Valéria Rêgo Haddad

MATERIAIS MANIPULÁVEIS: UMA INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA PARA A DIVISÃO EUCLIDIANA

Rio de Janeiro

2015

Valéria Rêgo Haddad

MATERIAIS MANIPULÁVEIS: UMA INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA PARA A DIVISÃO EUCLIDIANA

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT), do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), para obtenção do título de Mestre, sob a orientação do Professor Mestre Eduardo Wagner.

Rio de Janeiro

2015

Valéria Rêgo Haddad

MATERIAIS MANIPULÁVEIS: UMA INTERVENÇÃO EM SALA DE AULA PARA A DIVISÃO EUCLIDIANA

Trabalho de conclusão de curso, apresentado ao IMPA – Instituto de Matemática Pura e Aplicada – como requisito básico para a conclusão do curso e obtenção do grau de Pós-graduação *strictu sensu*, Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, sob a orientação do Professor Mestre Eduardo Wagner.

Data da aprovação:

BANCA EXAMINADORA:

____

Prof. Mestre Eduardo Wagner (orientador – IMPA)

____

Prof. Dr. Paulo Cezar Pinto Carvalho (IMPA)

____

Prof. Dr. Antônio Carlos Saraiva Branco (FGV)

Rio de Janeiro

2015

AGRADECIMENTOS

À CAPES, pelo incentivo e credibilidade em mim depositada.

Ao Instituto de Matemática Pura e Aplicada, pela formação oferecida.

Ao meu companheiro Marco, pelo apoio e compreensão.

Às amigas Andréia, Cristiane e Telma.

Às irmãs Irene e Líliam.

Ao orientador Eduardo Wagner, pela oportunidade de apresentar esse tema.

Homenagens

A minha avó e a meu pai, meus incansáveis admiradores, que hoje me veem de outros espaços.

Agora ficou Bem melhor Pra mim fazer a conta.
Esse material e muito Exemplar pra quem não saber ler

Gabriel Barros Santos, 6º ano.

RESUMO

O presente trabalho parte da constatação de uma realidade observada em sala de aula, na rede pública de ensino da Prefeitura do Rio de Janeiro: a dificuldade dos alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental com a operação de dividir. A partir dessa observação, colhida ao longo de 18 anos de prática pedagógica, procuramos compreender a reação do aluno frente aos problemas da divisão, bem como a extensão do comprometimento das falhas no cálculo de divisão sobre o aprendizado da Matemática nos anos finais do ensino básico. Com o objetivo de respaldar a condução deste trabalho, recorremos aos primórdios da história da operação de dividir, a fim de observar o nível de dificuldade com essa operação em diferentes culturas e os diversos métodos empregados para solucioná-la. Através da aplicação de testes específicos com alunos do 6º ano, propusemos a criação de materiais didáticos manipuláveis como forma de intervenção e auxílio nas dificuldades à operação da divisão.

Palavras-chave: operação de divisão; dificuldades; história; métodos de divisão; materiais manipuláveis.

ABSTRACT

This work starts stating a fact observed in the classroom, in the public schools of Rio de Janeiro city: the difficulty of students in the early years of elementary school with the split operation. From this observation, collected over 18years of classroom experience, we try to understand the reaction of the students facing division problems, as well as how these flaws at the division operation affect the learning of Mathematics in the final years of basic education. For supporting the conduction of this work, we look back to the early history of the split operation, in order to observe the level of difficulty with this operation in different cultures and the various methods used to solve it. By applying specific tests with students of the 6th year, we proposed the creation of manipulative learning materials as an intervention and assistance for difficulties with the operation of the division.

Keywords: division operation; difficulties; history; division methods; manipulatives learning material.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

1. INTRODUÇÃO

Este trabalho é um dos requisitos para a conclusão do Programa de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT). Conforme prevê o regimento da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), ele “versa sobre temas específicos pertinentes ao currículo de Matemática do Ensino Básico e que tenham impacto na prática didática em sala de aula”. Seguindo essa orientação, este trabalho se propõe a trazer soluções, através de materiais didáticos, para a dificuldade relatada pelos alunos sobre a falta de habilidade na operação de divisão.

Admitindo-se que a divisão é de fundamental importância para o aprendizado da Matemática, uma vez que ela aparece em vários conteúdos ao longo de todos os anos letivos, do segundo segmento do ensino fundamental até o ensino médio, pode-se afirmar que as dificuldades com essa operação acarretam, diretamente, comprometimento no aprendizado de diversos conteúdos. De acordo com Zatti, Agranionih e Enricone (2010), quando uma operação matemática é muito difícil, ou há grande possibilidade de fracasso em sua resolução, pode ocorrer desistência por parte do aluno – fato que é comumente observado nas escolas e reforça a ideia de incapacidade para a Matemática. Com efeito, a dificuldade com essa operação aritmética gera um efeito cumulativo, que alimenta uma precariedade crônica no ensino de base brasileiro. Segundo o levantamento feito pelo movimento Todos Pela Educação, com base nos exames de proficiência em Matemática na Prova Brasil e no Saeb de 2013, somente 9,3% dos alunos do Ensino Médio aprenderam o conteúdo considerado adequado.

Com o objetivo de romper a barreira representada pelo cálculo da divisão, este trabalho dedica-se a buscar uma estratégia de abordar essa operação com um material manipulável. Conforme explica Lorenzato(2006), os materiais manipuláveis podem desempenhar várias funções, dependendo do objetivo a que se prestam: apresentar um assunto, motivar os alunos, auxiliar a memorização de resultados e facilitar a redescoberta. É nesse sentido que este trabalho será conduzido: em busca de soluções.

2. "DIVIDIR É DIFÍCIL"

Segundo Aragão (2009), a divisão era considerada uma das operações mais difíceis no século XV. Citado pela autora, um célebre matemático da época, o italiano Luca Pacioli, afirmou, em 1494: "se um homem pode dividir bem, tudo mais se torna fácil".

De fato, a divisão tem seus motivos para ser considerada a operação mais difícil. Conforme atestam diversos resultados de avaliações e experiências pedagógicas em sala de aula, os alunos, aparentemente, revelam inseguranças em face desse tipo de cálculo. Diante da considerável parcela de resultados errados em contas de dividir, mesmo nas mais simples, de baixa complexidade, a estratégia muitas vezes usada pelo professor para ensinar essa operação é considerar a divisão como sendo a operação inversa da multiplicação. Contudo, se para a criança ainda não se estabeleceu o conceito da multiplicação, e ela não memorizou a tabuada, esse recurso mostra-se falho. Consequentemente, permanecerá, para ela, a dificuldade com esse algoritmo.

A divisão é a única operação em que se obtém um resultado e um resto. Além disso, a resposta de um problema que envolva divisão pode não ser nem o quociente, nem o resto, mas a relação entre ambos. Para exemplificar: imagine-se que uma pessoa tenha 20 ovos e pretenda colocá-los em caixas, onde caibam 6 ovos. Quantas caixas, no mínimo, a pessoa vai usar? Haverá sobra de espaço em alguma caixa?

Além da complexidade decorrente da relação entre quociente e resto, a divisão é a única operação aritmética em que o algoritmo é feito da esquerda para a direita. Essa quebra de paradigma representa, no processo de aprendizagem, um fator de estranhamento e, portanto, de limitações no domínio desse saber.

Outro desdobramento das dificuldades do aluno com a divisão decorre do universo dos números. Na divisão com decimais, por exemplo, são frequentes os erros de cálculo decorrentes da presença da vírgula. Além disso, o senso comum gera "vícios" de raciocínio, como o de pressupor que, quando se divide, o número obrigatoriamente diminui.

Mas será que sempre foi assim? Como era a relação dos indivíduos com a necessidade de estabelecer cálculos de divisão? O que veio em seu auxílio?

Vamos percorrer a história e ver como essa operação se desenvolveu em busca de soluções.

3. A DIVISÃO NA ANTIGUIDADE

Numa época anterior ao ano 2000 a.C., os babilônios desenvolveram um sistema de numeração sexagesimal, ou de base sessenta, que empregava o princípio posicional. Na verdade, esse sistema era uma mistura de base dez e base sessenta, em que os números menores que 60 eram representados pelo uso de um sistema de base dez simples, por agrupamentos, e o número 60 e os maiores eram designados pelo princípio da posição na base sessenta. Por exemplo, o número7385 era representado por $2(60)^2 + 3(60) + 5$, através de símbolos cuneiformes.

Os babilônios escreviam em tábuas de argila e, segundo Eves (2002), muitos processos aritméticos eram efetuados com a ajuda desse material: de multiplicação, de inversos multiplicativos, de quadrados e cubos e de exponenciais. As tábuas de inversos eram usadas para reduzir a divisão à multiplicação, e a divisão era tratada como um tipo de multiplicação. Uma divisão a **:** b, por exemplo, era vista como um problema multiplicativo, ou seja, do tipo a x 1/b.

Observando a tábua que continha os inversos multiplicativos – o que seria equivalente ao que aparece na tabela abaixo – podemos efetuar divisões:

2	30
3	20
4	15
5	12
6	10
8	7,30
9	8,40
10	6
12	5

As operações aritméticas não eram executadas de forma muito diferente de como são resolvidas hoje, inclusive a divisão.

Para ilustrar, suponhamos a divisão de 34 por 5. Podemos escrever 34 x 1/5, mas sabemos que 1/5 na forma de fração decimal é 2/10, portanto, efetuamos 34 x 2 e acrescentamos uma casa decimal. Vamos obter 6,8.

Para os babilônios, o cálculo era 34 x 12, de acordo com a tabela, resultando em 408. Como o sistema é sexagesimal, acrescentamos uma casa nessa base e obtemos 6 48/60.

Já os egípcios desenvolveram um sistema de numeração baseado no sistema decimal. Como demonstra Eves (2002), a multiplicação e a divisão eram efetuadas por uma sucessão de duplicações, com base no fato de que todo número pode ser representado por uma soma de potências de 2, como se observa no exemplo abaixo.

Para dividir 57 por 4, escrevemos o número 1 ao lado do 4 (divisor). Depois, duplica-se cada número e escrevem-se os resultados abaixo deles.

O procedimento de se dobrar os números é repetido até o ponto em que o próximo dobro do divisor exceda o dividendo. Assim:

1	4
2	8
4	16
8	32

A partir daí, vamos compor o 57, usando alguns valores (ou todos eles) que aparecem na coluna da direita. Temos 57 = 32 + 16 + 8 +1.

Portanto,

57 : 4 = (32 : 4) + (16 : 4) + (8 : 4) + (1 : 4)

Logo, temos:

57 : 4 = 8 + 4 + 2 + 1/4

Ou seja,

57 : 4 = 14 ¼

O que significa que o quociente é 14 e o resto é 1.

O processo egípcio de multiplicação e divisão não só elimina a necessidade de aprender uma tábua de multiplicação, como também se amolda ao ábaco, e de tal maneira que perdurou enquanto esse instrumento esteve em uso e mesmo depois. (EVES, 2002)

Durante a Idade Média, um método de divisão utilizado consistia em usar os fatores do divisor. Por exemplo, para dividir 1950 por 54, tomavam-se os fatores 6 e 9 de 54, dividia-se primeiro 1950 por 6, obtendo-se 325. Em seguida, dividia-se 325 por 9, obtendo-se 36 1/9. Pode-se notar que o resultado é apresentado usando números inteiros e fracionários.

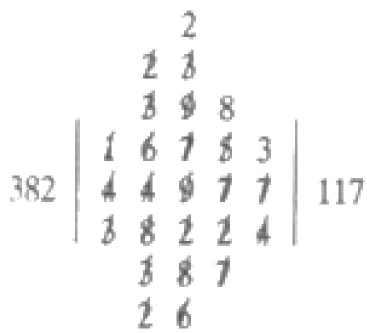
Os árabes, por sua vez, tiveram um papel fundamental na divulgação dos saberes hindus relativos ao sistema de numeração e aos métodos de cálculo. Para Ifrah (2005), o matemático e astrônomo persa Muhammad ibn Mūsāal-Khwārizmī (780 – 850 d.C.) teve muita importância devido a duas obras que contribuíram para a divulgação dos métodos de cálculo e os procedimentos algébricos de origem hindu, primeiro no mundo árabe e depois no

Ocidente cristão. Ora, suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática foram tais, que a própria nomenclatura revela uma origem em seus métodos e em seu nome: álgebra e algarismo – este uma forma de evolução direta de "al-Khwārizmī".

Um exemplo significativo dessa influência árabe no desenvolvimento de cálculos é a ampla utilização do "método do galeão" pelos europeus. De acordo com Boyer (1996), este método foi usado na Índia desde o século doze; passou depois à Arábia e em seguida à Itália, nos séculos XIV e XV. Trata-se de um processo de divisão conhecido como o "método de riscar" ou "método do galeão", por analogia com o formato do antigo navio assim denominado. A figura a seguir representa-o:

Figura 1: Divisão por galeão

Para ilustrar essa forma de calcular, podemos observar a divisão de 44 977 por 382. Nela, o dividendo aparece no meio, e as subtrações são efetuadas cancelando-se algarismos e colocando-se as diferenças acima do dividendo. Já o resto é o que fica sem riscar.



Para entender o método galeão, acompanharemos, passo a passo, as etapas da divisão de 44 977 por 382:

1) Escreve-se o divisor à esquerda do dividendo e obtém-se o primeiro algarismo do quociente (449 : 382), que é 1, e o anotamos à direita do dividendo.

382| 44977 | 1

2) Em seguida, anotamos o produto de 1 por 382, que é 382, abaixo de 449.

3) Faz-se a subtração da esquerda para a direita e colocamos o resultado acima do dividendo. E vamos riscando os algarismos, conforme eles estiverem sendo usados.

4)Assim: 4 – 3 = 1, Depois, como não dá para subtrair 8 de 4, agrupa-se o 1 que estava acima e faz-se a diferença: 14 – 8 = 6. Riscam-se o 1, o 4 e o 8, e escrevemos 6 acima do segundo 4.

5) Faz-se a operação: 9 – 2 = 7. Riscam-se o 9 e o 2 e escreve-se 7 acima do 9.

Vejamos como fica:

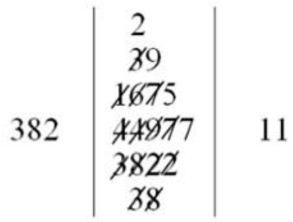
O dividendo resultante do passo anterior é 6777, que são os algarismos que não estão riscados,lidos de cima para baixo, na coluna do meio. Para obter o próximo algarismo do quociente, fazemos677**:** 382, que resulta em 1.

6) Escreve-se o produto de 1 por 382, que é 382, sendo o 3 embaixo do 8, o 8 embaixo do 2, e o 2 abaixo do 7.

7) Faz-se mentalmente a subtração 6 – 3 = 3. Riscamos estes dois números e escrevemos o resultado acima do 6.

8) Como não dá para subtrair 8 de 7, risca-se o 3, escreve-se o 2 acima do 3 e subtrai-se: 17 – 8 = 9. Risca-se o 7, o 8, e escreve-se o resultado, 9, acima do 7. Em seguida, calcula-se 7 – 2 = 5. Riscamos o 7 e o 2 e escrevemos 5 acima do 7.

Vejamos, agora, como ficou:



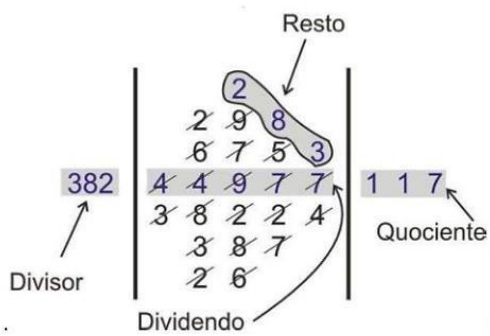
O dividendo do passo anterior é 2957, que são os algarismos que não estão riscados, lidos de cima para baixo, na coluna do meio. Para obter o próximo algarismo do quociente, fazemos2957 **:** 382, que resulta em 7.

9) Escreve-se o produto de 7 por 382, que é 2674, sendo o 2 embaixo do 3, o 6 embaixo do 8, o 7 embaixo do 2, e o 4 embaixo do 7.

10) Fazemos a subtração 2 – 2 = 0, e riscamos os dois 2. Depois: 9 – 6= 3, e riscamos o 9 e o 6 . Como não podemos subtrair 7 de 5, riscamos o 3 que acabou de ser colocado e escrevemos 2 acima dele e calculamos: 15 – 7 = 8. Riscam-se o 5, o 7, e escreve-se 8 acima do 5.

11) Faz-se 7 – 4 = 3. Riscamos o 7 e o 4 e escrevemos 3 acima do 7.

Depois desses passos, ficará assim:



Daí, chegamos ao resultado. O quociente é 117, e o resto é 283.

Esse método aparece em vários momentos, como por exemplo, na “Aritmética de Treviso”, de 1478, citada por Boyer (1996). Apesar de longo, ele foi usado em diferentes lugares da Europa. O método se assemelha ao atual algoritmo da divisão, por seu processo de execução e por se iniciar da esquerda para a direita.

Segundo Eves (2002), o desenvolvimento dos algoritmos para as operações aritméticas básicas – adição, subtração, multiplicação e divisão – começou na Índia, provavelmente, entre os séculos X e XI. Desde então, os algoritmos passaram por diversas modificações até assumirem a forma que conhecemos nos dias atuais.

O fato de o método poder apresentar diversas etapas certamente levava a uma complexidade que dificultava seu entendimento e até mesmo seu registro. Ifrah (2005) relata a história de um funcionário da Marinha de Guerra britânica, de 1663, que faz um curioso depoimento: “Minha mulher agora é capaz de efetuar sem dificuldade adições, subtrações e até multiplicações. Mas não ouso ainda perturbá-la com a prática das divisões”.

Há registros de um processo de divisão chamado “danda” usado, provavelmente, no século XV e considerado um dos precursores do nosso método atual de divisão. Um dos primeiros registros data de 1460, mas não é possível saber o momento exato do aparecimento do atual algoritmo.

Com efeito, observa-se que, nas diferentes culturas, em momentos diversos da história da Matemática, o cálculo da divisão estava associado a um procedimento com um grau de complexidade que não se estende às demais operações aritméticas. Os relatos que aparecem na literatura, bem como a profusão de métodos que viabilizassem o processo da divisão, chancelam a ideia de que a conta de dividir foi tradicionalmente identificada como “difícil”.

Prático, o homem entendeu que era preciso encontrar ferramentas auxiliares para a execução de operações trabalhosas. Criou, então, instrumentos que se tornariam indispensáveis: as calculadoras.

4. DO ÁBACO À CALCULADORA

Ao longo dos séculos, o homem foi inventando técnicas e máquinas que propiciaram a redução de tempo em operações trabalhosas. Entre os instrumentos que inventou para auxiliá-lo nas contas, o ábaco pode ser considerado o mais notável para o processo evolutivo desse trabalho. Há diferentes tipos de ábacos que foram criados em vários lugares e em épocas diferentes.

Segundo Ifrah (2005), os ábacos mais usados pelos povos ocidentais foram tábuas arrumadas em várias colunas separando as diferentes ordens. Para se representarem os números ou se efetuarem operações, colocavam-se nessas tábuas pedras ou fichas. A adição e a subtração eram feitas com facilidade, mas a multiplicação era realizada a partir de duplicações sucessivas, como faziam os egípcios. Já a divisão se restringia a uma sucessão de partilhas iguais. Desse modo, a prática do cálculo no ábaco era muito lenta e supunha um aprendizado preliminar longo e trabalhoso por parte dos aritméticos.

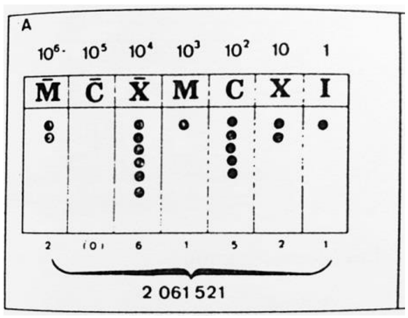
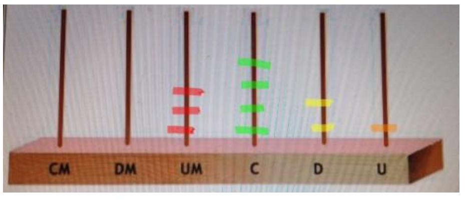


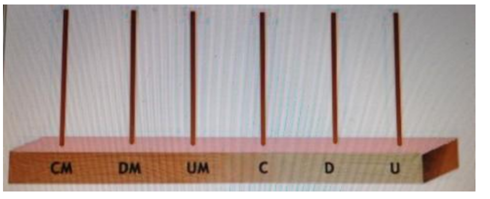
Figura 2: Princípio do ábaco romano de "calculi"

Hoje, o ábaco faz parte do acervo de materiais didáticos. Ele é mais utilizado por professores que pretendem ensinar o princípio posicional do sistema de numeração e as operações de adição e subtração. Isso não significa, contudo, que não seja possível fazer divisões através dessa ferramenta.

Para trabalhar com alunos, um recurso didático interessante é a divisão utilizando dois ábacos abertos que permitem a retirada das contas das hastes. Em um dos ábacos está representado o dividendo e no outro aparecerá o quociente. As contas são tiradas da haste de maior ordem e distribuídas em grupos, tantos quanto vale o divisor, e então esse quantitativo é inserido na haste de mesma ordem do outro ábaco. O processo se repete até se chegar à menor ordem. Caso haja conta sobrando ao longo do processo, ele é trocado por 10 contas da ordem imediatamente menor. Evidentemente, essas divisões devem ser muito bem escolhidas, pois há o inconveniente de sobrarem muitas contas em alguma etapa do processo e a troca por contas da ordem imediatamente menor não ser possível, devido a quantidade insuficiente do material. Observa-se, desse modo, que há uma limitação do ábaco para fazer divisão.

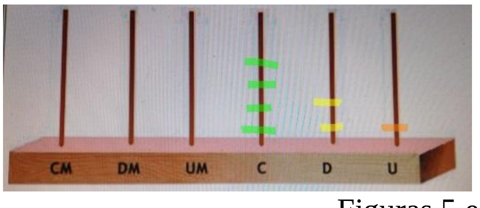
Como exemplo, dividiremos 3421 por 3. O dividendo fica representado no ábaco da esquerda e o quociente, no ábaco da direita.

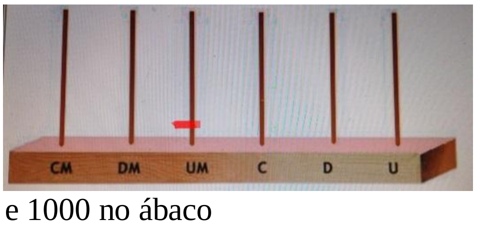




Figuras 3 e 4: 3421 no ábaco e ábaco vazio

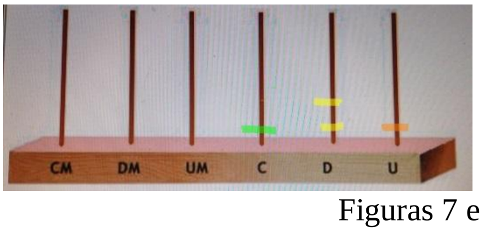
Pegando as três contas da ordem das unidades de milhar e dividindo por 3, os ábacos ficarão assim:

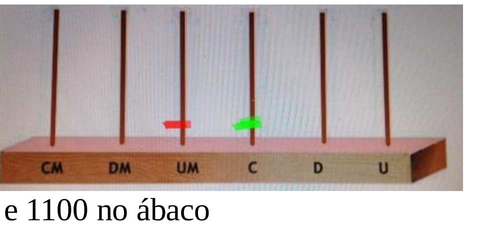




Figuras 5 e 6: 431 e 1000 no ábaco

Depois, pegamos as 4 contas da ordem das centenas e dividimos por 3. O ábaco da direita receberá 1conta na haste das centenas e sobrará 1conta no ábaco da esquerda. Assim:





Figuras 7 e 8: 121 e 1100 no ábaco

Agora, é necessário trocar a conta que sobrou na centena por 10 contas para colocar na haste das dezenas, que ficará, momentaneamente, com 12 contas, uma vez que o máximo que podemos ter em uma ordem são 9 contas, como mostra o ábaco abaixo.

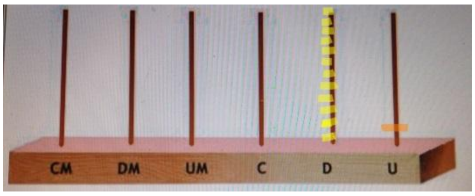
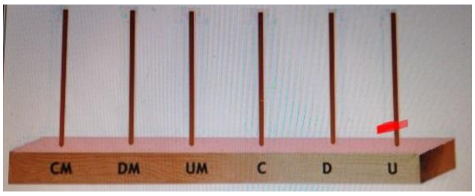
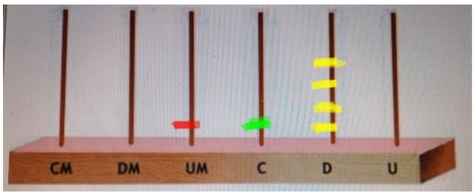


Figura 9: 12 dezenas e 1 unidade no ábaco

Agora, as 12 contas da haste das dezenas serão divididas por três, cabendo 4 contas na haste das dezenas do ábaco à direita.





Figuras 10 e 11: 1 e 1140 no ábaco

A conta que permaneceu na ordem das unidades não é divisível por três, mas se fizéssemos um ábaco com hastes para as casas decimais, o processo seguiria da mesma forma. Portanto, podemos ler no ábaco da esquerda que o resto é 1, e no ábaco da direita, temos o quociente 1140. Neste exemplo, pode-se notar que o ábaco é um bom instrumento para que o aluno entenda o zero no quociente.

Outro ábaco que é bastante utilizado é o Soroban, que foi introduzido no Brasil por volta de 1959. É um ábaco japonês fechado, também apropriado para o ensino a deficientes visuais.

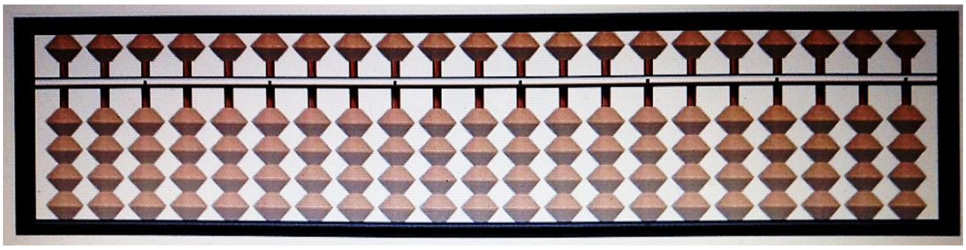


Figura 12: Ábaco Soroban

No Soroban, cada haste contém 5contas, lembrando-se que a conta que está separada por uma haste horizontal vale 5.

Para efetuar a divisão, o divisor fica do lado esquerdo do ábaco, e o dividendo, à direita. As contas serão levadas no sentido da haste horizontal até formar o número.

Vamos dividir 7628 por 6. Esses números ficam representados no ábaco da seguinte maneira:

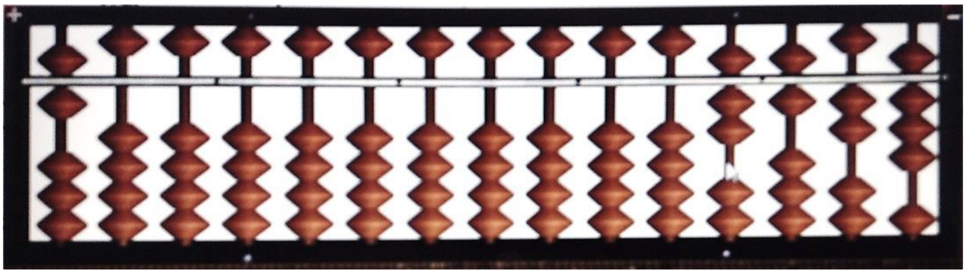


Figura 13: 7628 dividido por 6 no Soroban

O quociente será colocado duas hastes à esquerda do dividendo, já que o divisor só tem um algarismo. Caso ele tivesse dois algarismos, o quociente ficaria posicionado a 3 hastes do dividendo.

Dividindo 7 por 6, encontramos 1 e restam 16, como mostra a figura a seguir.

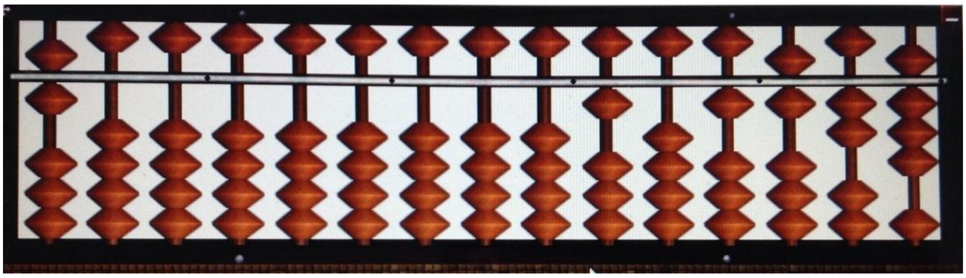


Figura 14: 1º passo da divisão no Soroban

Agora, vamos dividir 16 por 6. O quociente encontrado é 2, e restam 4, com está na figura.

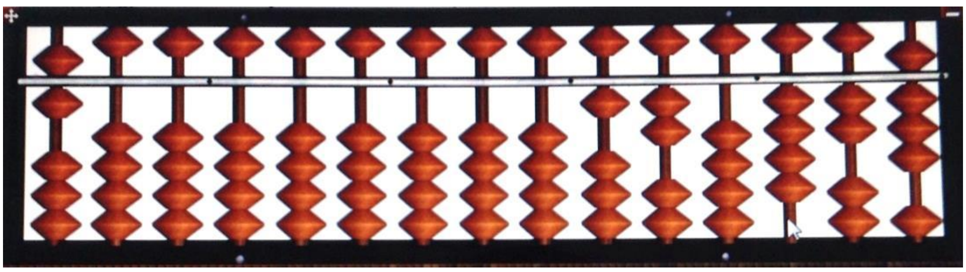


Figura 15: 2º passo da divisão no Soroban

Temos agora 42 para ser dividido por 6. O quociente é 7, e o resto é zero.

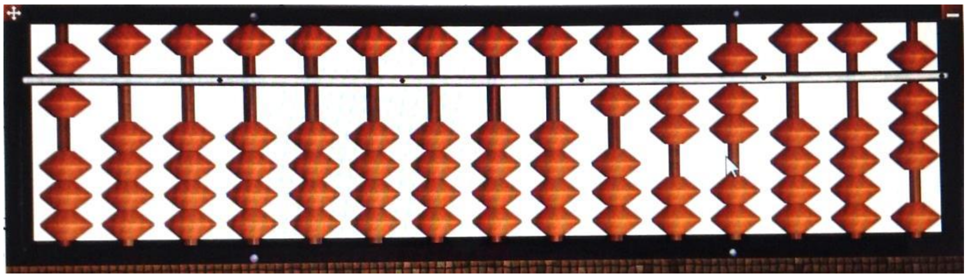


Figura 16: 3º passo da divisão no Soroban

E, por fim, dividimos 8 por 6, que resulta em 1, e o resto é 2. O que vemos na figura é o quociente 1271 e o resto 2.

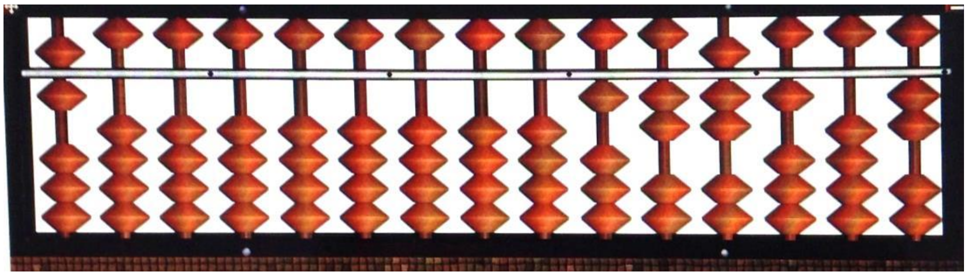


Figura 17: Resultado da divisão no Soroban

É possível observar que, para fazer divisão no Soroban, é necessário saber tabuada.

Para uma explicação mais detalhada desse procedimento, vale conferir o endereço http://estagiocewk.pbworks.com/w/page/35877758/Abaco%20x%20Soroban.

Com efeito, apesar de o ábaco apresentar algumas limitações, ele deu uma importante contribuição para evolução tecnológica, no que se refere aos mecanismos de facilitação de cálculos. Outro desses facilitadores são as barras criadas pelo matemático escocês Jonh Napier, do século XVI. As barras de Napier foram criadas para auxiliar a multiplicação, em uma época em que não se havia estabelecido a tabuada. Nessa operação de cálculo, as divisões também se tornaram mais simples, pois elas foram transformadas em subtrações.

Para usar as barras de Napier, devemos alinhar aqueles que apresentam no topo os algarismos do divisor (em verde). Por exemplo, vamos fazer uma divisão por 384. Podem-se ver quatro bastões alinhados. Para escrever a tabuada, fazemos as somas das diagonais a fim de formar as ordens dos produtos, como está marcado em vermelho. Rapidamente, os produtos são conhecidos. Vejamos:

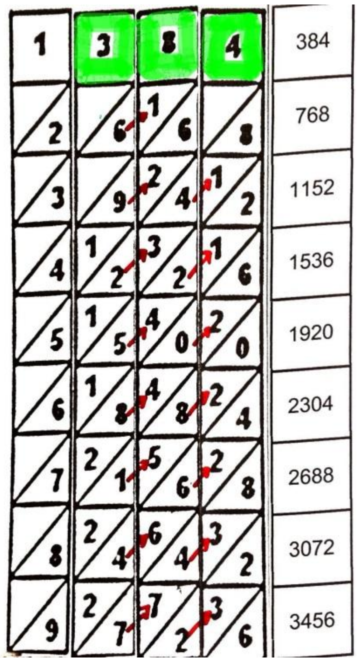


Figura 18: Barras de Napier

Com a posse dessa tabela, podemos efetuar 10386 divididos por 384, por exemplo. Usando o processo longo, faremos apenas subtrações. Deste modo:

$$\begin{array}{l|l} 10368 & 384 \\ \cline{2-2} \underline{-768} & 27 \\ 2688 & \\ \underline{-2688} & \\ 0 & \end{array}$$

Além das barras, Napier criou os logaritmos que influenciaram diretamente na invenção da régua de cálculo, concretizada por William Oughtred, matemático inglês também do final do século XVI. A régua é considerada um dos primeiros dispositivos analógicos de computação.

Várias engenhocas mecânicas foram criadas ao longo do tempo, com o objetivo de fazer cálculos; algumas só faziam adições e subtrações. Em 1820, foi construída a calculadora que realizava as quatro operações. Esse equipamento foi usado até o advento das calculadoras eletrônicas.

Em 1854, o matemático inglês George Boole estudou e empregou ideias algébricas no domínio da lógica. Ele concebeu uma forma de álgebra com três operações fundamentais: AND, OR e NOT, com as quais podia manipular proposições quase da mesma maneira como se faz com os números onde se processam dois tipos de entidades: falso ou verdadeiro.

Claude Shannon foi o primeiro a aplicar o trabalho de Boole na análise e projeto de circuitos lógicos, em 1938. Foi criado o conceito de "portas lógicas", com as quais é possível implementar qualquer expressão gerada pela álgebra booleana. Charles Peirce, matemático e filósofo norte-americano, compreendeu que a lógica de Boole servia para descrever os circuitos elétricos de comutação, onde eles estão ligados ou desligados. Desse modo, um interruptor funciona como uma porta lógica ao permitir ou não que a corrente prossiga até o interruptor seguinte.

Com essa ideia, a calculadora foi criada. Ela realiza as operações aritméticas sobre os números representados na forma binária, portanto, quando digitamos um número, os circuitos internos convertem esse número decimal em binário.

O processo para dividir números binários é o método longo, que é utilizado também para os decimais.

Vamos aos exemplos.

Para dividirmos 12 por 3, a calculadora, inicialmente, converte 12 em $(1100)_2$ e 3 em $(11)_2$.

A conversão é feita dividindo-se o número digitado por 2. Obtém-se o binário com o último quociente e todos os restos, de baixo para cima. A expressão é esta:

$12 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2 + 0 \times 1 = (1100)_2$.

A divisão ficará assim:

```
 1100 |11
-11    100
  000
```

O quociente $(100)_2$ é convertido em 4 na base 10.

Um outro exemplo para ilustrar será 39 : 6.

Fazendo a conversão para binário, temos $39 = (100111)_2$ e $6 = (110)_2$

Eis a divisão:

```
100111 |110
-110    110,1
00111
  -110
  00110
    -110
    0000
```

O quociente $(110{,}1)_2$ é convertido em 6,5.

Na maioria dos sistemas digitais, as subtrações são parte da operação de divisão, no entanto, a calculadora só faz adições. No sistema decimal, transformamos a subtração em adição, representada por a - b = a + (-b). Como b e -b são números opostos, sabemos que a soma é zero.

Usamos o mesmo conhecimento no sistema binário. O procedimento para achar o oposto de um número é chamado de complemento a 2.

Vejamos um exemplo:

Seja $(10001)_2$. Negamos o número, ou seja, onde está1 troca-se por 0 e vice-versa. Ficamos com $(01110)_2$. Depois somamos 1. Obtemos $(01111)_2$.

Observa-se que esses números são opostos, pois:

$$\begin{array}{r} 10001 \\ +\,01111 \\ \hline 00000 \end{array}$$

A calculadora é capaz de executar esses dois procedimentos com as operações NOT e OR.

Portanto, a divisão é feita a partir de adições!

O primeiro exemplo que apresentamos de divisão, de 12 por 3, é feito pela calculadora assim:

$$\begin{array}{l|l} 1100 & 11 \\ \cline{2-2} \underline{+01} & 100 \\ 0000 & \end{array}$$

Daí, o quociente é $1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0 = 4$.

O outro exemplo **39 : 6** é executado pela calculadora assim:

$$\begin{array}{l|l} 100111 & 110 \\ \cline{2-2} +\ \underline{010} & 110{,}1 \\ 10111 & \\ +\ \underline{010} & \\ 0000110 & \\ \ +\ \underline{010} & \\ \ \ \ 000 & \end{array}$$

O quociente é$1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0 + 1 \times 2^{-1} = 6{,}5$.

De acordo com o exemplo acima, vemos que a calculadora não efetua uma divisão euclidiana. Ela continua o cálculo até o resto ser zero, ou encerra o cálculo quando atingir o número de casas que o visor pode mostrar.

Um bom motivo para se pegar a calculadora simples e trabalhar a divisão com os alunos é o resgate do resto.

Uma possibilidade é propor à turma o seguinte problema:

Uma escola vai levar seus alunos para um passeio em ônibus com 42 lugares. Sabendo que 208 alunos confirmaram a ida ao passeio, a diretora calculou quantos ônibus seriam alugados e fechou o contrato com a empresa responsável. No dia do evento, porém, mais cinco alunos resolveram ir. Será possível levá-los? Pelo menos algum desses 5 conseguirá ir ao passeio?

De posse de uma calculadora, as respostas podem ser obtidas assim:

Dividimos 208 por 42e obtemos, aproximadamente, 4,9. Daí, ficamos sabendo que 5 ônibus foram contratados. Então, multiplicamos 42 por 5 o que resulta em 210. Logo, concluímos que somente 2 desses alunos poderão ir ao passeio.

Acompanhamos, nesse capítulo, a evolução dos instrumentos criados para nos auxiliar nos cálculos aritméticos. No caso da divisão, todos apresentaram alguma limitação. E embora uma calculadora simples economize o nosso tempo, ela não é um recurso sempre disponível ou permitido, como acontece em situações de concurso e outros processos de avaliação; sendo assim, continuamos presos aos algoritmos.

Isso nos remete à baixa Idade Média, com a disputa entre "abacistas" e "algoristas". Nesse contexto, de um lado, estava a Igreja e os profissionais do ábaco; e do outro, aqueles que tinham aprendido o sistema de numeração decimal e suas regras de cálculo no mundo árabe.

Figura 19: Disputa entre “alegorista” e “abacista” (xilogravura,1503)

Nas palavras de Ifrah (2005, p. 317), "na verdade, parece que a Igreja não pretende favorecer a democratização do cálculo, que ocasionaria seguramente para ela a perda de seu monopólio, em matéria de ensino e, em consequência, a perda de poder. Ela prefere que o cálculo continue sob a alçada exclusiva dos especialistas, que aliás pertencem quase todos ao clero.”

Enfim, parece que enfrentamos uma disputa semelhante. E, enquanto a calculadora não vence definitivamente a guerra, precisamos recorrer a estratégias criativas e funcionais que auxiliem os alunos nessa tão "difícil" operação de divisão.

5. A ABORDAGEM DA DIVISÃO EM LIVROS DIDÁTICOS

Presente nos PCNs, o capítulo Conteúdos conceituais e procedimentais, do 1º ciclo (até o 3º ano), sugere que os cálculos de divisão sejam feitos apenas "por meio de estratégias pessoais", logo, os livros deste ciclo não serão analisados aqui. Já no 2º ciclo, que corresponde ao 3º e 4º anos, a orientação é que a "resolução de operações com números naturais seja feita por meio de estratégias pessoais e do uso de técnicas operatórias convencionais, com compreensão dos processos nelas envolvidos." (p. 51 e 59).

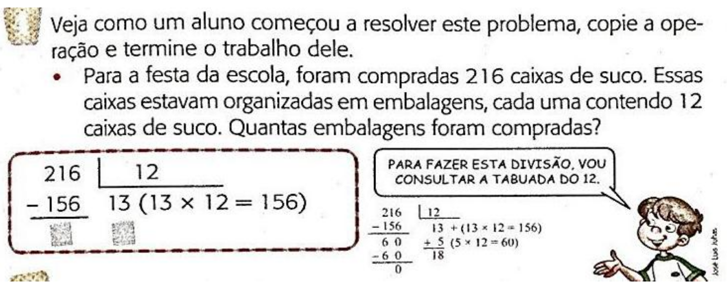
Neste capítulo, então, vamos apresentar a abordagem e as estratégias pedagógicas implementadas por quatro coleções de livros didáticos – duas de 4º e 5º anos, e duas de 6º ano – e por uma apostila elaborada pela Secretaria Municipal de Educação do Rio de Janeiro. Todos esses livros estão disponibilizados para as escolas do ensino fundamental da Prefeitura do Rio de Janeiro. Em nossa abordagem, o foco de descrição e análise desse material didático é a operação de divisão aplicada aos anos de transição do 1º para o 2º segmento (ou do 2º para o 3º ciclo).

A primeira análise será a dos livros da coleção *Hoje é dia de Matemática*, das autoras Carla Cristina Tosatto, Cláudia Miriam Tosatto e Edilaine do Pilar F. Peracchi. Nosso objetivo é averiguar como a obra aborda a divisão e seus procedimentos de cálculo.

O primeiro livro a ser analisado é do 4º ano. O capítulo 5, da unidade 2,intitulado "Dividindo igualmente", se inicia com uma tirinha da Turma da Mônica, mostrando uma divisão desigual para motivar uma reflexão, que é feita na seção "Trocando ideias" através de perguntas. Em seguida, três problemas de divisão são apresentados, e os alunos devem mostrar suas formas de resolução, que podem ser contagem, cálculo ou desenho. Na questão seguinte, é informado como se conferem os cálculos em uma calculadora.

Depois de seis problemas propostos, as autoras apresentam mais um, como desafio, acompanhado das tentativas de resolução elaboradas por 4 crianças. Uma fez um desenho, outra usou a calculadora, a terceira fez uma conta num papel, assim como a última criança, que exibe uma folha papel com algumas subtrações sucessivas do que seria o divisor até chegar a zero. Então, aparece ampliado o cálculo da terceira menina usando o **método por estimativas**, conhecido também como "método americano". Em seguida, observa-se o problema, já com a conta armada e um valor no quociente. Vêm, então, exercícios para treinar o método apresentado.

No primeiro capítulo da unidade 4, intitulado “Contagens e multiplicações”, discute-se a possível origem de contar de 12 em 12, relatada no livro de Georges Ifrah. Depois, na seção “Trocando ideias”, há algumas perguntas, levando o aluno à palavra “dúzia”. Nesse capítulo, os alunos fazem várias multiplicações por 12 até chegarem ao problema a seguir, extraído do livro em questão.


Veja como um aluno começou a resolver este problema, copie a operação e termine o trabalho dele.

- Para a festa da escola, foram compradas 216 caixas de suco. Essas caixas estavam organizadas em embalagens, cada uma contendo 12 caixas de suco. Quantas embalagens foram compradas?

Figura 20: Reprodução de livro didático

Certamente, a intenção é começar a fazer divisões com divisor de dois algarismos, embora só tenham sido sugeridas três divisões por 12.

Ao longo do capítulo 3 da unidade 5, que tem o título “Multiplicando e dividindo”, começam a surgir as divisões em que o divisor tem dois algarismos. O método de resolução continua sendo o americano. Mas, a partir deste capítulo, o livro lista a tabuada e depois propõe divisões, até chegar aos cálculos de dividir em que se lê somente parte da tabuada.

Ainda nesse capítulo, para efetuar 435 : 3, recorre-se ao “material dourado”, sobre o qual falaremos mais adiante. No passo seguinte, a conta é armada com as letras C(centena), D (dezena) e U(unidade) em cima de cada algarismo correspondente; só então o “método longo” é esmiuçado para os alunos. E alguns problemas com dividendos com três algarismos são sugeridos, para se colocar em prática o novo método.

O capítulo 5 da unidade 8, que é justamente o último do livro, recebe o título “Diferentes maneiras de resolver uma divisão”. Nesse capítulo, as autoras apresentam os nomes dos termos e a relação entre eles, a partir de uma divisão exata, o que não nos parece muito interessante, uma vez que o zero é elemento neutro da adição. Sendo assim, a nova informação em nada contribui para a compreensão e a resolução de um cálculo de dividir. Para encerrar, elas ensinam a fazer divisões mentalmente a partir de decomposições do dividendo.

A análise dos capítulos que abordam a operação da divisão no livro do 5º ano das mesmas autoras revela que os nomes dos termos da divisão são apresentados a partir de uma operação desenvolvida pelo método americano.(capítulo 2 da unidade 2 – “Dividindo e multiplicando”.)A relação entre os termos da divisão é estabelecida, e é explicado quando uma divisão é exata. Em seguida, são propostos diversos exercícios de assimilação e fixação. Ocorrem também problemas com o recurso da calculadora. Depois, no item “jogando e aprendendo”, o livro traz a “Trilha do resto”, um jogo bem interessante para as crianças trabalharem com cálculo mental e foco no resto.

Já no capítulo 6 da unidade 4, que tem o título “Divisões”, há um exemplo e problemas de divisão, usando estimativas. Em seguida, vêm vários problemas de divisão elaborados com a ideia de se fazer estimativa usando a multiplicação para chegar próximo ao dividendo.

Observamos que, pela forma como se desenvolve, a coleção recorre à resolução de situações-problema como ponto de partida para o aprendizado. Cada livro é dividido em 8 unidades. Cada unidade é subdividida em5 ou 6 capítulos, que são iniciados com uma problematização, com o intuito de que o estudante reflita e troque ideias em sala de aula. O formato cíclico da abordagem da divisão é um aspecto bastante positivo do livro, uma vez que ajuda a sedimentar, nos níveis iniciais, o aprendizado dos processos dessa operação.

A segunda análise que faremos será a da coleção *Pode contar comigo,* dos autores José Roberto Bonjorno e Regina Azenha.

O livro do 4º ano apresenta a operação de divisão na unidade 6, em um capítulo chamado "Revendo ideias da divisão com números naturais". Como se vê, o título faz crer que, no livro do 3º ano, a operação já foi abordada. Os autores apresentam um problema cuja ideia central é distribuir algo em partes iguais, frisando a relação desse desafio com o cálculo de dividir. Parte para o algoritmo, usando o **método longo**. Em sua explicação, nota-se a preocupação com as ordens dos algarismos que formam o dividendo. Por exemplo, se está dividindo dezena, o resultado será dezena. No problema seguinte, o livro reforça esta ideia, com uma divisão em que o algarismo de uma das ordens do dividendo é menor que o divisor. Explica-se, assim, a transformação de uma ordem em outra em que a divisão é possível.

No volume do 5º ano, a divisão é assunto da unidade 3 em um capítulo intitulado "As ideias da divisão". Inicia-se com um problema de repartir em partes iguais e utiliza o método longo para resolver a divisão, explicando o passo a passo, da mesma forma como se fez no volume anterior. Depois, os autores sugerem problemas de "quantas vezes uma quantidade *cabe* em outra”.

Foi possível verificar, nas duas coleções do 2º segmento, abordagens bem diferentes. Enquanto a primeira coleção explorou a habilidade de estimar e caminhou para um entendimento do método longo, a segunda coleção focou nos procedimentos do algoritmo, tomando o devido cuidado para evitar o recorrente erro de não colocar o zero significativo no quociente.Ora, a pergunta que fica é a seguinte: com duas coleções tão diferentes, o que acontece com o aluno que inicia seu aprendizado por um método e no ano seguinte é apresentado a outro?

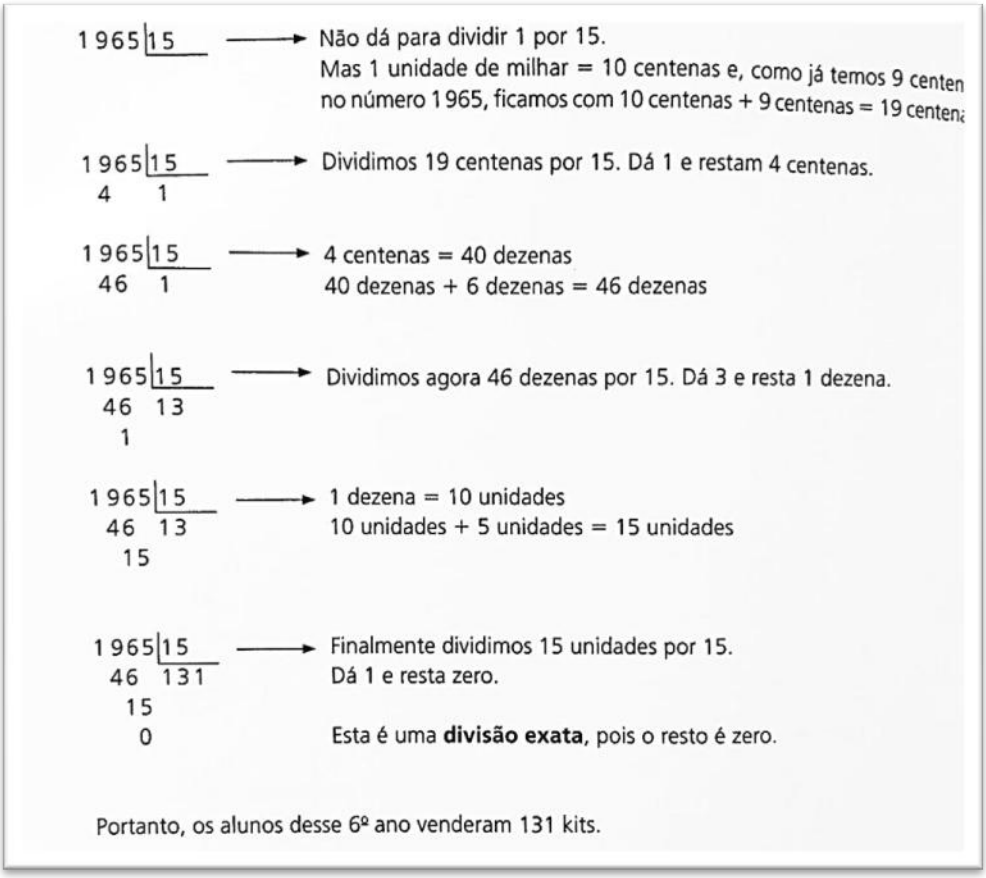
A apostila elaborada pela Secretaria Municipal de Educação é o primeiro material a ser analisado na abordagem do 6º ano.A apostila, que é distribuída a todos os alunos da rede, apresenta a divisão como a operação inversa da multiplicação e trabalha com as duas ideias associadas à divisão: repartir uma quantidade em partes iguais e saber quantas vezes um número cabe em outro. Exibe duas divisões pelo **método longo**, sendo uma exata e a outra com resto. Os nomes dos termos também são apontados. Em seguida, são sugeridos diversos problemas.

Na apostila destinada ao professor, lê-se a seguinte observação: "A divisão é um dos conteúdos que apresentam maior dificuldade entre os alunos. Sugerimos que reveja divisões com divisores de apenas um algarismo associados às ideias de metade, terça parte, quarta parte. Posteriormente, comece a propor divisões de 2 algarismos."

Como a Secretaria de Educação do Rio de Janeiro aplica provas bimestrais de múltipla escolha e tem acesso a todas as respostas de cada aluno, é possível fazer um levantamento estatístico a partir dos índices de acerto em cada item da prova. O material elaborado e as respostas obtidas, segundo os diferentes níveis de dificuldade, nos revelam obstáculos, particularmente quanto à operação de divisão.

Com relação aos livros do 6º ano, iniciaremos pelo *Praticando Matemática*, de Álvaro Andrini e Maria José Vasconcellos, publicado em 2012. O assunto em questão localiza-se na unidade 4, capítulo 2, sob o título “A divisão”.

O capítulo se inicia com a apresentação de um problema e sua resolução através da divisão. Emprega o **método curto** do algoritmo com seu passo a passo. A reprodução da página do livro analisado permite-nos acompanhar visualmente a estrutura e o desenvolvimento dessa operação, aplicada a um problema referente à venda de “kits” pelos alunos do 6º ano.



1 965 | 15 → Não dá para dividir 1 por 15.
Mas 1 unidade de milhar = 10 centenas e, como já temos 9 centen
no número 1 965, ficamos com 10 centenas + 9 centenas = 19 centen

1 965 | 15 → Dividimos 19 centenas por 15. Dá 1 e restam 4 centenas.
4 1

1 965 | 15 → 4 centenas = 40 dezenas
46 1
40 dezenas + 6 dezenas = 46 dezenas

1 965 | 15 → Dividimos agora 46 dezenas por 15. Dá 3 e resta 1 dezena.
46 13
1

1 965 | 15 → 1 dezena = 10 unidades
46 13
15
10 unidades + 5 unidades = 15 unidades

1 965 | 15 → Finalmente dividimos 15 unidades por 15.
46 131
Dá 1 e resta zero.
15
0
Esta é uma **divisão exata**, pois o resto é zero.

Portanto, os alunos desse 6º ano venderam 131 kits.

Figura 21: Reprodução de livro didático

É necessário comentar o primeiro passo apontado por eles: “Não dá para dividir 1 por 15”. Cabe uma reflexão sobre essa frase, uma vez que, na prática de sala de aula, observa-se que um dos erros mais frequentes cometidos pelos alunos é não colocar o zero significativo no quociente, e é exatamente com a ideia de que “não dá para dividir” que procuram justificar esse procedimento errado.

Na página seguinte, os autores recorrem a outra técnica para resolver o problema da venda dos kits: o **método por estimativas**. A imagem também foi colhida diretamente da obra de Andrini e Vasconcellos.

Para saber quantos kits foram vendidos, você também poderia raciocinar assim:

- Vendendo 100 kits, os alunos arrecadariam $15 \cdot 100 = 1\,500$ reais:

$$\begin{array}{r|l} 1\,965 & 15 \\ \cline{2-2} -1\,500 & 100 \\ \cline{1-1} 465 & \end{array}$$

$1965 - 1500 = 465$ (Ficam faltando 465 reais para completar o valor arrecadado.)

- Por aproximação, podemos colocar mais 30 kits, pois $30 \cdot 15 = 450$.

$$\begin{array}{r|l} 465 & 15 \\ \cline{2-2} -450 & 30 \\ \cline{1-1} 15 & \end{array}$$

- Como $465 - 450 = 15$, sobram 15 reais, que correspondem a mais 1 kit.

$$\begin{array}{r|l} 15 & 15 \\ \cline{2-2} -15 & 1 \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

- Finalmente, $100 + 30 + 1 = 131$.

Repare que, ao dividir 1 965 por 15, qualquer dos raciocínios feitos levou ao mesmo resultado: foram vendidos 131 kits.

Figura 22: Reprodução de livro didático

O segundo livro do 6º ano a ser analisado é *Matemática: teoria e contexto*, dos autores Marília Centurión e José Jabubovic.

O livro é dividido em 7 capítulos; o primeiro chama-se " Números naturais, operações e resolução de problemas". Ele está dividido em 11 subcapítulos, e o sexto é "Multiplicação e divisão: operações inversas". Esse título serve de introdução. Em seguida, os autores apresentam um problema e sua solução. No entanto, não se verifica nenhum procedimento de cálculo.

Na página seguinte, mostram a divisão euclidiana e a relação de ordem entre resto e divisor. E oferecem dois exemplos simples, aplicando essas relações. É interessante essa abordagem, uma vez que ela permite ao professor a flexibilidade de escolher o método de divisão mais adequado, de acordo com o conhecimento e as habilidades demonstrados pela turma.

Ao analisar os livros do 6º ano, podemos observar os diferentes enfoques na prática pedagógica da operação de divisão. Enquanto uns resgatam as técnicas tradicionais de divisão, outros contemplam possibilidades de adaptação e permitem ao aluno recorrer a aspectos de sua realidade, o que garante uma margem de liberdade ao professor e ao próprio processo ensino-aprendizagem.

Cientes de que os alunos apresentam muitas dificuldades com a divisão, os autores dos livros didáticos aqui analisados demonstram-se empenhados em diversificar e facilitar a abordagem dessa operação. Nesse sentido, renovam o objetivo de facilitar a divisão e reduzir seu tempo de cálculo, da mesma forma como, ao longo da história, buscaram-se instrumentos facilitadores, como vimos no capítulo anterior deste trabalho.

6. REVISÃO DA LITERATURA

Ao longo da história do ensino da Matemática, os teóricos questionaram o uso do material didático (designado MD). Alguns o defenderam, e outros sinalizaram críticas e preocupações com a abordagem didática no uso desses materiais. Entre os que defendem, estão aqueles que acreditam no método empírico. Para estes, o ensino deveria partir do concreto para o abstrato, com a justificativa de que o conhecimento começa pelos sentidos e só se completa com sua prática efetiva, ou seja, com exercícios (LORENZATO, 2006).

Essa visão inspira-se no pensamento de Comenius (1592-1670), educador que afirmava que o saber parte dos sentidos e vai do manipulável para o abstrato. Esse pensador defendia que o ensino deveria dar-se a partir da análise e do manuseio de objetos concretos da realidade do educando.

Ainda reforçando sua importância, na opinião de Turrioni (2004, p. 78), o MD exerce um papel primordial no processo da aprendizagem, pois facilita a "análise e desenvolve o raciocínio lógico, crítico e científico". Revela-se, assim, um recurso fundamental e "excelente para auxiliar o aluno na construção de seus conhecimentos".

O material didático manipulável, contudo, pode ter, para o professor, um significado e uma importância que não sejam compartilhados pelo aluno. Nesse caso, o aluno não seria capaz de ver a relação com o conteúdo que o professor quer trabalhar. Em situações extremas, esse material pode até mesmo tornar-se um obstáculo ao processo de ensino-aprendizagem, dependendo das perspectivas adotadas pelo professor e pelos alunos.

Para evitar que isso aconteça, o professor deve, como mediador desse processo, refletir sobre o MD utilizado e garantir, a partir da sua experiência e de suas convicções, que ele seja plenamente satisfatório para o processo de construção do conhecimento do aluno. Além disso,é importante que o professor antecipe possíveis problemas a serem enfrentados pelos alunos na sua manipulação ou mesmo na produção desses materiais de estudo.

Dessa forma, observa-se que o trabalho com MD exige do professor uma predisposição para lidar com uma série de situações que possam surgir no decorrer de suas atividades. Fatores como o tempo de duração de cada tarefa, a forma de interação dos alunos e a preocupação com a efetiva apreensão do sentido são fundamentais; caso contrário, essa iniciativa revela-se inútil.

De acordo com os PCNs, “a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.” (BRASIL, 1997, p.19)

No caso da divisão, o material manipulável deve proporcionar a compreensão efetiva dos diferentes significados dessa operação: a **partição**, na qual é dado um todo e a quantidade de partes que devem ser distribuídas, e a **quotição**, na qual é dado um todo, e o valor de cada parte que o constitui. A literatura mostra que problemas de partição são mais fáceis que os de divisão por quotas, e uma das explicações para isso é que a noção inicial que a criança tem sobre divisão, derivada das experiências sociais, é a de repartir um todo em partes iguais até que este se esgote.

Um aliado significativo na busca da compreensão desses significados inerentes à divisão é o “material dourado”. Ele foi criado com o intuito de auxiliar o ensino e a aprendizagem do sistema de numeração decimal posicional e dos métodos para efetuar as operações fundamentais, ou seja, os algoritmos. Esse material é composto por cubinhos, barras constituídas por dez cubinhos, placas formadas por dez barras e um “cubão”, que corresponde a dez placas. Manipulável como o ábaco, o material dourado favorece a ideia da partição, contudo, mostra alcance restrito no domínio do algoritmo da divisão. Neste trabalho, procuramos apresentar um material manipulável que favoreça a compreensão da ideia mais “difícil” – a da quotição.

7. DESCRIÇÃO DO MATERIAL

Antes de passarmos para o material propriamente dito, falaremos um pouco de como surgiu a ideia de confeccioná-lo. A inspiração para criá-lo veio da experiência com alunos que declaram não saber o algoritmo da divisão euclidiana. Eles afirmam que, embora seus professores se esforcem para explicar a divisão no quadro de giz, eles não conseguem entendê-la. Esse conflito persistente entre a conduta pedagógica e a construção do conhecimento nos motivou a buscar formas diferentes de levar o aluno a entender o algoritmo da divisão.

No quadro, fazemos a revisão com o auxílio do desenho de uma réguagraduada.Com a medição de partes dessa régua, que demonstram o quanto cada parte cabe no todo,são mais frequentes exclamações como "Ah! Agora, entendi!", ou "Ah, é fácil!". A ideia, portanto, era retirar o material de traços feitos no quadro de giz e entregá-lo nas mãos dos alunos.

Utilizamos uma fita graduada de 1 a 100 e barras com diferentes tamanhos, confeccionadas em uma base emborrachada, como EVA. A menor barra tem o tamanho da unidade usada na fita graduada. As outras têm,sucessivamente, duas, três, quatro vezes o comprimento daquela, até completar dez vezes. Da mesma forma como variam em tamanhos, também variam em cores. Embora guarde semelhanças com a régua de Cuisenaire, o material que buscamos pretende fugir das limitações decorrentes da correlação arbitrária entre números e cores, que é uma crítica comumente feita a Cuisenaire.

Pensando nas duas ideias de divisão – a partição e a quotição –, procuramos levar o aluno a perceber os mecanismos básicos da operação de dividir a partir de uma combinação de medidas. Evidentemente, é importante que o aluno compreenda o conceito da operação de divisão, daí a proposta de criar um material didático manipulável. No entanto, a combinação de uma fita graduada e de barras visa a permitir que o aluno alcance a lógica do algoritmo. Manipulando esses elementos, o aluno consegue visualizar o resto, reconhecendo que ele deve ser menor do que o divisor. Outra vantagem é o estímulo à memorização da tabuada.

A figura em destaque a seguir representa esse tipo de material didático.

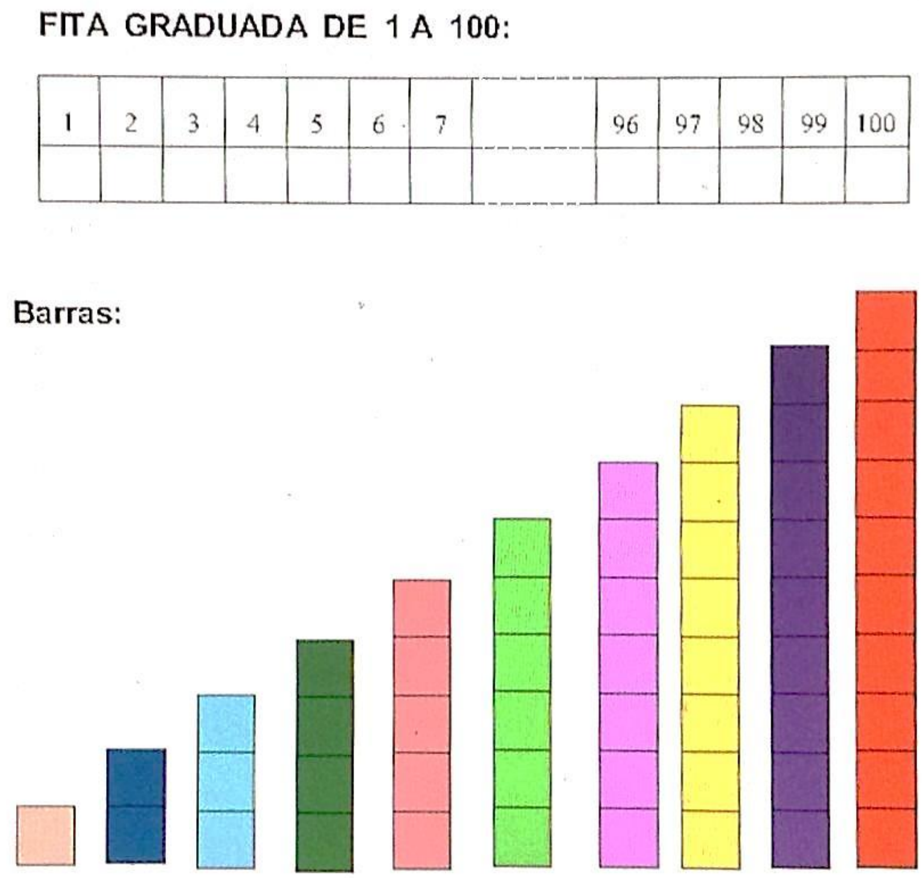


Figura 23: Material manipulável

Veremos, agora, três exemplos de uso do material manipulável na operação de divisão.

Figura 24: Uso do material

Na 1ª fita, em azul claro, fizemos a divisão de 21 por 3 e, para chegar ao resultado, usamos sete barras de três unidades. A divisão é exata.

Na 2ª fita, na cor verde, fizemos a divisão de 34 por 6. Encaixamos cinco barras de seis unidades, o que produziu um quociente 5, e um resto de 4 unidades. Facilmente detectamos, com este material, a divisão euclidiana: 34 = 6 x 5 + 4.

Na 3ª fita, fizemos a divisão de 40 por 12 e recorremos às cores vermelha e azul para compor o 12. Então, colocamos o 12 o máximo de vezes sobre a fita, o que deu um resultado de três conjuntos de barras, vermelhas e azuis. Como se observa na fita, temos o quociente 3, 3 um resto4.

8. PROPOSTA DE INTERVENÇÃO

Esta pesquisa possui um caráter qualitativo e se desenvolveu com uma turma da Escola Municipal Deodoro, localizada no bairro da Glória, no Rio de Janeiro. As aulas aconteciam no turno da tarde, com 17 alunos recém-chegados do 5º ano e duas alunas repetentes do 6º. A idade deles varia de 11 a 14 anos.

A intervenção ocorreu em quatro encontros de 100 minutos cada um, seguindo um planejamento. No primeiro dia, foi entregue aos alunos uma atividade com 7 problemas envolvendo as ideias de divisão e 3 "contas" já armadas, tendo como objetivo averiguar seus conhecimentos prévios.

No segundo dia de trabalho, os alunos receberam 8 problemas envolvendo apenas a ideia de quotição, nos quais se conhece o todo e o tamanho das partes. A resolução dos problemas foi no quadro branco com o auxílio do material manipulável.

No terceiro encontro, entregamos aos alunos um exercício em que deveriam encontrar o quociente e o resto de 12 divisões. Eles se sentaram em grupos de 2 ou 3 para trabalhar e usaram o material manipulável.

No quarto dia da pesquisa, foram propostos 8 problemas envolvendo apenas a ideia de partição; nesses, se conhece o todo e a quantidade de partes. A resolução mais uma vez contou com o auxílio do material manipulável.

A ideia de seguir esse planejamento se deu em função do raciocínio construído a partir da pergunta "quantas vezes cabe?". Esse recurso ajuda o aluno a entender a divisão, por isso começamos as atividades com os problemas de quotição.

A intervenção transcorreu de acordo com esse planejamento traçado e atravessou as seguintes etapas:

No primeiro dia, foi explicado aos alunos que a atividade fazia parte de uma pesquisa e que não valeria nota. Pedimos que eles fizessem individualmente as atividades e que registrassem o raciocínio desenvolvido utilizando a folha de exercício. Poderiam fazer desenhos, contas e não precisariam apagar nada do que tivessem escrito. O trabalho transcorreu sem nenhum contratempo.

No segundo dia, o exercício com problemas foi entregue a cada aluno, e a fita foi colada no quadro branco para que estivesse ao alcance da visão de todos. Solicitei a participação de alunos para a leitura e a colaboração de outros para colar as réguas na fita. No entanto, o dia estava muito quente e os alunos apresentaram um pouco de agitação e dispersão.

O calor prevalecia no terceiro dia das atividades, e havia uma agitação na turma em razão desse incômodo. Foi um pouco difícil sentá-los em grupos, já que eles queriam se concentrar em baixo do ventilador, o que não foi permitido, pois o material poderia voar. Depois de um tempo perdido, eles se acalmaram e finalmente começaram a trabalhar com o material. Não houve tempo de todos terminarem a tarefa, e muitos grupos ainda faziam a atividade após o final do tempo previsto. Um aluno, porém, destacou-se: atento, comentou quantas unidades faltavam para o divisor caber mais uma vez no dividendo.

No quarto dia da pesquisa, os alunos receberam a folha de exercícios com problemas sobre partição, e o trabalho foi feito da mesma forma que no segundo dia, com alunos lendo e colaborando para prender o material no quadro. Os problemas foram resolvidos no quadro branco. Após a resolução, eles receberam uma folha para a verificação do aprendizado. A maioria o fez com o auxílio do material manipulável.

Figura 25: Aluno usando o material

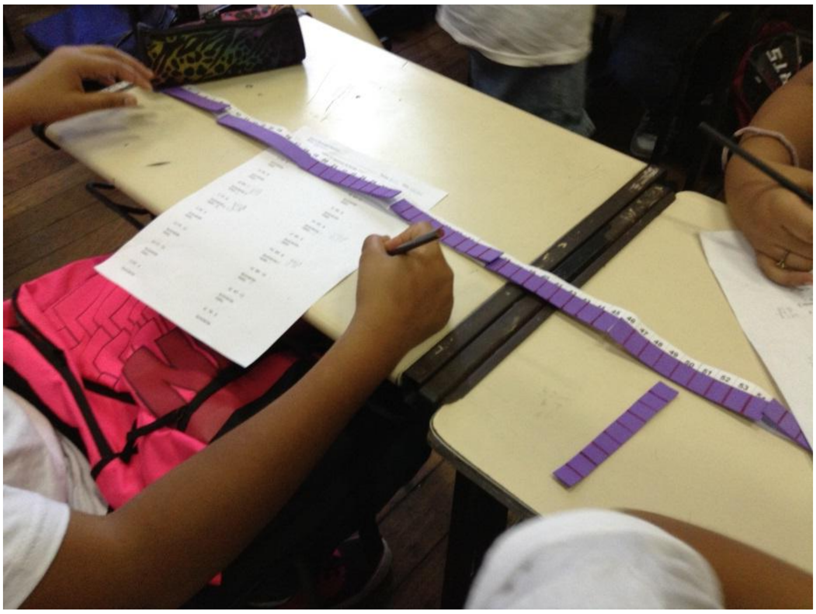
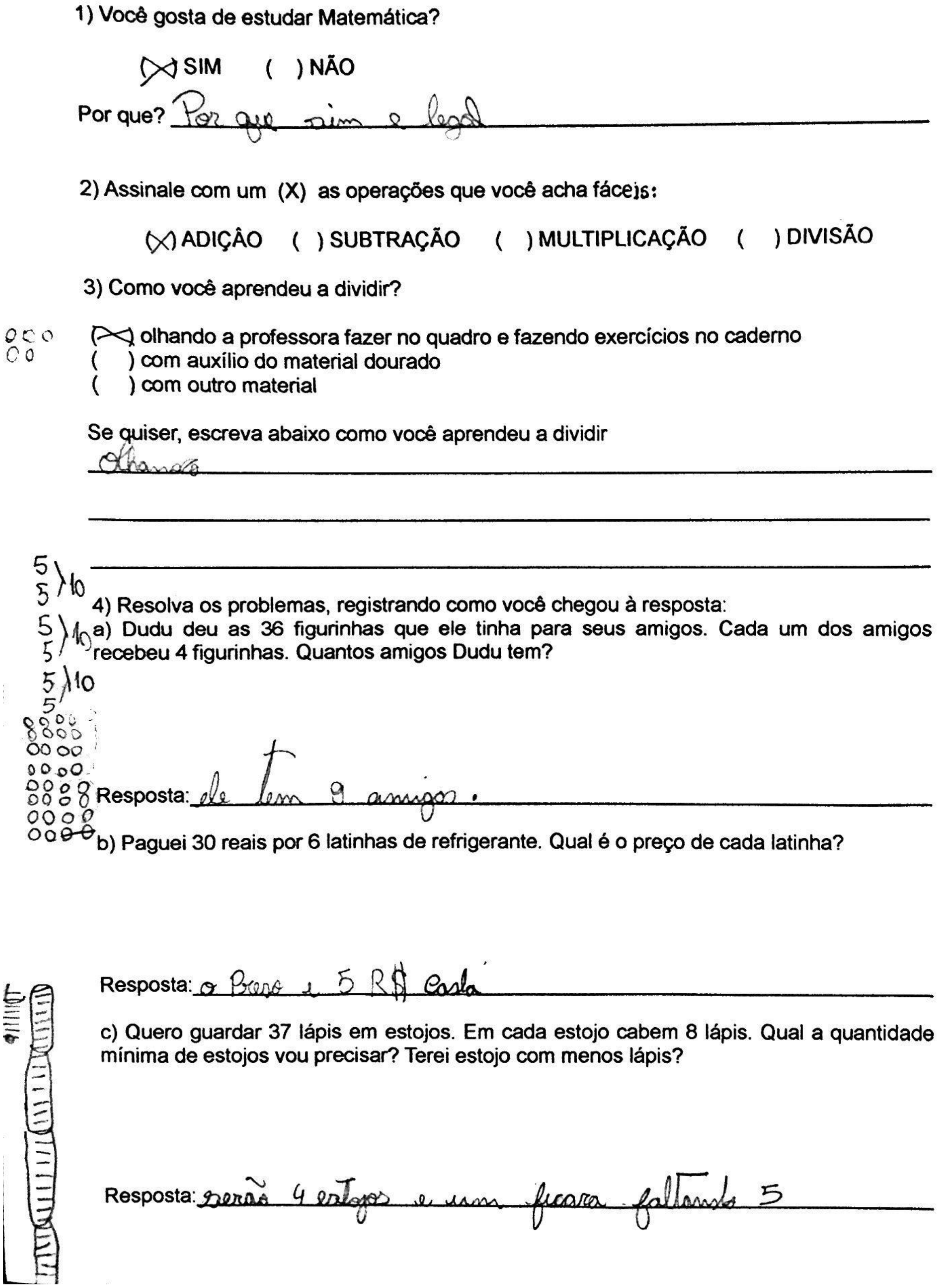


Figura 26: Aluno usando o material

Os resultados da pesquisa de campo, conduzida através da aplicação de testes, antes e depois do uso do material manipulável, mostraram um sinal de melhora no aprendizado do algoritmo.

Os dados estatísticos levantados e analisados a partir da aplicação dos testes demonstram que, antes do uso do material manipulável, somente 37% dos alunos sabiam usar o algoritmo da divisão. Após o manuseio da fita, 58% dos que não sabiam o algoritmo conseguiram utilizá-lo, porém com o auxílio da fita.



1) Você gosta de estudar Matemática?

(X) SIM ( ) NÃO

Por que? Por que sim e legal

2) Assinale com um (X) as operações que você acha fáceis:

(X) ADIÇÂO ( ) SUBTRAÇÃO ( ) MULTIPLICAÇÃO ( ) DIVISÃO

3) Como você aprendeu a dividir?

(X) olhando a professora fazer no quadro e fazendo exercícios no caderno
( ) com auxílio do material dourado
( ) com outro material

Se quiser, escreva abaixo como você aprendeu a dividir

Olhando

4) Resolva os problemas, registrando como você chegou à resposta:

a) Dudu deu as 36 figurinhas que ele tinha para seus amigos. Cada um dos amigos recebeu 4 figurinhas. Quantos amigos Dudu tem?

Resposta: ele tem 9 amigos.

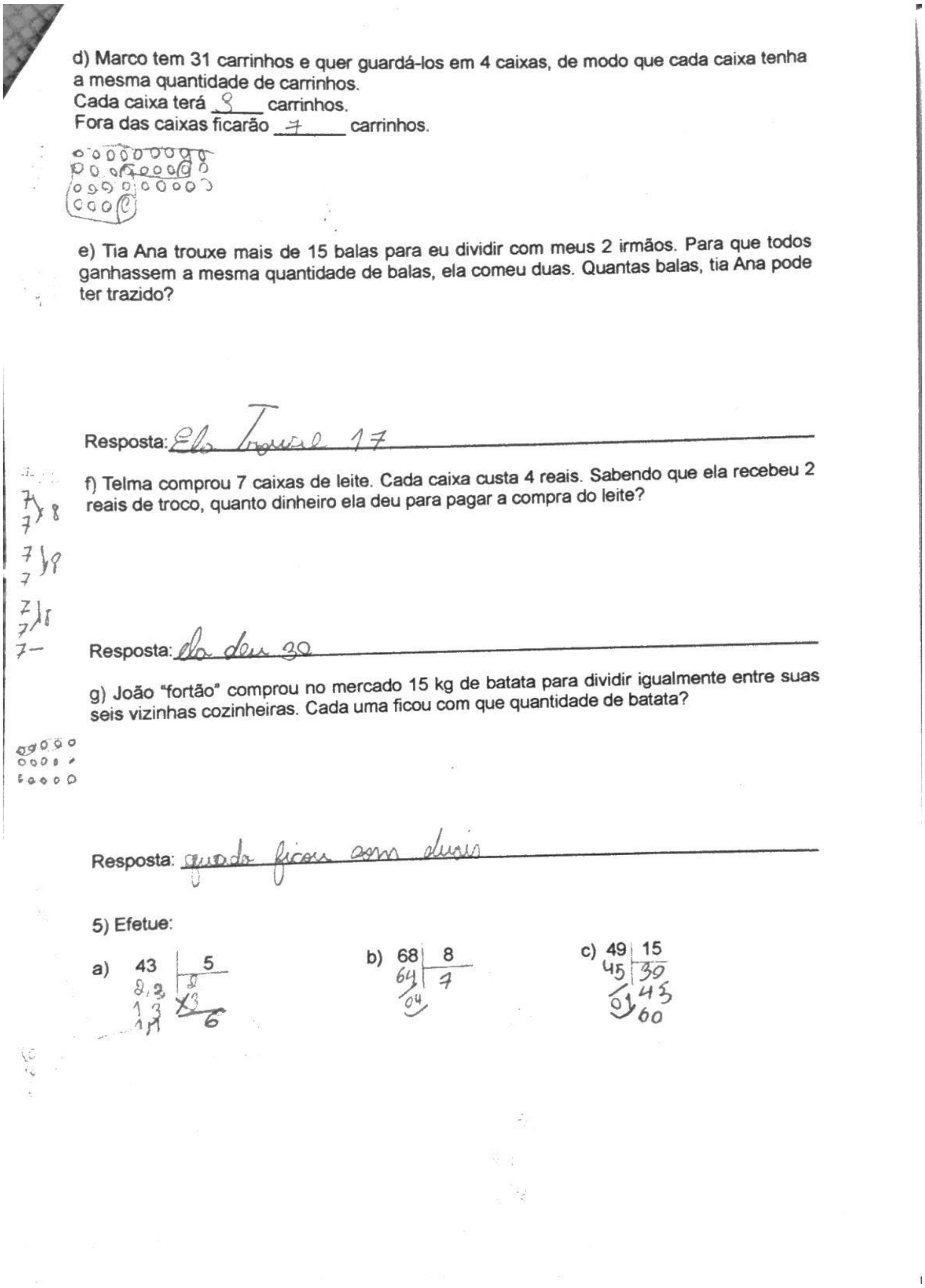
b) Paguei 30 reais por 6 latinhas de refrigerante. Qual é o preço de cada latinha?

Resposta: o preço é 5 R$ cada

c) Quero guardar 37 lápis em estojos. Em cada estojo cabem 8 lápis. Qual a quantidade mínima de estojos vou precisar? Terei estojo com menos lápis?

Resposta: serão 4 estojos e um ficara faltando 5

Figura 27: Reprodução de teste de aluno



d) Marco tem 31 carrinhos e quer guardá-los em 4 caixas, de modo que cada caixa tenha a mesma quantidade de carrinhos.
Cada caixa terá _8___ carrinhos.
Fora das caixas ficarão _7____ carrinhos.

e) Tia Ana trouxe mais de 15 balas para eu dividir com meus 2 irmãos. Para que todos ganhassem a mesma quantidade de balas, ela comeu duas. Quantas balas, tia Ana pode ter trazido?

Resposta: Ela trouxe 17

f) Telma comprou 7 caixas de leite. Cada caixa custa 4 reais. Sabendo que ela recebeu 2 reais de troco, quanto dinheiro ela deu para pagar a compra do leite?

Resposta: ela deu 30

g) João "fortão" comprou no mercado 15 kg de batata para dividir igualmente entre suas seis vizinhas cozinheiras. Cada uma ficou com que quantidade de batata?

Resposta: quado ficou com duis

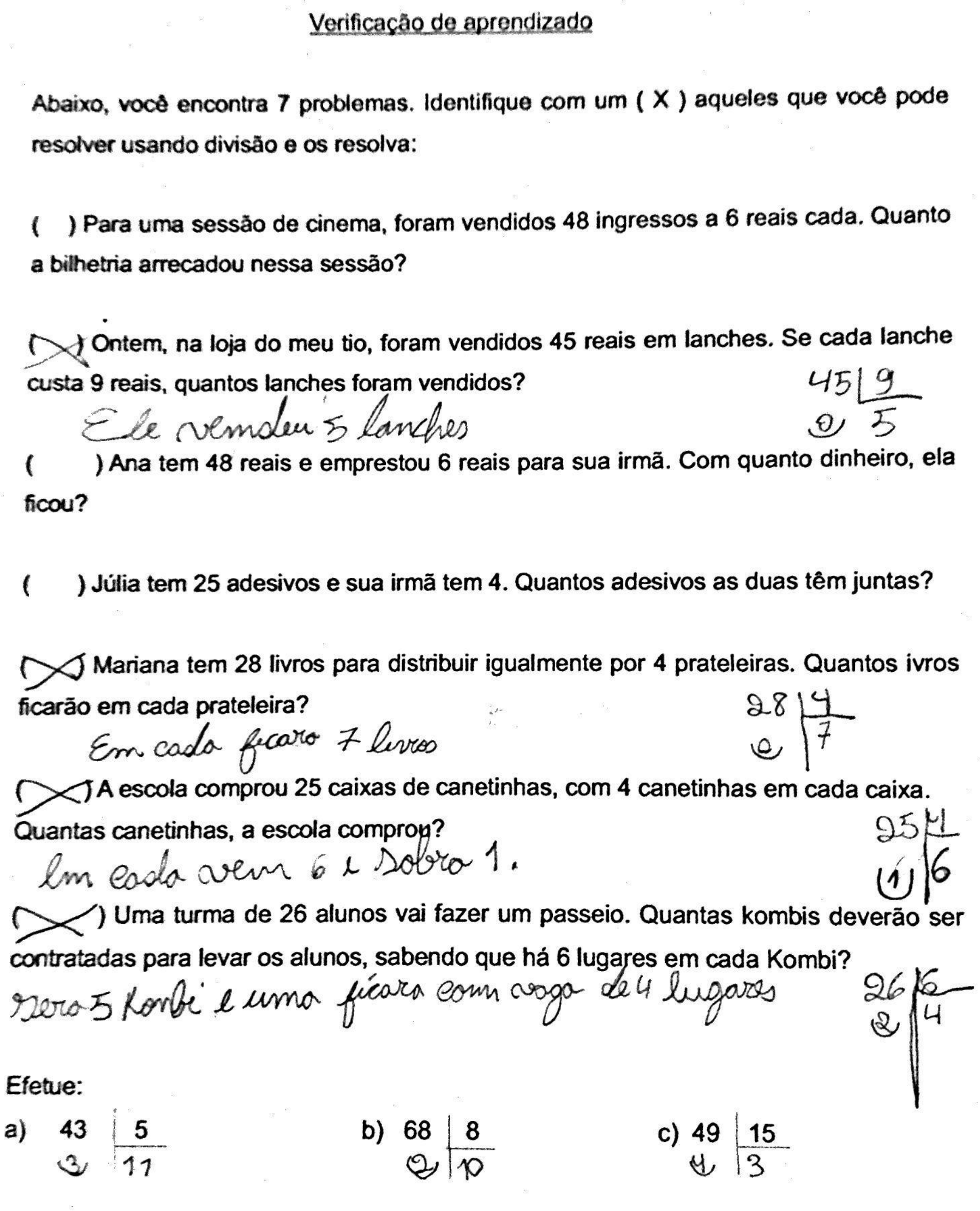
5) Efetue:

a) 43 | 5

b) 68 | 8

c) 49 | 15

Figura 28: Reprodução de teste de aluno



Verificação de aprendizado

Abaixo, você encontra 7 problemas. Identifique com um (X) aqueles que você pode resolver usando divisão e os resolva:

(   ) Para uma sessão de cinema, foram vendidos 48 ingressos a 6 reais cada. Quanto a bilhetria arrecadou nessa sessão?

(X) Ontem, na loja do meu tio, foram vendidos 45 reais em lanches. Se cada lanche custa 9 reais, quantos lanches foram vendidos?

Ele vendeu 5 lanches

45 | 9
0   5

(   ) Ana tem 48 reais e emprestou 6 reais para sua irmã. Com quanto dinheiro, ela ficou?

(   ) Júlia tem 25 adesivos e sua irmã tem 4. Quantos adesivos as duas têm juntas?

(X) Mariana tem 28 livros para distribuir igualmente por 4 prateleiras. Quantos ivros ficarão em cada prateleira?

Em cada ficaro 7 livros

28 | 4
0   7

(X) A escola comprou 25 caixas de canetinhas, com 4 canetinhas em cada caixa. Quantas canetinhas, a escola comprou?

Em cada vem 6 e sobro 1.

25 | 4
1   6

(X) Uma turma de 26 alunos vai fazer um passeio. Quantas kombis deverão ser contratadas para levar os alunos, sabendo que há 6 lugares em cada Kombi?

Sero 5 Kombi e uma ficara com vaga de 4 lugares

26 | 6
2   4

Efetue:

a) 43 | 5
3   11

b) 68 | 8
2   10

c) 49 | 15
4   3

Figura 29: Reprodução de teste de aluno

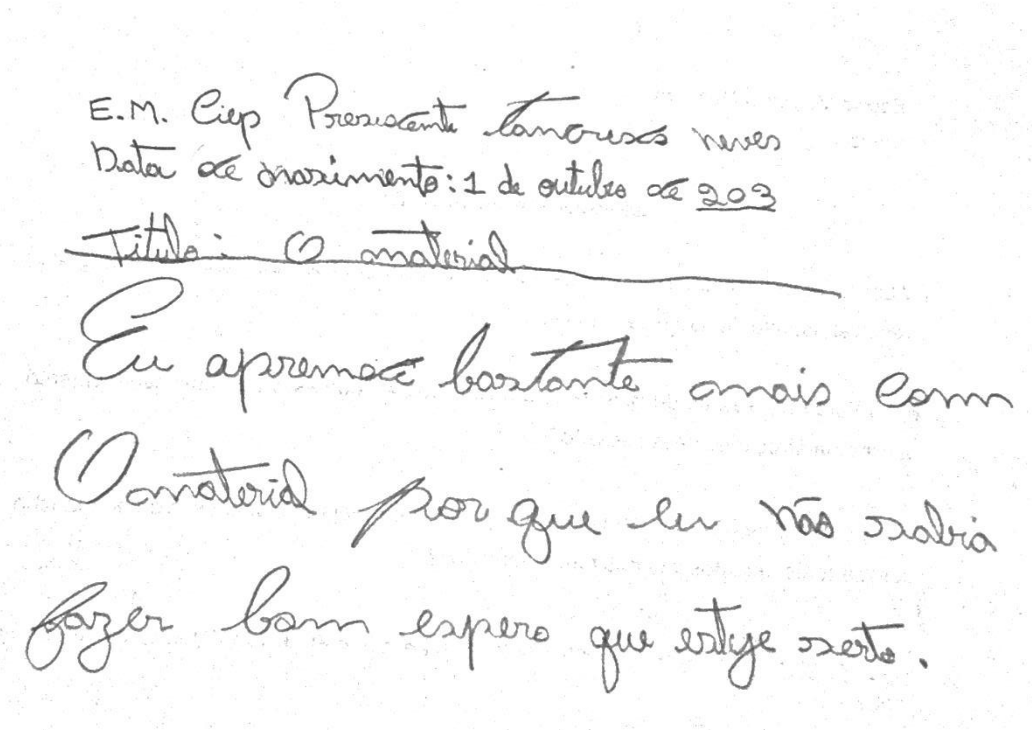


Figura 30: Reprodução de redação de aluno

9. APLICANDO O MATERIALNA DETERMINAÇÃO DO MDC

Sabemos que um método rápido de se encontrar o maior divisor comum entre dois números é o algoritmo de Euclides, que também chamado de método das divisões sucessivas. Um exemplo para ilustrar o método é:mdc(72, 33) = 3

	2	5	2
72	33	6	3
6	3	0	

Escrevendo de outra forma:

$$72 = 2 \times 33 + 6$$

$$33 = 5 \times 6 + 3$$

$$6 = 2 \times 3$$

E por que esse "jogo da velha" dá certo?

O método apareceu pela primeira vez por volta de 300 a.C., no livro VII da obra *Os elementos*, de Euclides e apresenta o mais antigo algoritmo não trivial ainda em uso.

A proposição II, do livro VII, determina que é preciso “encontrar a maior medida comum entre dois números que não sejam primos entre si”.

LEMA:

Sejam a e b dois números inteiro positivos e $a = bq + r$, com$0 \leq r < b$. Então $mdc(a,b) = mdc(b,r)$.

Ora, se $a = bq + r$, então $r = a – bq$.

Seja k um divisor comum de a e de b, então $k \mid a$ e $k \mid b$.

Assim, $k \mid r$, ou seja, k é um divisor comum de b e de r.

Reciprocamente, com $a = bq + r$, vem imediatamente que todo divisor comum de b e de r é divisor comum de b e de a.

Assim, o conjunto dos divisores comuns de a e de b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e de r.

Logo,$mdc(a,b) = mdc(b,r)$

Demonstrado este resultado, podemos provar o algoritmo de Euclides.

TEOREMA:

Sejam a e b inteiros positivos, com a $\geq$ b. Usando-se sucessivamente a relação fundamental da divisão, temos:

$a = bq_1 + b_1 \qquad 0 < b_1 < b$,

$b = b_1q_2 + b_2 \qquad 0 < b_2 < b_1$,

$b_1 = b_2q_3 + b_3 \qquad 0 < b_3 < b_2$,

…

$b_{n-2} = b_{n-1}q_n + b_n \qquad 0 < b_n < b_{n-1}$

$b_{n-1} = b_nq_{n+1}$

Então, mdc(a,b) = b_n.

Este processo chega ao fim, uma vez que $0 < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_1 < b$ é uma sequência estritamente decrescente de inteiros positivos, e há um número finito de inteiros entre 0 e b.

Pelo lema, mdc(a,b) = mdc(b,b_1) = mdc(b_1,b_2) = mdc(b_2,b_3) = mdc(b_{n-1},b_n).

Mas, mdc(b_{n-1},b_n) = b_n, pois b_{n-1} é um múltiplo de bn.

Na verdade, o algoritmo de Euclides tem uma origem geométrica, e sua ideia é determinar a maior medida comum entre dois segmentos de reta.

Vamos determinar o mdc de 72 e 33 com o material manipulável, pois podemos "enxergar" facilmente a ideia. Observemos o quadro a seguir.

Figura 31: Aplicação do algoritmo de Euclides com o material

Primeiro, colocamos barras sobre a fita, até alcançarmos o número 72. Não é necessário que sejam barras da mesma cor. Essa escolha é apenas uma questão estética e visa a simplificar a linguagem da explicação. Sendo assim, nós a convencionaremos chamar de barra azul.

Em uma fileira abaixo, alinhadas com a azul, serão colocadas outras barras até alcançar o número 33 da fita. Vamos chamá-las de vermelhas e formar com elas uma fila até alcançar o mesmo comprimento da barra azul.

Na figura acima, podemos ver que foi possível colocar duas barras vermelhas, e sobraram 6 unidades, representadas pela barra verde.

Embaixo, seguiremos alinhando barras verdes, sem esquecer que estamos querendo encontrar uma unidade que seja capaz de medir a barra azul e a vermelha. Portanto, tentaremos alcançar o comprimento da barra vermelha usando agora as verdes.

Na terceira representação, vimos que a verde não serve de unidade para medir a barra vermelha. Sobraram 3 unidades que estão representadas pela barra amarela.

Na quarta representação, vemos que duas barras amarelas têm a mesma medida que uma verde. Diante disso, podemos afirmar que a amarela é a unidade de medida das barras vermelha e azul. A vermelha mede 11 barras amarelas, e a azul, 24. A conclusão a que se chega é: o 3 é o maior divisor comum entre 72 e 33.

Em seu algoritmo, o próprio Euclides observou que os segmentos são concretos, diferentemente dos números, que são abstratos. Esse princípio é um facilitador do aprendizado da operação de divisão, desenvolvida através do material didático manipulável da régua e das barras.

10. CONSIDERAÇÕES FINAIS

As operações aritméticas constituem um conhecimento básico no estudo da Matemática. Algumas dessas operações parecem fluir com maior naturalidade para o aluno dos anos iniciais do ensino fundamental. A divisão, porém, aparentemente se mostra um desafio de considerável dificuldade, conforme observamos aqui. Diante de problemas de divisão, que envolvam o conhecimento da tabuada, o raciocínio abstrato, as ideias inerentes a essa operação, a resposta do aluno tem sido truncada, incompleta, equivocada. Essa incompreensão, que começa no ensino de base e parece avançar ao longo da vida escolar, exige do educador uma mobilização, um empenho na busca por soluções pedagógicas.

Escolhemos a sala de aula da rede municipal do Rio de Janeiro como “campo de estudo” para mudanças positivas. Com vistas a uma intervenção efetiva , procuramos trazer, para o ensino da operação da divisão, tida como “difícil”,um material didático manipulável simples e de resultados práticos.

O material proposto ainda é um protótipo, com algumas limitações. Reconhecemos, por exemplo, problemas como o comprimento da fita ea qualidade da matéria prima empregada (EVA). Quanto a sua utilização, foi possível observar progressos e ouvir comentários positivos por parte dos alunos. A materialização de elementos da divisão euclidiana é outro aspecto construtivo que pudemos notar. Com o uso da fita, o aluno pôde visualizar aspectos da divisão, como quanto falta para completar o resto, de forma a que o divisor caiba mais uma vez no dividendo.

Ainda que esteja apenas no início, o material que empregamos pode – e deve – ser aplicado aos anos finais do 1º segmento. Estimulado e confiante, o aluno pode mudar esse quadro desanimador do ensino da divisão.

11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANDRINI, A. e VASCONCELLOS, M. J.**Praticando Matemática**, 6º ano. São Paulo: Ed. do Brasil, 2012.

ARAGÃO, Maria José.**História da Matemática**. Rio de Janeiro:Interciência, 2009.

BONJORNO, J. R., AZENHA, R.**Coleção Matemática Pode contar comigo** 4º e 5º ano. São Paulo: FTD, 2008.

BOYER, Carl.**História da Matemática**. 2 ed. Trad.Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher/EDUSP, 1996.

BRASIL. Ministério de Educação e do Desporto. Secretaria de Ensino Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática. MEC/SEF, 1997.

Caderno Pedagógico da Prefeitura da Cidade do Rio de Janeiro. Matemática: 2015. Disponível em: <http://www.rioeduca.net/recursosPedagogicos.php> Data de acesso: 02/02/2015.

CANDEIAS, Rui Pedro C.B.B. **Contributo para a história das inovações no ensino da Matemática no primário: João Antônio Nabais e o ensino da Matemática no Colégio Vasco da Gama.** Dissertação de mestrado. Lisboa, 2007.

CENTURION, M., JABUBOVIC, J**. Matemática: teoria e contexto.**6º ano. São Paulo:Saraiva, 2012.

EVES, Howard.**Introdução à história da Matemática**. Trad. Higyno H. Domingues. Campinas: Ed. Unicamp, 2002.

IFRAH, Georges.**Os números: a história de uma grande invenção**. Trad. S. M. de F. Senra. São Paulo: Globo, 2005.

LORENZATO, Sérgio.**Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis**. In: Lorenzato, Sérgio. (org.) O laboratório de ensino da matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados , 2006.

NEVES, Regina.**A divisão e os números racionais: uma pesquisa de intervenção psicopedagógica sobre o desenvolvimento de competências conceituais de alunos e professores**. (Tese de doutorado) Brasília, 2008.

PITOMBEIRA, João Bosco**. Euclides, Fibonacci e Lamé**. Revista do Professor de Matemática. v. 24, n. 24, p. 32- 40, 1993. p. 32 -40.

TOSATTO, C. C.; TOSATTO, C. M.; PERACCHI, E. **Coleção Hoje é dia de Matemática,** 4º ano e 5º ano. Curitiba: Ed.Positivo , 2011.

ZATTI, F.; AGRANIONH, N. T.; ENRICONE, J. R. B**. Aprendizagem matemática: desvendandodificuldades de cálculo dos alunos**. (Artigo) 2010.

Links consultados:

http://www.todospelaeducacao.org.br/reportagens-tpe/32325/apenas-93-dos-alunos-do-ensino-medio-aprenderam-o-adequado-em-matematica-em-2013/ - acesso em 27/12/2014.

http://www2.ufersa.edu.br/portal/view/uploads/setores/147/arquivos/Circuitos/Cap%C3%ADtulo%2006.pdf

REVISTA NOVA ESCOLA. Paola Tarasow e Mercedes Etchemendy falam sobre o ensino da divisão. Disponível em http://revistaescola.abril.com.br/fundamental-1/entrevista-paola-tarasow-mercedes-etchemendy-falam-ensino-divisao-678048.shtml. Acesso em 13/12/2014

Sobre a história da calculadora:

http://gaia.liberato.com.br/ojs/index.php/revista/article/viewFile/88/80