UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

PROFMAT

Resolução de Problemas de Otimização: Uma ferramenta na sala de aula

Tiago Marques da Silva

BARRA DO GARÇAS - MT
Outubro de 2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO
CAMPUS UNIVERSITÁRIO DO ARAGUAIA
PROFMAT - MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Resolução de Problemas de Otimização: Uma ferramenta na sala de aula

Tiago Marques da Silva

Dissertação submetida à Coordenação do Curso de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva

BARRA DO GARÇAS - MT
Outubro de 2014

TIAGO MARQUES DA SILVA

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO:
Uma ferramenta na sala de aula.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Carlos Rodrigues da Silva
Orientador
Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)

Prof. Dr. Adilson Antônio Berlatto
Membro interno
Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)

Kellcio O. Araujo

Prof. Dr. Kellcio Oliveira Araujo
Membro externo
Universidade de Brasília (UnB)

Barra do Garças
2014

Silva, Tiago Marques da

Resolução de Problemas de Otimização: Uma ferramenta na sala de aula/ Tiago Marques da Silva.

72f.: ibl.

Orientador: Dr. Carlos Rodrigues da Silva Dissertação (Mestrado Profissional em matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal de Mato Grosso - Centro Universitário do Araguaia, Barra do Garças,2014.

1. Introdução. 2. A importância do estudo de funções. 3. Funções quadráticas. 4. Máximos e mínimos de funções. 5. Resolução de problemas e otimização: uma ferramenta na sala de aula. 6. Problemas de otimização. 07. Considerações finais.

Resumo

A Otimização é um ramo da matemática aplicada que é pouco ou mal explorado nos dias atuais principalmente no Ensino Médio. A otimização, auxilia na resolução de problemas ligados a diversas áreas do conhecimento como à economia, à administração, às engenharias, a problemas de logística e transporte, e às ciências, e que pode perfeitamente ser explorada, em um nível mais básico, no Ensino Médio. De acordo com esta realidade, este trabalho tem como objetivo principal apresentar a Resolução de Problemas de Otimização como uma ferramenta na sala de aula que podem tornar as aulas de Matemática mais acessíveis ao estudante do Ensino Médio. Destacaremos a otimização de problemas que envolvem funções quadráticas. Também serão expostas as opiniões de grandes defensores do uso da Resolução de Problemas em sala de aula, como George Polya, entre outros. Consequentemente, a Resolução de Problemas pode auxiliar na exposição de alguns conteúdos do Ensino Médio de uma forma interessante, despertando o interesse dos alunos e dando um significado concreto da Matemática no cotidiano.

Palavras-chave: Resolução de problemas. Otimização. Matemática. Ensino Médio.

Abstract

The optimization is a branch of applied mathematics that is little or badly exploited nowadays mainly in high school. Optimization assists in resolving problems linked to various areas of knowledge as to the economy, the Administration, to engineering, logistics and transportation problems, and the sciences, and that can perfectly be explored, on a more basic level, in high school. According to this reality, this work has as its main objective to introduce the resolution of Problems of Optimization as a tool in the classroom that can make Math classes more accessible to high school student. Highlight the optimization problems involving quadratic functions. Will also be exposed to the views of major advocates of the use of problem solving in the classroom such as George Polya, among others. Consequently, the resolution of Problems can assist in the exhibition of some high school content of an interesting shape, arousing the.

Keywords: Problem-solving. Optimization. Mathematics. High School.

Agradecimentos

A Deus pela vida e força que me sustentaram nesses dois anos e meio de curso;

A minha esposa Analice, que teve paciência e me incentivou nos momentos de dificuldades;

Ao professor Dr. Carlos Rodrigues da Silva pelo apoio, disposição e clareza nas orientações e o incentivo durante o curso;

Aos colegas e professores do PROFMAT pela amizade e dedicação e em especial ao amigo Mauro Santana que compartilhou comigo um dos momentos mais difíceis do curso;

Aos meus pais, Lucivanda e Mozart que sempre me incentivaram com palavras firmes e de confiança;

A colega Bettina Fiorini, que tanto contribuiu na confecção deste trabalho;

A todos e a todas que de algum modo tornaram esse trabalho possível;

Um grande e sonoro muito obrigado!!!

DEDICATÓRIA

Aos meus amados pais, Mozart e Lucivanda
e à minha esposa, Analice.

Lista de Figuras

Sumário

Introdução

Boa parte dos professores de matemática aprende durante sua formação que deve preparar seus alunos da seguinte forma: capacitá-los para analisar, raciocinar e comunicar-se de forma eficaz, quando enuncia, formula ou resolve problemas matemáticos em diversas situações. Além de torná-los capazes de compreender algumas ideias, notações e técnicas matemáticas, ou seja, o professor deve fazer com que seu aluno desenvolva competências e habilidades matemáticas.

Dessa forma, cabe ao professor propor aos seus alunos situações-problema que estimulem o desenvolvimento da matemática. Diante disso, o uso de problemas em sala de aula é fundamental, pois permite ao aluno colocar-se diante de situações que possibilitem o exercício do raciocínio lógico, pensando por conta própria, sem a utilização de regras e fórmulas pré-elaboradas.

O professor deve auxiliá-los por meio de questionamentos que estimulem o desenvolvimento de um pensamento crítico e independente. Ele encontra-se diante de um novo contexto social em que o aluno possui um fácil acesso à informação, o que torna algo ainda mais desafiador o ensino da Matemática. Uma das formas de “ganhar o aluno” é a utilização de problemas desafiadores que instiguem a curiosidade e o raciocínio-lógico.

De acordo com Polya (1985), é dever do professor, instigar e desafiar os seus alunos, o que não é uma tarefa das mais fáceis, pois exige tempo e dedicação. George Polya, matemático húngaro que atuou em diversas áreas da matemática, entre elas: o estudo de séries, teoria dos números, combinatória e teoria de probabilidade. E não podemos deixar de lembrar o fato de Polya ter se destacado como escritor, pois escreveu três livros sobre a resolução de problemas, dentre os quais a sua obra mais conhecida, *A arte de resolver problemas*. Polya, divide a solução de um problema em quatro fases, na seguinte ordem:

compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e, por fim, discussão da resolução completa.

A maneira com que o professor questiona o aluno deve levá-lo a uma melhor compreensão do problema, levando-o a uma estratégia de resolução. É importante que o professor saiba escolher os problemas que serão trabalhados em sala de aula, pois isto terá influência direta no processo de ensino-aprendizagem. Portanto, é de inteira responsabilidade do professor estabelecer corretamente o nível de dificuldade dos problemas para seus alunos, pois é ele quem conhece e sabe onde seus "discípulos" podem chegar.

O método de ensino da Matemática que usa a resolução de problemas, como principal ferramenta, tem como objetivo colocar o aluno diante de questionamentos que possibilitem o mesmo exercitar o raciocínio e desenvolver uma autonomia que o ajudará em outras situações na sua vida cotidiana e não simplesmente reproduzir conhecimentos repassados, que tornam o ensino da matemática entediante e pouco produtivo. Mas não devemos confundir exercício com problema. O exercício baseia-se num procedimento padrão, onde o aluno coloca em prática um conhecimento adquirido ou memorizado. O problema, por sua vez, expõe o aluno a uma situação imprevisível, uma dificuldade que deve ser superada com maior ou menor complexidade.

De acordo com Pozo (1998), ao ensinar a resolver problemas é necessário "criar neles o hábito e a atitude de enfrentar a dificuldade de aprendizagem com um problema para o qual deve ser encontrada uma resposta".

A Matemática Aplicada é um ramo da matemática que tem se desenvolvido muito. Destacam-se neste ramo algumas aplicações como o cálculo numérico, a programação linear, a teoria de jogos, a probabilidade e a estatística, a criptografia e a otimização. A otimização pode ser uma grande aliada do professor de matemática dentro da sala de aula, no ensino de diversos conteúdos matemáticos, dentre eles podemos destacar o estudo de funções, no qual daremos ênfase neste trabalho ao estudo de funções quadráticas.

A principal motivação deve-se ao fato da resolução de problemas de otimização ser um ramo em crescente desenvolvimento e a diversidade de suas áreas de aplicação, além do fato que tais problemas apresentados nesta obra tem por objetivo servir de incentivo e subsidio ao professor de matemática interessado em levar aos seus alunos uma maneira não nova, mas diferente de abordar determinados conteúdos estudados no Ensino Médio como, por exemplo, as funções quadráticas em situações que envolvem outros domínios promovendo assim atividades contextualizadas.

Polya (1985) sugere que o professor de matemática deve, de vez em quando, oferecer à classe um problema importante, com vários conteúdos e que possa servir de abertura para um capítulo inteiro de Matemática. E a classe deveria trabalhar com tal problema, sem pressa e de modo que, segundo o princípio do ensino ativo, os alunos possam descobrir a solução, ou seja, que cheguem a ela (solução) com suas próprias ferramentas.

De início será feito a exposição de alguns conceitos e demonstrações de algumas propriedades, que diferem das aulas do cotidiano, uma vez que, devido à grande quantidade de conteúdos exigidos pelas orientações curriculares nacionais e à pequena carga horária disponível no Ensino Médio, que são em média três aulas semanais, geralmente os professores simplesmente fazem uso de determinados resultados (proposições, teoremas, fórmulas, etc) sem demonstrá-los. E baseado nas ideias de alguns escritores como George Polya, Juan Ignácio Pozo, A. Collins e L. Resnik, entre outros, iremos mostrar que a Resolução de Problemas de Otimização é uma poderosa ferramenta do professor de Matemática no Ensino Médio.

A Otimização não é um "bicho de sete cabeças" onde em tese se acredita que é necessário que se tenha o conhecimento de alguns conceitos como limite e derivada, ou seja, algo que só pode ser tratado no ensino Superior e, por fim, serão apresentados alguns modelos de problemas que podem ser utilizados em sala de aula, no estudo das funções quadráticas.

Capítulo 1

A importância do estudo de funções

O ensino matemático tem sido realizado há tempos como algo mecânico, fixo em um sistema arcaico desestimulante, pois volta o aluno para resultados abstratos em detrimento do mais importante, a capacitação para a construção de padrões de correlacionamento com a vida prática. Portanto, tendo em vista a necessidade contemporânea de reestruturação dos modelos pedagógicos, temos a necessidade de promover estratégias educativas facilitadoras do ensino-aprendizagem e capazes de gerar maior motivação e autonomia nos alunos.

Com isso, temos um novo papel tanto para o professor quanto para o aluno e podemos dizer que o professor deixa de ser um transmissor de conhecimento e o aluno passa a ser co-participante nesse processo. Prioriza-se a aprendizagem e, segundo Valente:

> [...] a aprendizagem ao invés do ensino, que coloca o controle do processo de aprendizagem nas mãos do aprendiz, e que auxilia o professor a entender que a educação não é somente a transferência de conhecimento, mas um processo de construção do conhecimento pelo aluno, como produto do seu próprio engajamento (VALENTE, 1996, p. 41).

Nesse sentido o estudo de funções pode facilitar a aprendizagem, pois é fator primordial na resolução de problemas. A importância do estudo de funções é enaltecida nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) que diz que o estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções.

O conceito de função é considerado um dos mais importantes da Matemática e seus aspectos mais simples estão presentes nas noções mais básicas desta ciência, como, por exemplo, na contagem. Sua relevância pode ser justificada pelo fato de que o conceito de função estabelece relações com vários outros conceitos matemáticos e pode ser aplicado no estudo de fenômenos em diversas áreas do conhecimento.

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. (Brasil 2006, p.121)

Assim, pode-se perceber a grande importância de se estudar funções, pois grande parte dos conteúdos matemáticos está altamente ligado a esse conceito, então se faz necessário que o professor, como mediador no processo do conhecimento dê devida atenção a formação do aluno nesse quesito, pois essa é uma ferramenta indispensável na resolução de problemas matemáticos. No âmbito matemático, o estudo de funções relaciona-se diretamente com a álgebra, no que se referem às expressões algébricas presentes nas leis de formação de funções e na relação entre variáveis, e com a geometria analítica, que utiliza de um sistema de eixos coordenados para a representação de seus gráficos.

Por isto, tem-se exigido dos professores de Matemática que procurem melhorar o ensino desta disciplina. Sendo necessário, portanto, um novo enfoque do professor de Matemática em suas aulas. Não basta conhecer Matemática para ensinar. É necessário criar uma metodologia que desperte o interesse dos alunos.

Atualmente, existem muitos estudos e pesquisas que tem como foco o desenvolvimento de novas metodologias para o ensino de Matemática, buscando torná-la mais divertida e interessante, trabalhando suas aplicações práticas. Nesse sentido, os educadores matemáticos devem procurar alternativas para aumentar a motivação para a aprendizagem, desenvolver a autoconfiança, a organização, concentração, atenção, raciocínio lógico-dedutivo e o senso cooperativo, desenvolvendo e aumentando as interações do indivíduo com outras pessoas.

1.1 Contexto Histórico

Para que o conceito de funções atingisse uma das formas que atualmente é apresentada nas instituições de ensino alguns séculos se passaram. Esta evolução aconteceu gradualmente através de noções vagas e sem exatidão. Aperfeiçoada ao decorrer de vários séculos, a noção básica sobre funções já vinha sendo desenvolvida pelo povo Babilônio, uma prova disso seria a ciência conhecida como Astronomia, que se baseava principalmente em tábuas de quadrados, cubos e de raízes quadradas.

Os pitagóricos também deram sua contribuição quando relacionavam as grandezas físicas do tipo: alturas dos sons e comprimentos das cordas vibrantes, o que depois poderia ser denominada como Leis da Acústica. Na época de Alexandria contribuíram com a construção de tabelas de comprimento de cordas de um círculo, o tão utilizado Raio. Mas, a noção de função, claramente individualizada como objeto de estudo corrente é mais recente.

Seguem, abaixo, alguns exemplos de definições do conceito de função ao longo do tempo, a partir do século XVIII, que estão descritos em Costa (2008 p. 6-7):

Jean Bernoulli (1667-1748), em 1718 Bernoulli define função da seguinte forma: Chama-se aqui de Função de uma variável uma quantidade composta de alguma maneira qualquer dessa variável e de constantes.

Euler (1707-1783), foi em 1748 que Euler define função como sendo: Uma quantidade constante é uma quantidade determinada, mantendo o mesmo valor permanentemente. [...] Uma quantidade variável é uma quantidade indeterminada ou universal que encerra em si todos os valores determinados. [...] Uma função de uma variável é uma expressão analítica composta de uma maneira qualquer de quantidades variáveis e de números ou quantidades constantes.

J. L. Lagrange (1736-1813), em 1797 Lagrange define função como: Chama-se função de uma ou várias quantidades variáveis qualquer expressão para cálculo em que essas quantidades entrem em alguma forma qualquer, misturadas ou não com outras quantidades, que são consideradas como dadas, e valores invariáveis enquanto as quantidades da função podem tomar todos os valores possíveis.

J. B. J. Fourier (1772-1837) definiu função em 1822: Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores ou ordenadas, cada uma das quais arbitrárias. Sendo dada uma infinidade de valores para a abscissa x, haverá um número igual de ordenadas $f(x)$. Todas têm valores numéricos verdadeiros, ou positivos, ou negativos ou nulos. Nós não supomos que essas ordenadas estão sujeitas a uma lei comum; elas sucedem umas as outras em alguma maneira arbitrária qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade isolada.

Cauchy (1789-1857) em 1821 definiu função como quantidades variáveis que estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável.

G. L. Dirichlet (1805-1859) foi quem criou a definição "formal" de função moderna o qual mais se aproxima do modelo atual em 1837: Suponhamos que a e b sejam dois valores diferentes definidos e x seja uma variável que pode assumir, gradualmente, todos os valores localizados entre a e b. Agora, se para cada x corresponde um único, finito y de tal forma que, se x atravessa continuamente o intervalo de a a b, $y = f(x)$ varia da mesma forma gradualmente, então y é chamado um função contínua de x para este intervalo. Não é, em absoluto, necessário que y dependa de x no intervalo todo de acordo com a mesma lei; de fato, não é em absoluto necessário pensar somente em relações que possam ser expressas por operações matemáticas. Geometricamente representadas, isto é, x e y imaginados como abscissa e ordenada, uma função contínua aparece como uma curva conexa, para a qual somente um ponto corresponde a cada abscissa entre a e b.

G. Peano (1858-1932) em 1911 define função como: Função é uma relação especial, que a qualquer valor da variável faz corresponder um só valor. [...]

N. Bourbaki (pseudônimo coletivo sob o qual um grupo de matemáticos, em sua maioria francesa, escreveram uma série de livros que expunham a matemática avançada moderna, que começaram a ser editados em 1935), redefiniu os conceitos básicos na linguagem de conjuntos, e propõe a seguinte definição de função em 1939: Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se, para todo

$x \in E$, existe um e somente um elemento y de F, que está na relação considerada com x.

Podemos observar que a definição do conceito de função passou por várias transformações. As definições de Jean Bernoulli (1718), Euler (1748) e Lagrange (1797) enfatizam o caráter algébrico, onde uma função somente pode ser expressa por meio de uma equação ou uma expressão analítica. Já nas definições de Fourier (1822) e Dirichlet (1837), temos a retomada do caráter geométrico através da consideração de gráficos que representam uma relação entre as variáveis x e y.

Finalmente, podemos verificar um conjunto de definições mais próximo à atual no texto de Dirichlet, e a definição atual com seu caráter mais abrangente, como a descrita por Bourbaki, onde não só a unicidade está presente, mas também a extensão da relação funcional para quaisquer dois conjuntos que não necessariamente devam ser numéricos. De acordo com COSTA (2004), ao se fazer um levantamento histórico pode-se perceber três diferentes momentos no que se refere à evolução do conceito de função: (1) como dependência entre variáveis; (2) como expressão analítica; e (3) como uma relação entre conjuntos.

Capítulo 2

Funções Quadráticas

Nesse capítulo iremos abordar algumas propriedades, definições e a caracterização referente a uma das mais importantes funções estudadas no Ensino Médio: a Função Quadrática. Visto a sua importância em situações aplicadas em Economia, Física, Matemática Financeira, entre outras áreas.

Boa parte dos livros didáticos usados hoje nas escolas traz em suas páginas apenas a definição de função quadrática, como encontrar suas raízes, seu gráfico e se a função tem ponto de máximo ou mínimo, ou seja, os alunos não são desafiados a resolverem problemas de otimização que envolvem as funções quadráticas.

2.1 Importância da Função Quadrática

O conceito de função é, certamente, um dos temas de grande importância devido, em parte, ao fato de ser amplamente utilizado em diversas áreas do conhecimento. Pode-se dizer que desde muito cedo acompanha a trajetória do aluno, procurando explicar ou modelar diversos fenômenos que o rodeia. Presente no currículo de Matemática da educação básica, o ensino de funções deve segundo os Parâmetros Curriculares do Ensino Médio:

> [...] garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em situações diversas e, nesse sentido, através de uma variedade de situações-problema de matemática e de outras áreas, o aluno pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seus

> conhecimentos sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática. (BRASIL, 2000, p. 257)

A função quadrática em especial surge na vida do aluno já no 9°ano e desde então esse conceito o acompanha até o término do ensino médio. Nesse sentido acredita-se que é fundamental para o aluno aprender a aplicar nos diversos problemas propostos o conceito básico da função quadrática, pois essa função é de extrema importância quando queremos tratar de problemas envolvendo máximos e mínimos.

> O estudo da função quadrática pode ser motivado via problemas de aplicação, em que é preciso encontrar um certo ponto de máximo (clássicos problemas de determinação de área máxima). O estudo dessa função posição do gráfico, coordenadas do ponto de máximo/mínimo, zeros da função - deve ser realizado de forma que o aluno consiga estabelecer as relações entre o "aspecto" do gráfico e os coeficientes de sua expressão algébrica, evitando-se a memorização de regras. O trabalho com a forma fatorada ($f(x) = a(x - m)^2 + n$) pode ser um auxiliar importante nessa compreensão. Nesse estudo, também é pertinente deduzir a fórmula que calcula os zeros da função quadrática (a fórmula de Bhaskara) e a identificação do gráfico da função quadrática com a curva parábola, entendida esta como o lugar geométrico dos pontos do plano que são equidistantes de um ponto fixo (o foco) e de uma reta (a diretriz). (BRASIL, 2006; p. 73).

A parábola é a curva formada em que todos os pontos são equidistantes a um ponto fixo, chamado de foco, e de uma reta diretriz. As parábolas possuem utilidade em diversos equipamentos e sistemas de real importância para toda a sociedade. Dentre eles, podemos citar: faróis de veículos, antenas parabólicas, espelhos esféricos, telescópios, radar e lançamento de projéteis.

Matematicamente, podemos definir a função quadrática ou função polinomial de 2º grau como:

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & y = ax^2 + bx + c \end{array} \qquad \text{com } a,\ b \text{ e } c \in \mathbb{R}$$

O domínio da função determina os valores numéricos que pode assumir a variável independente x no conjunto dos números reais. Para a função não há restrição alguma para qualquer valor de x, portanto seu domínio é o conjunto dos números reais. No caso da imagem, como a parábola faz uma curva no eixo vertical y, temos a possibilidade de valores diferenciados dependendo do local desta curva, formando máximo ou mínimo da função caso tenhamos $a < 0$ ou $a > 0$, respectivamente. O ponto em que temos o máximo ou mínimo é chamado de vértice da parábola.

Este ponto pode ser calculado facilmente, pois toda a parábola possui um eixo de simetria que passa pelo vértice. Sendo assim, através dessa simetria, podemos calcular o valor das coordenadas deste ponto: $V(x_v; y_v)$. Com esta simetria, conhecendo as raízes da função, observa-se que a média aritmética entre elas nos dá justamente a abscissa deste ponto (x_v).

2.2 A Origem da Parábola

Em Dorigo (2006) consta um histórico sobre a origem da parábola descrito a seguir. Não há unanimidade sobre como a curva plana, conhecida como parábola, foi introduzida na matemática. Segundo a versão mais difundida, ela teria surgido dos esforços de Menaecmo (IV a.C.), um discípulo de Aristóteles (384-322 a.C.), para resolver o chamado "problema deliano", cuja origem é muito curiosa. Assolados por devastadora peste, os habitantes da ilha de Delos (os delianos) recorreram aos préstimos de seu oráculo, que sugeriu, para afastar o mal, que eles construíssem um altar cúbico cujo volume fosse o dobro do volume do já existente altar cúbico consagrado ao deus Apolo.

A solução tentada pelos delianos, que consistiu em dobrar as arestas, obviamente não é correta, pois octuplica o volume. Consta até que a intensidade da peste cresceu após essa tentativa. Então foi enviada uma delegação a Atenas a fim de se aconselhar com o filósofo Platão (428-348 a.C.), que possivelmente difundiu o problema na comunidade matemática grega, da qual era uma espécie de guia intelectual.

Com isso, muitos matemáticos de grande talento da época se engajaram na tarefa de resolver a questão, destacando-se entre eles o brilhante Menaecmo. Pressentindo, talvez, como se sabe hoje, que essa tarefa é impossível com o uso de régua e compasso apenas, Menaecmo tentou novos caminhos, o que o levou à descoberta de uma família de curvas conhecidas como seções cônicas, das quais a parábola é um dos membros. Aliás, sua solução deriva da interseção de duas parábolas.

Para chegar a essas curvas, Menaecmo considerou superfícies cônicas dos três tipos possíveis quanto à seção meridiana, a saber, aguda, reta ou obtusa. Selecionando-as então com um plano perpendicular a uma geratriz, obteve as curvas que mais tarde seriam chamadas, respectivamente, de elipse, parábola e hipérbole.

O que certamente Menaecmo não imaginava é que num futuro bastante remoto seriam encontradas aplicações científicas e práticas da mais alta importância para essas curvas. Para a parábola, entre outras coisas, no estudo da trajetória de um tiro de canhão. Vale frisar que a importância deste problema não deriva de seu papel nas guerras, mas sim de sua contribuição indireta para o desenvolvimento de vários ramos da ciência, como a química, física e a metalúrgica.

Os canhões entraram em cena na Europa no século XIV. De início, eram armas tão precárias que ofereciam risco até mesmo para os artilheiros que sofriam com os efeitos decorrentes dos estrondos que produziam estas armas. À medida, porém, que a construção dessa arma foi se aprimorando, e sua importância bélica crescendo, alguns problemas matemáticos envolvendo a trajetória de uma bala de canhão vieram à tona. Por exemplo: como conseguir o alcance máximo para um tiro?

A primeira contribuição significativa nas investigações do problema da trajetória de um tiro de canhão se deve ao matemático italiano Niccolo Tartaglia (1499? -1557) e se encontra em sua obra Nova Scientia ("Nova Ciência"), publicada em 1537. Mediante observações e cálculos matemáticos, Tartaglia concluiu que o alcance máximo de um tiro ocorre quando o ângulo de elevação do cano do canhão é de 45° em relação à linha do horizonte.

Percebendo, também, que o alcance do tiro é função desse ângulo de elevação, ele inventou um quadrante, calibrado em 12 partes, que, acoplado ao cano do canhão, permitia achar o ângulo de elevação e, portanto, ajustar o alcance do tiro. Mas faltavam a Tartaglia conhecimentos mais sólidos de física para poder ir além.

Por volta da metade do século XVII, os canhões já eram tão potentes que seus tiros alçavam distâncias da ordem de quilômetros, o que requeria a elaboração de uma teoria da trajetória e do alcance muito mais precisa. Entre os que se dedicaram a essa tarefa estão Galileu Galilei (1564 - 1642) e alguns de seus notáveis alunos.

Por meio de cuidadosas experiências, Galileu observou que, colocando um canhão sobre uma plataforma plana elevada e atirando com o cano na horizontal, o alcance do tiro variava em função da carga de pólvora, mas sempre no mesmo período. Isso indicava a existência de uma velocidade horizontal, variável com a carga, e um a vertical, constante. Motivado por isso, Galileu realizou o seguinte experimento: fazer cair, em queda livre, bolas postas a rolar sobre uma superfície plana. Medindo as distâncias horizontais e verticais em posições diversas, deduziu a seguinte lei (aqui dada na simbologia moderna), relacionando a distância horizontal, x, e a distância vertical, y, percorrida por uma bola que cai: $y = kx^2$, em que k é uma constante.

Segue então que a trajetória descrita por um corpo em queda livre ou um tiro de canhão disparado horizontalmente é uma semi-parábola.

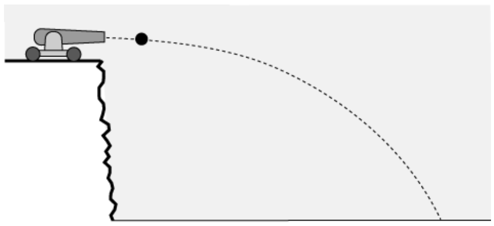

Figura 2.1: A trajetória de uma bala de canhão descreve uma semi-parábola.

Galileu chegou a esses resultados em 1608, mas não os publicou imediatamente. Devido a isso, o crédito pela descoberta de que a trajetória de um projétil, no vácuo, é uma parábola costuma ser atribuído a seu discípulo Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), que publicou um trabalho sobre trajetórias em 1632, baseando-se na suposição de que um projétil é impulsionando por duas forças distintas: a propulsora e a gravidade. Galileu lamentou ter perdido essa primazia, o que mostra quanto ele valorizava o assunto. Como não era homem de se acomodar, reagiu com a dignidade de um grande cientista: em sua monumental obra, Diálogos acerca de duas novas ciências (1638), publicou uma teoria das trajetórias parabólicas mais detalhadas que as existentes então.

2.3 A Fórmula de Bhaskara

Bhaskara, matemático, professor, astrólogo e astrônomo indiano nascido em Vijayapura (1114-1185), foi considerado o maior matemático do século XII. Ficou conhecido pela complementação da obra do conterrâneo Brahmagupta, sendo pioneiro na solução geral da conhecida equação de Pell e solução do problema da divisão por zero, em sua publicação Vija-Ganita ou Bija-Ganita, na qual, em 12 capítulos, demonstra que a divisão seria infinita. Ficou na cidade de Ujjain desde que se tornou chefe do observatório astronômico até a sua morte. Ujjain, nesta época, era o centro matemático da Índia, onde vários outros famosos matemáticos consagraram-se, como Varahamihira e Brahmagupta que ali trabalharam e construíram uma escola forte de astronomia matemática.

Entre seus trabalhos, seis são reconhecidamente comprovados e um sétimo, reinvidicado como dele, é, para muitos historiadores, uma falsificação posterior. O nome Fórmula de Bhaskara foi dado em homenagem ao matemático Bhaskara Akaria, considerado o mais importante matemático indiano do século XII. A fórmula de Bhaskara é principalmente usada para resolver equações quadráticas de fórmula geral $ax^2+bx+c=0$, com coeficientes reais, com $a \neq 0$ e é dada por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Não é correto atribuir a ele a famosa fórmula da resolução da equação de 2º grau. O quadro a seguir traz a demonstração da fórmula, no intuito de mostrar ao professor que é possível desenvolve-la com os alunos durante a aula, pois se trata de uma demonstração de fácil compreensão.

Procedimento	Exemplo	Caso Geral
	$2x^2 - 3x - 5 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$
Dividimos todos os termos da equação pelo coeficiente. $a(a \neq 0)$	$\frac{2x^2}{2} - \frac{3x}{2} - \frac{5}{2} = 0$	$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0$
No 2º membro da equação, isolamos o termo independente.	$x^2 - \frac{3x}{2} = \frac{5}{2}$	$x^2 + \frac{bx}{a} = -\frac{c}{a}$

Aos dois membros da equação acrescentamos um número que transforma o 1º membro em um trinômio quadrado perfeito.	$x^2 - \frac{3x}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \left(\frac{3}{4}\right)^2$ $x^2 - 2\frac{3}{4}x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{5}{2} + \frac{9}{16}$	$x^2 - \frac{bx}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$ $x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$
O 1º membro da equação é um trinômio quadrado perfeito e adicionamos as duas frações do 2º membro.	$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$
Em seguida, extraímos a raiz quadrada dos dois membros da equação e isolamos a incógnita x.	$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = 49/16$ $x - \frac{3}{4} = \frac{7}{4}$ ou $x - \frac{3}{4} = \frac{-7}{4}$ $x = \frac{10}{4}$ ou $x = -\frac{4}{4} = -1$	$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{(b^2 - 4.a.c)}{(4a^2)}$ $x + \frac{b}{2a} = \sqrt{\frac{b^2 - 4.a.c}{2a}}$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

2.4 Definições

Nesta seção traremos algumas definições de grande importância no estudo das funções quadráticas, logo devem ser discutidas no ensino médio com os alunos.

Definição 2.4.1: Dados dois conjuntos, A e B, não vazios, dizemos que a relação f de A em B é função se, e somente se, para qualquer x pertencente ao conjunto A, existe, em correspondência, um único y pertencente a B, tal que o par ordenado (x, y) pertença a f.

Definição 2.4.2: Dizemos que uma função $f : A \to B$ é injetora quando para quaisquer elementos x_1 e x_2 de A, $f(x_1) = f(x_2)$ implica $x_1 = x_2$. Em outras palavras, quando

$x_1 \neq x_2$, em A, implica $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Definição 2.4.3: Dizemos que uma função $f : A \to B$ é sobrejetora quando para todo $y \in B$, existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Definição 2.4.4: Definimos uma *função quadrática* como a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com os números a, b e c reais, onde $a \neq 0$, tais que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Podemos observar que os coeficientes a, b e c da função quadrática f ficam determinados pelos valores que essa função assume. Ou seja, se $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$.

Com isso, seja $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Assumindo $x = 0$, temos $c = c'$. Então, eliminando c e c', tem-se $ax^2 + bx = a'x^2 + b'x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, esta igualdade vale para todo $x \neq 0$. Neste caso, cancelando x, obtemos $ax+b = a'x+b'$ para todo $x \neq 0$. Agora faremos $x = 1$ e depois $x = -1$, daí $a+b = a'+b'$ e $-a + b = -a' + b'$, donde concluímos que $a = b$ e $a' = b'$.

Esta observação que acabamos de fazer acima permite que se identifique uma função quadrática com um trinômio de segundo grau. Cada trinômio corresponde a função quadrática definida por $x \to ax^2+bx+c$. Ou seja, a correspondência (trinômio)$\to$(função quadrática) é biunívoca.

2.5 Proposições

Durante o estudo das funções quadráticas no ensino médio, o aluno não tem contato com proposições, ou seja, fica restrito ao cálculo de raízes, máximos ou mínimos. Assim, sugiro que seja exposta as seguintes proposições, pois elas são de fácil compreensão e retratam o caráter algébrico e geométrico das funções quadráticas.

Proposição 2.5.1: Se duas funções quadráticas assumem os mesmos valores em três pontos distintos x_1, x_2 e x_3, então essas funções são iguais, ou seja, assumem o mesmo valor para qualquer número real x.
Demonstração: Para conseguirmos a condição $a = a'$, $b = b'$ e $c = c'$, vamos supor que a igualdade $ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c'$ seja válida para três valores distintos de x. Então, suponhamos que as funções quadráticas $f(x) = ax^2+bx+c$ e $g(x) = a'x^2+b'x+c'$

assumam os valores $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$ e $f(x_3) = g(x_3)$ para três números reais distintos x_1, x_2 e x_3. Assim tomando $\alpha = a - a'$, $\beta = b - b'$ e $\gamma = c - c'$, queremos mostrar que $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Temos que $f(x_1) - g(x_1) = 0$, $f(x_2) - g(x_2) = 0$ e $f(x_3) - g(x_3) = 0$. Com isso temos:

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

Subtraindo a primeira equação de cada uma das outras, temos:

$$\alpha(x_2^2 - x_1^2) + \beta(x_2 - x_1) = 0$$
$$\alpha(x_3^2 - x_1^2) + \beta(x_3 - x_1) = 0$$

Como $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$, podemos dividir a primeira destas equações por $x_2 - x_1$ e a segunda por $x_3 - x_1$, assim obtemos

$$\alpha(x_1 + x_2) + \beta = 0$$
$$\alpha(x_1 - x_3) + \beta = 0$$

Efetuando a subtração membro a membro, temos $\alpha(x_3 + x_2) = 0$. Como $(x_3 - x_2 \neq 0)$, resulta que $\alpha = 0$. Fazendo substituições nas equações anteriores, obtemos nesta ordem $\beta = 0$ e $\alpha = 0$. ■

Proposição 2.5.2: Sejam x_1, x_2 e x_3 três números reais distintos e y_1, y_2 e y_3 números tais que os pontos $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ são não-colineares em $\mathbb{R}^2$. Existe uma, e somente uma, função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Demonstração: Tomando o sistema de equações 2.1 da proposição anterior, temos:]

$$\begin{cases} \alpha x_1^2 + \beta x_1 + \gamma = 0 \\ \alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma = 0 \\ \alpha x_3^2 + \beta x_3 + \gamma = 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

Como vimos na demonstração da Proposição 2.5.1, este sistema possui como solução $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ou seja, a solução trivial. No entanto, quando um sistema homogêneo admite apenas a solução trivial podemos substituir os zeros dos segundos membros por números arbitrários que obtemos sempre uma única solução. Assim, dados arbitrariamente os números reais y_1, y_2, y_3, existe um, e somente um, terno ordenado (a, b, c) tal que:

$$ax_1^2 + bx_1 + c = y_1 \tag{2.3}$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = y_2 \tag{2.4}$$

$$ax_3^2 + bx_3 + c = y_3 \tag{2.5}$$

Calculando-se a diferença entre (2.4) e (2.3) e entre (2.5) e (2.3) obtemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} ax_2^2 + bx_2 + c - ax_1^2 - bx_1 - c &= y_2 - y_1 \\ (x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1) &= y_2 - y_1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

e

$$\begin{aligned} ax_3^2 + bx_3 + c - ax_1^2 - bx_1 - c &= y_3 - y_1 \\ a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1) &= y_3 - y_1 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Como $x_2 \neq x_1$ e $x_3 \neq x_1$ temos que $x_2 - x_1 \neq 0$ e $x_3 - x_1 \neq 0$. Logo podemos dividir (2.4) por $x_2 - x_1 \neq 0$ e (2.5) por $x_3 - x_1 \neq 0$, obtendo respectivamente:

$$\frac{a(x_2^2 - x_1^2) + b(x_2 - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

$$a(x_2^2 + x_1^2) + b = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \tag{2.8}$$

e

$$\frac{a(x_3^2 - x_1^2) + b(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_1)} = \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)}$$

$$a(x_3^2 + x_1^2) + b = \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} \tag{2.9}$$

Em seguida, subtraímos (2.8) de (2.9) para determinar o valor de a:

$$\begin{aligned}
a(x_2^2 + x_1^2) + b - a(x_3^2 + x_1^2) + b &= \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} \\
ax_3^2 - ax_2^2 &= \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} \\
a(x_3^2 - x_2^2) &= \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} \\
a &= \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)(x_3 - x_2)} \\
a &= \frac{1}{(x_3 - x_2)} \left[\frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \right].
\end{aligned}$$

Assim observamos que dados três números reais distintos x_1, x_2, x_3 e números reais arbitrários y_1, y_2, y_3, existe um e um só terno ordenado (a, b, c) tal que a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ tal que $f(x_1) = y_1$, $f(x_2) = y_2$ e $f(x_3) = y_3$.

Mas, a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ pode não ser quadrática, a não ser que $a \neq 0$. Como vimos anteriormente, $a = \dfrac{1}{(x_3 - x_2)} \left[\dfrac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} - \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \right]$. Então,

$$\begin{aligned}
a = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 0 = \frac{1}{(x_3 - x_2)} \left[\frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \right] \\
a = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1})) = 0 \\
a = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}.
\end{aligned}$$

Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$. O declive da reta AC é $\dfrac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)}$. Então a condição $\dfrac{(y_3 - y_1)}{(x_3 - x_1)} = \dfrac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$ significa que as retas AB e AC tem o mesmo declive, ou seja, os pontos A, B e C são colineares o que é uma contradição. Logo, $a \neq 0$.

■

2.6 Um Antigo Problema

O estudo das funções quadráticas teve seu desenvolvimento a partir da resolução de equação do segundo grau. Os problemas que envolvem equação do segundo grau são antigos na história da Matemática. De acordo com SÁ (*et al*, 2004) os babilônios a cerca de quatro mil anos, já tratavam de problemas desse tipo como, por exemplo, achar dois números conhecendo sua soma s e seu produto p.

Em linguagem geométrica, a situação problema pede que se determinem os lados de um retângulo conhecendo o semi-perímetro s e a área p. Assim os números procurados são as raízes da equação do segundo grau:

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Com isso, se um dos números é x, o outro é $s - x$ e seu produto é

$$p = x(s - x) = sx - x^2,$$

logo,

$$x^2 - sx + p = 0.$$

Se α é uma raíz desta equação, ou seja, $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$, então $\beta = s - \alpha$ também é raíz, pois

$$\begin{gathered} \beta^2 - s\beta + p = (s-\alpha)^2 - s(s-\alpha) + p = \\ s^2 - 2s\alpha + \alpha^2 - s^2 + s\alpha + p = \\ \alpha^2 - s\alpha + p = 0. \end{gathered}$$

Encontrar as raízes da equação $\alpha^2 - s\alpha + p = 0$ é, também, um conhecimento muito antigo. De acordo com Zuffi (2001), até o final do século XVI não se usava uma fórmula para os valores das raízes, isso porque não se representavam por letras os coeficientes de uma equação. Isto só começou a ser feito pelo matemático francês François Viete (1540-1603).

O que se fazia antes dele era seguir uma receita que ensinava como proceder em exemplos concretos, ou seja, com coeficientes numéricos. Encontrar dois números cuja soma e cujo produto são dados era enunciado da seguinte forma pelos babilônios:

> Eleve ao quadrado a metade da soma, subtraia o produto e extraia a raiz quadrada da diferença. Some ao resultado a metade da soma. Isso dará o maior dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número. (LIMA, *et al*, 2012).

Nos dias de hoje, o problema acima fornece as raízes:

$$x = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \quad \text{e} \quad s - x = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

para a equação $x^2 - sx + p = 0$.

De acordo com Lima (*et al*, 2012), que analisaram alguns textos cuneiformes, existem indícios de que a ideia dos babilônios pode ter sido esta:

Sejam α e β os números procurados, com $\alpha \leq \beta$. Tais números são equidistantes da média aritmética $\frac{s}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$. Se conhecermos $d = \beta - \left(\frac{s}{2}\right) = \left(\frac{s}{2}\right) - \alpha$ teremos os dois números procurados $\alpha = \left(\frac{s}{2}\right) - d$ e $\beta = \left(\frac{s}{2}\right) + d$. O valor de d pode ser calculado com facilidade, pois $p = \alpha\beta = \left(\frac{s}{2} - d\right)\left(\frac{s}{2} + d\right) = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - d^2$ assim

$$d^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 - p \qquad \text{e} \qquad d = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}$$

e, portanto

$$\alpha = \frac{s}{2} - d = \frac{s}{2} - \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{s}{2} + d = \frac{s}{2} + \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 - p}.$$

Os babilônios usavam os números s e p sempre positivos, e quando ocorriam soluções negativas, pela regra, eles simplesmente diziam que os números não existiam (LIMA,*et al*, 2012).

2.7 Forma Canônica

De acordo com alguns dicionários da língua portuguesa, Canônico é um adjetivo que caracteriza aquilo que está de acordo com os cânones, com as normas estabelecidas ou convencionadas. Na Matemática, a forma canônica é uma forma simples de apresentar algum objeto matemático, podendo ser uma matriz, uma equação ou uma fórmula. Então consideremos o trinômio $ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a}\right]$.

Se desenvolvermos o quadrado $\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2$ teremos as duas primeiras parcelas que estão dentro do colchete acima. Agora completando o quadrado, teremos:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + 2\cdot\frac{b}{a}\cdot x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$$

ou ainda,

$$ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right].$$

A maneira como foi escrito o trinômio de segundo grau é chamado de *forma canônica*. Essa forma conduz a fórmula que nos dá as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$.

Considerando $a \neq 0$, temos as seguintes equivalências.

$$\begin{aligned}
ax^2 + bx + c = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} = 0 && (2.10)\\
&\Longleftrightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} && (2.11)\\
&\Longleftrightarrow \quad x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && (2.12)\\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} && (2.13)
\end{aligned}$$

É importante lembrar que a passagem de (2.11) para (2.12) só tem sentido quando o *discriminante* $\triangle = b^2 - 4ac$ é maior ou igual a zero. Se ocorrer $\triangle < 0$, a equivalência entre (2.10) e (2.11) significa que a equação dada não possui solução real, pois o quadrado de $x + \dfrac{b}{2a}$ não pode ser negativo.

É importante que o professor incentive os alunos a resolver as equações do segundo grau não somente usando a fórmula (2.13), mas também usando o método de completar quadrados.

Quando $\triangle > 0$ a equação $ax^2 + bx + c = 0$ tem duas raízes reais diferentes

$$\alpha = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{e} \quad \beta = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Se $\alpha < \beta$, a soma é $s = \dfrac{-b}{a}$ e o produto é $p = \dfrac{b^2 - \left(\sqrt{b^2 - 4ac}\right)}{4a^2} = \dfrac{4ac}{4a^2} = \dfrac{c}{a}$.

Quando $\triangle = 0$, a equação do segundo grau possui uma única raiz ou *raiz dupla* igual a $-\dfrac{b}{2a}$.

2.8 O Gráfico da Função Quadrática

Antenas parabólicas, faróis de automóveis, algumas construções e alguns lançamentos de objetos como projeteis, uma bola de futebol recolocada em jogo pelo goleiro descrevem o formato de uma parábola. Nesta seção vamos analisar o gráfico da função quadrática que é uma parábola. E não podemos deixar de mencionar o fato de que todas as situações descritas acima podem ser modeladas por meio de uma função quadrática.

Definição 2.8.1: Tomando um ponto F e uma reta d que não o contém, a parábola de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano que equidistam de F e de d.

A reta que é perpendicular à diretriz, baixada a partir do foco é chamada de eixo da parábola. O ponto da parábola mais próximo de d é dito *vértice* da parábola. O vértice é o ponto médio do segmento cujas extremidades são o foco e a interseção do eixo com a diretriz.

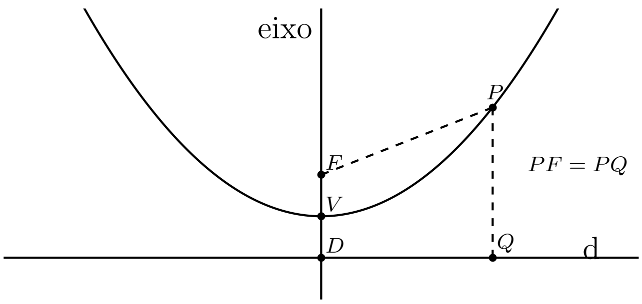

Figura 2.2: Parábola de foco F e diretriz d

Exemplo 1: O gráfico da função quadrática $f(x) = x^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = -\dfrac{1}{4}$. Com isso, a distância de um ponto qualquer (x, x^2) do gráfico de $f(x) = x^2$ ao ponto $F = \left(0, \dfrac{1}{4}\right)$ é igual a $\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \dfrac{1}{4}\right)^2}$. A distância do mesmo ponto (x, x^2) à reta $y = -\dfrac{1}{4}$ é $x^2 + \dfrac{1}{4}$.

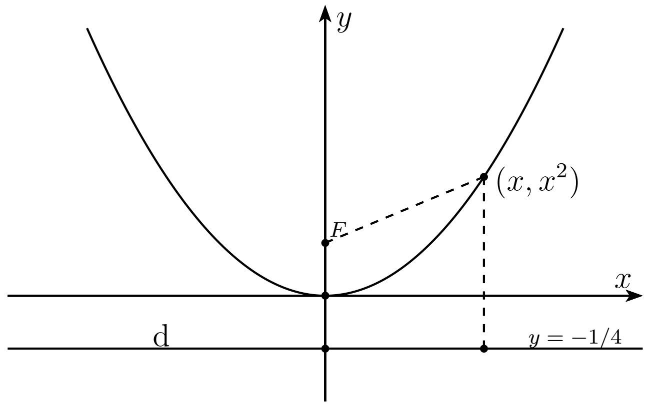

Figura 2.3: Gráfico da função $f(x) = x^2$ de foco $F = \left(0, \frac{1}{4}\right)$ e diretriz $y = -\frac{1}{4}$

Como são números positivos, para verificarmos a igualdade entre estas duas distancias, basta observar que seus quadrados são iguais

$$\left(\sqrt{x^2 + (x^2 - \frac{1}{4})^2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)^2$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Verificando a igualdade acima temos: os pontos do gráfico são da forma $P = (x, x^2)$. Pela definição de parábola, a distancia $\overline{PF}$ deve ser igual a $x^2 + t$, que á distancia de P à reta $y = -t$. Tomando os quadrados temos

$\overline{PF}^2 = (\sqrt{x^2 + (x^2 - t)^2})^2 = (x^2 + t)^2 \Leftrightarrow x^2 + (x^2 - t)^2 = (x^2 + t)^2 \Leftrightarrow x^2 + x^4 - 2x^2t + t^2 = x^4 + 2x^2t + t^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x^2t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$

Exemplo 2: Se $a \neq 0$, o gráfico da função $f(x) = ax^2$ é a parábola cujo foco é $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e cuja diretriz é a reta horizontal $y = \frac{1}{4a}$, basta verificarmos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, vale a igualdade:

$$x^2 + \left(ax^2 - \frac{1}{4a}\right)^2 = \left(ax^2 + \frac{1}{4a}\right)^2$$

onde o primeiro membro é o quadrado da distância do ponto genérico $P = (x, ax^2)$ do gráfico de $f(x) = ax^2$ ao foco $F = \left(0, \frac{1}{4a}\right)$ e o segundo membro é o quadrado da distância do mesmo ponto P à reta $y = \frac{-1}{4a}$.

Exemplo 3: Dados a, m, $k \in \mathbb{R}$, com $a \neq 0$, o gráfico da função $f(x) = a(x-m)^2 + k$ é a parábola cujo foco é $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e a diretriz é a reta horizontal $y = k - \frac{-1}{4a}$. Com base neste último exemplo podemos afirmar que o gráfico de qualquer função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ é uma parábola, com diretriz sendo a reta horizontal:

$$y = \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}$$

e cujo foco é o ponto $F = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2 - 1}{4a}\right)$.

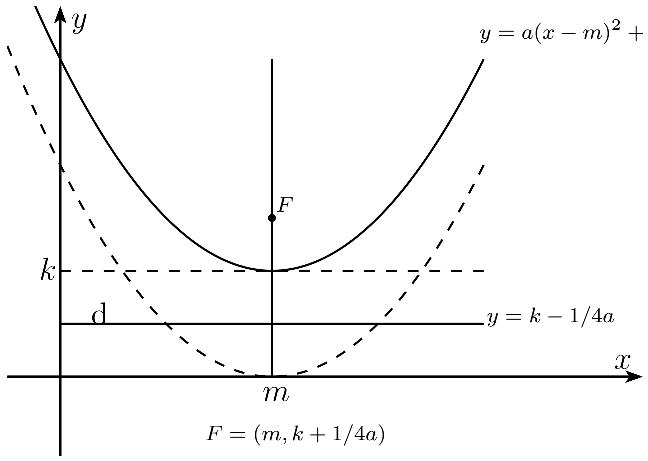

Figura 2.4: Função $f(x) = a(x-m)^2 + k$ de foco $F = \left(m, k + \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz $y = k - \frac{-1}{4a}$

Lembrando que o sinal de a é quem determina se a concavidade da parábola é voltada para cima ou para baixo, ou seja, se $a > 0$ a concavidade é voltada para cima e se $a < 0$ é voltada para baixo.

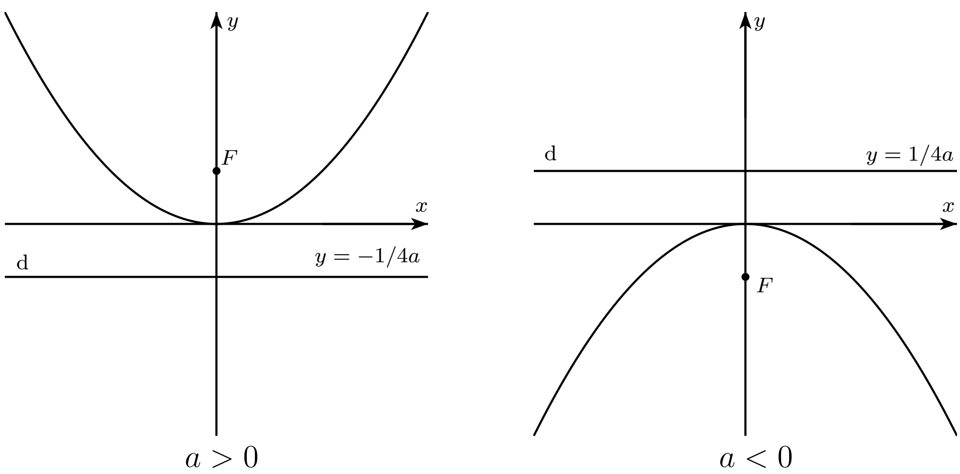

Figura 2.5: A parábola tem concavidade para cima se $a > 0$ ou para baixo se $a < 0$

O ponto do gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$ mais próximo da diretriz é aquele de abscissa $x = \dfrac{-b}{2a}$. Neste ponto, $f(x)$ atinge seu valor mínimo quando $a > 0$ e seu valor máximo quando $a < 0$. Quando $x = \dfrac{-b}{2a}$, o ponto $(x, f(x))$ é o vértice da parábola que constitui o gráfico da $f(x)$.

2.9 Caracterização das Funções Quadráticas

Em geral os livros didáticos usados no Ensino Médio não tratam da caracterização das funções quadráticas por meio de progressões aritméticas, o aluno neste estágio já possui maturidade para entender tal caracterização, pois já estudou progressões.

Nesta seção faremos a caracterização das funções quadráticas através das progressões aritméticas de segunda ordem, logo se faz necessário algumas definições preliminares.

Definição 2.9.1: Uma progressão aritmética (de primeira ordem) é uma sequência em que a diferença entre cada termo e o termo anterior é constante. Essa constante é chamada de razão da progressão aritmética.

Exemplo 4: A sequência $(4, 7, 10, 13, 16, 19, \ldots)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem uma vez que a diferença entre cada termo e o anterior é 3 (razão da progressão aritmética).

Definição 2.9.2: Uma progressão aritmética (de segunda ordem) é uma sequência (y_1, y_2, $y_3, \ldots$) na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior $((d_n) = (y_{(n+1)} - y_n))$ formam uma progressão aritmética de primeira ordem.

Definição 2.9.3: Uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada é uma sequência $(y_1, y_2, y_3, \ldots)$ na qual as diferenças entre cada termo e o termo anterior $((d_n) = (y_{(n+1)} - y_n))$ formam uma progressão aritmética de primeira ordem não constante (com razão diferente de zero).

Exemplo 5: Consideremos a sequência $(u_n) = (1, 4, 9, 16, 25, \ldots, n^2, \ldots)$ de termo geral $u_n = n^2$. Agora vamos verificar as diferenças entre os termos consecutivos.

$$d_n = u_{(n+1)} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n + 1$$

Assim, a sequência $(d_n) = (3, 5, 7, 9, \ldots, 2n + 1, \ldots)$ é uma progressão aritmética de primeira ordem cuja razão é 2, pelo que a sequência u_n é uma progressão aritmética de segunda ordem.

Lema 2.9.1: y_n é uma progressão aritmética de segunda ordem se e só se y_n é um polinômio de segundo grau em n.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Seja y_n uma progressão aritmética de segunda ordem. Então $x_n = (y_{(n+1)} - y_n)$ é uma progressão aritmética de razão diferente de zero. Assim, $x_1 + x_2 + ... + x_{(n-1)} + x_n = (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + ... + (y_{(n-1)} - y_{(n-2)} + (y_n - y_{(n-1)}) + (y_{(n+1)} - y_n) = y_{(n+1)} - y_1$. Como $x_1 + x_2 + ... + x_{(n-1)} + x_n$ é a soma dos n primeiros termos da progressão aritmética (x_n), temos que, $y_{(n+1)} - y_1$ é um polinômio de grau 2 em n. Portanto, (y_n) é também um polinômio de grau 2 em n.

($\Longleftarrow$) Seja agora $y_n = an^2 + bn + c$, com $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Então temos que, $y_{(n+1)} - y_n = a(n+1)^2 + b(n+1) + c - (an^2 + bn + c) = an^2 + 2an + a + ba + b + c - aa^2 - ba - c = 2an + (a+b)$. Esta expressão de primeiro grau em n, pelo que $y_{(n+1)} - y_n$ é uma progressão aritmética de primeira ordem e,consequentemente, (y_n) é uma progressão aritmética de segunda ordem.

■

Teorema 2.9.1: Uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é quadrática se e só se toda a progressão aritmética não constante $(x_1, x_2, ..., x_n, ...)$ é transformada por f numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada $(f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...)$.

Demonstração:

($\Longrightarrow$) Sejam (x_n) uma progressão aritmética de primeira ordem, com $x_n = x_{(n-1)} + r = x_1 + (n-1)r$, e $f(x) = ax^2 + bx + c$.

De modo a mostrar que $(f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots)$ é uma progressão aritmética de segunda ordem mostremos que as diferenças sucessivas

$$\begin{gathered} d_1 = f(x_2) - f(x_1) \\ d_1 = f(x_3) - f(x_2) \\ \cdots \\ d_n = f(x_{(n+1)}) - f(x_n) \\ d_{(n+1)} = f(x_{(n+2)}) - f(x_{(n+1)}) \\ \cdots \end{gathered}$$

formam uma progressão aritmética.

Assim, calculemos $f(x_n)$, $f(x_{(n+1)})$ e $f(x_{(n+2)})$ para em seguida calcularmos d_n e $d_{(n+1)}$

$$\begin{aligned}
f(x_n) &= f(x_1+(n-1)r) = a(x_1+(n-1)r)^2 + b(x_1+(n-1)r)\\
&= a(x_1^2+2x_1r(n-1)+(n-1)^2r^2)+bx_1+b(n-1)r+c\\
&= a(x_1^2+2x_1r(n-1)+(n^2-2n+1)r^2)+bx_1+bnr-br+c\\
&= ax_1^2+2ax_1rn-2ax_1r+an^2r^2-2anr^2+ar^2+bx_1+bnr-br+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_{(n+1)}) &= f(x_1+nr) = a(x_1+nr)^2+b(x_1+nr)+c\\
&= a(x_1^2+2x_1nr+n^2r^2)+bx_1+bnr+c\\
&= ax_1^2+2ax_1nr+an^2r^2+bx_1+bnr+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f(x_{(n+2)}) &= f(x_1+(n+1)r) = a(x_1+(n+1)r)^2+b(x_1+(n+1)r)+c\\
&= a(x_1^2+2x_1r(n+1)+(n+1)^2r^2)+bx_1+b(n+1)r+c\\
&= a(x_1^2+2x_1r(n+1)+(n^2+2n+1)r^2)+bx_1+bnr+br+c\\
&= ax_1^2+2ax_1rn+2ax_1r+an^2r^2+2anr^2+ar^2+bx_1+bnr+br+c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_n &= f(x_{(n+1)})-f(x_n)\\
&= ax_1^2+2ax_1nr+an^2r^2+bx_1+bnr+c-(ax_1^2+2ax_1rn-2ax_1r+\\
&\quad an^2r^2-2anr^2+ar^2+bx_1+bnr-br+c)\\
&= ax_1^2+2ax_1nr+an^2r^2+bx_1+bnr+c-ax_1^2-2ax_1rn+2ax_1r-\\
&\quad an^2r^2+2anr^2-ar^2-bx_1-bnr+br-c\\
&= 2arx_1+2anr^2-ar^2+br
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_{(n+1)} &= f(x_{(n+2)})-f(x_{(n+1)})\\
&= ax_1^2+2ax_1rn+2ax_1r+an^2r^2+2anr^2+ar^2+bx_1+bnr+br+c-\\
&\quad (ax_1^2+2ax_1nr+an^2r^2+bx_1+bnr+c)\\
&= ax_1^2+2ax_1rn+2ax_1r+an^2r^2+2anr^2+ar^2+bx_1+bnr+br+c-\\
&\quad ax_1^2-2ax_1nr-an^2r^2-bx_1-bnr-c\\
&= 2arx_1+2anr^2+ar^2+br
\end{aligned}$$

Logo,

$$d_{(n+1)}-d_n = 2arx_1+2anr^2+ar^2+b-2arx_1-2anr^2+ar^2-br = 2ar^2,$$

assim

$$(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots)$$

é uma progressão aritmética de primeira ordem de razão $2ar^2$.

$(\Longleftarrow)$ Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua que tem a propriedade de transformar toda a progressão aritmética não constante numa progressão aritmética de segunda ordem não degenerada.

Seja $g(x) = f(x) - f(0)$. Então g tem as mesmas propriedades de f e mais a propriedade de que $g(0) = 0$.

Assim, considerando a progressão aritmética de primeira ordem $(1, 2, 3, 4, 5, ...)$ temos que $(g(n))$ é uma progressão aritmética de segunda ordem não degenerada. Portanto, pelo lema 2.8.6 existem números reais a e b (com $a \neq 0$) tais que $g(n) = an^2 + bn$, $\forall n \in \mathbb{N}$. (Observe que deveria ser $g(n) = an^2 + bn + c$, mas $g(0) = 0$).

Em seguida, fixemos um número arbitrário $p \in \mathbb{N}$ e consideremos a seguinte progressão aritmética:

$$\left(\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \ldots, \frac{n}{p}, \ldots\right)$$

Analogamente, existem números reais a'e b' (com $a' \neq 0$) tais que $g\left(\frac{n}{p}\right) = a'n^2 + b'n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned}
an^2 + bn &= g(n) \\
&= g(np/p) \\
&= a'(np)^2 + b'(np) \\
an^2 + bn &= (a'p^2)n^2 + (b'p)n.
\end{aligned}$$

Logo as funções quadráticas, $ax^2 + bx$ e $(a'p^2)x^2 + (b'p)x$ são iguais para $n \in \mathbb{N}$. Assim, pela proposição 2.5.1, $a = (a'p^2)$ e $b = (b'p)$, ou seja, $a' = \frac{a}{p^2}$, $b' = \frac{b}{p}$. Portanto para quaisquer números naturais n e p temos:

$$g\left(\frac{np}{p}\right) \quad = \quad a'n^2 + b'n \quad = \quad \frac{a}{p^2}n^2 + \frac{b}{p}n \quad = \quad a\left(\frac{n}{p}\right)^2 + b\,(np)\,.$$

Portanto, concluímos que as funções contínuas $g(x)$ e $f(x) = ax^2 + bx$ são tais que

$g(r) = ar^2 + br$ para todo numero racional positivo $r = \dfrac{n}{p}$. Daí segue que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo numero real positivo x. Da mesma forma, considerando a P.A. $(-1, -2, -3, \ldots)$, chegaremos a conclusão que $g(x) = ax^2 + bx$ para todo número real x negativo. Assim, colocando $f(0) = c$, temos que $f(x) = g(x) + c$, ou seja

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. $\blacksquare$

Capítulo 3

Máximos e Mínimos de Funções

O estudo da função quadrática inicia no 9° ano, nesta fase os autores demonstram a relação entre duas grandezas e as suas formas de resolução, além de relacionar seu aspecto histórico e respectivas aplicações. No 1° ano do ensino médio, essa linguagem é aprimorada, agora os alunos aprendem a identificar e definir domínio, contradomínio, conjunto imagem, calcular o valor máximo e mínimo da função, resolvem problemas e modelam situações utilizando funções do 2º grau. Nesta fase cabe ao professor propor aos alunos problemas, que dependendo da interpretação de determinadas condições, poderão apresentar diferente soluções, contribuindo aos mesmos averiguar que um exercício possui diferentes soluções.

Analisando os livros de Matemática utilizados atualmente nas redes pública e privada podemos observar que a parte que trata do estudo de máximos e mínimos de funções no ensino médio se resume a calcular estes valores de funções quadráticas e tal procedimento é feito por meio de fórmulas sem qualquer tipo de demonstração ou justificativa. Essa estratégia apenas reforça na mente dos alunos a ideia de que a Matemática é uma disciplina composta por fórmulas prontas e acabadas onde basta decorá-las. Tal situação deve ser desmistificada pelos professores contemporâneos.

O papel do professor é incentivar e motivar o aluno a pesquisar questões de forma mais ampla, livres para pensar as situações-problemas de forma diversa, ou seja, outras maneiras de resolução devem ser levadas em consideração no momento de avaliação do aluno em sala de aula. Nesta seção trataremos dos pontos de máximos e/ou mínimos de funções e em especial as funções quadráticas. Nas situações que envolvem as funções quadráticas é comum encontrarmos as palavras máximo ou mínimo. Como determine a área máxima, encontre a área mínima, calcule o lucro máximo, determine o valor mínimo, entre outros.

Vamos supor $a > 0$, assim a forma canônica:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

nos mostra no interior dos colchetes, uma soma de parcelas. A parcela $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ depende de x e é sempre maior ou igual a zero. A segunda parcela é constante, e, portanto o menor valor dessa soma é alcançado quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ é igual a zero, ou seja, quando $x = \frac{-b}{2a}$.

Neste ponto, $f(x)$ assume o valor de mínimo. Logo, quando $a > 0$, o menor valor assumido por $f(x) = ax^2 + bx + c$ é

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = c - \left(\frac{b^2}{4a}\right) = \left(\frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

E se $a < 0$, o valor $f(-b/2a)$ é o maior dos números $f(x)$, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, ou seja, $f(x)$ assume o valor de máximo. Logo concluímos que quando $a > 0$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, não assume valor máximo, ou seja, é uma função ilimitada superiormente. E quando $a < 0$, a função não assume valor mínimo, logo é ilimitada inferiormente.

3.1 Valores de Máximo e Mínimo de Funções

Boa parte dos livros de Matemática tais como *Matemática* de Luiz Roberto Dante, *Matemática e suas tecnologias* de Angel P. Rubió e Lucinda M. T. de Freitas e *Matemática no Ensino Médio* de Márcio Cintra Goulart propõe o estudo de Máximo e Mínimo de funções somente quando se estuda as funções quadráticas, mas sabemos que estes conceitos não se aplica somente às funções quadráticas. Quando propomos ao aluno por exemplo: "Qual a aceleração máxima de um ônibus espacial?" ou "Calcule o custo mínimo de produção de um determinado objeto".

Esses dois problemas citados são chamados *problemas de otimização*, onde devemos encontrar a maneira ótima, ou seja, a melhor maneira de fazer determinada tarefa. Sendo assim, estes problemas se resumem a encontrar os valores de máximo ou mínimo de uma função. E o mais importante disso é que esses problemas podem ser modelados não somente pelas funções quadráticas, mas por outros tipos de função.

Serão detalhados a seguir os conceitos de máximo e mínimos de funções em geral.

Definição 3.1.1: Uma função f possui **máximo absoluto** em c se $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in D$, sendo D o domínio da função f. O número $f(c)$ é conhecido como **valor máximo** de f em D.

Definição 3.1.2: Uma função f tem um **mínimo absoluto** em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in D$, e número $f(c)$ é **valor mínimo** de f em D. Os valores máximo e mínimo da função f são denominados valores extremos de f.

Exemplo 6: Utilizando o software Geogebra encontre os valores máximo e mínimo absolutos da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ em $-\dfrac{1}{2} \leq x \leq 4$.

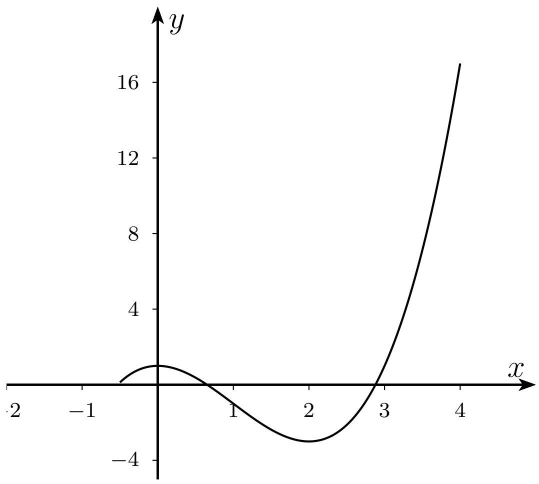

Figura 3.1: Gráfico da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ em $-1/2 \leq x \leq 4$

Observando o gráfico de f na figura acima temos que o máximo absoluto é $f(4) = 17$ e o valor mínimo absoluto, $f(2) = -3$.

Definição 3.1.3: Uma função f tem um máximo local em c se $f(c) \geq f(x)$ quando x estiver nas proximidades de c, ou seja, $f(c) \geq f(x)$ para todo x em um pequeno intervalo aberto contendo c.

Definição 3.1.4: Uma função f tem um mínimo local em c se $f(c) \leq f(x)$ quando x

estiver próximo de c.

Exemplo 7: O gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ em $-1 \leq x \leq 4$.

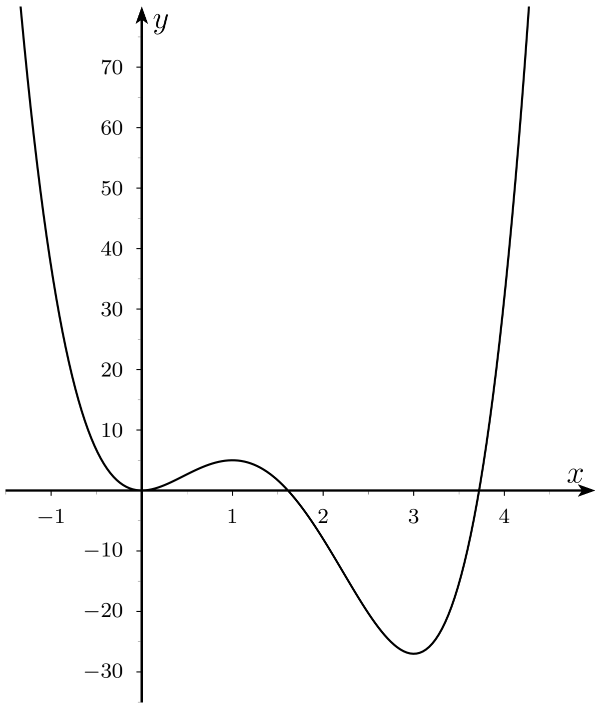

Figura 3.2: Gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$ em $-1 \leq x \leq 4$

Observe que $f(1) = 5$ é um máximo local, e o máximo absoluto é dado por $f(-1) = 37$. E $f(0) = 0$ é um mínimo local, e $f(3) = -27$ é tanto um mínimo local como um mínimo absoluto. E em $x = 4$, a função não tem um máximo local nem um máximo absoluto.

As definições apresentadas acima podem ser apresentadas aos alunos do ensino médio, quando iniciarem o estudo de funções no 1º ano, principalmente se utilizarmos um software matemático que constrói gráficos como Geogebra ou Winplot. Não é necessário o conhecimento sobre limite ou derivada. Observe o exemplo abaixo:

Exemplo 8: Numa dada comunidade, uma certa epidemia alastra-se de tal forma que x meses após o seu início, $P\%$ da população estará infectada, onde

$$P = \frac{30x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Em quantos meses o número de pessoas infectadas atingirá o máximo e que porcentagem da população esse número representa?

Como primeiro passo para a resolução deste problema devemos identificar as variáveis do problema, que são:

- a variável independente x que representa os meses após o início da epidemia e,
- a variável P que representa a porcentagem da população que foi infectada.

Como se trata de um problema que envolve máximo, uma estratégia de resolução que os alunos poderão adotar é plotar o gráfico, da expressão matemática dada pelo problema, no Geogebra e a partir daí estimar o mês que mais houve contaminação entre a população. Sendo assim, ao executarem essa estratégia obteremos o seguinte gráfico:

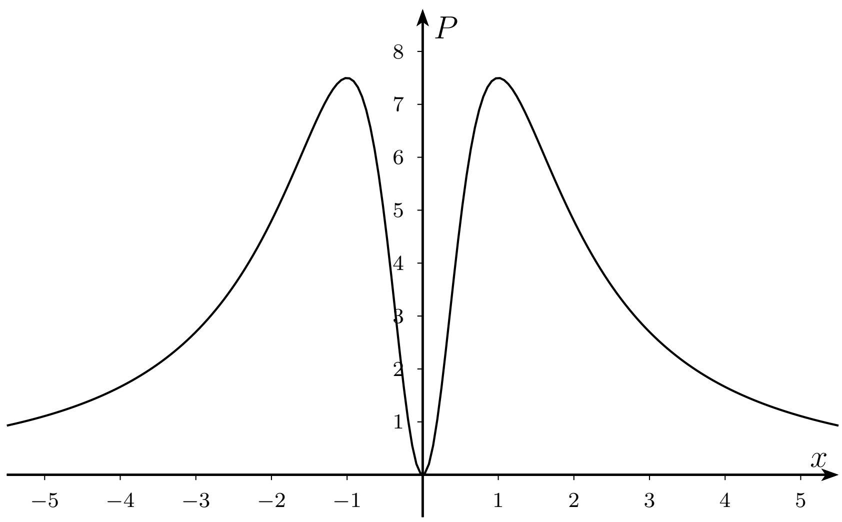

Figura 3.3: O gráfico mostra $P\%$ da população após x meses depois do início de uma epidemia

Ao analisarmos o gráfico, a primeira coisa que observamos é que a variável independente x não faz sentido para valores negativos, apenas valores positivos. Em seguida, podemos estimar que o mês em que houve a maior contaminação da população foi no primeiro, o que corresponde há:

$$P = \frac{30 \cdot 1^2}{(1+1^2)^2} = \frac{30}{4} = \frac{15}{2} = 7,5$$

Isto é, no primeiro mês houve o maior número de pessoas infectadas o que representa $7,5\%$ da população.

3.2 Máximo e Mínimo de Funções Quadráticas

No estudo da função do 2º grau percebemos que seu gráfico é uma parábola e que esse gráfico apresenta pontos notáveis e de bastante aplicação na vida cotidiana e no estudo de outras ciências. Esses pontos são: as raízes da função e o vértice da parábola. As raízes determinam quais os pontos onde o gráfico intercepta o eixo das abscissas (eixo x); o vértice pode ser o ponto de máximo absoluto ou de mínimo absoluto da função, ou seja, o maior ou o menor valor que a função pode assumir em todo o seu domínio. Iremos fazer um estudo dos pontos de máximo e mínimo absolutos da função do 2º grau e compreender sua utilidade nos contextos mais diversos.

Vamos considerar agora a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a > 0$. Como já vimos podemos escrever esta expressão da seguinte forma:

$$f(x) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right] \tag{3.1}$$

Observe as duas parcelas dentro do colchete sendo que a primeira $(x + \frac{b}{2a})^2$ depende de x e é sempre maior ou igual a zero. Na segunda parcela $\frac{4ac - b^2}{4a^2}$ temos uma constante. Assim o menor valor que esta soma pode atingir é quando $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$, o que ocorre se, e somente se, $x = \frac{-b}{2a}$, que é chamado nos livros didático por x_v ou x do vértice, nesse ponto f assume seu menor valor. O menor valor de $f(x)$ é:

$$f\left(\frac{-b}{2a}\right) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\triangle}{4a},$$

onde $\triangle = b^2 - 4ac$.

O valor que $f(x)$ assume em x_v é chamado de y_v ou y do vértice.

Da mesma forma se em (3.1) tivermos $a < 0$ podemos concluir que $f(x)$ assume um valor de máximo se a parcela que está dentro com colchete for mínima, e isso ocorre se e somente se, $x = x_v = \frac{-b}{2a}$. Assim $f(x_v) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} = -\frac{\triangle}{4a}$.

Portanto podemos afirmar que: Se $a > 0$ então a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui um valor mínimo (pois a concavidade está para cima). Se $a < 0$ então a função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui um valor máximo (pois a concavidade está para baixo).

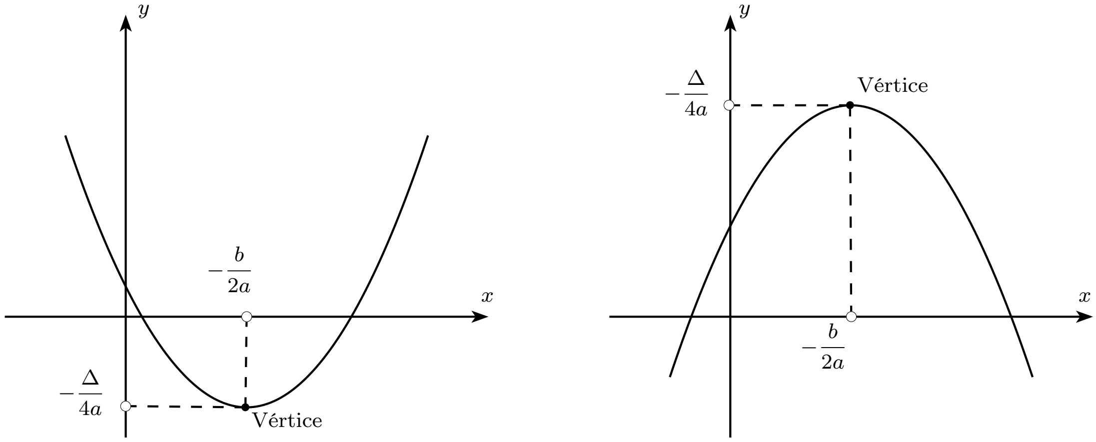

Figura 3.4: $f(x) = ax^2 + bx + c$ possui valor mínimo se $a > 0$ ou valor máximo se $a < 0$

Exemplo 9: Analisaremos a questão da Universidade Federal da Paraíba: Em uma partida de futebol, um jogador, estando na lateral do campo, cruzou a bola para um companheiro de equipe o qual se encontrava na lateral oposta, a uma distancia de 64 m. A bola passou $1,20$ m acima da cabeça de um jogador, com $1,80$ m de altura, da equipe adversária, o qual, nesse instante, estava a 4 m de distancia do jogador que realizou o cruzamento, conforme a figura 3.5. *Obs: Suponha que a trajetória da bola esteja em um plano.*

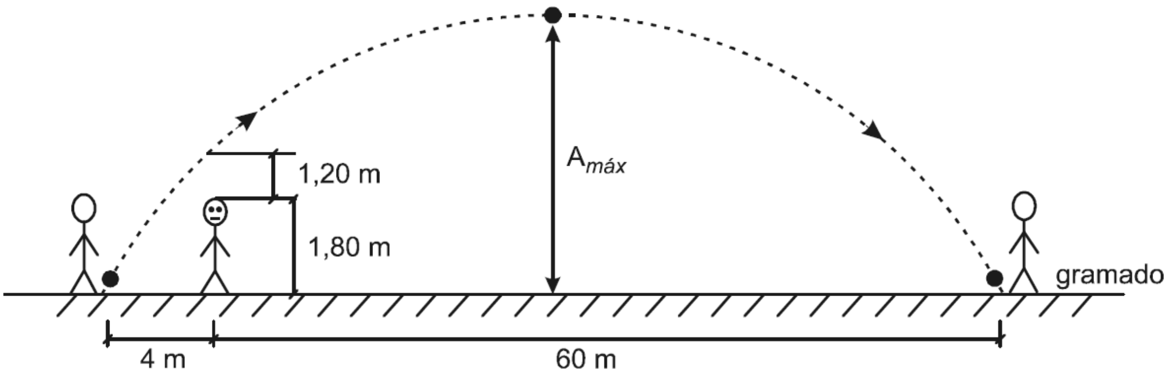

Figura 3.5: Representação gráfica do problema

Nessa situação, a bola descreveu uma trajetória em forma de arco de parábola até tocar o gramado, quando foi dominada pelo companheiro de equipe. Com base nessas informações, durante o cruzamento, qual a altura máxima que a bola atinge?

1. Compreensão do Problema

   Primeiro passo, vamos visualizar a situação descrita inserida num plano cartesiano.

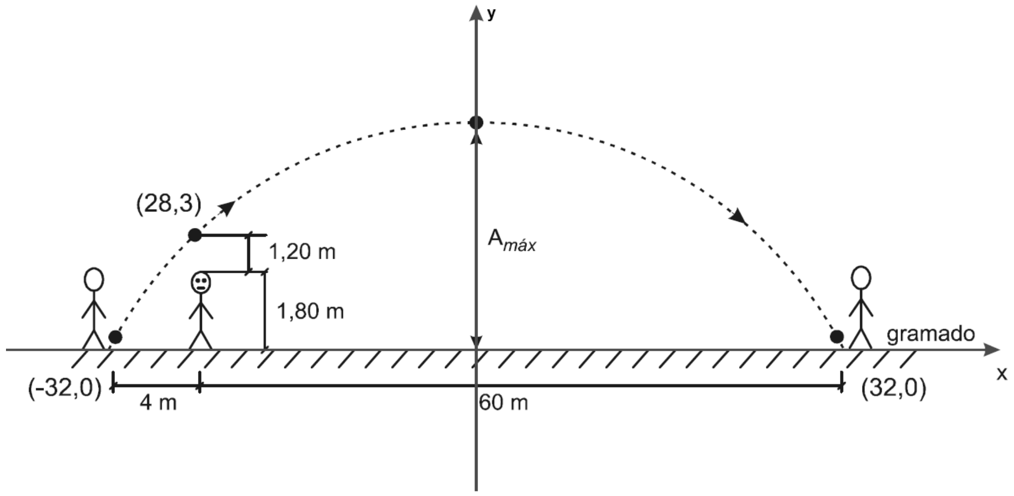

Figura 3.6: Visualização do problema inserida no plano cartesiano

2. Construção de uma Estratégia de Resolução

   Para determinar o máximo da parábola precisamos, determinar a equação da função correspondente.

3. Execução da Estratégia

   A distância entre os dois jogadores do mesmo time é 64 m. Logo, o ponto médio entre eles, pelo qual passa o eixo y, está a 32 m de distância de cada um. Com isso pode-se assumir que $x_1 = -32$ e $x_2 = 32$ como raízes da função quadrática. Temos daí,

$$\begin{aligned} f(x) &= a(x-(-32))(x-32) \\ &= a(x+32)(x-32) \end{aligned}$$

   Observe que a parábola passa por um ponto $1,20$ m acima da cabeça do jogador de $1,80$ m. Isso significa que a ordenada desse ponto é 3. Por outro lado, estando esse jogador a 4 m do adversário que jogou a bola, conclui-se que $-32+4=-28$ é a abscissa do ponto que se procura.

Utilizando o par ordenado $(-28, 3)$, obtém-se o coeficiente a:

$$\begin{aligned} f(-28) &= a \cdot (-28+32) \cdot (-28-32) \\ 3 &= a \cdot 4 \cdot (-60) \\ a &= -0,0125 \end{aligned}$$

Logo a função que descreve a trajetória da bola de futebol é $f(x) = -0,0125 \cdot (x + 32) \cdot (x - 32)$ que representa uma parábola de concavidade para baixo. Como visto nas definições acima, a parábola tem ponto de máximo, que é o vértice.

Portanto, a altura máxima atingida pela bola é y_v.

$$\begin{aligned} f(x) &= -0,0125 \cdot (x+32) \cdot (x-32) \\ f(x) &= -0,0125 \cdot (x^2 - 1024) \\ f(x) &= -0,0125x^2 + 12,8 \\ y_v &= -\frac{0^2 - 4 \cdot (-0,0125) \cdot 12,8}{4 \cdot (-0,0125)} = 12,8 \end{aligned}$$

4. <u>Reflexão do Trabalho Realizado</u>

   Assim, a altura máxima atingida pela bola foi de $12,8$ m.

É importante que o professor dentro de sala de aula incentive a resolução de problemas como este acima, pois o aluno vive a cultura do "jogar na fórmula" e tal situação torna a matemática cansativa e entediante. Problemas como estes estão presentes no cotidiano do aluno e de certa forma atrai a atenção daqueles que estão somente acostumados a reproduzir exemplos prontos. Situações devem ser propostas em sala de aula, ou seja, o aluno deve ser incentivado a interpretar, reunir os dados e equacionar.

Outro fato que deve ser levado em consideração na hora da avaliar o aluno é levar em conta o modo de pensar de cada um dentro de sala de aula, claro que sem extrapolar os limites matemáticos, mas não devemos impor uma formula somente, é necessário fornecer, mostrar aos alunos outros caminhos (opções) de resolução, pois talvez o que é fácil para um pode ser difícil para o outro. Eles precisam entender que não há uma única forma de resolver uma situação-problema, mas que existem formas de se pensar e resolver. A solução é uma consequência de todo trabalho.

Capítulo 4

Resolução de Problemas e Otimização: uma ferramenta na sala de aula

Segundo Lester (apud Pozo, 1998, p. 15) um problema seria "uma situação que um indivíduo ou um grupo quer ou precisa resolver e para o qual não dispõe de um caminho rápido e direto que leve à solução". Quanto a isso Callejo e Vila nos dizem o seguinte:

> Reservaremos, pois, o termo problema para designar uma situação, proposta com finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar uma situação nova (2004, p. 31-32).

Ao utilizar a resolução de problemas como metodologia de ensino, o professor precisa manter uma postura de interatividade em sala de aula. A resolução de problemas está pautada na interação entre professor e alunos. O professor não dá as respostas, mas sim responde às perguntas dos alunos com novas perguntas que o levem por si só à resolução do problema. As perguntas devem auxiliar "discretamente, apenas indicando a direção geral, deixando muito para o estudante fazer" (POLYA, 2006, p. 3).

4.1 Resolução de Problemas

> Quando os professores ensinam matemática através da

> resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão. À medida que a compreensão dos alunos se torna mais profunda e mais rica, sua habilidade em usar matemática para resolver problemas aumenta consideravelmente. (ONUCHIC 1999, p. 208).

A resolução de problemas é uma tendência no ensino da matemática e sua importância é indiscutível, uma vez que se trata de uma especificidade desta área do conhecimento. A própria evolução da Matemática sempre teve como pano de fundo a busca de soluções para problemas.

> ... os problemas são um meio de por a ênfase nos alunos e em seus processos de pensamento e não em métodos inquisitivos; uma ferramenta para formar sujeitos com capacidade autônoma de resolver problemas, críticos e reflexivos, capazes de se perguntar sobre o que foi feito, sobre suas interpretações e explicações, de ter seus próprios critérios e modificá-los se for preciso e propor soluções (CALLEJO e VILA 2004, p. 32).

O ensino da Matemática tem seus pilares na resolução de problemas, mas nos últimos anos alguns educadores matemáticos perceberam que a criação e resolução de problemas merecem um pouco mais de atenção. Um dos objetivos ao abordar conceitos matemáticos a partir da resolução de problemas é contribuir para o desenvolvimento intelectual do aluno. De acordo com Pozo: "[...] quando um aluno ou qualquer pessoa enfrenta uma tarefa do tipo que denominamos problema, precisa colocar em ação uma ampla série de habilidades e conhecimentos" (POZO, 1998, p. 19).

É difícil tratar do assunto "resolução de problemas" sem referir-se a George Polya. De forma mais específica, referenciando sua obra clássica, "A arte de resolver problemas". Esta obra é um marco para o ensino de Matemática. Traz à tona a discussão de heurísticas para a solução de problemas e evidencia sua preocupação com o ensino de Matemática. Polya destaca a obrigação do professor em estabelecer a classe correta de problemas para os seus alunos:

> Primeiro, ele deveria estabelecer a classe certa de problemas para os seus alunos: não muito difíceis, nem fáceis demais, naturais interessantes, que desafiem sua curiosidade, adequados a seu conhecimento. Ele deveria também se permitir algum tempo para apresentar o problema apropriadamente, de modo que pareça sob o ângulo correto.

> Depois, o professor deveria ajudar seus alunos convenientemente. Não muito pouco, senão não há progresso. Não demais, senão o aluno não terá o que fazer. (POLYA, 1997, p.3).

Na década de sessenta, George Polya começava a investigar sistematicamente o ensino através da resolução de problemas e a partir daí esta tendência se estabeleceu enquanto campo de pesquisa na Educação Matemática. Atualmente, esta prática é bastante difundida no Brasil em todos os níveis da Educação Básica e várias pesquisas legitimam sua importância no processo de ensino e aprendizagem.

Polya, sempre salientou seus benefícios para a aprendizagem da Matemática, pois essa metodologia coloca "o problema" como atividade central para o aluno. Para o autor, os problemas são divididos em duas categorias: problemas de rotina e problemas não rotineiros.

Segundo Polya, os problemas de rotina são constituídos pela adição de dados diferentes para problemas já resolvidos e sua solução consiste apenas na aplicação de um algoritmo cujos passos são conhecidos. O problema de rotina ocorre quando o aluno sabe a maneira adequada de encontrar a solução utilizando recursos computacionais ou fórmulas aplicáveis.

Já os problemas não rotineiros requerem, do aluno, uma organização, uma classificação, um estabelecimento de relações entre os dados, além de habilidades computacionais. Problemas não rotineiros são aqueles que o aluno não sabe como resolver e não é capaz de antever a solução, porque ela não é óbvia.

> Um problema pode apresentar características diversas como, por exemplo, não ter solução óbvia, ser desconhecido o caminho da solução, necessitar ser analisado sob diferentes ópticas; muitas vezes a resposta não é única, pode haver muitas formas de resolver e pode não ter uma melhor solução. (RESNIK E COLLINS, 1996).

O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolve, pelos seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta. Experiências tais, numa idade susceptível, poderão gerar o gosto pelo trabalho mental e deixar, por toda a vida, a sua marca na mente e no caráter.

De acordo com Schoenfeld (1998), o professor ao propor um problema deve-se procurar que esse possa ser resolvido de várias maneiras, que seja acessível, que propicie a introdução e exploração de ideias matemáticas.

Sintetizando a opinião destes autores citados, o foco central para o ensino da Matemática está na Resolução de Problemas, pois esta metodologia auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico, da oportunidade a criação, a descoberta, a investigação, todos estes fatores quando trabalhados em conjunto fazem com que o aluno aprenda a pensar.

Os autores destacam também os seguintes itens que caracterizam a utilização da Resolução de Problemas no ensino da Matemática:

- Resolução de Problemas como justificativa para se ensinar Matemática;
- Como motivação para despertar o interesse do aluno;
- Como recreação para possibilitar aos alunos algum divertimento com a Matemática;
- Como veículo por meio do qual, novos conceitos são aprendidos;
- Como prática para reforçar conceitos ensinados.

O matemático Polya divide o processo de resolução de problemas em quatro etapas:

1. Compreensão do problema: Nessa etapa é importante fazer perguntas, identificar qual a incógnita do problema, verificar quais são os dados, e quais são as condições.
2. Construção de uma estratégia de resolução: Nessa etapa devem-se encontrar as conexões entre os dados e a incógnita, ou considerar problemas auxiliares, se não for possível uma conexão imediata.
3. Execução da estratégia: É a etapa mais fácil da resolução de problema, ao executar um plano é verificar cada passo.
4. Reflexão sobre o trabalho realizado: Exame da solução obtida e verificação dos resultados e dos argumentos utilizados.

4.2 Heurística de Polya

O sítio `http://pt.wikipedia.org/` define a palavra heurística como: método ou processo criado com o objetivo de encontrar soluções para um problema. É um procedimento simplificador (embora não simplista) que, em face de questões difíceis, envolve a substituição destas por outras de resolução mais fácil a fim de encontrar respostas viáveis, ainda que imperfeitas. Tal procedimento pode ser tanto uma técnica deliberada de resolução de problemas, como uma operação de comportamento automática, intuitiva e inconsciente.

Na primeira forma é uma alternativa rápida e semi-intuitiva ao raciocínio lento e elaborado, que às vezes funciona razoavelmente se bem utilizada dentro de suas limitações. Tal conceito tornou-se popular devido ao matemático húngaro George Polya e ao seu livro "*A arte de resolver problemas*". O livro traz a classe heurística da prescrição que tentou ensinar aos seus alunos de matemática. Quatro exemplos extraídos do livro ilustram bem o conceito:

1. Se não puder compreender um problema, monte um esquema;
2. Se não puder encontrar a solução, tente fazer um mecanismo inverso para tentar chegar à solução (engenharia reversa);
3. Se o problema for abstrato, tente propor o mesmo problema num exemplo concreto;
4. Tente abordar primeiro um problema mais geral (o paradoxo do inventor: o propósito mais ambicioso é o que tem mais possibilidade de sucesso).

Este modelo propicia o desenvolvimento da criatividade do aluno e melhora sua capacidade de resolver problemas. Formular novos problemas pode ser um meio que proporciona a análise do pensamento e das experiências matemáticas dos alunos.

Os cursos superiores como Engenharias, Matemática, Física, etc. tem em suas grades curriculares disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral e Fundamentos de Matemática em seus primeiros meses, é nesse momento que o aluno que acaba de chegar do Ensino Médio se depara com alguns obstáculos, pois os professores cobram deles conceitos e habilidades que na maioria das vezes foi trabalhada no Ensino Básico de forma superficial e sem muita formalização teórica. Boa parte dos ingressantes na universidade ainda não tem uma maturidade para a compreensão, de novos conceitos que necessitam de capacidade de abstração, generalização e utilização de uma linguagem formal, pois tudo isso não foi ensinado a ele no Ensino Básico.

Em geral o primeiro contato que um a aluno oriundo do Ensino médio tem com Problemas de Otimização é no Curso de Cálculo Diferencial e Integral, tais problemas necessitam de representação geométrica, logo a parte de geometria que em geral é pouco explorada de forma concreta em sala de aula, pois demanda tempo e paciência por parte de professores e alunos. No Ensino Básico, o natural seria se o professor ao abordar um assunto, iniciasse o mesmo com um problema do cotidiano do aluno, ou seja, um problema de otimização, mas sabemos que na prática não é isso que acontece, pois é mais fácil passar no quadro a fórmula e alguns exemplos do que tentar contextualizar a teoria em alguma situação problema.

4.3 Dificuldades e Desafios

Nestes oito anos de docência em Matemática ministrando aulas a alunos de 9º ano do Ensino Fundamental a alunos de 3º ano do Ensino médio pude observar e constatar alguns fatos que ocorrem em sala de aula ao se trabalhar com Resolução de Problemas.

Inicialmente quando se propõe uma problema de otimização, os alunos se sentem desafiados, mesmo com algumas dificuldades iniciais na interpretação do problema, eles mostram certa criatividade na busca da solução. Muitos deles fazem esquemas ou desenhos que auxiliam no entendimento dos conceitos, ou seja, criam conceitos de Otimização que ajudam a uma melhor compreensão.

Outro ponto considerável é que quando se faz inicialmente uma representação gráfica ao invés de algoritmo e regras, os alunos se sentem mais desafiados a entender o problema. Isso sugere que a forma como os conceitos são ensinados em sala de aula faz com que os alunos se sintam capazes de utilizá-los em atividades ou em outros contextos. O modo com que o professor leva o conhecimento em sala de aula não pode tornar a visão do aluno como algo monótono e passivo, mas um modo participativo e desafiador. Devemos permitir que eles falem, argumentem, discutam e escrevam os resultados matemáticos encontrados, dando, de certa forma, autonomia na produção do próprio conhecimento.

Agora cabe ao professor, compreender como ocorre o raciocínio dos alunos, principalmente em conteúdos abstratos como a Álgebra, o que pode provocar mudanças na sua pratica pedagógica dentro e fora da sala de aula. Com isso a prática de Resolução de

Problemas aliadas com a teoria de Otimização, podem provocar em professores e alunos a expansão de sua capacidade intelectual e argumentativa, com a incorporação de novos conceitos propiciando uma maior interação entre professor e aluno num dinâmico processo de construção do conhecimento sólido e permanente.

Capítulo 5

Problemas de Otimização

É comum os alunos questionarem aos seus professores de matemática sobre a aplicação em situações reais e cotidianas do conteúdo que está sendo proposto em sala de aula. Qual professor de matemática nunca ouviu o seguinte questionamento: "onde vou usar isso na minha vida?".

Os próprios alunos atribuem à "falta de aplicação" do conteúdo o seu desinteresse pelo mesmo, provocando fracasso do processo de ensino-aprendizagem. De acordo com Brophy (1998), muitos alunos podem apresentar motivação para aprender, dependendo de se o professor desperta seu interesse ou os faz perceber a importância do conteúdo ou habilidade envolvido.

Os PCN's indicam a Resolução de Problemas como ponto de partida das atividades matemáticas e discutem caminhos para se trabalhar a Matemática em sala de aula. Como vimos ao longo deste trabalho Polya e outros autores também defendem a Resolução de Problemas em sala de aula.

As professoras Lourdes Onuchic e Norma Allevato, em seu artigo "Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas", citam algumas boas razões para se utilizar essa metodologia de ensino, entre elas podemos destacar:

- Resolução de Problemas desenvolve a crença de que os alunos são capazes de fazer Matemática e de que Matemática faz sentido.

- A formalização de toda teoria Matemática faz mais sentido para o aluno.

- Ao resolver problemas em sala de aula os alunos desenvolvem raciocínio, comunicação, conexões e representação.

Mas, afinal de contas, o que vem a ser um problema? Problema é qualquer tarefa ou atividade para o qual os estudantes não têm métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta.

A Otimização é uma ramo da matemática que trata da aplicação do conhecimento matemático a outros domínios, porém é pouco explorada nos dias de hoje na Matemática do Ensino Médio. A Otimização auxilia na resolução de problemas ligados à economia, à administração, às engenharias, a problemas de logística e transporte, e às ciências, e que pode ser explorada, em um nível elementar em sala de aula.

Vindo de encontro a essas necessidades, propomos o uso de Problemas de Otimização no Ensino Médio, para resolução de problemas simples de otimização. Problemas de otimização são aqueles cujas soluções encontradas com esta técnica são as melhores possíveis para cada caso, ou seja, resolver estes problemas significa encontrar a solução ótima para eles.

Problemas de otimização despertam a curiosidade e desafiam os jovens a buscar soluções para situações de relevante importância para a sociedade moderna. Estimula-se assim o gosto pelo estudo e pela compreensão da matemática.

Aprender Matemática é mais do que manejar fórmulas, saber fazer contas ou marcar x nas respostas: é interpretar, criar significados, construir seus próprios instrumentos para resolver problemas, estar preparado para perceber estes mesmos problemas e desenvolver o raciocínio lógico.

Neste capítulo trataremos de alguns problemas de otimização que podem ser aplicados em sala de aula.

Problema 1: (Rocha, 2013) (Universidade Federal do Piauí) Um agricultor tem 140 metros de cerca para construir dois currais: um deles, quadrado, e o outro, retangular, com comprimento igual ao triplo da largura. Se a soma das áreas dos currais deve ser a menor possível, qual é a área do curral quadrado?

Solução: Vamos considerar que x seja a medida do lado do quadrado, assim para construir o curral retangular vão restar $(140 - 4x)$ metros de cerca, logo o comprimento será

$\dfrac{3 \cdot (140-4x)}{8}$ e a largura $\dfrac{(140-4x)}{8}$. Portanto a função $A(x)$ que determina a soma das áreas dos dois currais é dada por:

$$
\begin{aligned}
A(x) &= x^2 + \frac{3}{8}(140-4x) \cdot 18(140-4x) \\
&= x^2 + \frac{3}{64}(19600 - 1120x + 16x^2) \\
&= x^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{105}{2}x + \frac{3675}{4} \\
&= \frac{7x^2 - 210x + 3675}{4} \\
&= \frac{7}{4}(x^2 - 30x + 525) \\
&= \frac{7}{4}(x-15)^2 + 525
\end{aligned}
$$

Observando a forma canônica de $A(x)$ temos que a função é mínima quando $x = 15$. Portanto, a área do curral quadrado é 225 m^2. Em outras palavras, calculamos o "x do vértice" da função quadrática $A(x)$ que é dado por $x_v = -\dfrac{b}{2a}$, como visto no capitulo 2.

Problema 2: (Nascimento, 2011). Um fazendeiro deseja construir uma cerca em sua propriedade para criar galinhas e patos. Para isso, aproveitará um muro já existente e cercará uma região retangular com dois compartimentos de medidas iguais, conforme a figura 5.1.

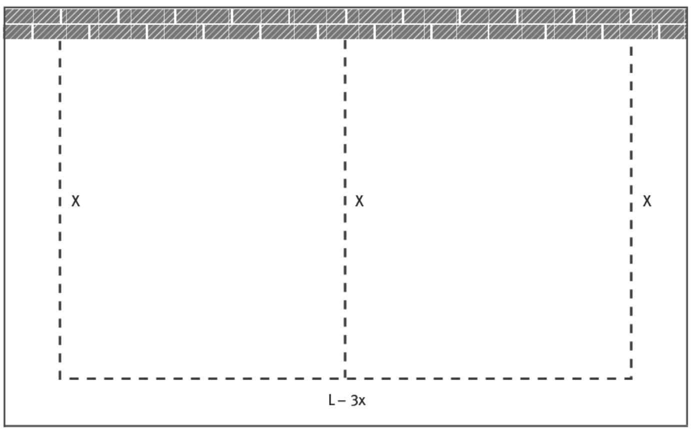

Figura 5.1: Representação gráfica do problema

Sabendo que o fazendeiro dispõe de L metros de tela, que serão totalmente utilizados, determine, em função de L:

1. o valor de x para que ele consiga cercar a maior área possível;

2. o valor da maior área possível.

Solução:

1. Tomando $A(x)$ como a área cercada, temos $A(x) = x(L - 3x)$, ou seja, $A(x) = -3x^2 + Lx$

2. Calculando as raízes da função temos $-x(3x + L) = 0$, $x_1 = 0$ e $x_2 = \frac{L}{3}$.

O problema 2 pode ser proposto inicialmente usando valores reais no lugar de L, e após alguns exemplos pode ser abordado o caso geral, ou seja, mostrando aos alunos que L é variável.

Problema 3: (Nascimento, 2011) O custo para produzir um certo produto é 3 unidades monetárias. Se esse produto for vendido ao preço de 6 unidades monetárias, são vendidas mensalmente, 3000 unidades do produto. O empresário, por experiência própria, vem observando o seguinte: quando aumenta o preço de uma unidade monetária, vende 250 unidades a menos mensalmente. O empresário deseja saber:

1. Qual o maior preço que deverá cobrar, a fim de obter a máxima receita?

2. Quantas unidades deverá produzir, mensalmente, a fim de obter a máxima receita?

3. Qual o maior preço que deverá cobrar, a fim de obter o máximo lucro?

4. Quantas unidades deverá produzir, mensalmente, a fim de que obtenha o máximo lucro?

Solução: Tomando q=*quantidade vendida mensalmente.*

Se o preço passar de 6 para $7u.m.$, então, $q = 3000 - 250 \cdot (7 - 6) = 3000 - 250$ (a quantidade cai de 250).

Se o preço passar de 6 para $8u.m.$, então, $q = 3000 - 250 \cdot (8 - 6) = 3000 - 500$ (a quantidade cai de 500).

E assim por diante.

Se em dado momento o preço for p, então,

$$\begin{aligned} q &= 3000 - 250 \cdot (p - 6) \\ q &= 3000 - 250p + 1500 \\ q &= -250p + 4500 \end{aligned} \tag{5.1}$$

A equação (5.1) é chamada de equação da procura ou função procura da empresa.

Como a receita total R_t é igual ao preço vezes a quantidade, logo, $R_t = p \cdot q$.

Multiplicando ambos os membros de (5.1) por p, obtem-se:

$$p \cdot q = (-250p + 4500)p = -250p^2 + 4500p$$

Como $p \cdot q$ é a receita total, logo

$$R_t = -250p^2 + 4500p \tag{5.2}$$

A equação (5.2) é a receita total ou função receita total da empresa.

1. Já a equação (5.2) é do 2º grau, logo seu gráfico é uma parábola. Como o coeficiente de x^2 é negativo, então, a receita total atinge o máximo no vértice da parábola. Como o vértice da parábola é dado por:
   $x_v = \dfrac{-b}{2a}$ e como $a = -250$ e $b = 4500$, logo:
   $x_v = \dfrac{-4500}{2(-250)} = 55$. Portanto, $x = 55$.
   Logo o maior preço que a empresa deverá cobrar a fim de obter a máxima receita é $9/u.m.$ E para esse preço, o valor máximo da receita total é;

   $$R_t = -250(9)^2 + 4500(9) = 20250/u.m.$$

2. E $q = -250(9) + 4500 = 2250$ unidades.

   Assim, a fim de obter a máxima receita, a empresa deverá produzir e vender 2250 unidades.

3. Como o lucro total é igual à diferença entre a receita total e o custo total C_t, logo $L_t = R_t - C_t$.

   Sendo que a empresa gasta $3/u.m.$ para produzir cada unidade do produto, o custo total é: $C_t = 3q$. Como $q = -250p + 4500$, então,

$$C_t = 3(-250p + 4500) = -750p + 13500 \tag{5.3}$$

   A equação (5.3) é a equação do custo total ou função custo total da empresa. Assim $L_t = R_t - C_t$, então,

$$\begin{aligned} L_t &= -250p^2 + 4500p - (-750p + 13500) \\ L_t &= -250p^2 + 5250p - 13500 \end{aligned} \tag{5.4}$$

   A equação (5.4) é a equação do lucro total ou função lucro total da empresa. Sendo que a equação do lucro é do 2º grau, logo, seu gráfico é uma parábola. O coeficiente de x^2 é negativo, então, o lucro atinge o máximo no vértice da parábola.

   Temos $a = -250$ e $b = 5250$, logo:

$$x_v = \frac{-5250}{2(-250)} = 10,5$$

   Portanto o maior preço que a empresa deverá cobrar, a fim de obter o máximo lucro, é de 10,5 u.m. E para esse preço o valor máximo do lucro total é: $L_t = -250(10,5)^2 + 5250(250) - 13500 = 14062,50/u.m.$

4. $q = -250(10,5) + 4500 = 1875$ unidades

   Portanto a fim de obter o máximo lucro, a empresa deverá produzir e vender 1875 unidades.

O problema 3 contempla diversos conteúdos do 1º ano do Ensino Médio como: função do 1º e 2º grau, ou seja, é um problema de otimização que pode ser explorado em sala de aula. Claro que o professor gastará no mínimo duas aulas, mas ao final dessas aulas o aluno terá tido a oportunidade de vivenciar em sala de aula algo que pode ser aplicado em seu cotidiano.

Problema 4: (UFG) Um quadrado de 4 cm de lado é dividido em dois retângulos.Em um dos retângulos, coloca-se um círculo, de raio R, tangenciando dois de seus lados opostos, de acordo com a figura a abaixo:

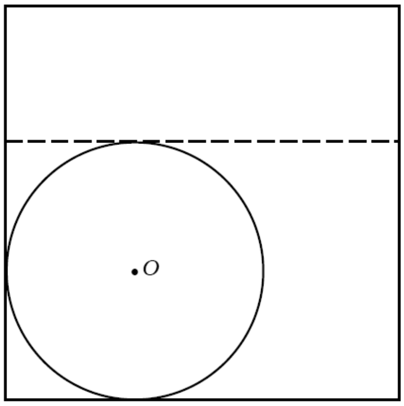

Figura 5.2: Círculo, de raio R, tangenciando dois lados opostos de um retângulo

1. Escreva uma expressão que represente a soma das áreas do círculo e do retângulo, que não contém o círculo, em função de R.

2. Qual deve ser o raio do círculo, para que a área pedida no item anterior seja a menor possível?

Observe que neste problema se faz necessário o uso da figura acima, ou seja, em muitos problemas de otimização é de suma importância a esquematização ou representação gráfica da figura. Então se o aluno não consegue entender o enunciado é importante que o professor, quando possível, desenhe no quadro ou com o uso de softwares matemáticos, faça o esboço da situação problema, pois em um estágio um pouco mais avançado os próprios alunos já serão capazes de fazerem sua esquematização.

Solução: Seja A a soma das áreas do círculo e do retângulo que não o contém, e R o raio do círculo, tem-se que as dimensões do retângulo que não contém círculo são 4 cm e $(4-2R)$ cm. Assim,

$$A(R) = \pi R^2 + 4 \cdot (4 - 2R) \Rightarrow A(R) = \pi R^2 + 16 - 8R.$$

Do mesmo modo que no item (1) foi obtida uma função quadrática em função de R, onde o coeficiente do termo quadrático é positivo, a mesma admite ponto de mínimo que ocorre quando $x = 4/\pi$.

O problema 4 trata-se de um problema geométrico de otimização, mas que pode ser resolvido usando ferramentas algébricas, ou seja, função quadrática.

Problema 5: Um boato tem um público alvo e alastra-se com determinada rapidez. Em geral, essa rapidez é diretamente proporcional ao número de pessoas desse público que conhece o boato e diretamente proporcional também ao número de pessoas que não o conhece. Em outras palavras, sendo R a rapidez de propagação, P o público-alvo e x o número de pessoas que conhece o boato, tem-se: $R(x) = k \cdot x \cdot (P - x)$, em que k é uma constante positiva característica do boato. Considerando o modelo acima descrito, se o público-alvo é de 44000 pessoas, então a máxima rapidez de propagação ocorrerá quando o boato for conhecido por um número de pessoas igual a:

a) 11000 b) 22000 c) 33000 d) 38000 e) 44000

Solução: Inicialmente devemos compreender o problema, assim é dada uma fórmula que relaciona a rapidez de propagação do boato com o número de pessoas que o conhecem, para determinado público-alvo.

Um boato se espalha de forma devagar quando poucos o conhecem, e a velocidade de propagação do boato vai aumentando conforme mais gente o conheça e passe a propagá-ló. Entretanto, se muitas pessoas já sabem do boato, a sua velocidade de propagação também vai ser baixa, pois tanta gente sabendo dele que fica mais raro encontrar alguém que não saiba. Desse modo, existe determinado número de pessoas que torna a velocidade de propagação máxima. Queremos determinar qual é esse número de pessoas.

Observando a fórmula dada, verificamos que ela é uma função quadrática:

$$R(x) = k \cdot x \cdot (P - x) \Rightarrow R(x) = -kx^2 + kPx$$

Sabemos que, em funções quadráticas, o máximo (ou o mínimo) valor ocorre no vértice. Assim, para obter o valor que maximiza a rapidez de propagação do boato, basta obter o valor da abscissa do vértice, ou seja, de x_v.

Então, para um público-alvo de 44000 pessoas, a função quadrática será:

$$R(x) = kx(44000 - x) = -kx^2 + 44000kx$$

Assim temos $a = -k$ e $b = 44000k$, o x_v é dado por $x_v = \frac{-b}{2a}$. Logo:

$$x_v = -\frac{44000k}{2(-k)} = 22000$$

Portanto, a quantidade de pessoas que maximiza a proporção de boato, neste caso, é 22000, assim a resposta certa é o item b).

Problema 6: Os alunos de uma escola alugaram, para uma festa de formatura, um salão de eventos com capacidades para 150 pessoas. Cada aluno comprometeu-se, de início, a pagar R\$ 10,00. Caso a lotação do estabelecimento não fosse atingida, o gerente propôs que cada aluno que comparecesse pagasse um adicional de R\$ 0,50 por lugar vazio. Qual deve ser a quantidade de alunos presentes a festa de formatura para que a receita seja máxima?

Solução: Seja x o número de alunos na festa, tem-se que a receita (R) é dada, em reais, pela função:

$$x\,[10 + 0,5\,(150 - x)] = -0,5x^2 + 85x.$$

Logo, a solução do problema se resume a determinar o valor de x para que a função atinja seu maior valor, isto ocorre quando $x = -\frac{85}{2} \cdot (-0,5)$, ou seja, quando $x = 85$. Portanto, o número de alunos que devem estar presentes na festa para que a receita seja máxima é 85, neste caso a receita será igual a R\$ 3612,50.

Problema 7: Movimento uniformemente variado (MUV) O movimento uniformemente variado é caracterizado pela função quadrática $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, que fornece a posição de um objeto num certo instante t. Nesse caso, a é a aceleração, b é a velocidade inicial (quando $t = 0$) e c é a posição inicial do objeto.

Temos que a velocidade média num intervalo de tempo é igual a (espaço percorrido)/(tempo de percurso). No caso do movimento de um objeto dado por uma função f, temos que sua velocidade média no intervalo $[t, t+h]$ é dada por:

$$\text{velocidade média} = \frac{f(t+h) + f(t)}{h}$$

Para $f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$, temos:

$$\begin{aligned} f(t+h) &= \frac{1}{2}a(t+h)^2 + b(t+h) + c \\ &= \frac{1}{2}at^2 + ath + \frac{1}{2}ah^2 + bt + bh + c \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f(t+h) - f(t) &= \frac{1}{2}at^2 + ath + \frac{1}{2}ah^2 + bt + bh + c - \frac{1}{2}at^2 - bt - c \\ &= ath + \frac{1}{2}ah^2 + bh \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{f(t+h) + f(t)}{h} = \frac{ath + \frac{1}{2}ah^2 + bh}{h} = at + \frac{1}{2}ah + b$$

Quando h se aproximar de zero, o valor da velocidade média de aproximará de $at + b$. Chamaremos de $v(t) = at + b$ a velocidade do ponto (no MUV) no instante t. Observe que, se $t = 0$, $v(0) = b$. É por esse motivo que chamamos b de velocidade inicial. Na função afim $v(t) = at + b$, a constante a (aceleração) é a taxa de variação da velocidade. Como ela é constante, o movimento é chamado *uniformemente variado*.

Problema 8: (Dante, 2011) Uma partícula é colocada em movimento sobre um eixo a partir do ponto de abscissa - 12, com velocidade inicial de 7 m/s e aceleração constante de -2 m/s^2. Em quanto tempo a trajetória mudará de sentido?

Observe que o problema pode ser resolvido de duas maneiras:

Solução 1: A trajetória da partícula é dada em função do tempo por:

$$f(t) = \frac{1}{2}at^2 + bt + c$$

Nesse caso, $a = -2$, $b = 7$ e $c = -12$, então, temos:

$$f(t) = -t^2 + 7t - 12$$

Ponto de máximo:

$$t = \frac{-b}{2a} = \frac{-7}{-2} = 3,5$$

Solução 2: Nesse instante, a velocidade é zero, ou seja, $v(t) = 0$. Assim:

$$v(t) = at + b \Rightarrow 0 = -2t + 7 \Rightarrow t = 3,5s$$

Portanto, depois de $3,5$ s a partícula mudará de sentido.

Todos esses problemas apresentados até então envolveram função quadrática, espero que este estudo torne possível identificar quais as características que deve ter um problema de otimização para que o mesmo seja resolvido com máximo ou mínimo de funções quadráticas.

Capítulo 6

Considerações Finais

O ensino de matemática é habitualmente realizado seguindo o modelo: definição, exemplos e exercícios de fixação. O uso de problemas de aplicação, quando ocorre, é realizado ao final do capítulo estudado. Dessa forma, esses problemas servem apenas como uma maneira de apresentar algumas aplicações práticas dos conceitos abordados. Sabe-se que esse modelo tradicional de ensino não é mais conveniente nos dias atuais.

Não é tarefa fácil para o professor, tornar a Matemática interessante e desafiadora. Por isso é muito importante utilizar problemas estimulantes, que desafiem a curiosidade do aluno e sua capacidade de raciocínio e nesse sentido a resolução de problemas pode ser uma forma de aumentar o interesse pela aprendizagem em Matemática. Para isso o professor pode utilizar o estudo de funções para facilitar a aprendizagem, pois é fator primordial na resolução de problemas.

Isso devido ao fato do estudo de funções, atuar como articulador de diferentes conteúdos, dentro e fora da própria matemática. Além disso, o ensino de funções permite ao aluno o desenvolvimento da linguagem algébrica, indispensável para expressar a relação entre as grandezas e modelar situações problemas. Desta maneira, os problemas de aplicação devem introduzir o estudo de funções, servindo de contexto e motivação para a aprendizagem dos conceitos envolvidos neste tema.

Porém, não basta apenas ensinar a resolver problemas, mas incentivar que o aluno também proponha situações problema, partindo da realidade que o cerca, que mereçam dedicação e estudo. Incentivar o hábito pela problematização e a busca de respostas de suas próprias indagações e questionamentos, corno forma de aprender.

A utilização da resolução de problemas na prática educativa da matemática é uma metodologia que deve merecer atenção por parte de todos os professores. É a partir deles que se pode envolver o aluno em situações da vida real, motivando-o para o desenvolvimento do modo de pensar matemático. O trabalho do professor deve ter como objetivo levar os alunos a pensar matematicamente.

Sendo assim, o professor deve propor situações-problema que possibilitem a produção do conhecimento, onde o aluno deve participar ativamente compartilhando resultados, analisando reflexões e respostas, enfim, aprendendo a aprender. A escolha de bons problemas para o ensino de Matemática é uma tarefa fundamental para o sucesso do uso da resolução de problemas em sala de aula.

O uso de problemas de otimização no ensino médio, além de estimular o estudo e aprofundamento dos conhecimentos de matemática, pode contribuir significativamente para a formação do educando. Possibilita uma postura mais crítica frente a muitos problemas que enfrentará em sua vida adulta, independentemente do ramo de atividade que venha seguir.

Espera-se que esse material sirva como referência ou subsídio metodológico na construção de uma sequência didática para a utilização de problemas de otimização em sala de aula em turmas de Ensino Médio, pois o uso desta metodologia pode oferecer vantagens, destacando-se uma diversidade de problemas contextualizados e, em alguns casos, interdisciplinares, que irão contribuir no desenvolvimento não somente da Matemática, mas de outras ciências, potencializando a interpretação do aluno frente às dificuldades do seu dia a dia, seja de natureza específica ou interdisciplinar.

Referências Bibliográficas

[1] BELTRÃO, Maria EliPuga e IGLIORI, Barbosa Camargo, Modelagem Matemática e Aplicações: Abordagens Para o Ensino de Funções,Educação. Matemática. Pesquisa. São Paulo, v.12, n.1, pp.17-42, 2010.

[2] BISOGNIN, Eleni e BISOGNIN, Vanilde. Explorando conceitos de Otimização com professores da Educação Básica em um curso de formação continuada: possibilidades para um trabalho em sala de aula. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v.15, nº3, pp.735-749, 2013.

[3] BRASIL. Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio. Brasília: MEC, 2000.

[4] BRASIL, Secretaria da educação Básica. Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, MEC, 2006.

[5] CALLEJO, Maria L. e VILA, Antoni. Matemáticas para aprender a pensar: El papel de las creencias en la resolución de problemas. Madri: Narcea, S.A. de Ediciones, 2004.

[6] COSTA, A.C. Conhecimentos dos Estudantes Universitários sobre o Conceito de Função. Dissertação de Mestrado. PUC: SP, 2004.

[7] COSTA, Cláudio Bispo de Jesus da: **O Conhecimento do Professor de Matemática sobre o conceito de Função** / Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ, Instituto de Matemática - IM, 2008, 117f.

[8] DANTE, Luiz Roberto. Matemática: contexto e aplicações. Volume 1. São Paulo: Editora Ática, 3ª edição.,2011.

[9] DORIGO, Marcio: Função Quadrática: Um Estudo Sobre As Representações Gráficas/Monografia de Especialização em Educação. PUC: SP, 2006

[10] GEOGEBRA. Disponível em <`http://www.geogebra.org/cms/pt.BR`>. Acesso em 12 Abril. 2014.

[11] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO,Roberto; ALMEIDA, Nilze de. Matemática: Ciência e Aplicações. Volumes1,2 e 3. São Paulo: Atual Editora, 2ª edição, 2004.

[12] LIMA, E., Carvalho, P., Wagner, E. e Morgado, A. Matemática do Ensino Médio, volume 1.Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 10ª edição, 2012.

[13] LIMA, E., CARVALHO, P., Wagner, E. e Morgado, A. Matemática do Ensino Médio, volume 2.Sociedade Brasileira de Matemática, Rio de Janeiro, 6ª edição, 2006.

[14] NASCIMENTO, Sebastião Vieira do. A Matemática do Ensino Fundamental e Médio Aplicada à Vida, Rio de Janeiro, Ciência Moderna Ltda; 2011. Pinho, Cláudia de Oliveira de Almeida Santos e Inafuco, JulioKiyokatsu, Matemática: 1º ano, Brasília, Edebe Brasil; 2013.

[15] ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (Org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: UNESP, 1999. p. 199-217.

[16] POLYA, George. A arte de resolver problemas. Rio de Janeiro: Interciência, 2ª edição.,2006.

[17] POLYA, G. A. O Ensino por Meio de Problemas. Revista do Professor de Matemática, n.7, p.11-16, 2º sem. 1985.

[18] POLYA, George. Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: KRULIK, S. e REYS, R. E. A resolução de problemas na matemática escolar. Tradução HYGINO H. DOMINGUES e OLGA CORBO. São Paulo: Atual, 1997. 360p.

[19] POZO, Juan Ignácio. A solução de problemas: aprender a resolver, resolver para aprender. Tradução: Beatriz Affonso Neves. Porto Alegre: Artmed, 1998.

[20] RESNIK, L.; COLLINS, A. Cognición y Aprendizaje. Anuario de Psicología, n.69, 1996.

[21] ROCHA, Alan Martins, Problemas de Otimização Envolvendo a Matemática do Ensino Médio, Goiânia: Profmat - UFG, 2013.

[22] SÁ, P. F. et al. A Construção do Conceito de Função: Alguns dados históricos. Traços, Belém, v. 6, n. 11, p.81- 94, 2003.

[23] STEWART, James. Cálculo - Volume 1 . Tradução: Antônio Carlos Morettie Antônio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 6ª edição, 2009.

[24] VARGAS, Dênis Emanuel da Costa. Explorando os Conceitosde GeometriaAnaliticae Funções via Resoluçãode Problemas: O Caso dos Problemasde Otimização; CEFET - Rio Pomba.

[25] VALENTE, J. A, et al. O computador na sociedade do conhecimento, SEED/MEC, Brasília, 1996.

[26] Wikipédia. Disponível em <http://pt.wikipedia.org/>. Acesso em 10 de Abril. 2014.

[27] ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. Educação Matemática em Revista, São Paulo, n. 9/10, p.10-16, abr. 2001.