VALMIR ROBERTO MORETTI

UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS ALGÉBRICOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS COM PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO BÁSICO

CAMPINAS
2014

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS

Instituto de Matemática, Estatística
e Computação Científica

VALMIR ROBERTO MORETTI

UM ESTUDO SOBRE MÉTODOS ALGÉBRICOS DE RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS COM PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ENSINO BÁSICO

Dissertação apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da Universidade Estadual de Campinas como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre.

Orientadora: MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DEFENDIDA PELO ALUNO VALMIR ROBERTO MORETTI, E ORIENTADA PELA PROFA. DRA. MARIA SUELI MARCONI ROVERSI.

Assinatura da Orientadora

MRoversi
____

CAMPINAS
2014

Ficha catalográfica
Universidade Estadual de Campinas
Biblioteca do Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica
Maria Fabiana Bezerra Muller - CRB 8/6162

M817e Moretti, Valmir Roberto, 1963-
Um estudo sobre métodos algébricos de resolução de equações algébricas com proposta de atividades para o ensino básico / Valmir Roberto Moretti. – Campinas, SP : [s.n.], 2014.

Orientador: Maria Sueli Marconi Roversi.
Dissertação (mestrado profissional) – Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Equações. 2. Álgebra. 3. Polinômios. 4. Matemática - Estudo e ensino. I. Roversi, Maria Sueli Marconi,1951-. II. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. III. Título.

Informações para Biblioteca Digital

Título em outro idioma: A study of algebraic methods of solving algebraic equations with proposed activities for basic education
Palavras-chave em inglês:
Equations
Algebra
Polinomials
Mathematics - Study and teaching
Área de concentração: Matemática em Rede Nacional
Titulação: Mestre
Banca examinadora:
Maria Sueli Marconi Roversi [Orientador]
Ary Orozimbo Chiacchio
Ires Dias
Data de defesa: 24-06-2014
Programa de Pós-Graduação: Matemática em Rede Nacional

Dissertação de Mestrado Profissional defendida em 24 de junho de 2014 e aprovada Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof.(a). Dr(a). MARIA SUELI MARCONI ROVERSI

____

Prof.(a). Dr(a). ARY OROZIMBO CHIACCHIO

____

Prof.(a). Dr(a). IRES DIAS

Abstract

In this research we present a study of algebraic methods for solving polynomial equations of degree less than or equal four. First of all we made a study of the major concepts and results of the theory of polynomials, which is especially important for the object of our study. Some statements were omitted because our aim is not to go into to this matter any further. Following, we present a brief account of the history of solving cases of polynomial equations, starting with the study of the false position method - used by the scribes of ancient Egypt - making use of geometric method for solving an equation of the second degree of al - Khwarizmi in the ninth century and ending in Renaissance Europe of the sixteenth century with the deduction of solving formulas for polynomial equations of third and fourth degrees. We, then, conclude this work by presenting activities for the study of these equations in elementary and high schools. These activities are compiled with the intention of not only provide significant learning as well as be used like aimed at enhancing capacities, knowledge and problem-solving skills. In this work, we concern for the clear account in order to assure pleasant and accessible reading, especially for those teachers who are far from universities, nonetheless they wish to enlarge their knowledge and develop their skills of new approaches in teaching.

Keywords: Algebraic equations, polynomials, problem situation.

Resumo

Neste trabalho apresentamos um estudo dos métodos algébricos para a resolução de equações polinomiais de grau menor ou igual do que quatro. Inicialmente fazemos um estudo dos principais conceitos e resultados da teoria dos polinômios, que é de fundamental importância para o objeto de nossa pesquisa. Como não temos por objetivo o aprofundamento desse assunto, algumas demonstrações foram omitidas. Em seguida, apresentamos um breve relato da história dos processos resolutivos de equações polinomiais, começando pelo estudo do método da falsa posição - utilizado pelos escribas do antigo Egito - passando pelo método geométrico de resolução de uma equação de segundo grau de al-Khwarizmi no século IX, e finalizando na Europa renascentista do século XVI com a dedução das fórmulas resolutivas para as equações polinomiais de terceiro e quarto graus. Encerramos este trabalho com a apresentação de uma proposta de atividades para o estudo dessas equações no Ensino Fundamental e Médio, elaboradas com a intenção de propiciar não só a aprendizagem significativa desse conteúdo como também contribuir para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas. Na redação deste trabalho tivemos a preocupação de primar pela clareza da exposição, a fim de tornar a leitura agradável e acessível, sobretudo para os professores que estão distantes das universidades e almejam ampliar seu conhecimento e aprimorar sua prática pedagógica.

Palavras-chave: Equações algébricas, polinômios, situação-problema.

Sumário

Dedico este trabalho à memória de meus pais, de minha madrinha Nair e de minha grande amiga Neusa Delbel.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela saúde e sabedoria.

À minha irmã, meu cunhado e aos meus sobrinhos Rômulo e Elaine, sempre dispostos a me apoiar.

À minha orientadora. Profa. Dra Maria Sueli M. Roversi pela paciência e disponibilidade que sempre demonstrou, pelas sugestões que enriqueceram este trabalho e pelas magistrais aulas de Cálculo.

A todos os professores que me deram aula nesse curso pela atenção e dedicação.

À comissão de pós-graduação do Imecc e a todos os professores que ajudaram a implantar esse programa de mestrado na Unicamp e assim possibilitar a realização de um sonho.

À CAPES pelo apoio financeiro.

Aos meus colegas de curso pelo companheirismo.

Ao Felipe e ao José Maria pela amizade, carinho e também pelas caronas.

À minha grande mestra da adolescência Profa. Edercy Oliveira que me ensinou tudo o que sei a respeito da língua portuguesa.

A todos os meus amigos que torceram e vibraram com cada vitória conquistada no decorrer desse mestrado.

Lista de Figuras

Lista de Tabelas

Introdução

Há quatro mil anos, matemáticos das antigas civilizações do Egito e da Babilônia já se dedicavam à resolução de equações e a importância que este tema tem para a Matemática mantém-se até hoje, sobretudo por ser uma poderosa ferramenta na resolução de problemas. Isso explica porque o aprendizado da resolução de equações é um elemento essencial no estudo da álgebra no ensino básico.

No entanto, temos observado que, de modo geral, a resolução de equações em nossas escolas tem se dado de maneira mecânica, com ênfase maior na memorização do que na compreensão, e como consequência, muitos alunos concluem o Ensino Médio sem saber o que significa encontrar as raízes de uma equação; para muitos, resolver uma equação quadrática significa pôr números numa fórmula. Tal constatação é um indício de uma prática pedagógica que ignora que a memorização pode ocorrer sem compreensão e que dar uma resposta correta não é garantia de apropriação do conhecimento envolvido.

O estudo de equações polinomiais de grau superior a dois vem perdendo espaço em grande parte das escolas atuais de Ensino Médio, sobretudo na escola pública. Convém ressaltar, ainda, que o estudo da equação de terceiro grau, que raramente é realizado no Ensino Médio, tem sido também negligenciado em muitos cursos de graduação; nós mesmos, por exemplo, só tivemos a oportunidade de estudar essa equação no presente curso de pós-graduação.

Ainda que a fórmula resolutiva da equação cúbica não seja o procedimento mais prático e atualmente já existam calculadoras que forneçam sua solução, as circunstâncias que levaram à sua dedução e o fato de que foi a partir dela que teve início a construção do campo dos números complexos justificam seu estudo, pois dessa forma tem-se a oportunidade de se apresentar o conhecimento matemático como fruto da construção humana, na sua interação com o contexto natural, social e cultural e, assim, ajudar a desmistificar a visão presente na sociedade e na escola de que a Matemática é “ um corpo de conhecimento imutável e verdadeiro, que deve ser assimilado pelo aluno” (BRASIL,1998, p.24).

Há ainda que se pontuar que o estudo de equações polinomiais de grau maior do que dois representa uma possibilidade de se resolver situações-problema vinculadas ao mundo real e que seu estudo vem ao encontro das Orientações Curriculares para o Ensino Médio, uma vez que esse documento a respeito da escolha dos conteúdos a serem desenvolvidos recomenda que se leve em consideração os diferentes propósitos da formação matemática na educação básica e que, ao final do ensino médio

> os alunos saibam usar a Matemática para resolver problemas práticos do quotidiano; para modelar fenômenos em outras áreas do conhecimento; compreendam que a Matemática é uma ciência com características próprias, que se organiza via teoremas e demonstrações; percebam a Matemática como um conhecimento social e historicamente construído; saibam apreciar a importância da Matemática no desenvolvimento científico e tecnológico. (BRASIL, 2008, p.69).

Diante do exposto, decidimos realizar este trabalho que tem por finalidade fazer um estudo sobre equações algébricas e apresentar uma sequência de atividades a serem desenvolvidas com alunos do Ensino Fundamental e Médio, visando propiciar uma aprendizagem com compreensão dos procedimentos para a resolução de equações de segundo e terceiro graus e contribuir para o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, que é um dos objetivos centrais do ensino da Matemática.

No primeiro capítulo, fazemos um estudo dos polinômios, que se justifica por sua aplicação na resolução de equações algébricas de grau arbitrário. No segundo, apresentamos o resultado do estudo que fizemos sobre a história das equações algébricas e que nos forneceu subsídios para a elaboração de algumas das atividades apresentadas no capítulo quatro. No terceiro, são deduzidas as fórmulas resolutivas para equações de segundo e terceiro graus e é descrito o método criado por Ferrari no século XVI para a resolução de uma equação de quarto grau. No capítulo quatro apresentamos sequências didáticas para o estudo das equações de segundo e terceiro graus e do método da falsa posição para resolução de uma equação de primeiro grau. Constam também desse capítulo algumas situações-problemas envolvendo a resolução de equações algébricas e o método da Bisseção, que é um método numérico para resolução de equações acessível a alunos de Ensino Médio.

Por fim, apresentamos nossas considerações e reflexões finais sobre o trabalho realizado.

Capítulo 1

POLINÔMIOS EM UMA VARIÁVEL

Neste capítulo, apresentamos as principais definições e os resultados mais significativos sobre polinômios, que serão utilizados na resolução de equações algébricas, que é o objetivo desse trabalho.

Definição 1 (Polinômio)**.** Chamamos de polinômio complexo em uma variável ou indeterminada x uma expressão formal do tipo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = \sum_{i=0}^{n} a_ix^i,$$

onde n é um número inteiro não negativo e $a_0, a_1, \cdots, a_n$, são números complexos, denominados coeficientes do polinômio.

Denotamos por $\mathbb{C}[x]$ o conjunto formado por todos os polinômios com coeficientes complexos na variável x.

O polinômio complexo

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

pode ser escrito como

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + 0x^{n+1} + 0x^{n+2} + \cdots + 0x^m,$$

para todo natural $m > n$. Desse modo podemos sempre supor que dois polinômios têm o mesmo número de termos, desde que não façamos nenhuma hipótese quanto a estes coeficientes serem ou não nulos.

Definição 2 (Polinômios Iguais)**.** Dizemos que os polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

em $\mathbb{C}[x]$ são iguais, se, e somente se, $a_i = b_i$, para $0 \leq i \leq n$. Nesse caso, escrevemos $p(x) = q(x)$.

Exemplo 1. Os polinômios $p(x) = 3 + 2x - 7x^2 + x^3$ e $q(x) = 3 + 2x - 7x^2 + x^3$ são iguais em $\mathbb{C}[x]$, pois todos os coeficientes a_i das i-ésimas potências de x^i em $p(x)$ e em $q(x)$ são iguais.

Definição 3 (Polinômio Constante)**.** Se

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \in \mathbb{C}[x]$$

é tal que $a_i = 0$ para todo $i \geq 1$, dizemos que $p(x)$ é um polinômio constante. No caso em que $a_0 = 0$, dizemos que $p(x)$ é um polinômio nulo.

Definição 4 (Grau de um polinômio)**.** Seja $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ um polinômio não nulo. O maior índice n tal que $a_n \neq 0$ é o grau do polinômio $p(x)$, que denotamos por $gr(p(x))$. Nessas condições, a_n é denominado o coeficiente líder de $p(x)$.

De acordo com essa definição, o grau de um polinômio constante é zero. Isto é, $gr(p(x)) = 0$ se, e somente se, $p(x) = a$, $a \neq 0$.

Não se define grau para o polinômio nulo.

Exemplo 2. Dados os polinômios $p(x) = -x^2 + 8x + 5$, $q(x) = x^3 + 4x^2 - x - 6$ e $r(x) = 9$, temos que $gr(p(x)) = 2$, $gr(q(x)) = 3$ e $gr(r(x)) = 0$.

Definição 5 (Adição de Polinômios)**.** Dados os polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n,$$

em $\mathbb{C}[x]$ definimos a soma $p(x) + q(x)$ como sendo o polinômio

$$p(x) + q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n,$$

onde $c_i = a_i + b_i$, para $0 \leq i \leq n$.

Exemplo 3. Se $p(x) = 5x^2 - 7x - 8$ e $q(x) = x^2 + 2x + 10$, então

$$p(x) + q(x) = (5 + 1)x^2 + (-7 + 2)x + (-8 + 10) = 6x^2 - 5x + 2.$$

Definição 6 (Multiplicação de Polinômios)**.** Dados os polinômios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

e

$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m,$$

em $\mathbb{C}[x]$ definimos o produto $p(x)q(x)$ como sendo o polinômio

$$p(x)q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_{m+n}x^{m+n},$$

onde

$$
\begin{aligned}
&c_0 = a_0 b_0\\
&c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0\\
&c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0\\
&\ \ \vdots\\
&c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_k b_{k-i}.
\end{aligned}
$$

Essa definição de produto decorre do fato de que para quaisquer inteiros i e j não negativos, $x^i x^j = x^{i+j}$ e da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, em $\mathbb{C}$.

Exemplo 4. Se $p(x) = 6 - 5x - x^2$ e $q(x) = 2 + x$, então

$$
\begin{aligned}
p(x)q(x) &= (6 - 5x + x^2)(2 + x)\\
&= 6 \times 2 + (6 \times 1 - 5 \times 2)x + (-5 \times 1 + 2 \times 1)x^2 + (1 \times 1)x^3\\
&= 12 - 4x - 3x^2 + x^3.
\end{aligned}
$$

Proposição 1. Se $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios não nulos em $\mathbb{C}\left[x\right]$, então o grau de $p(x) + q(x)$ é menor do que ou igual ao maior dos números $gr(p(x))$ e $gr(q(x))$. Isto é:

$$gr(p(x) + p(x)) \leq max\left\{gr(p(x)), gr(q(x))\right\}.$$

Demonstração . Sejam

$$p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i, \quad \text{e} \quad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i,$$

com $gr(p(x)) = m \neq n = gr(q(x))$. Admitamos, sem perda de generalidade que $m > n$. Logo, sendo $c_i = a_i + b_i$, temos:

$$c_m = a_m + b_m = a_m + 0 = a_m \neq 0 \quad \text{e} \quad c_i = a_i + b_i = 0 + 0, \forall i > m.$$

Portanto,

$$gr(p(x) + q(x)) = m = max\left\{gr(p(x)), gr(q(x))\right\}.$$

Se $m = n$, temos que $c_i = a_i + b_i = 0 + 0 = 0, \forall i > m$. Como $c_m = a_m + b_m$ pode ser nulo, então,

$$gr(p(x) + q(x)) \leq max\left\{gr(p(x)), gr(q(x))\right\}.$$

□

Lema 1. Se a e b são números complexos e $ab = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.

Demonstração . Suponhamos, por contradição, que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então, existem $a^{-1} \neq 0$ e $b^{-1} \neq 0$. Como por hipótese, $ab = 0$, temos por um lado

$$ab(a^{-1}b^{-1}) = 0,$$

e por outro

$$(aa^{-1})(bb^{-1}) = 1,$$

logo

$$0 = 1$$

o que é absurdo.

Consequentemente, se a e b são números complexos não nulos, então $ab \neq 0$. □

Proposição 2. Se $p(x)$ e $q(x)$ são dois polinômios não nulos em $\mathbb{C}[x]$, então o grau de $p(x)q(x)$ é igual à soma dos graus de $p(x)$ e de $q(x)$.

Demonstração . Sejam $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, $q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$, $gr(p(x)) = m$ e $gr(q(x)) = n$. Se

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + \cdots + a_k b_0,$$

é um coeficiente qualquer de $p(x)q(x)$, então, $c_k = 0, \forall k > m + n$ e pelo Lema 1, $c_{m+n} = a_m b_n \neq 0$ e portanto,

$$gr(p(x)q(x)) = m + n = gr(p(x)) + gr(q(x)).$$

□

Definição 7 (Divisibilidade em $\mathbb{C}(x)$)**.** Sejam $p(x)$ e $d(x)$ em $\mathbb{C}[x]$, com $d(x) \neq 0$. Se existir $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(x) = q(x)d(x)$, dizemos que $d(x)$ divide $p(x)$.

Exemplo 5. O polinômio $d(x) = x - 3$ divide $p(x) = x^2 - 5x + 6$ em $\mathbb{C}[x]$, pois $p(x) = q(x)d(x)$, onde $q(x) = x - 2$.

Proposição 3. Sejam $p(x)$ e $d(x)$ polinômios não nulos em $\mathbb{C}[x]$. Se $d(x)$ divide $p(x)$, então $gr(d(x)) \leq gr(p(x))$.

Demonstração . Como $d(x)$ divide $p(x)$ e ambos são não nulos, então existe $q(x) \in \mathbb{C}[x]$, não nulo tal que $p(x) = q(x)d(x)$. Pela proposição (2) temos que:

$$gr(p(x)) = gr(q(x)d(x)) = gr(q(x)) + gr(d(x)) \geq gr(d(x)).$$

□

Proposição 4 (Divisão Euclidiana)**.** Se $p(x), d(x) \in \mathbb{C}[x]$, com $d(x) \neq 0$, então, existem $q(x)$ e $r(x)$ em $\mathbb{C}[x]$, unicamente determinados, tais que

$$p(x) = q(x)d(x) + r(x),$$

onde $r(x) = 0$ ou $gr(r(x)) < gr(d(x))$. Denominamos $p(x)$ de dividendo, $d(x)$ de divisor, $q(x)$ de quociente e $r(x)$ de resto.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Abramo e Villela (2012 , p. 113 - 114).

Em Lima (2006, p. 205 - 207) , encontramos outra demonstração da existência e unicidade do quociente e do resto a qual apresenta um processo para executar a divisão de polinômios em um número finito de passos.

Definição 8 (Valor numérico de um polinômio)**.** Se

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \in \mathbb{C}[x],$$

e α é um número complexo, definimos o valor numérico de $p(x)$ em α como sendo

$$p(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \cdots + a_n\alpha^n.$$

Exemplo 6. Dado $p(x) = x^3 + 3x^2 + 5x - 1$ em $\mathbb{C}[x]$,

$$p(-2) = (-2)^3 + 3(-2)^2 + 5(-2) - 1 = -8 + 12 - 10 - 1 = -7.$$

Definição 9 (Raiz de um polinômio)**.** Dado $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ dizemos que $\alpha \in \mathbb{C}$ é raiz de $p(x)$ se, e somente se, $p(\alpha) = 0$.

Exemplo 7. Dado $p(x) = x^3 - 3x - 2x + 2$ em $\mathbb{C}[x]$, -1 é raiz de $p(x)$, pois:

$$p(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 2(-1) + 2 = -1 - 3 + 2 + 2 = 0.$$

Exemplo 8. Dado $p(x) = x^2 - 6$ em $\mathbb{C}[x]$, $\sqrt{6}$ é raiz de $p(x)$, pois:

$$p(\sqrt{6}) = (\sqrt{6})^2 - 6 = 6 - 6 = 0.$$

Exemplo 9. Dado $p(x) = x^2 + 4$ em $\mathbb{C}[x]$, $2i$ é raiz de $p(x)$, pois:

$$p(2i) = (2i)^2 + 4 = -4 + 4 = 0.$$

Definição 10 (Equação polinomial ou algébrica)**.** Chama-se equação polinomial ou algébrica de grau n toda equação que pode ser escrita na forma $p(x) = 0$, onde $p(x)$ representa um polinômio dado por

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n,$$

com $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ e $a_0, a_1, \cdots, a_n$ números complexos, denominados coeficientes da equação algébrica.

Exemplo 10. $x^3 - 3x^2 - 2x + 2 = 0$ é uma equação de 3° grau . Já $-3x^2 - 2x + 2 = 0$ é uma equação de 2° grau.

Definição 11 (Raiz de equação polinomial ou algébrica)**.** Denomina-se raiz da equação algébrica $p(x) = 0$, $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, o número complexo α tal que $p(\alpha) = 0$.

Desse modo, resolver a equação algébrica $p(x) = 0$ equivale a determinar as raízes do polinômio $p(x)$.

Ao conjunto formado por todas as raízes da equação damos o nome de conjunto solução da equação.

Exemplo 11. Determine o conjunto solução da equação

$$x^2 - 5x + 6 = 0.$$

As raízes desta equação são 2 e 3 pois, $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$ e $3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$. Logo, o conjunto solução dessa equação é $S = \{2; 3\}$.

Teorema 1 (Teorema de D'Alembert)**.** Seja $p(x)$ em $\mathbb{C}[x]$, um polinômio não nulo. Então $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma raiz de $p(x)$ se, e somente se, $x - \alpha$ divide $p(x)$.

Demonstração . Se α é uma raiz de $p(x)$ então $p(\alpha) = 0$. Pela divisão euclidiana de $p(x)$ por $x - \alpha$ existem $q(x)$, $r(x) \in \mathbb{C}[x]$ tais que

$$p(x) = q(x)(x - \alpha) + r(x),$$

onde $r(x)$ é o polinômio nulo ou tem grau zero. Se $r(x) = 0$, então é claro que $x - \alpha$ divide $p(x)$.

Se $r(x) \neq 0$, então $r(x)$ é um polinômio constante, isto é, $r(x) = r$.

Determinando o valor numérico de $p(x)$ em $x = \alpha$, obtemos:

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) + r.$$

Logo, $p(\alpha) = r$. Como por hipótese, $p(\alpha) = 0$, concluímos que $r = 0$, e portanto, $x - \alpha$ divide $p(x)$.

Reciprocamente, se $x - \alpha$ divide $p(x)$, existe $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que

$$p(x) = q(x)(x - \alpha).$$

Portanto,

$$p(\alpha) = q(\alpha)(\alpha - \alpha) = 0,$$

e desse modo α é uma raiz de $p(x)$. □

Exemplo 12. O polinômio $d(x) = x - 1$ divide o polinômio

$$p(x) = x^5 - 4x^4 - 3x^2 + 7x - 1 \quad ?$$

Como

$$p(1) = 1^5 - 4(1)^4 - 3(1)^2 + 7 \times 1 - 1 = 0,$$

temos que 1 é raiz de $p(x)$. Portanto, pelo Teorema de D'Alembert $d(x) = x - 1$ divide $p(x)$.

Exemplo 13. Mostre que o polinômio $p(x) = x^n - c^n$ é divisível pelo polinômio $d(x) = x - c$. Como $p(c) = c^n - c^n = 0$, temos que c é raiz de $p(x)$ e, portanto, pelo Teorema de D'Alembert, $d(x) = x - c$ divide $p(x)$.

Definição 12 (Multiplicidade de uma raiz)**.** Sejam $p(x)$ um polinômio complexo não nulo e $\alpha \in \mathbb{C}$. Dizemos que α é uma raiz de $p(x)$ de multiplicidade m quando $(x - \alpha)^m$ divide $p(x)$ e $(x - \alpha)^{m+1}$ não divide $p(x)$. Nesse caso, existe o polinômio complexo $q(x)$ tal que $p(x) = (x - \alpha)^m q(x)$, com $q(\alpha) \neq 0$.

Se $m = 1$, dizemos que α é uma raiz simples de $p(x)$. Se $m \geq 2$, α é uma raiz múltipla.

Exemplo 14. 2 é uma raiz de multiplicidade 2 de $p(x) = x^3 - 3x^2 + 4$, pois

$$p(x) = (x - 2)^2(x + 1).$$

Teorema 2 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** Todo polinômio não constante com coeficientes complexos tem uma raiz complexa.

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em Abramo e Villela (2012, p. 190 – 192).

Teorema 3 (Teorema da Decomposição)**.** Seja $p(x)$ um polinômio complexo de grau $n \geq 1$. Existem $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, não necessariamente distintos, e $a \neq 0$, $a \in \mathbb{C}$, tais que

$$p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

Demonstração . A demonstração é por indução sobre o grau de $p(x)$. Se $gr(p(x)) = 1$, então $p(x) = ax + b$, com $a, b \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$, logo

$$p(x) = a(x + a^{-1}b) \quad \text{e} \quad \alpha_1 = -a^{-1}b.$$

Suponha que o resultado seja válido para todo polinômio complexo de grau menor ou igual do que n, com $n \geq 1$. Seja $p(x)$ um polinômio complexo com $gr(p(x)) = n+1$. O Teorema Fundamental da Álgebra assegura que $p(x)$ tem uma raiz complexa α . Pelo Teorema de D'Alembert existe $q(x) \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(x) = q(x)(x - \alpha)$, com $gr(q(x)) = n$.

Por hipótese de indução, existem $a, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, tais que

$$q(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n).$$

Logo,

$$p(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)(x - \alpha).$$

Tomando, $\alpha_{n+1} = \alpha$, obtemos o resultado.

Após uma reordenação das raízes de $p(x)$, caso seja necessário, podemos supor que

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s, \ 1 \leq s \leq n,$$

são suas raízes distintas e que α_i ocorre com multiplicidade r_i, para $i = 1, 2, ..., n$. Desse modo:

$$p(x) = a(x - \alpha_1)^{r_1}(x - \alpha_2)^{r_2}\cdots(x - \alpha_s)^{r_s},$$

onde $r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n$. Portanto, todo polinômio complexo de grau $n \geq 1$ tem exatamente n raízes, contadas as suas multiplicidades. $\square$

A partir das observações acima, podemos reescrever o Teorema Fundamental da Álgebra, do modo a seguir:

Teorema 4. Todo polinômio $p(x)$ com coeficientes complexos e grau $n \geq 1$ é escrito de uma única maneira, a menos da ordem dos fatores, como

$$p(x) = a(x-\alpha_1)^{r_1}(x-\alpha_2)^{r_2}\cdots(x-\alpha_s)^{r_s},$$

onde, $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ é o coeficiente líder de $p(x)$, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$ são números complexos distintos e $r_1, r_2, \cdots, r_s$ são inteiros positivos tais que

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_s = n.$$

Teorema 5 (Teorema das Raízes Racionais)**.** Seja

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n,$$

com coeficientes inteiros e $a_n \neq 0$. Se r e s são inteiros não nulos e $\alpha = \dfrac{r}{s}$ é uma raiz de $p(x)$ e $mdc(r,s) = 1$, então r é um divisor de a_0 e s é um divisor de a_n .

Demonstração . Como $\alpha = \dfrac{r}{s}$ é uma raiz de $p(x)$ temos que:

$$0 = p\left(\frac{r}{s}\right) = a_0 + a_1\frac{r}{s} + a_2\left(\frac{r}{s}\right)^2 + \cdots + a_{n-1}\left(\frac{r}{s}\right)^{n-1} + a_n\left(\frac{r}{s}\right)^n.$$

Multiplicando a igualdade por s^n , obtemos:

$$0 = a_0s^n + a_1rs^{n-1} + a_2r^2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r^{n-1}s + a_nr^n \tag{1.0.1}$$

Definindo

$$b = a_0s^n + a_1rs^{n-1} + a_2r^2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r^{n-1}s,$$

a equação (1.0.1) pode ser reescrita como: $b + a_nr^n = 0$. Como s divide b , concluímos que s divide a_nr^n . Sendo $mdc(r,s) = 1$, segue que s divide a_n . De modo análogo, se na equação (1.0.1), definirmos

$$a = a_1rs^{n-1} + a_2r^2s^{n-2} + \cdots + a_{n-1}r^{n-1}s + a_nr^n,$$

temos que (1.0.1) pode ser reescrita como $a_0s^n + a = 0$. Então como r divide a , segue que r divide a_0s^n . Sendo $mdc(r,s) = 1$, conclui-se que r divide a_0. $\square$

Teorema 6 (Método da Exclusão de Newton)**.** Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes inteiros de grau maior do que ou igual a 1. Se o número inteiro α , subtraído de uma unidade, não dividir $p(1)$, ou se adicionado de uma unidade, não dividir $p(-1)$, então α não é raiz do polinômio $p(x)$.

Demonstração . A demonstração será feita pela contra positiva. Suponha que α seja uma raiz de $p(x)$. Então pelo Teorema de D'Alembert, $p(x) = (x-\alpha)q(x)$. Logo: $p(1) = (1-\alpha)q(1)$ e $p(-1) = (-1-\alpha)q(-1)$. Como $p(1)$, α e $q(1)$ são números inteiros, conclui-se que $1-\alpha$ divide $p(1)$, e portanto , $\alpha - 1$ também divide $p(x)$. De modo análogo, conclui-se que $-1-\alpha$ divide $p(-1)$ e , portanto, $\alpha + 1$ divide $p(-1)$. $\square$

Este teorema mostra-se extremamente útil na pesquisa das raízes racionais de um polinômio, uma vez que é muito simples calcular $p(1)$ e $p(-1)$. Vejamos a aplicação desses dois últimos teoremas no exemplo a seguir.

Exemplo 15. Quais são as raízes inteiras do polinômio

$$p(x) = x^3 - 9x^2 + 22x - 24?$$

Aplicando o Teorema das Raízes Racionais concluímos que há 16 possíveis raízes inteiras de $p(x)$, que são os divisores de 24, e que formam o conjunto ,

$$A = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, -4, 4, -6, 6, -8, 8, -12, 12, -24, 24\} .$$

A fim de que não tenhamos que testar todos esses valores, aplicaremos o Método da Exclusão de Newton.

Calculamos inicialmente $p(1) = -10$. Determinando os elementos de A que subtraídos de uma unidade não dividem $p(1)$ obtemos os valores: $1, -2, -3, 4, -6, -8, 8, -12, 12, -24, 24$. Eliminando esses valores do conjunto A, obtemos o subconjunto $B = \{-1, 2, 3, -4, 6\}$.

Calculamos $p(-1) = -56$ e determinamos quais os elementos de B que acrescidos de uma unidade não dividem -56. Esses valores são: $-1, 2$ e -4, e, portanto, também não podem ser raízes de $p(x)$. Assim, dos 16 valores iniciais, concluímos que apenas 3 e 6 podem ser raízes de $p(x)$.

Calculando $p(3)$, obtemos que $p(3) = -12$. Logo, -3 não raiz de $p(x)$. Calculando $p(6)$, obtemos que $p(6) = 0$ e, portanto, 6 é raiz de $p(x)$.

Teorema 7 (Teorema das Raízes Complexas)**.** Sejam

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

com coeficientes $a_0, a_1, \cdots, a_n$ reais e $z = \alpha + \beta i,\ \beta \neq 0$ uma raiz de $p(x)$. Então, $\overline{z} = \alpha - \beta i$ é uma raiz de $p(x)$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em Iezzi (2005, p. 129) e decorre das propriedades do complexo conjugado de z em $\mathbb{C}$.

Teorema 8. Seja $p(x)$ um polinômio com coeficientes reais. Se $z = \alpha + \beta i,\ \beta \neq 0$, é uma raiz de $p(x)$ com multiplicidade m, então $\overline{z} = \alpha - \beta i$, também é raiz de $p(x)$ com multiplicidade m.

A demonstração desse teorema encontra-se em Lima (2006, p. 225).

Corolário 1. Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais tem pelo menos uma raiz real.

Demonstração . De fato, o Teorema (7) nos garante que as raízes não reais ocorrem aos pares. Como um polinômio de grau ímpar possui um número ímpar de raízes, conclui-se que pelo menos uma dessas raízes é real. $\square$

Capítulo 2

UMA BREVE VIAGEM PELA HISTÓRIA DAS EQUAÇÕES ALGÉBRICAS

Um dos problemas mais interessantes da álgebra, no qual se envolveram grandes matemáticos no decorrer dos séculos, é aquele que trata da resolução de equações algébricas. Neste capítulo apresentamos os fatos mais relevantes dessa história.

2.1 Equação de primeiro grau

Tudo o que hoje se sabe sobre a matemática egípcia provém dos papiros Moscou, escrito por volta de 1850 a.C e Rhind, também conhecido como papiro Ahmes, de aproximadamente 1650 a.C. Juntos, esse papiros contêm 110 problemas, cujas resoluções consistiam de uma sequência de instruções do tipo "faça isso", "faça aquilo", "este é o resultado", sem qualquer tipo de dedução lógica.

Alguns desses problemas eram resolvidos por uma equação de 1º grau a uma incógnita, por um método que mais tarde na Europa ficou conhecido como método da falsa posição. Um valor específico, provavelmente falso, é atribuído à incógnita, e as operações indicadas à esquerda do sinal de igualdade são efetuadas sobre esse número suposto. O resultado é, então, comparado com o valor que se pretende obter e, usando proporções, chega-se à resposta correta.

Exemplificando, vamos aplicar esse método na resolução do problema 26 do Papiro Rhind: "Uma quantidade e seu $\frac{1}{4}$ é igual a 15. Qual é a quantidade?"

Solução: Supõe-se inicialmente que o valor seja 4, devido ao fato de termos que calcular a quarta parte. Obtemos, então que a quantidade mais seu $\frac{1}{4}$ resulta em 5. Como o valor a ser obtido é 15, exatamente o triplo de 5, concluímos que a quantidade procurada é 12.

Na obra *Os Elementos*, escrita pelo matemático grego Euclides por volta do ano 300 a.C, são apresentadas algumas verdades evidentes por si mesmas, que foram agrupadas em postulados de natureza geométrica, e em axiomas. Dois axiomas fundamentam o procedimento para se resolver uma equação de primeiro grau, a saber:

a) Se iguais forem somados a iguais, os resultados serão iguais.

b) Se iguais forem subtraídos de iguais, os resultados serão iguais.

   Acrescentemos a esses dois, outro, que embora não tenha sido enunciado por Euclides, é incontestável.

c) Iguais multiplicados ou divididos por iguais não nulos continuam iguais.

Esses três axiomas formam o alicerce sobre o qual se assenta a resolução de uma equação de primeiro grau. Assim, por exemplo, aplicando o axioma *b*) à equação

$$2x + 3 = 15$$

obtemos:

$$2x + 3 - 3 = 15 - 3 \Leftrightarrow 2x = 12.$$

Aplicando o axioma *c*) , determinamos a solução da equação.

$$\frac{2x}{2} = \frac{12}{2} \Leftrightarrow x = 6.$$

Vê-se, então, que esses três axiomas fornecem um método geral para a resolução de equações de primeiro grau.

2.2 Equação de segundo grau

Há indícios de que, por volta de 1700 a.C os antigos babilônios que habitaram a Mesopotâmia, região que atualmente corresponde ao Iraque, já resolviam equações de segundo grau. Todo o conhecimento que temos da matemática daquela época provém de cerca de 400 tabletes de argila com inscrições, encontrados nas escavações realizadas a partir do final século XIX. Alguns tabletes continham resultados de operações e outros descreviam procedimentos, como se fossem exercícios resolvidos, que correspondem ao que hoje resolveríamos por meio de equações. No tablete BM 13901, que faz parte da coleção do British Museum de Londres, encontramos o problema 1, cuja tradução em nossa linguagem atual é “Adicionei a área e o lado de um quadrado: obtive $\frac{3}{4}$. Qual é o lado?” Este problema equivale a resolver a equação

$$x^2 + x = \frac{3}{4}.$$

A solução apresentada pelos babilônios é expressa por uma série de comandos a serem seguidos. Traduzindo para nossa linguagem atual a solução para o problema é: tome a metade de 1, que é $\frac{1}{2}$ e multiplique por $\frac{1}{2}$, resultando em $\frac{1}{4}$; some a esse valor $\frac{3}{4}$ e obterá 1, que é o quadrado de 1.

Por fim, subtraia $\frac{1}{2}$ de 1 e obterá $\frac{1}{2}$ que é o lado do quadrado. Cada etapa do procedimento era executada com o auxílio de um tablete no qual se consultava o resultado das operações descritas, exercendo naquela época papel equivalente ao das calculadoras de hoje em dia.

Na linguagem algébrica atual a solução apresentada equivale exatamente a

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} - \frac{1}{2},$$

que corresponde a aplicar a fórmula resolutiva de uma equação de segundo grau que hoje conhecemos à equação

$$x^2 + x = \frac{3}{4}.$$

Segundo Boyer (1974) durante a Antiguidade, a Idade Média e até o começo da Idade Moderna as equações quadráticas eram classificadas em três tipos:

1) $x^2 + px = q$,

2) $x^2 = px + q$,

3) $x^2 + q = px$.

Não havia a preocupação em se resolver uma equação da forma

$$x^2 + px + q = 0,$$

com p e q positivos, uma vez que esta não admite raiz positiva.

Muito simples e prático é o procedimento utilizado pelos babilônios na resolução de equações do tipo

$$x^2 + q = px,$$

que corresponde ao problema de se encontrar dois números x e y cuja soma é p e cujo produto é q.

Para resolver esse tipo de problema era apresentada a regra a seguir, cuja única justificativa era a de que dava certo: "Tome a metade da soma e a eleve ao quadrado, subtraia do valor obtido o produto e extraia a raiz quadrada dessa diferença. Some ao resultado a metade da soma. Obterá o primeiro dos números procurados. Subtraia-o da soma para obter o outro número".

Apliquemos, então, esse método no problema a seguir:

Encontrar dois números cuja soma é 32 e o produto é 247.

Solução: A metade de 32 é 16. Elevando 16 ao quadrado obtemos 256. Subtraindo 247 de 256 obtemos 9, cuja raiz quadrada é 3. Acrescentando 16 (a metade da soma) a 3, obtemos 19, que é o primeiro número. Subtraindo-o da soma , obtemos 13, que é o segundo número.

A justificativa para este método desenvolvido pelos babilônios utilizando nossa linguagem atual, é a seguinte:

1. Tome a metade da soma p :

$$\frac{p}{2} = \frac{x+y}{2}.$$

2. Eleve ao quadrado o resultado obtido:

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2.$$

3. Subtraia o produto q do valor obtido:

$$\begin{aligned}\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q &= \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - xy \\ &= \frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4} \\ &= \left(\frac{x-y}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

4. Calcule a raiz quadrada do resultado obtido:

$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x-y}{2}.$$

5. Some a esse resultado a metade da soma p:

$$\frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2} \Leftrightarrow x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

6. Subtraia o número obtido na etapa anterior da soma p , e com isso obterá o segundo número:

$$p - x = (x+y) - x = y.$$

O conhecimento dos gregos sobre Geometria possibilitou-lhes resolver alguns tipos de equação de segundo grau utilizando apenas régua e compasso. Na obra *Os Elementos*, Euclides nos apresenta a resolução geométrica dessas equações. Na dissertação de mestrado de Lages (2007) pode-se encontrar a resolução detalhada de duas equações quadráticas por este método, que embora interessante, não é prático.

No início do século IX, em Bagdá, hoje capital do Iraque, o matemático al-Khwarizmi, cujo nome deu origem às palavras algarismo e algoritmo, introduziu conceitos que simplificaram a álgebra das equações de segundo grau e desenvolveu um método de resolução para essas equações, inspirado na interpretação de números como segmentos, introduzida por Euclides.

Al-Khwarizmi classificou as equações em seis tipos:

1. $ax^2 = bx$	2. $ax^2 = c$
3. $bx = c$	4. $ax^2 + bx = c$
5. $ax^2 + c = bx$	6. $bx + c = ax^2$

Todos os coeficientes dessas equações eram números positivos e, para cada um dos casos, al-Khwarizmi tinha regras para resolução justificadas por resultados geométricos.

Embora utilizasse uma linguagem retórica, sem fazer uso de notações simbólicas, al-Khwarizmi empregava um vocabulário padrão para os objetos que apareciam nos problemas. No caso da equação de segundo grau, utilizava a palavra *mal* para designar o quadrado da quantidade desconhecida e a palavra *jidhr*, que foi traduzida para o latim como raiz, quando se referia à quantidade desconhecida. Ou seja, esses dois termos designavam o que hoje chamamos de incógnita. Já a palavra *adad* refere-se a uma quantidade conhecida. Desse modo a equação

$$x^2 + 10x = 39 \tag{2.2.1}$$

era descrita como "um *mal* e dez *jidhr* igualam trinta e nove denares" e era resolvida segundo o algoritmo a seguir:

1. Tome a metade da quantidade de *jidhr*. Neste exemplo a quantidade é 10 e sua metade, 5 .
2. Multiplique esta quantidade por si mesma; neste caso obtemos 25.
3. Some ao resultado obtido os *adad*; nesse exemplo: $39 + 25 = 64$.
4. Extraia a raiz quadrada do resultado; obtemos assim, 8.
5. Subtraia deste resultado a metade dos *jidhr*, encontrando a solução; no nosso caso, a solução é $8 - 5 = 3$.

Traduzindo esse procedimento para a linguagem algébrica atual, teríamos que a solução de uma equação da forma

$$x^2 + bx = c$$

é dada por

$$-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + c}.$$

Vejamos, agora, a justificativa geométrica para essa resolução. O primeiro membro da equação (2.2.1) pode ser representado geometricamente pela figura a seguir.

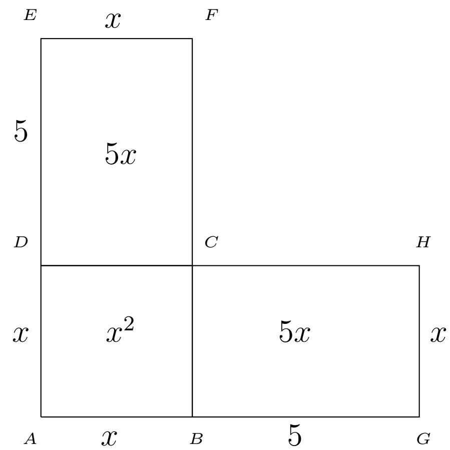

Figura 2.1: Representação geométrica do primeiro membro da equação (2.2.1).

Para completar essa figura de modo a obter um quadrado deve-se acrescentar um quadrado de lado 5 e área 25; assim o quadrado $AGIE$ terá área igual a 64 e, portanto, seu lado medirá 8 e a solução dessa equação será 3.

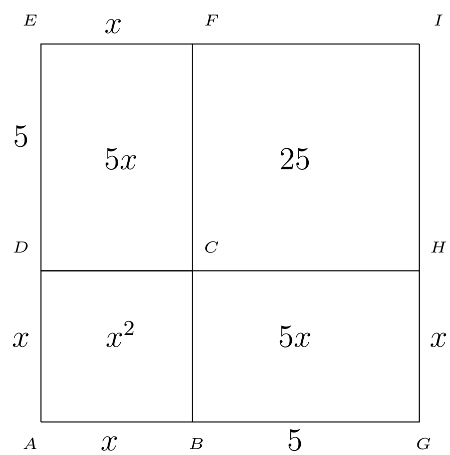

Figura 2.2: Completamento do quadrado

Al-Khwarizmi estabeleceu uma analogia entre geometria e álgebra ao identificar o lado do quadrado geométrico com a raiz do quadrado algébrico. Segundo Roque e Carvalho (2012), a justificativa geométrica apresentada por al-Khwarizmi além de garantir a veracidade do algoritmo, nos faz compreender sua causa: a necessidade de completar o quadrado.

Bháskara, que viveu no século XII , assim como outros matemáticos hindus, aceitava os números negativos e os números irracionais. É na obra desse matemático que encontramos a solução que mais se assemelha à que utilizamos atualmente para resolver uma equação de segundo grau.

Expresso em palavras e utilizando símbolos para a incógnita e para as operações, o método de Bháskara para resolver equações, que correspondem em nossa linguagem moderna a

$$x^2 \pm bx = c,$$

equivalia a reduzir a resolução desse tipo de equação à resolução de uma equação linear.

De modo geral, esse método consistia em:

1. Completar o quadrado no primeiro membro para transformar o termo que contém a quantidade desconhecida e o seu quadrado em um quadrado perfeito.

2. Diminuir o grau da equação extraindo a raiz quadrada dos dois membros.

3. Resolver a equação do 1° grau que daí resulta.

Apliquemos esse método na resolução da equação 2.2.1, a fim de melhor compreendê-lo.

Completando o quadrado no 1° membro, obtemos:

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 64.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os membros e resolvendo as equações resultantes temos:

$$x + 5 = 8 \Leftrightarrow x = 3; \quad x + 5 = -8 \Leftrightarrow x = -13$$

Embora o método proposto por Bháskara, seja um método geral para resolução de equações de segundo grau, não podemos afirmar que havia naquela época uma fórmula, no sentido pelo qual hoje entendemos essa palavra, uma vez que no século XII ainda não havia símbolos algébricos para expressar coeficientes genéricos a, b e c de uma equação de segundo grau. Assim sendo, parece inadequado referir-se à fórmula resolutiva dessa equação, por Fórmula de Bháskara, como ocorre no Brasil.

Deve-se ao matemático francês François Viète, que viveu no século XVI a introdução de uma representação para os coeficientes de uma equação. Considerado por muitos como o precursor da álgebra simbólica, Viète representou as incógnitas por vogais e os coeficientes pelas consoantes do alfabeto, todas maiúsculas. A convenção atual de se usar as últimas letras do alfabeto para indicar as incógnitas e as primeiras para os coeficientes deve-se ao matemático francês do século $XVII$, René Descartes.

Viète e Descartes desenvolveram métodos alternativos para a resolução de equações de segundo grau. Amaral (1988) descreve o método de Viète, que consiste em utilizar duas variáveis auxiliares u e v e fazer a substituição $x = u + v$ na equação

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Já o método geométrico de Descartes para a resolução de equações quadráticas encontra-se em Wagner (1991).

2.3 Equação de terceiro grau

Em torno de 1700 a.C , encontramos na Babilônia as primeiras tentativas de resolução de equações de terceiro grau. Há registro de que equações da forma $x^3 + x^2 = a$ eram resolvidas mediante consulta a uma tabela de valores de $n^3 + n^2$ para números inteiros de 1 a 30.

Na Grécia Antiga, no século III a.C, Arquimedes na obra *Sobre a esfera e o cilindro*, ao resolver o problema de se cortar uma esfera de modo que os volumes dos dois segmentos estejam numa determinada razão, resolve uma equação de terceiro grau, efetuando algumas substituições na equação original e determinando a solução por meio da interseção de uma parábola com uma hipérbole. Segundo Boyer (1974), o interesse pela equação cúbica desaparece após Arquimedes, sendo retomado séculos depois pelos matemáticos árabes.

Para o matemático árabe Omar Khayyan, que viveu na segunda metade do século XII e início do século $XIII$, era impossível encontrar soluções aritméticas para uma equação de terceiro grau. Por essa razão, ele buscou resolver tais equações por um método geométrico que consistia em, a partir de substituições adequadas, obter a equação de uma hipérbole e de uma parábola, construir os gráficos dessas duas curvas e determinar seus pontos de interseção.

Vejamos, a aplicação desse método na resolução da equação

$$x^3 + 5x^2 + 3x = 1. \tag{2.3.1}$$

$$x^3 + 5x^2 + 3x = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 5x + 3) = 1.$$

Definindo $y = x^2 + 5x + 3$ temos que:

$$x(x^2 + 5x + 3) = 1 \Leftrightarrow xy = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{x}.$$

Portanto, construindo os gráficos da parábola $y = x^2 + 5x + 3$ e da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, determinamos as soluções da equação. A figura a seguir mostra que esta equação tem três raízes reais, visto que a parábola e a hipérbole intersectam-se nos pontos A, B e C. As abscissas desses pontos são, portanto, as raízes de (2.3.1).

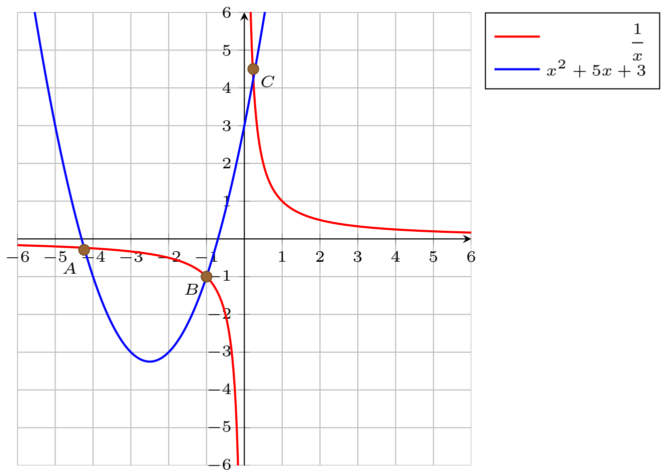

Figura 2.3: Pontos de intersecção da hipérbole e parábola.

No século $XIII$, o maior matemático da Idade Média, Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, ao participar de um torneio matemático a convite do Imperador Frederico II, deparou-se com o problema de resolver a equação cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. Fibonacci concluiu que nenhuma raiz dessa equação pode ser construída com régua e compasso, o que equivale a dizer que não é possível encontrar a solução exata dessa equação por meios algébricos. Apresentou, então, uma solução aproximada, que hoje sabemos estar correta até a nona casa decimal.

É durante o Renascimento italiano que a resolução algébrica de equações de terceiro grau atinge o apogeu. No século XVI, mais de três mil anos após as primeiras tentativas de resolução pelos babilônios, o mundo vem a conhecer a resolução algébrica de uma equação cúbica com a publicação da obra *Ars Magna* de Girolamo Cardano. Relatamos a seguir os principais fatos que culminaram neste grande acontecimento.

Em 1494, em *Summa de Aritmética e Geometria*, livro que teve grande divulgação e prestígio e continha noções de cálculo aritmético, radicais, problemas envolvendo equações de primeiro e segundo graus, geometria e contabilidade, o renomado professor italiano, Frei Luca Pacioli afirmava que não havia uma regra geral para a solução de equações da forma $x^3 + px = q$.

Embora muitos matemáticos acreditassem na afirmação de Pacioli, Scipione del Ferro, professor da Universidade de Bolonha conseguiu, por volta de 1515, provar o contrário, encontrando a solução para esse tipo de equação. No entanto, del Ferro nunca publicou sua solução, mas consta que ele comunicou a apenas duas pessoas o segredo da solução das equações $x^3 + px = q$ e $x^3 = px + q$: Annibale Della Nave, que viria a tornar-se seu genro e sucessor na cadeira de Matemática em Bolonha, e Antonio Maria Fiore, a quem deu a regra, mas não a demonstração.

Do mesmo modo que na Antiguidade todas as classes da sociedade se interessavam pelos desafios dos poetas e pelos jogos dos atletas, na Europa renascentista do século XVI, havia muito interesse por duelos intelectuais. Segundo Lima (2012) esses duelos eram cercados de ritual, presididos por alguma autoridade e muitas vezes assistidos por um grande número de pessoas. Para alguns professores universitários, a permanência na cátedra era condicionada a um bom desempenho nessas disputas e talvez isso explique a atitude sigilosa de del Ferro.

Em 1535, Fiore, de posse do conhecimento da resolução das equações cúbicas, desafiou Niccoló

Fontana, mais conhecido como Tartaglia, professor em Veneza, que já tinha derrotado outros desafiantes. Fiore propôs 30 problemas, todos envolvendo de algum modo equações de terceiro grau, enquanto a lista de Tartaglia era mais diversificada.

Tartaglia percebeu, pelas questões que lhe foram propostas, que deveria haver uma fórmula para resolver uma equação de terceiro grau. Oito dias antes do encontro, no dia 10 de fevereiro de 1535 , depois de longas tentativas, Tartaglia deduziu que a solução da equação $x^3 + px = q$ seria dada por:

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

e desse modo conseguiu solucionar todos os problemas propostos por Fiore e venceu a disputa.

As notícias sobre o concurso e a natureza dos problemas resolvidos chegaram a Milão, onde vivia Girolamo Cardano, que nessa época estava escrevendo a obra *Pratica Arithmeticas Generalis*, que tratava de Álgebra, Geometria e Aritmética. Acreditando no que afirmara Pacioli sobre a impossibilidade de uma solução geral para uma equação de 3° grau, Cardano não cogitava abordar o assunto. Porém, quando soube que Tartaglia encontrara a solução para uma equação cúbica, decidiu procurá-lo para obter a fórmula para publicá-la. No entanto, Tartaglia não a forneceu, pois pretendia ele mesmo publicá-la em um livro a ser escrito no futuro.

Obcecado em conseguir a fórmula, Cardano não desistiu e, em 1539, após atrair Tartaglia até sua casa e com a promessa de guardar segredo, finalmente a obteve, sob a forma de versos um tanto enigmáticos e sem nenhuma indicação da prova.

De posse da fórmula, Cardano, com algum esforço, conseguiu demonstrá-la. Mostrou que a substituição $x = y - \dfrac{b}{3}$ permite eliminar o termo em x^2 na equação

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

e deduziu as fórmulas para resolver 13 tipos de equações do terceiro grau, uma vez que, naquela época, as equações eram todas numéricas e, a rigor, não havia fórmulas e sim regras, explicadas com exemplos numéricos: uma regra para $x^3 + px = q$, outra para $x^3 = px + q$ e assim por diante.

Em 1542 Cardano, juntamente com o seu mais brilhante discípulo Ludovico Ferrari, foram a Bolonha e com a permissão de Della Nave examinaram os manuscritos deixados por del Ferro, dentre os quais estava a solução da equação $x^3 + px = q$. Cardano, então, raciocinou da seguinte forma: sua promessa o proibia de publicar a solução de Tartaglia, mas não a de del Ferro, que fora obtida anteriormente. Desse modo, sentiu-se desobrigado de qualquer compromisso e decidiu, então, colocá-la em seu livro *Ars Magna*, que foi publicado em 1545, atribuindo a autoria da fórmula a del Ferro.

No ano seguinte Tartaglia publica os *Quesiti e Inventione Diverse*, uma coleção de nove livros, na qual apresenta as soluções de vários problemas que lhe foram propostos, descreve fatos autobiográficos e conta a história de sua relação com Cardano atacando-o ferozmente pela quebra de um solene juramento.

Por conta desses fatos, atualmente a fórmula resolutiva de uma equação de terceiro grau descoberta por Tartaglia, é conhecida como Fórmula de Cardano.

A aplicação da Fórmula de Cardano na resolução de equações cúbicas trouxe como consequência a primeira observação significativa de uma nova espécie de número. Até então, o aparecimento da raiz quadrada de um número negativo na resolução de uma equação de segundo grau era sinônimo de que o problema que dera origem à equação não tinha solução. Desse modo, até aquela época não havia a preocupação em se atribuir um significado para a raiz quadrada de um número negativo.

Ao aplicar a fórmula de Cardano na resolução da equação

$$x^3 = 15x + 4,$$

Rafael Bombelli obteve como resultado

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Como tinha conhecimento de que $x = 4$ era solução daquela equação, Bombelli viu-se diante de uma situação em que a raiz de um número negativo aparecia num problema que tinha solução. Teve a ousadia e a coragem necessárias para aceitar a existência dos números imaginários e em sua obra *L´Algebra*, publicada em 1572 , apresentou regras operatórias com raízes de números negativos que ainda não tinham sua legitimidade assegurada, demonstrando uma capacidade de abstração surpreendente para a época.

2.4 Equação de grau maior do que ou igual a quatro

Pouco tempo depois da descoberta da fórmula resolutiva da equação cúbica, descobriu-se como resolver uma equação de 4° grau. Em virtude do costume vigente entre os matemáticos daquela época de proporem problemas uns aos outros, em 1540 o matemático italiano Zuanne de Tonini da Coi desafiou Cardano a resolver uma questão que envolvia a equação

$$x^4 + 6x^2 - 60x + 36 = 0.$$

Depois de diversas tentativas sem êxito, Cardano passou a questão a Ferrari, que - ao resolvê-la - encontrou o método geral para a solução de equações do 4° grau. Esse método também foi publicado no *Ars Magna*, com a autoria creditada a Ferrari. Percebemos, assim, que a resolução das equações cúbicas e quárticas não foi motivada por razões práticas, e convém esclarecer, que a aplicação dessas fórmulas nem sempre é o melhor caminho para a solução dessas equações. Segundo, Boyer (1974) a grande importância dessas descobertas foi o enorme impulso dado à pesquisa em álgebra em várias direções.

O passo seguinte seria encontrar a solução geral para uma equação de 5° grau, mas todos os esforços para alcançar esse intento nos 250 anos que se seguiram não foram bem sucedidos.

Como a resolução de Ferrari para a equação do 4° grau reduzia-se à resolução da equação cúbica associada a ela, o grande matemático alemão Euler, por volta de 1750, utilizou essa ideia e tentou reduzir a resolução de uma equação geral de 5° grau à de uma quártica associada, mas não logrou êxito. Três décadas mais tarde, o matemático de origem franco-italiana Joseph Louis Lagrange também tentou obter a solução geral da equação quíntica, mas assim como Euler também não foi bem sucedido.

Já o médico italiano Paolo Ruffini, no início do século XIX, tomou outra direção e procurou em diversas tentativas mostrar, embora de modo insatisfatório, que as raízes de uma equação geral de grau maior ou igual do que cinco não podem ser expressas por meio de radicais em termos de seus coeficientes. A prova conclusiva desse notável resultado foi realizada pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel, com a publicação do artigo *Sobre a resolução de equações algébricas*, em 1824.

No entanto, uma questão persistia: se as equações de grau superior a quatro de modo geral não são resolúveis por radicais, como explicar que alguns tipos o são, como já se sabia bem antes de Abel? O que caracteriza essas últimas?

A resposta a essa pergunta foi dada por um contemporâneo de Abel, o matemático francês Évariste Galois, cujas pesquisas tinham como objetivo principal determinar em quais condições uma equação polinomial poderia ser solucionada por radical. Em seu trabalho *Pesquisas sobre as equações algébricas de grau primo*, apresentado à Academia de Ciências de Paris em 1829, aparecem os fundamentos daquela que seria sua maior contribuição para a álgebra e que lhe traria a glória póstuma, a Teoria dos Grupos. Nessa teoria, que Galois desenvolveu antes de completar 18 anos, encontra-se um método para determinar quando as raízes de uma equação algébrica podem ser expressas por radicais. A descrição desse método, em função da complexidade da matemática envolvida está fora do escopo desse trabalho.

Concluindo, podemos dizer que - de um modo geral - as raízes de uma equação algébrica de grau superior a quatro não podem ser expressas por radicais, embora existam muitos casos particulares em que isso seja possível, independente do grau da equação. Mas, para determinar em quais condições isso ocorre em uma equação genérica de grau acima de quatro temos que recorrer à Teoria dos Grupos, que introduziu conceitos estruturais muito profundos que viriam a alterar a própria natureza da Álgebra.

Capítulo 3

MÉTODOS ALGÉBRICOS PARA RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS DE GRAU MENOR DO QUE OU IGUAL A QUATRO

3.1 Equação do primeiro grau

Considere a equação $ax + b = 0$, com coeficientes complexos a e b, com $a \neq 0$. Aplicando os princípios de equivalência da igualdade, temos que:

$$\begin{aligned} & ax + b = 0 \Leftrightarrow ax + b + (-b) = 0 + (-b) \Leftrightarrow ax = -b \\ & \Leftrightarrow \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}. \end{aligned}$$

Portanto, a raiz da equação $ax + b = 0$, $a \neq 0$ é $x = -\dfrac{b}{a}$.

3.2 Equação do segundo grau

Considere a equação $ax^2 + bx + c = 0$, com coeficientes complexos a, b e c, com $a \neq 0$:

$$\begin{aligned} & ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \\ & ax^2 + bx = -c \Leftrightarrow \\ & x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Vamos completar o primeiro membro de (3.2.1) a fim de transformá-lo num trinômio quadrado perfeito. Para isso, adicionamos $\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2$ a ambos os membros dessa equação, obtendo:

$$
\begin{aligned}
&x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} \Leftrightarrow \\
&\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (3.2.2)
\end{aligned}
$$

Resolvendo (3.2.2) obtemos as seguintes equações do 1° grau:

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3.2.3)$$

e

$$x + \frac{b}{2a} = -\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (3.2.4)$$

De (3.2.3) e (3.2.4), concluímos que as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$ são dadas por:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Essa é a fórmula resolutiva de uma equação do segundo grau, também conhecida no Brasil como Fórmula de Bháskara.

Se os coeficientes a, b e c são reais, deduz-se da fórmula resolutiva, que:

I. A equação tem duas raízes reais e distintas se, e somente se, $b^2 - 4ac > 0$.

II. A equação tem duas raízes reais e iguais se, e somente se, $b^2 - 4ac = 0$.

III. A equação tem duas raízes complexas distintas conjugadas se, e somente se, $b^2 - 4ac < 0$.

Por essa razão a expressão $b^2 - 4ac$ é denominada discriminante da equação do segundo grau e é usualmente representada pela letra grega Δ.

Exemplo 16. Resolva em $\mathbb{R}$ a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Comecemos por calcular o discriminante Δ dessa equação:

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = -4.$$

Como $\Delta < 0$, concluímos que esta equação não tem raízes reais.

Exemplo 17. Resolva em $\mathbb{C}$ a equação $x^2 - 4x + 5 = 0$.

Como $\Delta = -4$, temos que

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i.$$

Portanto, as raízes desta equação, em $\mathbb{C}$ são $2 + i$ e $2 - i$.

Exemplo 18. Para que valores de m o polinômio

$$p(x) = 3x^2 - 2x + (m - 1)$$

possui uma raiz dupla?

Para $p(x)$ ter uma raiz dupla o discriminante da equação

$$3x^2 - 2x + (m - 1) = 0$$

deve ser igual à zero. Segue, então, que:

$$\begin{aligned} (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (m - 1) = 0 &\Leftrightarrow \\ -12m + 16 = 0 &\Leftrightarrow \\ m = \frac{4}{3}. & \end{aligned}$$

Portanto, para $m = \dfrac{4}{3}$, $p(x)$ possui uma raiz dupla.

Exemplo 19. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação

$$x^2 - (4 - i)x + (5 - 5i) = 0.$$

Aplicando a fórmula resolutiva, temos:

$$x = \frac{4 - i \pm \sqrt{(4-i)^2 - 4(5-5i)}}{2}$$

$$= \frac{4 - i \pm \sqrt{-5+12i}}{2}. \tag{3.2.5}$$

Considere $\sqrt{-5+12i} = a + bi$, com a e b reais. Assim, temos:

$$\begin{aligned} &\sqrt{-5+12i} = a + bi \Leftrightarrow \\ &-5 + 12i = (a^2 - b^2) + 2abi. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

De (3.2.6) segue que:

$$a^2 - b^2 = -5 \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned} &2ab = 12 \Leftrightarrow \\ &b = \frac{6}{a}. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Substituindo (3.2.8) em (3.2.7) obtemos:

$$\begin{aligned} &a^2 - \frac{36}{a^2} = -5 \Leftrightarrow \\ &a^4 + 5a^2 - 36 = 0. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Resolvendo (3.2.9) obtemos que: $a = \pm 2$ ou $a = \pm 3i$. Como a é um número real, concluímos que $a = \pm 2$ e desse modo $b = \pm 3$. Logo,

$$\sqrt{-5+12} = \pm(2+3i). \tag{3.2.10}$$

Substituindo (3.2.10) em (3.2.5) obtemos: $x = \dfrac{4 - i \pm (2+3i)}{2}$.

Consequentemente, a equação proposta tem duas raízes: $3 + i$ e $1 - 2i$.

Proposição 5 (Relações entre raízes e coeficientes de uma equação do segundo grau)**.** Considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com coeficientes complexos a, b e c, com $a \neq 0$. Se r_1 e r_2 são raízes não necessariamente distintas, então, $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$

e $r_1 r_2 = \dfrac{c}{a}$.

Demonstração . Dado o polinômio complexo $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, temos que

$$p(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right). \tag{3.2.11}$$

Sejam r_1 e r_2 raízes de $p(x)$, não necessariamente distintas. Pelo Teorema da Decomposição, temos:

$$\begin{aligned} & p(x) = a(x - r_1)(x - r_2) \Leftrightarrow \\ & p(x) = a\left[x^2 - xr_2 - xr_1 + r_1r_2\right] \Leftrightarrow \\ & p(x) = a\left[x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1r_2\right]. \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

De (3.2.11) e (3.2.12) segue que:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - (r_1 - r_2)x + x_1x_2\right].$$

Pela igualdade de polinômios, concluímos que $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$ e $r_1r_2 = \dfrac{c}{a}$. □

Exemplo 20. Escreva uma equação cujas raízes são $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$.

Denotando $r_1 = 1 + \sqrt{3}$ e $r_2 = 1 - \sqrt{3}$, temos que: $r_1 + r_2 = 2$ e $r_1r_2 = -2$. Portanto, uma equação é $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Exemplo 21. Dada a equação $2x^2 + (2m - 1)x + 3m - 5 = 0$, determine o valor do parâmetro m de modo que a soma das raízes seja igual ao quádruplo de seu produto.

Sendo r_1 e r_2 as raízes da equação

$$2x^2 + (2m - 1)x + 3m - 5 = 0,$$

segue da proposição (5) que $r_1 + r_2 = \dfrac{-2m + 1}{2}$ e $r_1r_2 = \dfrac{3m - 5}{2}$. Como $r_1 + r_2 = 4r_1r_2$, temos que:

$$\begin{aligned} & \frac{-2m + 1}{2} = 4 \cdot \frac{3m - 5}{2} \Leftrightarrow \\ & -2m + 1 = 12m - 20 \Leftrightarrow \\ & 14m = 21 \Leftrightarrow \\ & m = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

3.3 Equação do terceiro grau

Considere a equação de 3° grau

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a \neq 0$. Dividindo-se essa equação por a , obtemos

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Desse modo, podemos considerar, sem perda de generalidade, que a equação geral do terceiro grau é da forma

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0. \tag{3.3.1}$$

Por meio de uma mudança de variável, vamos transformar a equação em (3.3.1) numa equação onde não figure o termo do segundo grau. Substituindo x por $y + w$ na equação (3.3.1) temos:

$$\begin{aligned}
&(y + w)^3 + b(y + w)^2 + c(y + w) + d = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 + 3y^2w + 3yw^2 + w^3 + by^2 + 2byw + bw^2 + cy + cw + d = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 + (3w + b)y^2 + (3w^2 + 2bw + c)y + (w^3 + bw^2 + cw + d) = 0.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Para que essa última equação fique desprovida do termo do segundo grau é necessário e suficiente que $w = -\dfrac{b}{3}$. Substituindo em (3.3.2) temos que:

$$\begin{aligned}
&y^3 + \left(3 \cdot \frac{b^2}{9} + 2 \cdot b\left(-\frac{b}{3}\right) + c\right)y + \left(-\frac{b^3}{27} + b \cdot \frac{b^2}{9} + c \cdot \left(-\frac{b}{3}\right) + d\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 + \left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\right)y + \left(-\frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 + \left(c - \frac{b^2}{3}\right)y + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto, para encontrar as raízes da equação (3.3.1), basta determinar as raízes da equação

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3.3.3}$$

onde $x = y - \dfrac{b}{3}$, $p = c - \dfrac{b^2}{3}$ e $q = \dfrac{2b^3}{27} - \dfrac{bc}{3} + d$.

Para obter a solução dessa equação, considere u e v duas novas variáveis, tais que $y = u + v$. Substituindo em (3.3.3), obtemos:

$$\begin{aligned}
&(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0 \Leftrightarrow \\
&u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + pu + pv + q = 0 \Leftrightarrow \\
&u^3 + 3uv(u + v) + v^3 + p(u + v) + q = 0 \Leftrightarrow \\
&u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.
\end{aligned}$$

Se conseguirmos encontrar números u e v tais que:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\dfrac{p}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27},$$

então $y = u + v$ será raiz da equação $y^3 + py + q = 0$.

Assim, o problema reduz-se a determinar u^3 e v^3 conhecendo sua soma e seu produto. Para isso temos, então, que encontrar as raízes da equação quadrática

$$t^2 - (u^3 + v^3)t + u^3v^3 = 0,$$

que equivale à equação $t^2 + qt - \dfrac{p^3}{27} = 0$.

Aplicando a fórmula resolutiva da equação quadrática obtemos:

$$t = \frac{-q \pm \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2} \Leftrightarrow$$

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Leftrightarrow$$

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Desse modo, podemos supor, sem perda de generalidade que:

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Leftrightarrow u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

e

$$v^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3} \Leftrightarrow v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Consequentemente a solução da equação $y^3 + py + q = 0$ é dada por

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Essa foi a fórmula que Tartaglia deduziu e que posteriormente foi publicada por Cardano, conhecida hoje como Fórmula de Cardano.

Convém salientar que quando essa fórmula foi descoberta na primeira metade do século XVI não se tinha conhecimento do Teorema Fundamental da Álgebra e tampouco dos números complexos. Todavia, hoje sabemos que quando z é um número complexo não nulo, $\sqrt[3]{z}$ apresenta três valores distintos. Portanto, há três valores complexos para u e para v . Mas isto sugere que haverá nove valores para y , o que contraria o Teorema Fundamental da Álgebra.

Na verdade, temos que $y = u + v$, com $uv = -\dfrac{p}{3}$. Desse modo, quando escolhemos um valor para u , dentre os possíveis valores de

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}},$$

o valor de v fica determinado, e desse modo teremos apenas três raízes. Ao aplicar a Fórmula de Cardano, obtemos nove possibilidades, das quais apenas três são as raízes da equação, as quais são obtidas por verificação direta. Todavia, podemos agilizar o processo de resolução de uma equação cúbica, procedendo da seguinte maneira:

1°. Determinar os três valores de u.

2°. Substituir cada valor de u na equação $uv = -\dfrac{p}{3}$ e assim obter valor de v correspondente.

Esse procedimento pode ser simplificado usando a consequência do Corolário (1) que garante que toda equação de terceiro grau tem pelo menos uma raiz real. Desse modo, uma vez determinado um valor real para y, e consequentemente para x , basta aplicar o Teorema de D´Alembert para obter as demais raízes da equação cúbica.

É importante observar que sempre que $D = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ for um número menor do que zero, para determinar a raiz cúbica de u usamos a forma trigonométrica do número complexo sob a raiz cúbica e aplicamos a 2° Fórmula de De Moivre para o caso em que $n = 3$, como segue:

$$u_k = \sqrt[3]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\Theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Theta}{3}+\frac{2k\pi}{3}\right)\right],\ k\in\{0,1,2\}.$$

Por fim, obtidas as três raízes da equação $y^3 + py + q = 0$, determinamos as raízes de

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

por meio da substituição $x = y - \dfrac{b}{3}$. Ilustremos o procedimento descrito na resolução de algumas equações cúbicas.

Exemplo 22. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Inicialmente calculamos o valor de $D = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$. Nessa equação,

$$D = \left(-\frac{9}{2}\right)^2 + (-2)^3 = \frac{81}{4} - 8 = \frac{49}{4}.$$

Sendo $u = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2}+\sqrt{D}}$, segue que

$$u = \sqrt[3]{\frac{9}{2}+\frac{7}{2}} = \sqrt[3]{8}.$$

Como $x = u + v$, 2 é uma das raízes cúbicas de 8, $uv = -\dfrac{p}{3}$ e $p = -6$ temos que $v = 1$ e assim, $x = 2 + 1 = 3$ é uma raiz de $x^3 - 6x - 9 = 0$.

Aplicando o Teorema de D´Alembert temos que $x-3$ divide x^3-6x-9. Efetuando a divisão obtemos $x^2+3x+3=0$, e então

$$x^3-6x-9=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+3)=0$$

Portanto, as raízes de $x^3-6x-9=0$ são:

$$3,\ -\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{e} \quad -\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Ou seja, essa equação tem uma raiz real e duas complexas.

Exemplo 23. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^3-3x-2=0$.

Começamos pelo cálculo de

$$D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3:$$

$D=(-1)^2+(-1)^3=0$.

Calculamos, em seguida, o valor de $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$. Nesse caso, $u=\sqrt[3]{1+0}=\sqrt[3]{1}$. Como 1 é uma das raízes cúbicas de 1, $p=-3$ e $uv=-\frac{p}{3}$ temos que $v=1$. Logo, $x=1+1=2$ é uma raiz de $x^3-3x-2=0$.

Aplicando o Teorema de D´Alembert temos que:

$$\begin{aligned}
&x^3-3x-2=0 \Leftrightarrow\\
&(x-2)(x^2+2x+1)=0 \Leftrightarrow\\
&(x-2)(x+1)^2=0.
\end{aligned}$$

Portanto, essa equação tem três raízes reais: 2 e -1 (raiz dupla).

Exemplo 24. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^3-6x-4=0$.

Determinamos primeiramente o valor de $D=\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3$:

$$D=(-2)^2+(-2)^3=-4.$$

Vamos, agora, encontrar o valor de $u=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{D}}$. Temos, então, que $u=\sqrt[3]{2+2i}$.

Seja $z=2+2i$. Escrevendo z na forma trigonométrica obtemos:

$$z=\sqrt{8}\,(\cos 45^\circ+i\,\text{sen}45^\circ)\,.$$

Aplicando a segunda Fórmula de De Moivre vamos determinar as três raízes cúbicas de z , e consequentemente os três valores de u .

$$\begin{aligned}
z_0&=\sqrt[3]{\sqrt{8}}\,(\cos 15^\circ+i\,\text{sen}15^\circ)\\
&=\sqrt{2}\left[\left(\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right].
\end{aligned}$$

Logo:

$$z_0 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,(\cos 135° + i\,\text{sen}135°) \\ &= \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right). \end{aligned}$$

Assim: $z_1 = -1 + i$.

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[3]{\sqrt{8}}\,(\cos 255° + i\,\text{sen}255°) \\ &= \sqrt{2}\left[\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) + i\left(-\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)\right]. \end{aligned}$$

Logo:

$$z_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i.$$

Portanto, os três valores de u são:

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i, \\ u_2 &= -1 + i, \\ u_3 &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i. \end{aligned}$$

Vamos, agora calcular os três valores de v . Como $p = -6$ e $uv = -\dfrac{p}{3}$, segue que $v = \dfrac{2}{u}$. Para

$$u_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right)i,$$

temos:

$$
\begin{aligned}
v_1 &= \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i} \\
&= \frac{2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i} \cdot \left[\frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i}\right] \\
&= \frac{2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i\right]}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2} \\
&= \frac{2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i\right]}{\frac{4+2\sqrt{3}+4-2\sqrt{3}}{4}} \\
&= \frac{2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i\right]}{2}.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$v_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i.$$

E desse modo,

$$x_1 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i = \sqrt{3}+1.$$

Para $u_2 = -1+i$, temos que $v_2 = \dfrac{2}{-1+i} = \dfrac{-2-2i}{2} = -1-i$. Logo, $x_2 = (-1+i)+(-1-i) = -2$.

Para $u_3 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\right)+\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}\right)i$, temos:

$$v_3 = \frac{2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i}$$

$$= \frac{2}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i}\left[\frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i}\right]$$

$$= \frac{2\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i\right]}{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$= \frac{2\left[\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i\right]}{\frac{4-2\sqrt{3}+4+2\sqrt{3}}{4}}$$

$$= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i.$$

Logo, $v_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i.$

Assim,

$$x_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)i = -\sqrt{3}+1.$$

Portanto, a equação proposta tem como raízes os números reais $-2,\ 1+\sqrt{3}$ e $1-\sqrt{3}$.

Poderíamos ter abreviado o processo de resolução dessa equação tendo inicialmente determinado o valor de v_2 , uma vez que u_2 era, dentre as raízes cúbicas de $2+2i$, o valor mais simples, e com isso obtido que -2 era uma das raízes da equação $x^3-6x-4=0$, e em seguida, tal como fizemos nos dois exemplos anteriores, aplicar o Teorema de D´Alembert. Seguindo por esse caminho poderíamos apenas ter desenvolvido o cálculo de z_1, o qual envolvia a utilização do cosseno e do seno de um arco notável. Todavia, optamos pela estratégia acima com o objetivo de apresentar a resolução de uma equação de 3° grau utilizando como ferramenta apenas a Fórmula de Cardano.

Convém salientar que nos três exemplos acima poderíamos ter obtido uma das raízes reais das equações propostas aplicando o Teorema das Raízes Racionais. Concluímos, então, que a utilização da Fórmula de Cardano torna-se indispensável apenas na resolução de equações que não apresentam raízes racionais.

A Fórmula de Cardano é um grande marco na História da Matemática, pois foi ao resolver uma equação similar à apresentada no último exemplo, onde

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

possui valor menor do que zero, que o matemático italiano Rafael Bombelli iniciou o desenvolvimento dos números complexos. Além disso, como já dissemos no capítulo anterior, após a resolução das equações cúbicas e quárticas a busca por fórmulas resolutivas de equações de grau igual ou superior a cinco trouxe como resultado, séculos mais tarde, o desenvolvimento da álgebra abstrata.

Os exemplos acima nos dão indícios de que o valor de

$$D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

determina se uma equação de terceiro grau tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas, três raízes reais, sendo uma delas uma raiz dupla ou três raízes reais distintas. A proposição a seguir confirma que tais indícios são verdadeiros.

Proposição 6. Considere a equação $x^3 + px + q = 0$ e $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Então:

a) se $D > 0$ a equação tem uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.

b) se $D = 0$ tem-se três raízes reais, sendo uma delas uma raiz dupla.

c) se $D < 0$ as três raízes da equação são reais e distintas.

A demonstração dessa proposição pode ser encontrada em Lima (2012, p. $27 - 29$) e por envolver noções de Cálculo encontra-se fora do escopo desse trabalho.

Complementando o estudo da resolução de uma equação de 3° grau apresentamos a resolução de equações completas de 3° grau.

Exemplo 25. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 6x + 11x - 6 = 0$.

Inicialmente, vamos eliminar o termo em x^2 . Para isso façamos, $x = y - \frac{(-6)}{3} \Leftrightarrow x = y + 2$. Fazendo essa substituição obtemos:

$$\begin{aligned}
&x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 + 6y^2 + 12y + 8 - 6y^2 - 24y - 24 + 11y + 22 - 6 = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 - y = 0 \Leftrightarrow \\
&y(y+1)(y-1) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, -1, 0 e 1 são as raízes de $y^3 - y = 0$ e consequentemente 1, 2 e 3 são as raízes de $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.

Exemplo 26. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0$.

Seja $x = y - \dfrac{1}{3}$. Substituindo na equação dada temos:

$$\begin{aligned}
&\left(y - \frac{1}{3}\right)^3 + \left(y - \frac{1}{3}\right)^2 - 8\left(y - \frac{1}{3}\right) - 12 = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 - y^2 + \frac{1}{3}y - \frac{1}{27} + y^2 - \frac{2}{3}y + \frac{1}{9} - 8y + \frac{8}{3} - 12 = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 - \frac{25}{3}y - \frac{250}{27} = 0.
\end{aligned}$$

Calculando $D = \left(\dfrac{q}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ temos: $D = \left(-\dfrac{125}{27}\right)^2 + \left(-\dfrac{25}{9}\right)^3 = 0.$

Consequentemente, $u = \sqrt[3]{\dfrac{125}{27}}$. Como $\dfrac{5}{3}$ é uma das raízes cúbicas de $\dfrac{125}{27}$, $p = -\dfrac{25}{3}$ e $uv = \dfrac{25}{9}$ temos que $v = \dfrac{5}{3}$; assim, $y = \dfrac{5}{3} + \dfrac{5}{3} = \dfrac{10}{3}$. Portanto, $x = \dfrac{10}{3} - \dfrac{1}{3} = 3$ é uma das raízes da equação proposta.

Aplicando o Teorema de D´Alembert segue que

$$\begin{aligned}
&x^3 + x^2 - 8x - 12 = 0 \Leftrightarrow \\
&(x - 3)(x^2 + 4x + 4) = 0 \Leftrightarrow \\
&(x - 3)(x + 2)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Desse modo, as raízes da equação são 3 e -2 (raiz dupla).

Exemplo 27. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$.

Para eliminar o termo em x^2 , definimos $x = y + 1$, substituímos na equação, e obtemos:

$$\begin{aligned}
&(y + 1)^3 - 3(y + 1)^2 + y + 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + y + 1 + 5 = 0 \Leftrightarrow \\
&y^3 - 2y + 4 = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $D = 2^2 + \left(-\dfrac{2}{3}\right)^3 = 4 - \dfrac{8}{27} = \dfrac{100}{27}$.

Temos, assim, que $u = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{\dfrac{100}{27}}}$. Encontremos, então, o valor real dessa raiz cúbica:

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{-2 + \sqrt{\frac{100}{27}}} &= \sqrt[3]{-2 + \frac{10}{3\sqrt{3}}} \\
&= \sqrt[3]{-2 + \frac{10\sqrt{3}}{9}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{-18 + 10\sqrt{3}}{9}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{\left(-18 + 10\sqrt{3}\right) \cdot 3}{9 \cdot 3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{-54 + 30\sqrt{3}}{3^3}} \\
&= \sqrt[3]{\frac{\left(\sqrt{3} - 3\right)^3}{3^3}} \\
&= \frac{\sqrt{3} - 3}{3}.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{\sqrt{3} - 3}{3}$ é um dos valores de u e como $uv = \dfrac{2}{3}$ temos que:

$$v = \frac{-\sqrt{3} - 3}{3}.$$

Assim, $y = \dfrac{\sqrt{3} - 3}{3} + \dfrac{\left(-\sqrt{3} - 3\right)}{3} = -2.$
Portanto, $x = -1$ é raiz de $x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0$.
Pelo Teorema de D´Alembert segue que:

$$\begin{aligned}
&x^3 - 3x^2 + x + 5 = 0 \Leftrightarrow \\
&(x + 1)(x^2 - 4x + 5) = 0.
\end{aligned}$$

Logo, as raízes dessa equação são $-1,\ 2 + i$ e $2 - i$.
Se aplicássemos o Teorema das Raízes Racionais, examinando os divisores de 5, teríamos obtido a raiz real dessa equação de modo mais simples e rápido.

Essa última observação leva-nos, então, a concluir que uma boa estratégia para a resolução de uma equação de terceiro grau é:

1°. Aplicar o Teorema das Raízes Racionais. Se obtivermos, com a aplicação desse teorema, uma raiz, aplicamos o Teorema de D´Alembert para determinar as demais.

2°. Caso a equação não tenha raízes racionais, eliminar o termo em x^2 por meio de uma mudança de variável a fim de obter uma equação da forma $y^3 + py + q = 0$ e aplicar a Fórmula de Cardano. Na aplicação dessa fórmula, inicialmente calculam-se os valores de

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{D}},$$

onde $D = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$ para em seguida determinar os valores de v , sabendo que $uv = -\frac{p}{3}$. Assim encontram-se os valores de $y = u + v$ e de x. Encontrado um valor real para x, os demais seguem da aplicação do Teorema de D´Alembert.

Existem ainda métodos numéricos que fornecem boas aproximações para as raízes de equações algébricas de qualquer grau e também para equações não algébricas, cujo estudo não faz parte dos objetivos desse trabalho.

Proposição 7 (Relações entre raízes e coeficientes de uma equação do terceiro grau)**.** Seja a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, com coeficientes complexos e $a \neq 0$, de raízes r_1 , r_2 e r_3 não necessariamente distintas. Então, $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a}$, $r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a}$ e $r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}$.

Demonstração . Como consequência do Teorema da Decomposição, a equação

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

com $a \neq 0$, pode ser escrita sob a forma:

$$a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) = 0,$$

onde r_1 , r_2 e r_3 são raízes, não necessariamente distintas, dessa equação. Temos então a identidade:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = (x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) \Leftrightarrow$$

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (r_1 + r_2 + r_3)x^2 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3)x - r_1r_2r_3.$$

Da igualdade entre polinômios conclui-se que:

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a},$$
$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_2r_3 = \frac{c}{a},$$
$$r_1r_2r_3 = -\frac{d}{a}.$$

□

As relações expressas nas proposições (5) e (7) são conhecidas como Relações de Girard. De modo análogo ao que fizemos para deduzir as Relações de Girard para equações de segundo e terceiro graus deduzem-se relações entre raízes e coeficientes para equações de qualquer grau.

Exemplo 28. (Fuvest) - Sabe-se que o produto de duas raízes da equação algébrica

$$2x^3 - x^2 + kx + 4 = 0$$

é igual a 1. Qual o valor de k?

Suponha, sem perda de generalidade, que

$$r_1 r_2 = 1 \tag{3.3.4}$$

Da proposição (7) segue que

$$r_1 r_2 r_3 = -2. \tag{3.3.5}$$

De (3.3.4) e (3.3.5) , vem que $r_3 = -2$. Da definição de raiz de uma equação, temos que:

$$\begin{aligned}
&2(-2)^3 - (-2)^2 + k(-2) + 4 = 0 \Leftrightarrow \\
&-2k - 16 = 0 \Leftrightarrow \\
&k = -8.
\end{aligned}$$

Portanto, o valor de k é -8.

Exemplo 29. (Unicamp) – Sabendo que a equação

$$x^3 - 2x^2 + 7x - 4 = 0$$

tem raízes a, b e c, escreva, com seus coeficientes numéricos, uma equação cúbica que tem como raízes $a+1$, $b+1$ e $c+1$.

Da proposição (7) segue que:

$$\begin{aligned}
&a + b + c = 2 \\
&ab + ac + bc = 7 \\
&abc = 4.
\end{aligned}$$

Seja $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ uma equação cujas raízes são $a+1$, $b+1$ e $c+1$. As relações de Girad para essa equação são:

$$
\begin{aligned}
&(a+1)+(b+1)+(c+1) = -\frac{B}{A} \Leftrightarrow \\
&(a+b+c)+3 = -\frac{B}{A} \Leftrightarrow \\
&\frac{B}{A} = -5 \\
&(a+1)(b+1)+(a+1)(c+1)+(b+1)(c+1) = \frac{C}{A} \Leftrightarrow \\
&ab+a+b+1+ac+a+c+1+bc+b+c+1 = \frac{C}{A} \Leftrightarrow \\
&(ab+ac+bc)+2(a+b+c)+3 = \frac{C}{A} \Leftrightarrow \\
&\frac{C}{A} = 14 \\
&(a+1)(b+1)(c+1) = -\frac{D}{A} \Leftrightarrow \\
&abc+ab+ac+bc+a+b+c+1 = -\frac{D}{A} \Leftrightarrow \\
&\frac{D}{A} = -14.
\end{aligned}
$$

Logo, na equação

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

temos que $\dfrac{B}{A} = -5$, $\dfrac{C}{A} = 14$ e $\dfrac{D}{A} = -14$. Tomando $A = 1$ vem que $B = -5$, $C = 14$ e $D = -14$.

Portanto,

$$x^3 - 5x^2 + 14x - 14 = 0$$

é uma equação que tem como raízes $a+1, b+1$ e $c+1$.

3.4 Equação do quarto grau

Apresentaremos, nesta seção, o método desenvolvido por Ferrari para a resolução de uma equação do quarto grau, da forma

$$x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0, \tag{3.4.1}$$

com b, c, d, e números reais.

A ideia deste método é reduzir a resolução de uma equação do 4° grau à resolução de equações de 2° e 3° graus. O primeiro passo do procedimento consiste em escrever a equação (3.4.1) , na forma

$$x^4 + bx^3 = -cx^2 - dx - e.$$

Para que haja uma melhor compreensão deste método, apresentaremos os demais passos do procedimento a partir da resolução dos exemplos a seguir.

Exemplo 30. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0. \tag{3.4.2}$$

1° passo:

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \\ & x^4 - 2x^3 = x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

2° passo: Adicionar a ambos os membros os termos necessários para transformar o primeiro membro em um quadrado perfeito.

$$\begin{aligned} & x^4 - 2x^3 = x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow \\ & x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2 + 2x + 2 + x^2 \Leftrightarrow \\ & (x^2 - x)^2 = 2x^2 + 2x + 2 \end{aligned}$$

Se o segundo membro desta equação fosse um quadrado perfeito, a resolução da equação recairia na resolução de duas equações de segundo grau. Assim, os próximos passos serão para atingir esse objetivo.

3° passo: Adicionar a ambos os membros da equação uma nova incógnita y de modo que o primeiro membro permaneça um quadrado perfeito. Para isso temos, então, que adicionar $2(x^2 - x)y + y^2$ a ambos os membros.

$$\begin{aligned} & (x^2 - x)^2 = 2x^2 + 2x + 2 \Leftrightarrow \\ & (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x)y + y^2 = 2x^2 + 2x + 2 + 2(x^2 - x)y + y^2 \Leftrightarrow \\ & (x^2 - x + y)^2 = 2x^2 + 2x + 2 + 2x^2y - 2xy + y^2 \Leftrightarrow \\ & (x^2 - x + y)^2 = (2y + 2)x^2 + (2 - 2y)x + (y^2 + 2). \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

4° passo: Este é o passo crucial do procedimento e consiste em escolher um valor para y que transforme o trinômio do segundo membro em um quadrado perfeito. Para que isto ocorra, devemos ter o discriminante do segundo membro da última equação, como trinômio do segundo grau em x, nulo. Ou seja:

$$\begin{aligned} & (2 - 2y)^2 - 4(2y + 2)(y^2 + 2) = 0 \Leftrightarrow \\ & 4 - 8y + 4y^2 - 4(2y^3 + 4y + 2y^2 + 4) = 0 \Leftrightarrow \\ & 4 - 8y + 4y^2 - 8y^3 - 16y - 8y^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow \\ & -8y^3 - 4y^2 - 24y - 12 = 0 \Leftrightarrow \\ & 2y^3 + y^2 + 6y + 3 = 0 \Leftrightarrow \\ & y^2(2y + 1) + 3(2y + 1) = 0 \Leftrightarrow \\ & (y^2 + 3)(2y + 1) = 0 \end{aligned}$$

Das três raízes desta equação, $y = -\dfrac{1}{2}$ é o valor que torna o segundo membro da equação (3.4.3) um quadrado perfeito e para este valor de y, essa equação passa a ser:

$$\begin{aligned}\left(x^2 - x - \frac{1}{2}\right)^2 &= x^2 + 3x + \frac{9}{4}\\ &= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Desse modo, obtemos as seguintes equações do segundo grau:

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = x + \frac{3}{2}$$

e

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = -\left(x + \frac{3}{2}\right),$$

cujas raízes são as raízes da equação proposta.
Portanto, $1+\sqrt{3}$, $1-\sqrt{3}$, i e $-i$ são as raízes da equação

$$x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0.$$

Exemplo 31. Resolver em $\mathbb{C}$ a equação

$$x^4 - 10x^2 + 4x + 8 = 0. \tag{3.4.4}$$

1° passo:

$$\begin{aligned}&x^4 - 10x^2 - 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow\\ &x^4 = 10x^2 - 4x - 8.\end{aligned}$$

2° passo: Como x^4 é um quadrado perfeito, passamos direto para o próximo passo.

3° passo:

$$\begin{aligned}&x^4 = 10x^2 - 4x - 8 \Leftrightarrow\\ &x^4 + 2x^2y + y^2 = 10x^2 - 4x - 8 + 2x^2y + y^2 \Leftrightarrow\\ &(x^2+y)^2 = (2y+10)x^2 - 4x + (y^2-8).\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

4° passo:

$$\begin{aligned}&16 - 4(2y+10)(y^2-8) = 0 \Leftrightarrow\\ &y^3 + 5y^2 - 8y - 42 = 0\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Aplicando o Teorema das Raízes Racionais obtemos que -3 é raiz da equação (3.4.6), e este valor torna o segundo membro da equação (3.4.5) um quadrado perfeito; para este valor de y essa equação transforma-se em:

$$\begin{aligned}(x^2-3)^2 &= 4x^2-4x+1 \Leftrightarrow \\ (x^2-3)^2 &= (2x-1)^2\end{aligned} \tag{3.4.7}$$

Resolvendo essa última equação, obtemos que: $x^2-3=2x-1 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$ ou $x^2-3=-2x+1 \Leftrightarrow x=-1\pm\sqrt{5}$.

Concluímos, então, que as raízes de (3.4.4) são $1\pm\sqrt{3}$ e $-1\pm\sqrt{5}$.

Capítulo 4

UMA PROPOSTA DE ATIVIDADES PARA O ESTUDO DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS NO ENSINO BÁSICO

Nesta última parte de nosso trabalho, apresentamos uma proposta de atividades relacionadas à resolução de equações algébricas para ser desenvolvida com alunos das séries finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Na elaboração das atividades utilizamos os conhecimentos que adquirimos nessa pesquisa e procuramos pôr em prática a recomendação de Lima (1999) de que o ensino da Matemática deve ser organizado de modo a familiarizar gradativamente os alunos com o método matemático, desenvolver habilidades de cálculo e criar condições para a aplicação do conhecimento matemático em situações da vida real.

Outro aspecto que procuramos contemplar na elaboração das atividades foi o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, que é

> peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticos pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que ele seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2002,p.112).

Segundo Onuchic (1999), o trabalho com resolução de problemas representa uma reação a uma visão do conhecimento matemático como um conjunto de fatos e domínio de procedimentos algorítmicos, que pode ser obtido por rotina ou por exercício mental.

Em sincronia com o que fizemos nos dois capítulos anteriores apresentamos inicialmente propostas de atividades que possam enriquecer o estudo de uma equação de primeiro grau. Em seguida apresentamos sequências didáticas para o estudo das equações de segundo e terceiro graus e alguns problemas extraídos de vestibulares que requerem em sua resolução, mais do que a aplicação de algoritmos, a compreensão e a aplicação de conceitos estudados. Finalizamos com a resolução de uma equação de terceiro grau através do método da Bisseção, método numérico que pode ser utilizado para a resolução de qualquer equação algébrica ou não algébrica.

4.1 Equação de primeiro grau

No Ensino Fundamental a resolução de uma equação de 1° grau deve ser apresentada aos alunos utilizando-se os princípios de equivalência da igualdade os quais indicam que se pode somar ou subtrair nos dois membros uma mesma quantidade, bem como multiplicar ou dividir ambos os membros por um dado número diferente de zero.

Um modelo que facilita a compreensão de eliminar o mesmo termo de ambos os membros é o da balança de dois pratos. De modo geral é dessa forma que os livros didáticos introduzem o estudo de uma equação de 1° grau. Todavia percebemos que muitos professores deixam de enunciar os princípios de equivalência para simplesmente apresentar a regra prática da transposição que permite mudar um termo de membro trocando-lhe o sinal. Somos radicalmente contra essa maneira de apresentar a resolução de uma equação de 1° grau na medida em que reforça uma perspectiva da Matemática como um conjunto de regras arbitrárias e compromete a qualidade da aprendizagem.

Nossa experiência comprova que, com a aplicação dos princípios de equivalência da igualdade, o aluno compreende o processo de resolução de uma equação de 1° grau e com o tempo acaba por descobrir a regra da transposição e a utilizá-la posteriormente.

No estudo das equações deve-se priorizar a resolução de problemas que tenham vínculos com o mundo real, conexões com outros ramos da Matemática ou que tenham algo de desafiador e possam despertar a curiosidade e o interesse no aluno em resolvê-los. Procuramos na atividade a seguir apresentar problemas que tenham pelo menos uma dessas características.

4.1.1 Primeira atividade

Questão 1.

A fórmula 95/105.

Foi publicado em 18/02/14 no site *www.veja.abril.com.br* que o governo federal prepara um projeto de lei que substitui o fator previdenciário por uma regra que mescla idade mínima do contribuinte e seu tempo de contribuição para o INSS para obter aposentadoria. Segundo essa regra, chamada de Fórmula 95/105, uma mulher terá direito à aposentadoria quando a soma da sua idade ao se aposentar com o número de anos trabalhados for igual a 95. Para os homens essa soma deve ser 105.

a) Se esse projeto for aprovado, com que idade poderá aposentar-se uma mulher que começou a trabalhar com 23 anos? E um homem que também começou a trabalhar com essa idade?

b) Se uma mulher começar a trabalhar com 33 anos, com que idade se aposentará se a fórmula 95/105 for aprovada?

Questão 2.

(Processo seletivo do Colégio Pedro II – MEC, 2011)

Juliana irá participar de uma corrida de longa distância. Para se preparar para esta prova, seu treinador fez um planejamento no qual ela correrá 198 km durante 27 dias, obedecendo às condições abaixo.

1^a condição: Na 1^a semana de treinamento, Juliana deverá correr a mesma distância todos os dias.

2^a condição: A cada nova semana, Juliana intensificará seu treinamento, correndo por dia, 3 km a mais do que correu na semana anterior.

a) Representando por x a distância que deverá ser percorrida, por dia, na 1^a semana do treino determine uma equação que descreva o planejamento do treinador para a preparação de Juliana.

b) Resolva a equação acima e calcule quanto Juliana deverá correr na primeira semana de treino.

Questão 3.

(Adaptada do processo seletivo do Colégio Pedro II – MEC, 2011)

Na figura abaixo estão representados um polígono $ABCDEF$ e um triângulo ABC. Com base nas dimensões dadas, em cm, faça o que se pede:

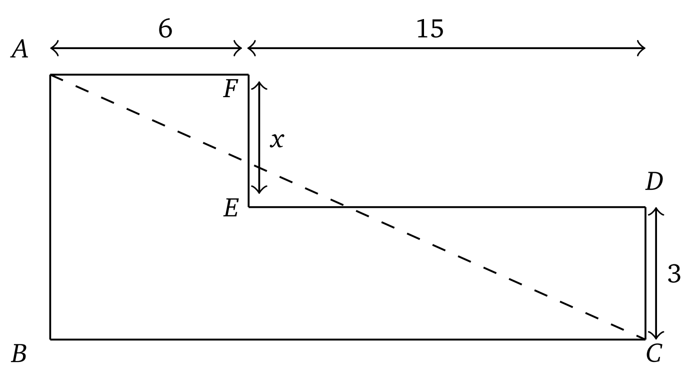

Figura 4.1: polígono $ABCDEF$ e triângulo ABC.

a) Escreva uma expressão algébrica que represente a área do polígono ABCDEF.

b) Escreva uma expressão algébrica que represente a área do triângulo ABC.

c) Calcule o valor de x para que a área do polígono $ABCDEF$ seja igual à medida da área do triângulo ABC.

Questão 4.

Num colégio, a média do 1° trimestre tem peso 2, a do segundo, peso 3 e a do terceiro, peso 5. Um aluno é aprovado quando tem média anual igual ou superior a $6,0$; caso sua média fique entre $4,0$ e $6,0$, o aluno tem direito a recuperação; se a média for inferior a $4,0$ o aluno estará reprovado.

a) Qual a média anual de um aluno que obteve no 1° trimestre média 5,0, no segundo, média $7,0$ e no terceiro $8,0$?

b) Que média deverá obter no 3° trimestre para ser aprovado, sem recuperação, um aluno que no 1° trimestre obteve média $4,0$ e no segundo, média $6,0$?

c) Se um aluno obteve média $4,0$ no 1° trimestre e $3,0$ no segundo, que média, no mínimo, deverá obter no 3° trimestre para ter direito a recuperação?

Questão 5.

Santo Antônio Milagreiro

Manoel tinha certa quantia de dinheiro e a achava muito pequena e por isso vivia reclamando da vida até que um dia encontrou Santo Antônio e fez-lhe a seguinte proposta:

- Oh querido Santo Antônio, dobre o dinheiro que tenho e te darei $R\$10,00$. Assim o santo fez. No outro dia, como ainda achava que tinha pouco dinheiro, Manoel fez a mesma proposta ao santo, que aceitou o combinado novamente, dobrando a quantia de dinheiro do fiel, ficando com $R\$10,00$.

No terceiro dia, mais uma vez Manoel fez a mesma proposta, mas aconteceu algo inesperado: no momento em que a quantidade foi dobrada e ele entregou os $R\$10,00$ ao santo, o dinheiro acabou. Quanto reais Manoel tinha no primeiro dia?

Questão 6.

Adivinhando as datas (Adaptada do livro A magia da Matemática, SÁ, 2007, p. 7)

Peça para algum colega escolher quatro dias que formem um quadrado no calendário abaixo. Em seguida peça a ele para somá-los e lhe informar o resultado. Se você subtrair 16 do resultado e em seguida dividir por 4, descobrirá o primeiro dia e daí para obter os demais basta somar 1, 7 e 8. Explique por que tal fato sempre ocorre.

Figura 4.2: Calendário

Questão 7.

Um tijolo pesa um 1 quilo mais meio tijolo. Quanto pesa o tijolo inteiro?

Questão 8.

(Extraído da Olímpiada de Matemática da Academia de Ciências do Estado de São Paulo, 1987)

Conversa de Pescadores

Numa conversa de pescadores, cada um se gabava do comprimento dos peixes fisgados. Um deles que era matemático, não querendo exagerar, como é de costume, procurou contar-lhes em forma velada o que havia pescado:

a) a cabeça media 12 cm;

b) o corpo tinha tanto quanto o rabo, mais a terça parte da cabeça;

c) o rabo tinha tanto quanto a cabeça, mais a terça parte do corpo.

Qual o comprimento do peixe?

4.1.2 Segunda atividade

O método da falsa posição utilizado pelos antigos egípcios para resolver equações requer apenas o cálculo de frações de uma quantidade conhecida e contribui para o desenvolvimento do conceito de proporcionalidade. Por essa razão acreditamos que seja interessante apresentar esse método aos alunos do Ensino Fundamental como uma introdução ao estudo da resolução de equações de primeiro grau. A presente atividade tem esse intuito.

Questão 1.

Há cerca de 3600 anos, viveu no Egito um escriba chamado Ahmes, que escreveu uma das mais antigas obras de Matemática de que se tem notícia: o Papiro Ahmes, que está guardado no museu Britânico de Londres e tem cerca de 5 metros de comprimento por 30 cm de altura. Esse papiro foi comprado em 1858 numa cidade à beira do rio Nilo por Henry Rhind, um antiquário escocês. Por isso, também é conhecido como Papiro Rhind.

Esse papiro contém 80 problemas resolvidos, sendo que a maioria refere-se a assuntos do dia a dia, mas alguns não se referem ao mundo real e sim aos próprios números. Nesses problemas, o número procurado era sempre representado pela palavra “aha” e os egípcios resolviam esses problemas por um método chamado método da falsa posição. Vamos conhecer como é esse método, resolvendo o problema 26 do papiro Ahmes:

“Uma quantidade mais a sua quarta parte resultam em 15. Qual é a quantidade”

Inicialmente atribui-se para “aha” um valor qualquer, e desse modo pode-se efetuar as operações descritas e compará-lo com o resultado desejado. Eventualmente poderá acontecer de o valor escolhido ser o valor correto e dessa forma o problema já estará resolvido. Deve-se escolher um valor que facilite os cálculos a serem realizados. Assim, no problema acima como temos que calcular a quarta parte, é conveniente escolher para o "aha" um valor que seja múltiplo de 4.

a) Se "aha" for igual a 4, quanto é a quarta dessa quantidade?

b) Nesse caso, qual o valor de "aha" mais a sua quarta parte?

c) O resultado obtido no item *b*) é o resultado esperado, ou seja, é igual a 15?

d) O valor desejado é, então, quantas vezes o valor que você obteve no item *b*)?

e) Multiplique o valor do "aha" pelo resultado que você obteve no item anterior e verifique se ele é a solução do problema.

f) Portanto, qual é o valor da quantidade?

Questão 2.

Resolva o problema 27 do papiro Ahmes: "Uma quantidade e seu quinto se torna 21. Qual é a quantidade?"

a) Escolha um valor conveniente para "aha" e calcule a quinta parte desse valor.

b) Calcule o valor de "aha" mais sua quinta parte.

c) O resultado obtido no item *b*) é o resultado esperado, ou seja, é igual a 21?

d) Se a resposta da questão anterior foi sim, você teve sorte e já encontrou a solução para esse problema. Caso contrário, resolva as próximas questões.

e) O valor desejado é quantas vezes o valor que você obteve no item *b*)?

f) Multiplique o valor do "aha" pelo resultado que você obteve no item anterior e verifique se ele é a solução do problema.

g) Qual é, então, a quantidade procurada?

Questão 3.

Responda a questão a seguir utilizando o método da falsa posição: Uma quantidade, sua metade, seus dois terços, todos juntos resultam 26. Diga-me: qual é a quantidade?

Questão 4.

(Extraído da OBM-2009) -

Uma barra de chocolate é dividida entre Nelly, Penha e Sônia. Sabendo que Nelly ganha $\frac{2}{5}$, Penha ganha $\frac{1}{4}$ e Sônia ganha 70 gramas, qual o peso da barra?

a) Retirando $\frac{2}{5}$ da barra de chocolate para Nelly e $\frac{1}{4}$ para Penha, quantos gramas sobrarão para Sônia?

b) Portanto, o peso da barra de chocolate pode ser menor que 70 gramas?

c) Então, para começar aplicar o método da falsa posição devemos escolher para "aha" um valor que seja múltiplo de 4 e 5 e maior que 70. Se "aha" fosse 100 que quantidade de chocolate Nelly e Penha receberiam?

d) Nesse caso, quanto sobraria para Sônia? Esse valor é o valor desejado?

e) O valor que Sônia deve ganhar é quantas vezes o valor obtido no item anterior?

f) Portanto, qual é o peso da barra?

4.2 Equação de segundo grau

Para introduzir o estudo da equação de segundo grau seguimos a orientação de Lima (1999) de que cada novo assunto deve começar com um problema cuja solução requer o uso do conteúdo a ser estudado.

4.2.1 Primeira atividade

Definição: Diagonal de um polígono convexo é um segmento de reta que une dois vértices não consecutivos. Aplique essa definição na resolução das questões a seguir.

Questão 1

Considere o quadrilátero $ABCD$ desenhado a seguir:

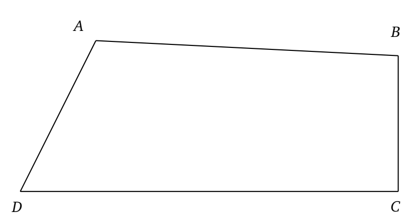

Figura 4.3: Quadrilátero $ABCD$

a) Quantas diagonais desse quadrilátero partem de cada um dos vértices ?

b) Quantas diagonais tem esse quadrilátero?

Questão 2

Considere o pentágono $ABCDE$ representado a seguir:

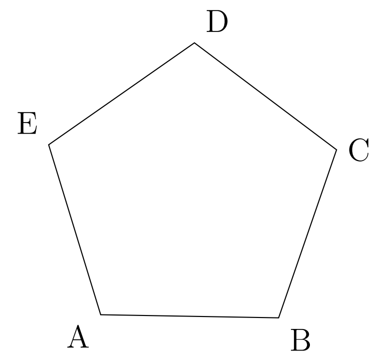

Figura 4.4: Pentágono $ABCDE$

a) Quantas diagonais desse pentágono partem de cada um dos vértices?

b) Quantas diagonais tem esse pentágono?

Questão 3

Considere o hexágono $ABCDEF$

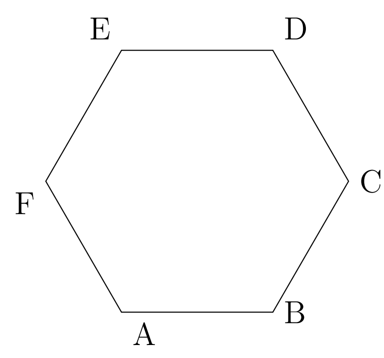

Figura 4.5: Hexágono $ABCDEF$

a) Quantas diagonais desse hexágono partem de cada um dos vértices ?

b) Quantas diagonais tem esse hexágono?

Questão 4

Considere o heptágono $ABCDEFG$:

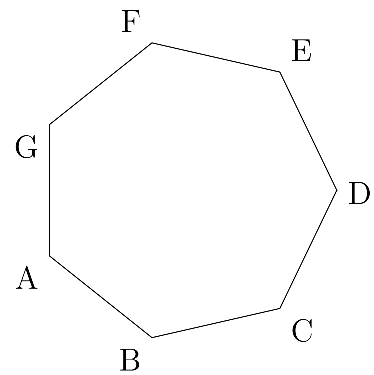

Figura 4.6: Heptágono $ABCDEFG$

a) Quantas diagonais desse heptágono partem dos vértices?

b) Quantas diagonais tem esse heptágono?

Questão 5

Quantas diagonais tem um polígono de 8 lados?

Questão 6

Quantas diagonais tem um polígono de 10 lados?

Questão 7

Como você faria para calcular o número de diagonais de um polígono de 30 lados?

Questão 8

O que temos que fazer para encontrar o número de diagonais de um polígono de n lados?

Questão 9

Escreva uma expressão matemática que forneça o número d de diagonais de um polígono de n lados.

Questão 10

Quantos lados tem um polígono que possui 105 diagonais?

As questões de 1 a 4 têm por objetivo levar o aluno a perceber que há uma relação entre o número de lados de um polígono e o número de diagonais e a elaborar uma hipótese sobre qual é essa relação.

As questões 5 e 6 foram planejadas para que, após levantar uma hipótese sobre a relação entre o número de diagonais e o número de lados o aluno tivesse a oportunidade de testá-la.

Já as questões 7 e 8 têm por objetivo utilizar a linguagem natural para a comunicação de uma ideia matemática, para em seguida, na questão 9, comunicar esta mesma ideia em linguagem matemática.

A questão 10 tem por finalidade introduzir o objeto central do estudo que é a resolução de uma equação de segundo grau e deve ser apresentada depois da discussão e correção das questões anteriores. Após uma análise dos possíveis procedimentos para solucioná-la, apresenta-se a definição de equação de segundo grau e sua classificação em equações completas e incompletas.

Procede-se, então, à resolução das equações incompletas, que demandam apenas aplicação de técnicas de fatoração. Acreditamos que essas equações devam ser estudadas no momento em que se estudam os casos de fatoração denominados fator comum e diferença de quadrados. Se assim for feito, haveria previamente uma revisão da resolução dessas equações para, em seguida, iniciar o estudo da resolução de equações completas.

Já tivemos a oportunidade de aplicar essa atividade em sala de aula, com os alunos organizados em pequenos grupos sendo que o resultado foi bastante satisfatório uma vez que se sentiram motivados e desafiados a solucionar as questões propostas. Convém ressaltar que essa atividade pode ser proposta também para alunos de oitavo ano no momento em que se estuda a introdução ao cálculo algébrico ou no segundo ano do Ensino Médio no estudo de Análise Combinatória.

As próximas três atividades têm por objetivo a dedução da fórmula resolutiva para equação de segundo grau, conhecida no Brasil, como Fórmula de Bháskara, pois assim como Lima (1999) acreditamos que as demonstrações devam ser apresentadas não só por ser parte essencial da natureza da Matemática como também por seu valor educativo, visto que demonstrar é uma forma de convencer com base na razão e não na autoridade.

Iniciamos com uma situação problema, para em seguida apresentar o método geométrico de completar quadrados, utilizado por al–Khawarizmi, o qual possibilitará uma melhor compreensão da resolução algébrica de uma equação de 2° grau e da dedução da formula resolutiva.

4.2.2 Segunda atividade

Com o intuito de investir o dinheiro que recebeu em um prêmio de loteria, João comprou três terrenos: um de forma quadrada, que situa-se na esquina da rua Fernando Pessoa com rua Cora Coralina, e dois retangulares, vizinhos ao terreno quadrado. Os terrenos retangulares têm 15 m comprimento e largura igual à medida do lado do terreno quadrado. Se a área total dos três terrenos é 1000 m^2, quanto mede o lado do terreno quadrado?

a) Construa uma figura que represente a localização dos terrenos adquiridos por João.

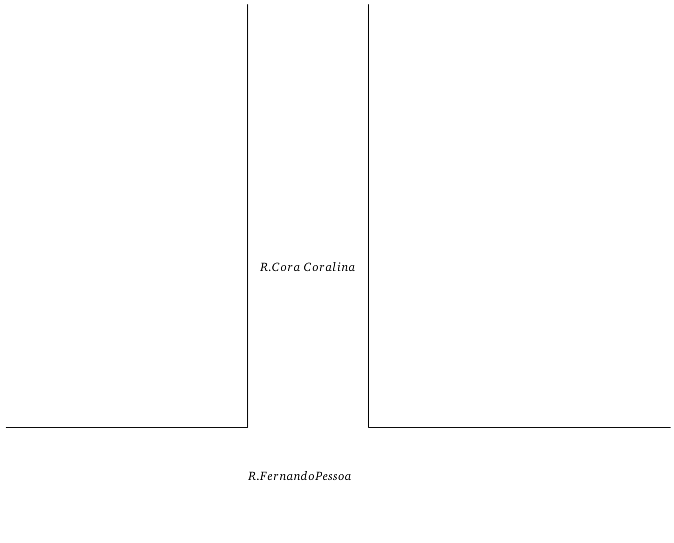

Figura 4.7: mapa da 2° atividade

b) Chamando de x a medida do lado do terreno quadrado, escreva no interior de cada terreno a expressão algébrica que corresponde à sua área.

c) Quantos metros quadrados têm os três terrenos juntos?

d) Que figura temos que acrescentar à figura acima para obtermos um quadrado? Qual a área dessa figura?

e) Qual a área do quadrado maior que obtivemos? Quanto mede o seu lado?

f) Qual é, então, a medida do lado do terreno quadrado que João comprou?

4.2.3 Terceira atividade

Representando por x a medida do lado do terreno quadrado temos que a equação que corresponde ao problema proposto na atividade anterior é

$$x^2 + 30x = 1000,$$

que é uma equação de segundo grau completa.

Vários documentos antigos mostram que as equações de segundo grau já eram familiares a alguns povos da Antiguidade, por volta de 1700 a.C. Muito tempo depois, no século IX , o matemático mulçumano al – Khawarizmi resolvia esse tipo de equação interpretando, através de áreas, os termos da equação. Vamos aprender como era esse método.

Inicialmente vamos considerar que x^2 representa a área de um quadrado de lado x e, $30x$ a área de dois retângulos de lados 15 e x. Em seguida construímos o quadrado de lado x e os retângulos de lados 15 e x de modo que eles formem uma figura em forma de L.

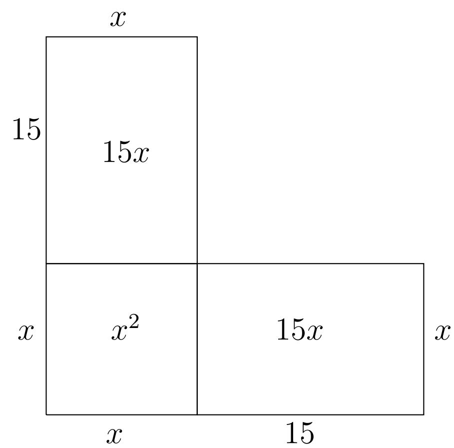

Figura 4.8: Figura em formato de L - 3^a atividade

Completamos essa figura a fim de que ela se transforme em um quadrado. Para isso, temos acrescentar à figura em forma de L, um quadrado de lado 15 e área 225 .

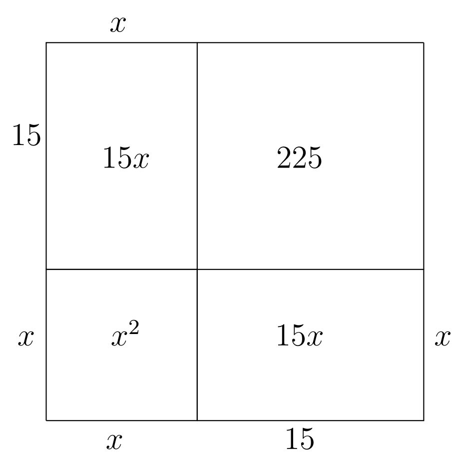

Figura 4.9: Quadrado - 3^a atividade

Como a área da figura (4.8) é igual a 1000 e a essa área acrescentamos 225 , concluímos que a área do quadrado obtido na figura (4.9) tem área 1225 e, portanto, seu lado mede 35. Logo: $x + 15 = 35$ e $x = 20$.

Questão 1

Utilize o método de al – Khawarizmi para resolver as equações a seguir:

a) $x^2 + 8x = 65$

b) $x^2 + 2x = 24$

c) $x^2 + 10x - 56 = 0$

Questão 2

Os arqueólogos vêm trabalhando na Mesopotâmia, região que atualmente pertence ao Irã e Iraque, sistematicamente desde antes da metade do século XIX, tendo já desenterrado mais de meio milhão de tábulas de argila. Somente no sítio da antiga Nipur foram escavadas mais de 50.000 tábulas. Os museus de Paris, Bermil e Londres e as Universidades de Yale, Colúmbia e Pensilvânia têm excelentes coleções dessas tábulas. (EVES, 2011, p. 58).

No tablete $BM13901$, que faz parte do acervo do British Museum de Londres, se encontra o problema a seguir, que traduzimos para linguagem atual: "Adicionei a área e o lado de um quadrado e obtive $\frac{3}{4}$. Qual a medida do lado?" Resolva esse problema utilizando o método de al-Khawarizmi.

4.2.4 Quarta atividade

Vamos agora utilizar a ideia do método de al-Khawarizmi para resolver uma equação de segundo grau de modo algébrico. Considere a equação

$$x^2 + 10x - 56 = 0.$$

1. Inicialmente adicionamos 56 a ambos os membros da equação e assim obtemos: $x^2+10x = 56$.

2. Sabemos que x^2 corresponde ao quadrado de x.

3. Interpretamos $10x$ como $5x + 5x$, isto é, $10x = 2 \cdot x \cdot 5$.

4. Desse modo, temos: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 = 56$. Para transformar o 1° membro desta equação em um trinômio quadrado perfeito temos que adicionar $5^2 = 25$ a ambos os membros e desse modo obtemos: $x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 25 = 56 + 25$.

5. Portanto, temos que $(x + 5)^2 = 81$. Sabemos que os números que elevados ao quadrado resultam 81 são 9 e -9 . Desse modo, há dois casos a considerar:

   1°. $x + 5 = 9$, logo $x = 4$.

   2°. $x + 5 = -9$, logo $x = -14$.

6. Concluímos, então, que a equação

   $$x^2 + 10x - 56 = 0$$

   possui duas soluções: 4 e -14 .

Observe que o procedimento descrito é análogo ao utilizado por al-Khawarizmi. Todavia, ao resolver essa mesma equação na atividade anterior, obtivemos apenas 4 como solução. Como você explica este fato?

Questão 1.

Resolva as equações a seguir utilizando o método de al-Khawarizmi e o método algébrico:

a) $x^2 + 6x - 16 = 0$

b) $x^2 + 12x - 28 = 0$

Questão 2

Resolva pelo método de completar quadrados as equações:

a) $x^2 - 8x - 25 = 0$

b) $x^2 - 10x - 11 = 0$

c) $x^2 + 3x - \dfrac{27}{4} = 0$

d) $2x^2 + x - 1 = 0$ (Sugestão: divida inicialmente ambos os membros da equação por 2, a fim de transformar o primeiro termo da equação num quadrado perfeito.)

e) $3x^2 - 2x - 1 = 0$

f) $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Planejamos um aumento gradual no nível de dificuldade na manipulação algébrica nas cinco primeiras equações a fim de possibilitar uma melhor compreensão da resolução da última equação, a qual será resolvida juntamente com o professor e trará como resposta a fórmula resolutiva da equação de segundo grau.

Aplicando esse novo conhecimento, consegue-se, então, solucionar o problema que introduziu o estudo da resolução de uma equação de segundo grau.

Questão 3.

Utilize a fórmula obtida no último item da questão anterior e resolva a questão 10 da 1° atividade.

Após a dedução da fórmula resolutiva propõem-se algumas equações visando à compreensão do processo de aplicação da fórmula. Na seleção das equações a serem resolvidas deve-se escolher equações em que o discriminante seja positivo, nulo e negativo a fim de apresentar a relação entre o valor do discriminante e o número de raízes da equação.

Seguindo as recomendações de Lima (1999) após a dedução da fórmula resolutiva e a aplicação na resolução de diversas equações de segundo grau, vamos aplicá-la na resolução de problemas. As próximas atividades têm essa finalidade.

4.2.5 Quinta atividade

As equações do segundo grau foram abordadas ao longo da História da Matemática por diferentes civilizações na busca pela resolução de vários problemas. Vamos conhecer e resolver alguns desses problemas.

Questão 1

No papiro Moscou que data de aproximadamente 1850 a. C, encontramos o seguinte problema: "A área de um retângulo é 12 e a altura é $\frac{3}{4}$ da base. Quais são as dimensões desse retângulo?"

Questão 2

O problema a seguir foi proposto por Bháskara no século XII: Um bando barulhento de macacos se divertia. Um oitavo ao quadrado brincava no bosque. Doze, os que sobraram, gritavam ao mesmo tempo, no alto de uma colina verdejante. Quantos eram os macacos no total?

Questão 3

Al-Khawarizmi no século IX propôs o seguinte problema: Divida 10 em duas partes, e divida a primeira pela segunda e a segunda pela primeira. Se a soma dos quocientes é igual a 2, ache as partes.

A atividade a seguir visa à dedução das relações entre raízes e coeficientes de uma equação de segundo grau.

4.2.6 Sexta atividade

Considere a equação

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

com coeficientes reais e $a \neq 0$.

Aplicando a fórmula resolutiva temos que as raízes x_1 e x_2 dessa equação são expressas por:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

e

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Questão 1

Determine o valor da soma S das raízes dessa equação.

Questão 2

Determine o valor do produto P das raízes dessa equação.

Questão 3

Como podemos determinar os valores da soma e do produto das raízes de uma equação a partir de seus coeficientes?

Questão 4

Aplique as relações obtidas e determine o valor da soma e do produto das raízes das equações:

a) $x^2 - 6x + 8 = 0$

b) $x^2 - 8x + 15 = 0$

c) $x^2 - 5x - 14 = 0$

d) $x^2 + x - 12 = 0$

e) $x^2 + 10x + 16 = 0$

f) $3x^2 + 36x + 60 = 0$

Questão 5

Determine as raízes das equações da questão anterior utilizando o cálculo mental e os valores da soma e do produto das raízes.

Questão 6

Se r_1 e r_2 são as raízes da equação $50x^2 - 32x - 75 = 0$, calcule o valor de $(r_1 + r_2)r_1r_2$.

Questão 7

Escreva a equação $x^2 + bx + c = 0$ em função dos valores da soma S e do produto P de suas raízes.

Questão 8

Escreva uma equação do segundo grau cujas raízes são:

a) 3 e 5.

b) -5 e -8.

c) $-\frac{2}{3}$ e $\frac{1}{2}$.

d) $3 - \sqrt{7}$ e $3 + \sqrt{7}$.

A próxima atividade tem por objetivo aplicar a resolução de equações de segundo grau em problemas de natureza geométrica e em situações que se aproximem do mundo real.

4.2.7 Sétima atividade

Questão 1

(Processo seletivo para o Cotuca)- Retira-se de cada canto de um quadrado de lado 12 cm um quadrado de lado x cm.

a) Faça uma figura que represente a situação acima.

b) Qual é área da superfície assim obtida, em função de x?

c) Qual é o valor de x para que essa área seja igual a 119 cm^2?

Questão 2

Retira-se de cada canto de uma folha quadrada de cartolina um quadrado de lado de 1 cm. Em seguida dobram-se os lados da folha de modo a se obter uma caixa retangular sem tampa.

a) Faça uma figura que represente a situação acima.

b) Escreva a expressão que representa o volume dessa caixa.

c) Se o volume da caixa obtida é 900 cm^3, qual a medida do lado da folha de cartolina?

Questão 3

(Processo seletivo do Colégio Pedro II - MEC- 2008)- O número de ouro, também conhecido como razão de ouro, tem sido utilizado durante séculos por pintores e arquitetos. Hoje sabemos que este número está presente em algumas curvas que aparecem na natureza, como na margarida, no girassol e na concha do molusco náutilo.

Dizemos que um ponto P divide um segmento AB na razão de ouro, se $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AB}{AP}$.

A razão $\dfrac{AB}{AP}$ é chamada razão de ouro e é representada pela letra grega Φ (lê-se fi). Seu valor é constante, independendo da medida do segmento AB.

Figura 4.10: Razão de ouro

a) Admitindo que o segmento AB tenha comprimento 1, determine o comprimento do segmento AP , de tal modo que $\dfrac{AP}{PB} = \dfrac{AB}{AP}$.

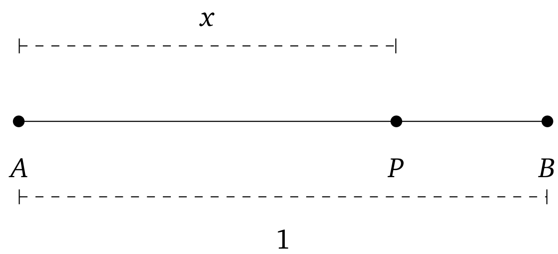

Figura 4.11: Segmentos AB, AP e PB

b) Determine a razão de ouro Φ.

c) Na figura abaixo, temos o famoso desenho de Leonardo da Vinci conhecido como o Homem Vitruviano. Leonardo utilizou a razão áurea na construção do desenho em vários momentos. Por exemplo, o segmento que une o ponto A (extremidade da cabeça) ao ponto B (pé) está dividido na razão áurea pelo ponto P (umbigo), sendo PB maior que AP. Sabendo que o lado do quadrado $CDEF$ mede $16,2$ cm, utilize a razão de ouro Φ para calcular o comprimento do segmento PB (a distância do umbigo até o pé).Considere, somente neste item, que $\sqrt{5} \approx 2,24$.

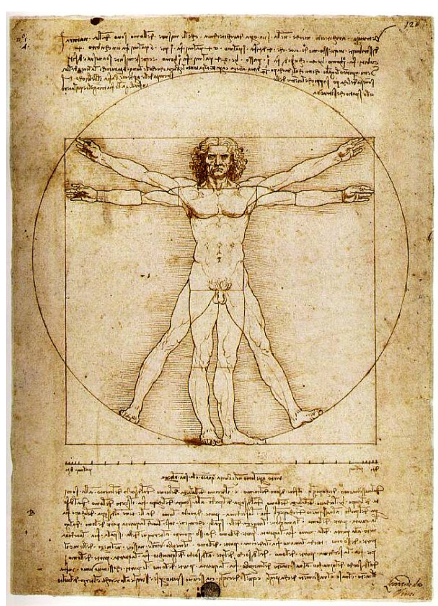

Figura 4.12: Homem Vitruviano

Questão 4

(Obmep-2006)- Ronaldo quer cercar completamente um terreno retangular de 900 m^2. Ao calcular o comprimento da cerca, ele se enganou, fez os cálculos como se o terreno fosse quadrado e comprou 2 metros de cerca a menos que o necessário. Qual a diferença entre o comprimento e largura do terreno?

Questão 5

Para o casamento de Elaine e Rômulo, um grupo de amigos escolheu um presente de $R\$600,00$, e este valor seria dividido igualmente entre eles. Porém, depois da compra, cinco deles decidiram dar presentes separados e desse modo a despesa teve que ser dividida entre os demais.

a) Se o grupo tivesse 25 pessoas, com quantos reais cada um deveria contribuir? Nesse caso quantos reais a mais cada um teria que pagar se cinco delas decidissem comprar os próprios presentes?

b) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que cada pessoa deverá contribuir se o grupo tiver x pessoas.

c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que cada um deverá contribuir se, do grupo de x pessoas, cinco decidirem dar presentes separados.

d) Se com a desistência de cinco pessoas, cada um teve que contribuir com mais 20 reais, quantas pessoas tinha esse grupo inicialmente?

Questão 6

Uma bola, lançada verticalmente para cima, a partir do solo, tem sua altura h (em metros) expressa em função do tempo t (em segundos), decorrido após o lançamento pela equação

$$h = 20t - 5t^2.$$

Quantos segundos após o lançamento a bola retornará ao solo?

Questão 7

(Adaptada de *Álgebra no ensino básico*, material de apoio ao professor, PONTE et al. 2009, p. 167)- A distância de segurança entre os automóveis numa rodovia depende da velocidade média que estes desenvolvem. Uma fórmula aproximada que relaciona a distância de segurança, d , dada em metros, e a velocidade, v , expressa em quilômetros por hora, é a seguinte:

$$d = \frac{1}{300}v^2 + \frac{1}{3}v + 18.$$

a) Qual a distância de segurança quando estes trafegam a uma velocidade média de 90 km/h? E se velocidade média for 120 km/h?

b) Num congestionamento a distância de segurança entre os veículos é de 31 m. A que velocidade média encontram-se os veículos neste congestionamento?

4.2.8 Oitava atividade

Por serem observadores atentos das formas geométricas, Pitágoras e seus seguidores no século VI a. C estudaram os números figurados, que são números que se obtém por meio de arranjos com pontos ou pedrinhas de modo a formar figuras geométricas. Vamos nessa atividade conhecer alguns tipos de números figurados.

Questão 1

Um primeiro exemplo de sequência formada por números figurados é a sequência R_n dos números retangulares, representada a seguir.

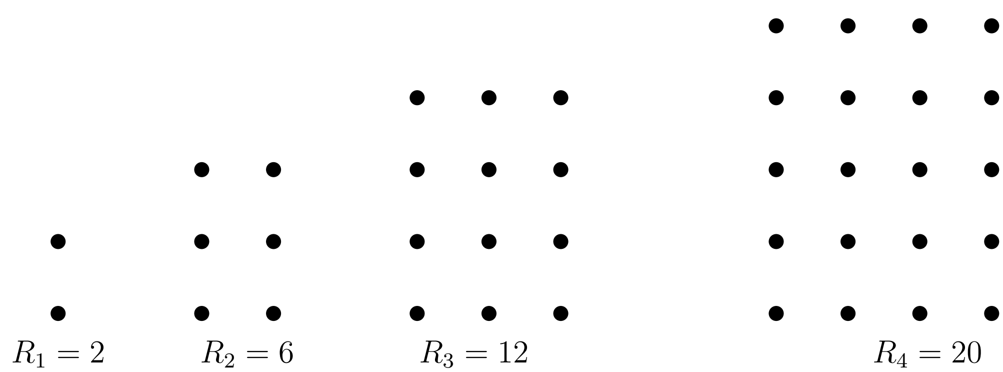

Figura 4.13: Números Retangulares

Desenhe e determine o valor dos três próximos termos dessa sequência.

Questão 2

Determine o valor de R_{10}, R_{20} e R_{50} .

Questão 3

Escreva a expressão algébrica que fornece o valor de R_n.

Questão 4

Utilize a relação acima e calcule:

a) R_{100}.

b) R_{500}.

Questão 5

Para que valor de n, $R_n = 650$?

Questão 6

Vamos conhecer agora a sequência dos números triangulares.

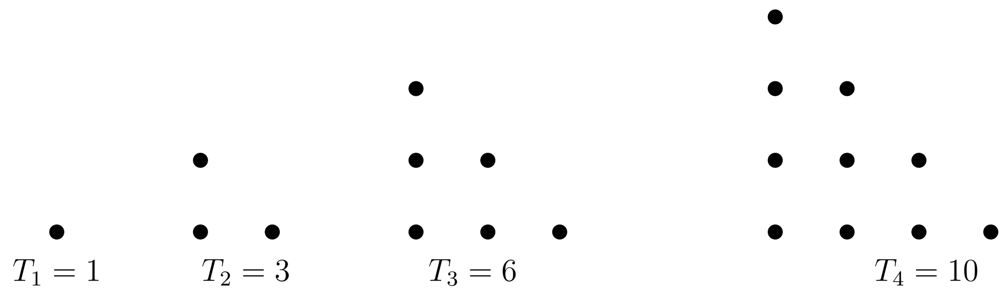

Figura 4.14: Números Triangulares

Desenhe e determine o valor dos três próximos números triangulares.

Questão 7

Compare os números triangulares e os números retangulares de mesma ordem, isto é, compare T_1 e R_1 , T_2 e R_2 e assim por diante. Qual é a relação que existe entre T_n e R_n ?

Questão 8

Utilize a expressão acima e encontre o valor de:

a) T_{15}.

b) T_{30}.

Questão 9

Para que valor de n, $T_n = 650$?

Esta atividade utiliza elementos da História da Matemática e foi concebida com o objetivo de possibilitar o desenvolvimento do pensamento algébrico, que é uma das metas do ensino de Matemática expresso nos Parâmetros Curriculares Nacionais (1998). Assim, mais do que simplesmente resolver uma equação de segundo grau, requer que o aluno observe regularidades, estabeleça a relação de dependência entre duas variáveis e utilize a linguagem algébrica para expressá-la.

Acreditamos que essa atividade possa ser aplicada tanto em turmas de 9° ano do Ensino Fundamental, como no 1° ano do Ensino Médio. Nesse caso, sugerimos que seja aplicada como uma introdução ao estudo de Progressões Aritméticas.

Finalizamos a sequência de atividades para o trabalho com equação de segundo grau apresentando três problemas que requerem em sua resolução a aplicação dos conceitos estudados e não apenas a utilização da fórmula resolutiva.

4.2.9 Nona atividade

Questão 1

(Adaptada de Obmep-2005)- Mariana entrou na sala e viu no quadro algumas anotações da aula anterior, parcialmente apagadas, conforme a figura. Qual número foi apagado na linha de cima do quadro negro?

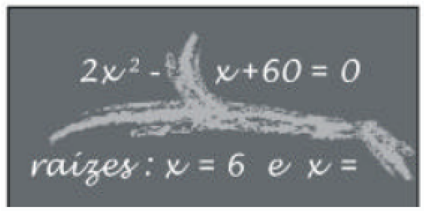

Figura 4.15: Quadro negro

Questão 2

(Olímpiada de Matemática da Academia de Ciências do Estado de São Paulo - 1996)- Sejam α e β raízes da equação $x^2 - 2x - 2 = 0$. Encontre uma equação cujas raízes são α^2 e β^2.

Questão 3

(Olímpiada de Matemática da Academia de Ciências do Estado de São Paulo - 1977)
Dada a equação $x^2 - (a + c)x + ac - b^2 = 0$.

a) Demonstre que ela tem solução real quaisquer que sejam os números a, b e c.

b) Supondo-se que $b = 0$ e que a equação tem uma só solução, que relação existe entre a e c ?

c) Decida se a seguinte sentença é verdadeira ou falsa: "Se $b \neq 0$, a equação tem sempre duas soluções distintas". Justifique sua resposta.

4.3 Equação de terceiro grau

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2008, p.71) destacam a importância de se mostrar aos alunos do ensino básico que a ampliação dos campos numéricos e suas operações são fruto da necessidade de se encontrar soluções para problemas que surgiram no decorrer da História da Matemática.

Desse modo, embora a aplicação da Fórmula de Cardano não seja o método mais prático para a resolução de uma equação de terceiro grau, consideramos que seu estudo deva ser realizado no Ensino Médio, pois o surgimento dos números complexos deu-se, no século XVI, a partir da aplicação desta fórmula na resolução de equações cúbicas, e não, como alguns livros didáticos relatam, da necessidade de se encontrar uma solução para equações de segundo grau cujo discriminante é menor do que zero.

Na primeira atividade, apresentamos a Fórmula de Cardano e propomos algumas questões que demandam sua aplicação. Já a segunda atividade tem por objetivo mostrar, por meio da aplicação da referida fórmula, a necessidade da ampliação do campo numérico dos números reais para os números complexos.

4.3.1 Primeira atividade

Questão 1

Deseja-se construir um cubo e um paralelepípedo retângulo que tenham a mesma altura de modo que o volume do cubo supere o do paralelepípedo em 9 cm^3 . Se a base do paralelepípedo tem 6 cm^2 de área, qual a sua altura?

Questão 2

Até o século XVI não se conhecia uma fórmula resolutiva para a equação de 3° grau, até que em 1535 o matemático italiano Niccoló Fontana, mais conhecido como Tartaglia, professor em Veneza, deduziu uma fórmula para resolver equações de terceiro grau da forma

$$x^3 + px + q = 0,$$

mas não divulgou sua descoberta, pois pretendia apresentá-la num livro que estava escrevendo. Poucos anos depois Girolamo Cardano, matemático de Milão, teve acesso a ela, mediante um juramento de não apresentá-la a ninguém, mas não cumpriu sua palavra e a publicou - juntamente com sua dedução - em um livro em 1545 antecedendo, portanto, a publicação de Tartaglia. Por essa razão, atualmente a fórmula resolutiva de uma equação de 3° grau é conhecida como Fórmula de Cardano.

Tartaglia e Cardano demonstraram que a solução de uma equação da forma $x^3 + px + q = 0$ é dada por:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Aplique essa fórmula e determine a solução do problema anterior.

Questão 3

Vimos na questão anterior uma fórmula que nos fornece a solução de equações da forma

$$x^3 + px + q = 0.$$

Mas, como resolvemos uma equação de terceiro grau da forma $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$? Pode-se demonstrar que a mudança de variável $x = y - \dfrac{b}{3}$ transforma essa equação em uma equação da forma $y^3 + py + q = 0$, que por sua vez pode ser resolvida pela Fórmula de Cardano. Faça na equação a seguir a mudança de variável indicada e determine uma solução real para a equação $x^3 - 6x^2 - 6x - 14 = 0$.

Percebe-se, então, que a Fórmula de Cardano, fornece a solução para qualquer equação de terceiro grau.

A Fórmula de Cardano ajuda a entender e a solucionar problemas que podem parecer misteriosos como o proposto na próxima questão.

Questão 4

Mostre que o número

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

é inteiro.

Resolução: Seja $x^3 + px + q = 0$ uma equação com coeficientes reais tal que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

seja uma de suas raízes. Comparando a Fórmula de Cardano com o número dado, concluímos que:

$$-\frac{q}{2} = 2 \Leftrightarrow q = -4$$

e

$$\begin{aligned} &\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 5 \Leftrightarrow \\ &\left(\frac{p}{3}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \\ &p = 3. \end{aligned}$$

Logo, a expressão

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

é raiz da equação

$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Aplicando o Teorema das Raízes Racionais facilmente se conclui que 1 é raiz dessa equação. Logo, pelo Teorema de D'Alembert segue que

$$x^3 + 3x - 4 = (x-1).(x^2 + x + 4) = 0.$$

Como o fator de segundo grau não tem raízes reais, concluímos que 1 é a única raiz real da equação $x^3 + 3x - 4 = 0$. Como

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$$

é um número real, ele só pode ser igual a 1; portanto, apesar das aparências, é um número inteiro.

4.3.2 Segunda atividade

Questão 1

Verifique que é 4 raiz da equação

$$x^3 - 15x - 4 = 0.$$

Questão 2

Mostre que o polinômio $x^3 - 15x - 4$ é divisível por $x - 4$.

Questão 3

Utilizando o resultado anterior, determine as outras raízes da equação $x^3 - 15x - 4 = 0$.

Questão 4

Resolva a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$, aplicando a Fórmula de Cardano. O que você conclui?

Nessa atividade procuramos reproduzir a situação vivenciada pelo matemático italiano Rafael Bombelli, quando no século XVI tendo o conhecimento de que 4 era raiz da equação $x^3-15x-4 = 0$ ao aplicar a Fórmula de Cardano obteve como resultado

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Trata-se de um momento crucial na história das equações algébricas, pois até então, quando na resolução de um problema obtinha-se a raiz quadrada de número negativo, a conclusão a que se chegava era que o problema não tinha solução. Mas nesse caso, o problema - como foi demonstrado nas questões anteriores - tem solução.

A situação vivida por Bombelli no século XVI equipara-se àquela enfrentada pelos antigos gregos no século V a.C, ao constatar a insuficiência dos números racionais, ou seja, o conceito de número precisava ser ampliado.

Para resolver essa questão Bombelli supôs que $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-21}}$ e $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-21}}$ eram números da forma $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$, respectivamente e operou com esses valores como se fossem números reais. Vejamos, então, quais valores Bombelli obteve para a e b.

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = a + \sqrt{-b} \Leftrightarrow (a + \sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{-121} \Leftrightarrow \\
&a^3 + 3a^2\sqrt{-b} + 3a(\sqrt{-b})^2 + (\sqrt{-b})^3 = 2 + \sqrt{(121)(-1)} \Leftrightarrow \\
&(a^3 - 3ab) + \sqrt{-b}(3a^2 - b) = 2 + 11\sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Daí se conclui que $b = 1$ e consequentemente $a = 2$. Portanto:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4.$$

Assim foram dados os primeiros passos para o desenvolvimento de um importante ramo da Matemática, com inúmeras aplicações práticas, sobretudo na Eletrônica.

A partir dessa atividade formaliza-se o conceito de número complexo e inicia-se seu estudo.

A seguir apresentamos situações-problema que requerem a aplicação de conceitos e teoremas estudados nos Capítulos 1 e 3.

4.3.3 Terceira atividade

Questão 1

(Puccamp)- A Europa renascentista foi rica em todos os sentidos: na literatura, na arte e na ciência. Na Matemática, em especial na Álgebra, equações algébricas do tipo $x^3 + 6x = 20$ foram destaque. Uma das raízes dessa equação é um número inteiro positivo. Com relação às outras raízes, é verdade que são:

a) racionais de sinais contrários.

b) reais de mesmo sinal.

c) reais e iguais.

d) irracionais.

e) não reais.

Questão 2

(Adaptada de Vunesp - 2012)

Dado que as raízes da equação $x^3 - 3x^2 - x + k = 0$, onde k é uma constante real formam uma progressão aritmética, qual o valor de k ?

Questão 3

(Extraída do livro *A Matemática do Ensino Médio*, volume 3, LIMA et al, 2006, p.244)

Determine um polinômio P do 3° grau para o qual $P(x + 1) = P(x) + x^2$.

Questão 4

(Extraída do livro *A Matemática do Ensino Médio*, volume 3, LIMA et al 2006, p.245)

a) Forme uma equação de grau mínimo que tem i e $1 + 2i$ como raízes.

b) Forme uma equação de grau mínimo, com coeficientes reais, que tem i e $1 + 2i$ como raízes.

Questão 5

(Adaptada de Unicamp-2005)- Para resolver equações do tipo $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$, podemos proceder do seguinte modo: como $x = 0$ não é uma raiz, divide-se a equação por x^2 e, após efetuar a mudança de variáveis $u = x + \dfrac{1}{x}$, resolve-se a equação obtida (na variável u). Ache as quatro raízes da equação $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

Questão 6

(Unicamp-2001)- Considere a equação $2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + 7\left(x + \dfrac{1}{x}\right) + 4 = 0$.

a) Mostre que $x = i$ é raiz dessa equação.

b) Encontre as outras raízes dessa mesma equação.

Quando da aplicação na prova do vestibular da Unicamp esta questão teve valor $5,0$ pontos. Embora não exija nada além do que o desenvolvimento dos cálculos indicados e a aplicação dos teoremas das raízes complexas e das raízes racionais a nota média desta questão foi $1,86$, segundo documento publicado pela Coordenação Executiva dos Vestibulares da Unicamp. Este fato nos dá indícios de que o estudo de números complexos e a resolução de equações algébricas não tem sido feito de modo adequado em nossas escolas.

4.4 Resolução de equações algébricas por métodos numéricos

Sabemos que quando uma equação polinomial deriva de um problema concreto estamos interessados na obtenção de raízes reais dessa equação. Na prática, equações polinomiais de grau maior do que ou igual a três são resolvidas através de métodos numéricos, que fornecem uma sequência de valores que aproximam, com o grau de precisão desejado, a raiz que se deseja obter. Por essa razão, julgamos conveniente encerrar o estudo da resolução de equações algébricas no Ensino Médio apresentando pelo menos um método numérico de resolução.

Na resolução de uma equação através de um método numérico inicialmente devemos ter uma primeira ideia de um intervalo que contenha as raízes. Em seguida, escolhemos um valor inicial x_0 para a raiz, pertencente ao intervalo e por fim utilizamos um processo iterativo que gere, a partir de x_0 uma sequência de valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ que se aproximam tanto quanto se queira da raiz.

Na determinação do intervalo que contém as raízes reais da equação utiliza-se o Teorema de Bolzano, que embora seja estudado apenas nos cursos de Cálculo é bastante intuitivo e acessível aos alunos de Ensino Médio pelo fato de o gráfico de uma função polinomial ser uma curva contínua.

Segundo o Teorema de Bolzano, se a e b são números reais, com $a < b$ e $p(x)$ é um polinômio com coeficientes reais que assume valores de sinais contrários em a e em b , então ele tem uma raiz entre a e b. Pensando graficamente, isto significa que o gráfico de um polinômio só pode passar de um ponto acima do eixo das abscissas para um ponto abaixo desse eixo (ou vice-versa), se intersectá-lo.

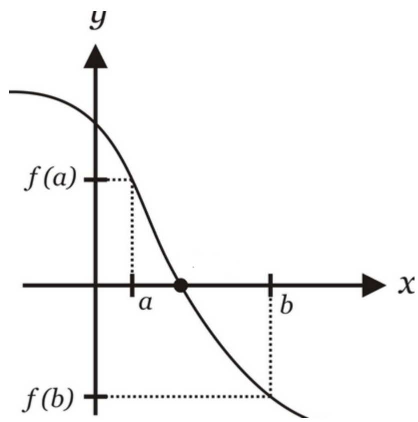

Figura 4.16: Teorema de Bolzano

O método da Bisseção é o mais simples dentre os métodos numéricos para resolução de equações. Nesse método, uma vez determinado o intervalo $[a, b]$ que contém uma raiz real do polinômio, escolhemos o valor inicial x_0 como o ponto médio do intervalo $[a, b]$, isto é $x_0 = \dfrac{a+b}{2}$.

Calculamos, então, $p(x_0)$ e comparamos com os valores de $p(a)$ e $p(b)$: se $p(a)$ e $p(x_0)$ têm sinais contrários, então, o Teorema de Bolzano garante que há pelo menos uma raiz entre a e x_0; se $p(b)$ e $p(x_0)$ têm sinais contrários, então há ao menos uma raiz entre x_0 e b. Desse modo, reduzimos à metade o comprimento do intervalo que contém a raiz procurada. Como esse processo pode ser repetido indefinidamente, obtemos aproximações tão exatas quanto desejarmos para a raiz procurada.

Segundo Carneiro (1999) um procedimento válido para determinar o intervalo que contém as raízes de uma equação polinomial é fazer um esboço de seu gráfico e quando a equação deriva de um problema concreto, a determinação desse intervalo decorre muitas vezes dos próprios dados do problema.

Vamos aplicar o método da Bisseção na resolução do problema a seguir:

Deseja-se construir um reservatório em forma de um prisma reto de base quadrada, com capacidade de 36.000 litros, usando, para paredes, fundo e tampa 72 m^2 de certo material. Quais devem ser as dimensões do reservatório?

Resolução: Chamando de x a aresta da base do prisma e de h sua altura temos que $x^2h = 36$ e $2x^2 + 4xh = 72$.

A partir dessas duas equações obtemos a equação cúbica

$$x^3 - 36x + 72 = 0,$$

que não possui raízes racionais. Portanto, para resolvê-la vamos aplicar o método da Bisseção ; a outra alternativa seria aplicar a Fórmula de Cardano, mas isso seria demasiadamente trabalhoso.

Analisando o problema que deu origem a essa equação sabemos que x é um número maior do que zero. Calculemos, então $p(1)$ e $p(2)$, onde $p(x) = x^3 - 36x + 72$. Como $p(1) = 37$ e $p(2) = 8$, concluímos pelo Teorema de Bolzano que $p(x)$ não tem raízes reais entre 1 e 2. Calculemos, então, $p(3)$.

Como $p(3) = -9$ e $p(2) = 8$, o Teorema de Bolzano assegura que $p(x)$ tem pelo menos uma raiz entre 2 e 3. Iniciamos, então, a aplicação do método da Bisseção, tomando $x_0 = 2,5$. Como $p(2,5) = -2,375$ e $p(2) = 8$, concluímos que a raiz encontra-se entre 2 e $2,5$. A tabela seguir mostra o resultado obtido após nove iterações.

$a; p(a) > 0$	$b; p(b) < 0$	x_i	$p(x_i)$
2	3	2.5	$-2.375 < 0$
2	2.5	2.25	$\cong 2.391 > 0$
2.25	2.5	2.375	$\cong -0.104 < 0$
2.25	2.375	2.3125	$\cong 1.116 > 0$
2.3125	2.375	2.34375	$\cong 0.500 > 0$
2.34375	2.375	2.359375	$\cong 0.196 > 0$
2.359375	2.375	2.3671875	$\cong 0.046 > 0$
2.3671875	2.375	2.37109375	$\cong -0.030 < 0$
2.3671875	2.37109375	2.369140625	$\cong 0.009$

Tabela 4.1: Método da Bisseção

Notamos por essa tabela que a raiz do polinômio $p(x)$ é um valor muito próximo de $2,37$. Então, considerando esse valor como raiz e aplicando o Teorema de D´Alembert podemos determinar as demais raízes. Temos, então, que:

$$x^3 - 36x + 72 \cong (x - 2,37)(x^2 + 2,37x - 30,3831).$$

Segue, portanto, que as raízes da equação $x^3 - 36x + 72 = 0$ são aproximadamente: $2,37$, $4,45$ e $-6,82$, sendo que está última não satisfaz às condições do problema.

Se $x \cong 2,37$, $h \cong 6,41$. Para $x \cong 4,45$ temos $h \cong 1,82$. Logo, o reservatório pode ter uma base quadrada de aresta $2,37$ m e $6,41$ m de altura ou $4,45$ m de aresta da base e $1,82$ m de altura.

Os cálculos decorrentes da aplicação do método da Bisseção podem ser feitos de maneira rápida com a criação de uma planilha no Excel e desse modo a resolução de equações algébricas por métodos numéricos mostra-se uma boa oportunidade para se utilizar a tecnologia nas aulas de matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A importância que o estudo das equações algébricas ocupa no ensino da Matemática na educação básica nos levou a escolher esse assunto como tema desta dissertação. Inicialmente fizemos um estudo que ampliou nosso conhecimento sobre o assunto e em seguida, em sintonia com os objetivos desse programa de mestrado, elaboramos uma proposta para o ensino de equações algébricas no ensino básico cujo intuito é possibilitar a compreensão do processo resolutivo e o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas.

Descobrimos nessa pesquisa que há cerca de quatro mil anos no Egito antigo já se resolviam equações algébricas de primeiro grau através de uma sequência de instruções do tipo “faça isso”, “faça aquilo”, “este é resultado”, sem nenhuma preocupação em se justificar o porquê das operações efetuadas.

Encontramos resquícios dessa forma de tratar a resolução de equações algébricas nas aulas daqueles professores que utilizam uma metodologia de ensino e aprendizagem que prioriza a aplicação de algoritmos e procedimentos mecânicos na resolução de equações algébricas em detrimento da compreensão do processo resolutivo. O fato de que já existem calculadoras que fornecem as raízes de equações de segundo e terceiro graus corrobora nossa hipótese de que esta é uma forma equivocada de abordar o assunto.

A pesquisa que realizamos em livros de História da Matemática foi de fundamental importância para esse trabalho, na medida em que ali encontramos elementos para a elaboração de algumas atividades.

A partir do estudo que fizemos sobre a história da fórmula resolutiva para equações de terceiro grau, tomamos consciência da importância de se estudar, ainda que de modo superficial, a Fórmula de Cardano no Ensino Médio, uma vez que - somente a partir de sua dedução - é que se originaram os números complexos.

A realização dessa pesquisa nos despertou para a importância que a História da Matemática tem na formação do professor e lamentamos que seu estudo nem sempre faça parte do currículo dos cursos de licenciatura em Matemática.

Afinal, é por meio do estudo da História da Matemática que se compreende como o conhecimento matemático se originou, quais as principais motivações para o seu desenvolvimento e quais as razões para sua presença nos currículos escolares (D´AMBRÓSIO, 2000, p.241).

Como muitos problemas do mundo real requerem a resolução de equações de grau maior do que dois ou equações não algébricas, acreditamos ser oportuno estudar-se no Ensino Médio ao menos um método numérico para resolução de equações.

Optamos por apresentar nesse trabalho o método da Bisseção, por ser de fácil compreensão, embora não seja o método mais eficaz. Cabe salientar que o estudo deste método representa uma boa oportunidade para o uso de recursos tecnológicos na aula de matemática, como a calculadora e o computador.

De todas as atividades apresentadas tivemos a oportunidade de aplicar apenas aquelas relativas à resolução de equações de segundo grau, pois neste ano estamos lecionando apenas para turmas de primeiro ano do Ensino Médio. Os resultados estiveram muito próximos do esperado na medida em que houve a motivação de grande parte dos alunos para desenvolvê-las e, sobretudo, porque possibilitaram a compreensão do processo resolutivo de uma equação de segundo grau, o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas e a percepção da importância que o raciocínio dedutivo tem na Matemática. Como pretendemos acompanhar essas turmas até o terceiro ano do Ensino Médio, poderemos - num futuro próximo - avaliar com mais propriedade se realmente as atividades que elaboramos são adequadas aos objetivos a que nos propusemos.

Por fim, esperamos que este trabalho possa trazer alguma contribuição positiva para o ensino e aprendizagem de equações na educação básica, seja pelos conhecimentos que o professor poderá adquirir através da leitura dos três primeiros capítulos, pela aplicação de algumas das atividades que apresentamos, que buscam uma melhor aprendizagem do assunto, ou utilizando nossas reflexões como subsídio para futuras pesquisas sobre o tema.

Referências Bibliográficas

[1] AMARAL, João T. do. *Método de Viéte para resolução de equações de 2° grau.* **Revista do professor de matemática**. SBM, Rio de Janeiro, $n°$ 13, p.18-20, 1988

[2] BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elza Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1974

[3] BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN + Ensino Médio:** orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/Semtec, 2002.

[4] BRASIL. Ministério da Educação/Secretaria de Educação Básica. **Orientações curriculares para o ensino médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias.** Brasília: Secretaria de Educação Básica, 2008.

[5] BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

[6] CARNEIRO, José P. Q. Equações Algébricas de grau maior que dois: assunto para o ensino médio?. **Revista do Professor de Matemática.** SBM, Rio de Janeiro, n.40, p. 31 – 40, 1999.

[7] COLÉGIO PEDRO II. Disponível em `http://www.cp2.g12.br/concursos.html` , acesso em 29/03/14.

[8] COUTINHO, S. C. **Polinômios e Computação Algébrica.** Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

[9] D´AMBRÓSIO, U. A interface entre história e matemática: Uma visão histórico-pedagógica. In: FOSSA, John A. (org.). **Facetas do Diamante:** ensaios sobre educação matemática e história da matemática. Rio Claro, SP: Editora da SBHMat, p. 241-271, 2000.

[10] EVES, Howrad. **Introdução à história da matemática.** 5.ed. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2011.

[11] GARBI, Giberto G. **O romance das equações algébricas**. 4.ed. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

[12] HEFEZ, Abramo; VILLELA, Maria L.T. **Polinômios e Equações Algébricas**. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[13] IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar**, v.6. 7. ed. São Paulo, Atual, 2005.

[14] KNUDSEN, Carlos A. A teoria das equações algébricas. **Revista do Professor de Matemática.** SBM, Rio de Janeiro, no 7, p. 26 – 31, 1985.

[15] LAGES, Sónia S. **A resolução equações algébricas** - uma perspectiva histórica. Dissertação de mestrado. Universidade Portucalense, Porto, 2007. Disponível em `epositorio.uportu.pt/jspui/bitstream/11328/567/2/TMMAT%2090.pdf` , acesso em 31/07/13

[16] LIMA, Elon L. A equação do segundo grau. **Revista do Professor de Matemática.** SBM, Rio de Janeiro, no 13, p. 21 – 33, 1988.

[17] LIMA, Elon L. Conceituação, manipulação e aplicações: os três componentes do ensino da Matemática. **Revista do Professor de Matemática.** SBM, Rio de Janeiro, n.40, p. 1 – 6, 1999.

[18] LIMA, Elon L. **Matemática e ensino.** 3.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007

[19] LIMA, Elon L. **Meu professor de matemática e outras histórias.** 6.ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[20] LIMA, Elon L. **A matemática do ensino médio**, v.3. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. Mesmo autor - espaço com 6 traços

[21] LIMA, Elon L. **Temas e problemas elementares.** 12. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[22] OBM. Disponível em `http://www.obm.org.br/provas.htm` , acesso em 29/03/14.

[23] OBMEP. Disponível em `http://www.obmep.org.br/provas.htm` , acesso em 29/03/14.

[24] ONUCHIC, Lourdes, de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, Maria A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática:** concepções e perspectivas. São Paulo: Editora Unesp,p.199- 218, 1999.

[25] PONTE,João P.;BRANCO, Neusa; MATOS Ana. **Álgebra no ensino básico:** material de apoio ao professor, 2009. Disponível em `http://www.esev.ipv.pt/mat1ciclo/textos/003_Brochura_Algebra_NPMEB_(Set2009).pdf`. Acesso em 14/03/14.

[26] ROQUE, Tatiana.; CARVALHO, João B. C. **Tópicos de História da Matemática.** Rio de Janeiro. SBM, 2012.

[27] SÁ, Ilydio P. de. **A magia da matemática:** atividades investigativas, curiosidades e história da matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

[28] SÃO PAULO, Academia de Ciências do Estado de São Paulo -Olimpíadas de Matemática de 1977 a 1997. 2a ed. São Paulo. ACIESP, 1999.

[29] TROTTA, Fernando; IMENES, Luis M. P; JAKUBOVIC, José. **Matemática aplicada.** São Paulo. Moderna, 1980.

[30] UNESP. Disponível em `www.vestibular.unesp.br`, acesso em 22/03/14

[31] UNICAMP -COMVEST. Disponível em `www.convestunicamp.com.br`, acesso em 22/03/14

[32] WAGNER, Eduardo. Um pouco sobre Descartes. **Revista do Professor de Matemática**. SBM. Rio de Janeiro, no 19, p. 9 -14 , 1991