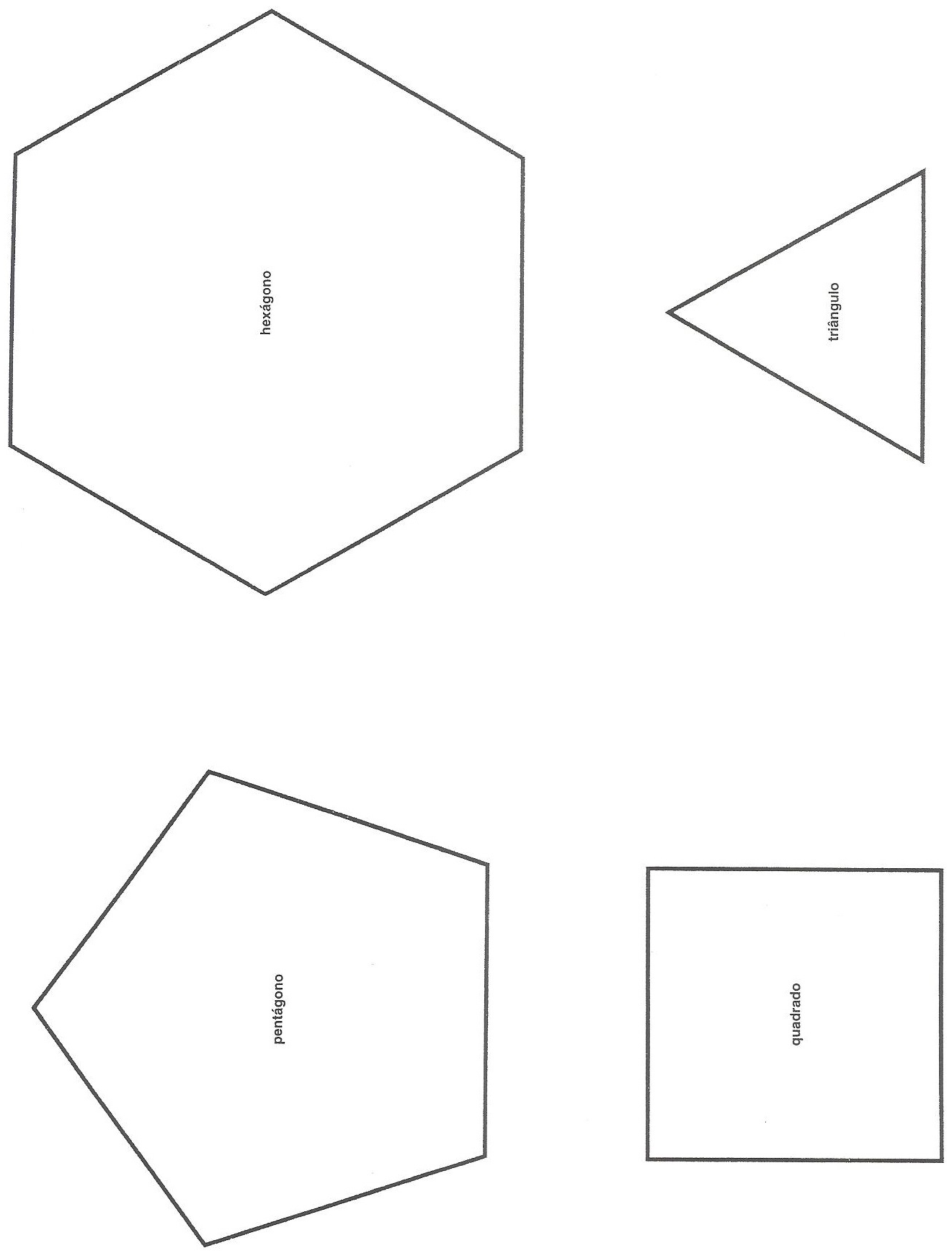


Figura 11.4: Moldes polígonos regulares

Fonte: Os poliedros de Platão e os dedos da mão [7]

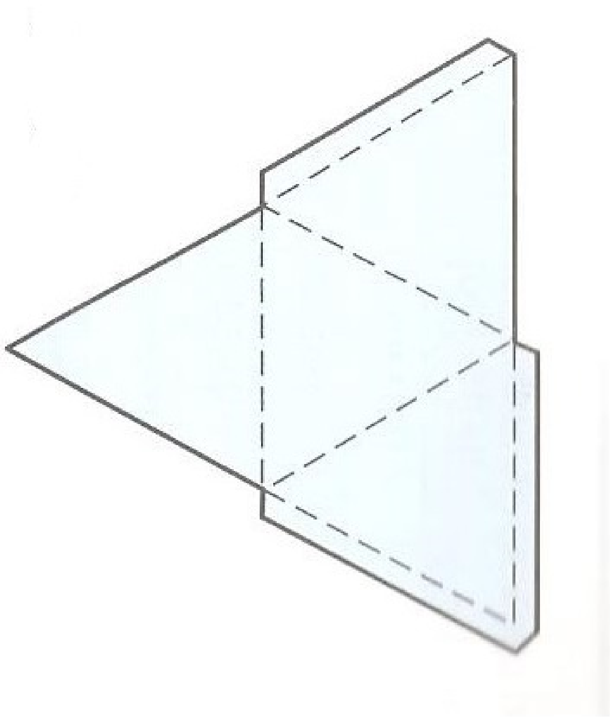


Figura 11.5: Molde Tetraedro regular - planificação

Fonte: Matemática em fascículos para o Ensino Médio [10]

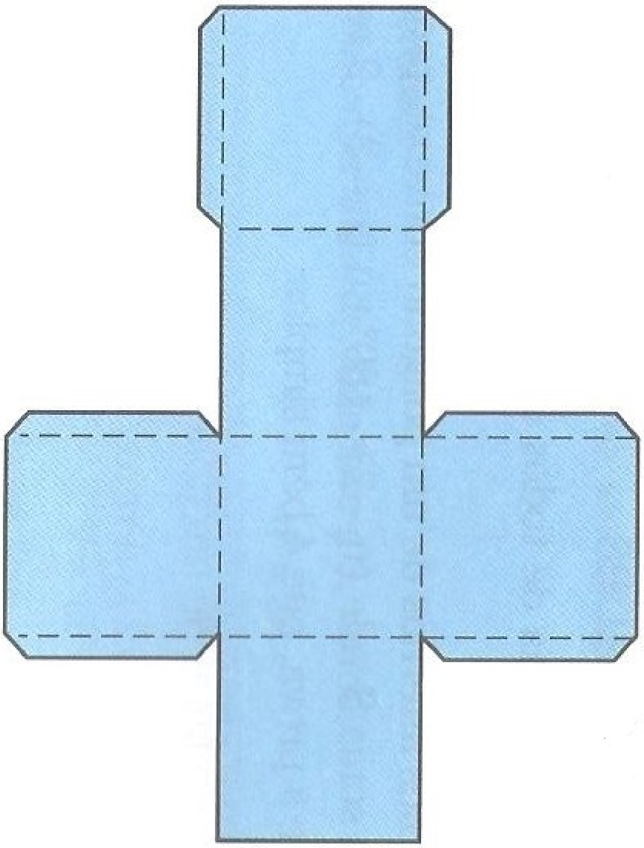


Figura 11.6: Molde Hexaedro regular - planificação

Fonte: Matemática em fascículos para o Ensino Médio [10]

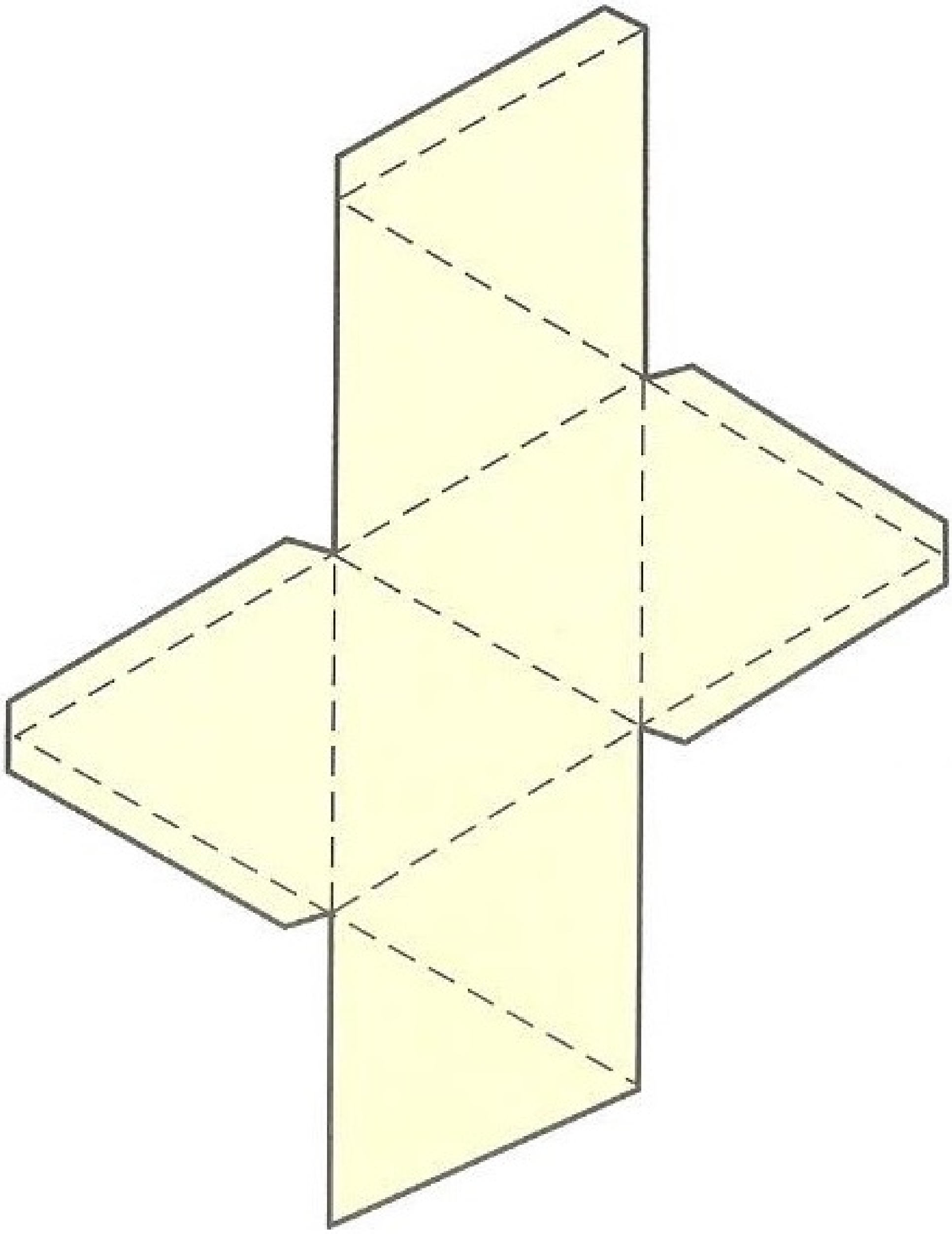


Figura 11.7: Molde Octaedro regular - planificação

Fonte: Matemática em fascículos para o Ensino Médio [10]

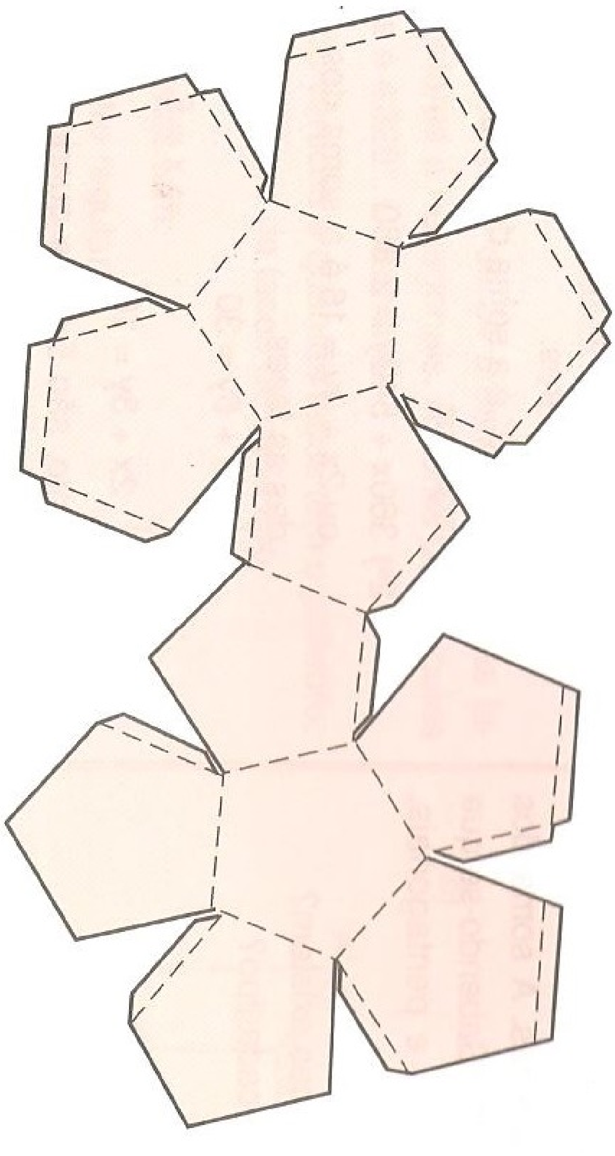


Figura 11.8: Molde Dodecaedro regular - planificação

Fonte: Matemática em fascículos para o Ensino Médio [10]

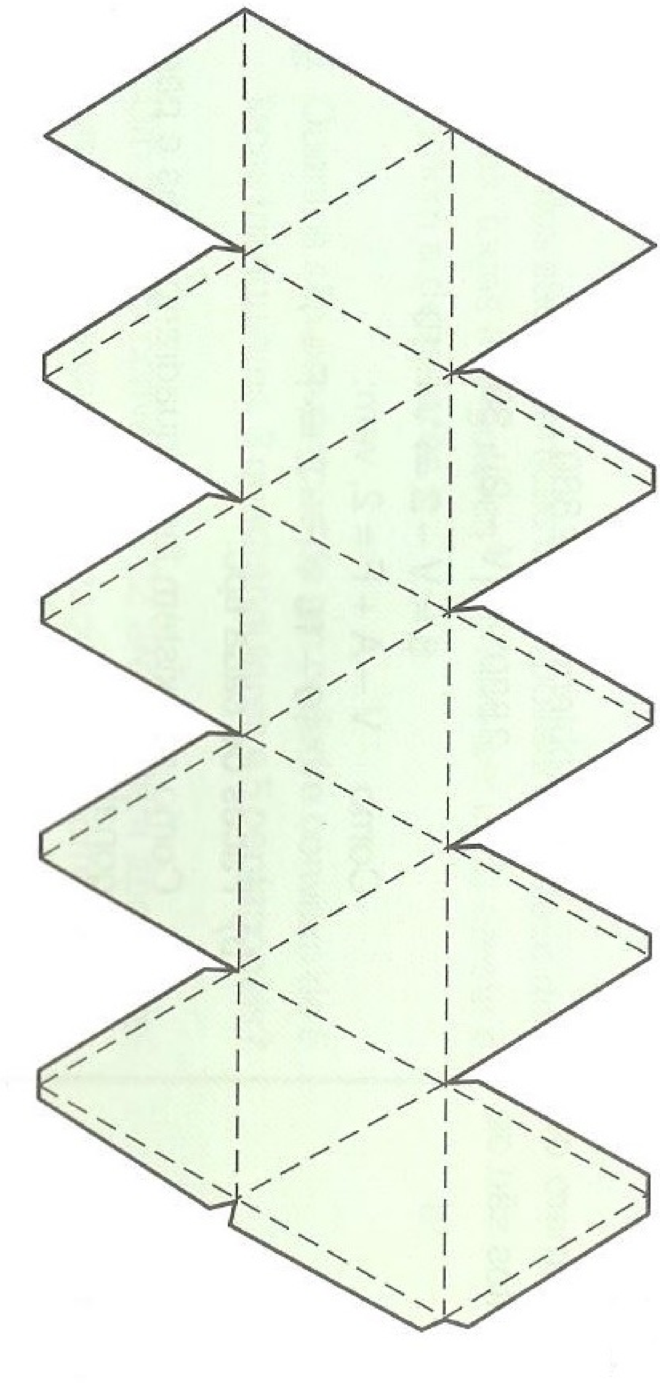


Figura 11.9: Molde Icosaedro regular - planificação

Fonte: Matemática em fascículos para o Ensino Médio [10]