Universidade Federal do Rio De Janeiro (UFRJ)

Instituto de Matemática – IM – UFRJ

Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT)

Números inteiros no Ensino Fundamental: Uma abordagem pedagógica prática conciliando o passado e o futuro

Gabriel Coelho Trindade

Orientador: Prof. Dr. Victor Giraldo

Rio de Janeiro, Setembro, 2018

PROFMAT

Agradecimentos

Ser grato é honrar quem fez o melhor por você e acreditou com todas as forças no seu potencial. Dito isso, agradeço:

À minha esposa Fernanda Martins por sempre me apoiar me nas minhas decisões e me dar forças nos momentos em que eu duvidei da minha capacidade. Obrigado por confiar no meu potencial .

Aos meus responsáveis, Mario Luiz e Iria Cristina por terem me proporcionado uma educação de qualidade e por confiarem em mim mesmo discordando de algumas decisões minhas, se hoje eu estou aqui, é porque eles me apoiaram e me deram o suporte que puderam em todos os momentos.

Ao meu orientador Victor Giraldo, pela paciência e dedicação neste projeto. Com certeza sem a parceria dele este trabalho não teria acontecido.

Aos meus colegas de turma que ao longo desses dois anos me proporcionaram diversas reflexões a respeito do ensino de matemática e suas necessidades latentes.

Ao PROFMAT e ao corpo docente da UFRJ pela formação que me proporcionaram e por terem me inspirado ao longo desses dois anos para me tornar um profissional melhor.

Resumo

A ideia para este trabalho surge da necessidade de se criar um material prático, didático e aplicável para dar suporte aos professores de ensino fundamental, sobretudo no que diz respeito ao ensino de números inteiros. Para isso, precisamos contextualizar a origem dos números negativos bem como a resistência que houve para sua aceitação, entendo assim que a dificuldades que os alunos possuem ao se depararem com estes números é legítima.

Em seguida, construo de maneira formal o conjunto dos números inteiros, explicitando suas operações, dedicando parte do capítulo ao estudo da polissemia do sinal de menos. Embora essa construção formal não seja utilizada em sala de aula com os alunos, cabe ao professor entender este processo, em seguida analisamos as propostas do PCN para com o ensino de números inteiros.

Após o sólido embasamento histórico e teórico, iniciamos a parte prática do trabalho, debruçando-nos sobre a formação do professor de matemática e sugerindo trabalhar duas práticas pedagógicas em conjunto, o conhecimento de conteúdo no horizonte e a aprendizagem significativa, que norteiam a forma na qual proponho o ensino de números inteiros.

Tendo estruturado tais práticas pedagógicas e exemplificado diversas aplicações das mesmas, deixo seis sugestões para o ensino dos números inteiros, todas elas testadas e de aplicação imediata, pensadas para auxiliar o professor no seu cotidiano de sala de aula.

Posteriormente concluo o trabalho e deixo como sugestão a inserção de conteúdo prático (como o apresentado neta obra) nas graduação de licenciatura em Matemática.

Abstract

The idea for this work arises from the need to create practical, didactic and applicable material to support elementary school teachers, especially with regard to teaching integer numbers. For that, we need to contextualize the origin of the negative numbers as well as the resistance that there was for their acceptance, so it is easy to understand that the difficulties that students have when facing these numbers is legitimate. Then, I formally construct the set of integer numbers, explaining their operations, dedicating part of the chapter to the study of the polysemy of the minus sign. Although this formal construction is not used in the classroom with students, it is up to the teacher to understand this process, then we analyze the PCN proposals for teaching integer numbers. After the solid historical and theoretical basis, we started the practical part of the work, focusing on the mathematics teacher training and suggesting working two pedagogical practices together, knowledge of content on the horizon and meaningful learning, which guide the way in which I propose teaching integer numbers. Having structured such pedagogical practices and exemplified several applications of them, I give six suggestions for teaching integer numbers, all of them tested and of immediate application, designed to assist the teacher in his daily classroom. Later I finish the work and leave as a suggestion the insertion of practical content (like the one presented in this work) in undergraduate courses in Mathematics.

Capítulo 1: Introdução

A ideia para o presente trabalho surgiu a partir da percepção de que a abordagem dos números negativos no ensino fundamental se dá, muitas vezes, de modo puramente procedimental e não problematizado, sem significado ou concretude – o que causa estranheza e confusão nos alunos, e assim, prejudica sua construção de significados e, em consequência, seu aprendizado nos anos seguintes.

Quando iniciei como professor do Ensino Médio e de cursos preparatórios, logo percebi que boa parte dos alunos, embora soubessem o conteúdo do ensino médio, erravam questões em suas etapas finais, com conteúdos do ensino fundamental. Sendo mais específico, decidi tentar entender mais a fundo as possíveis causas para essas lacunas no tema “números negativos” e comecei a lecionar também para o Ensino Fundamental. A dificuldade em construir determinados conteúdos era perceptível, principalmente pelo fato de os assuntos serem familiares para mim, mas não para os alunos. Portanto, meus próprios conhecimentos sobre o conteúdo não eram suficientes. Foi quando me dei conta da necessidade de articular o saber disciplinar específico com o saber pedagógico, e de que essa falta de articulação nos conhecimentos do professor pode ser uma causa importante da lacuna na aprendizagem dos alunos. Naquele momento pude perceber que se eu não fosse protagonista do meu próprio aprendizado jamais seria capaz de construir tais articulações, o que me levou a concluir que na formação de professores há um hiato quando o assunto é relacionar saberes disciplinares e pedagógicos. Pela primeira vez notei a necessidade de um trabalho intencionado a colaborar com o professor em sua prática, auxiliando-o a preencher o hiato de sua formação e consequentemente as lacunas na construção do conhecimento por seus alunos.

Após alguns anos lecionando no Ensino Fundamental percebi, empiricamente, a importância de dar significado ao que se estava construindo em sala, ou seja, dar concretude aos assuntos abordados relacionando-os aos conhecimentos prévios dos alunos. Foi a segunda vez na qual senti a necessidade de um trabalho voltado para prática pedagógica da matemática, no entanto com o passar do tempo essas percepções adormeceram e ficaram no campo das ideias.

Alguns anos depois, já havia decidido fazer a dissertação no tema “funções” quando nesta mesma época acompanhava um professor de criatividade chamado Murilo Gun. Através dele me deparei com algumas obras de David Ausubel, sobre aprendizagem significativa. Imediatamente conectei as leituras com a minha prática de sala de aula, quer dizer, eu acabara de encontrar uma teoria em que minhas aulas estavam baseadas por experimentação. Foi então que resolvi mudar o tema do trabalho de funções para números negativos.

A teoria da aprendizagem significativa será melhor abordada adiante, porém adiantamos que, em linhas gerias, ela sugere que, para termos significado na aprendizagem, é necessário ancorar novos conceitos em conceitos prévios. No nosso caso, isso significa ancorar os números negativos a conceitos que remetam a simetria, oposição e afins.

Após a escolha do tema, meu orientador me apresentou alguns textos. Uma das autoras que mais me chamou atenção foi Deborah Ball, com o conceito de Horizon Content Knowledge (conhecimento de conteúdo no horizonte). Esse conceito diz respeito ao conhecimento amplo que o professor deve ter, inclusive no que tange a conteúdos que seus alunos terão mais à frente. De imediato relacionei as ideias de aprendizagem significativa (Ausubel) e de Horizon Content Knowledge (Ball). Quer dizer, a primeira procura relacionar os conceitos que os alunos estão aprendendo com aqueles aprendidos anterior; enquanto a segunda nos diz que o ensino deve considerar aquilo que os alunos aprenderão futuramente.

Além disso, os professores das séries iniciais possuem um papel extremamente importante na introdução de conceitos futuros. Sabendo que os seus alunos em algum momento se depararão com os números negativos, por exemplo, estes podem prepará-los através de provocações matemáticas condizentes com a turma, pondo em exercício o conhecimento de conteúdo no horizonte. Foi neste contexto que me propus a desenvolver um trabalho intencionado a colaborar com o professor em sua prática auxiliando-o a articular saberes disciplinares e pedagógicos, como propõe Shulman(1986), e a mobilizar em sala de aula as ferramentas conceituais de aprendizagem significativa e conhecimento de conteúdo no horizonte, tornado assim sua aula mais interessante e concreta.

Capítulo 2: Os números inteiros

> A passagem dos números positivos para os negativos envolve uma ressignificação do próprio conceito de número. Até então, os números expressavam quantidades, sendo associados a abstrações das noções concretas de contagem ou de medida. A introdução dos negativos incorpora a essas noções um novo atributo: a orientação. Assim, os números passam a representar uma quantidade orientada, isto é, uma quantidade munida de um referencial. Ripoll, et al. (2016)

Neste capítulo abordaremos o universo dos números inteiros dando ênfase aos números negativos, protagonistas do presente trabalho. Após discutirmos um contexto histórico, apresentaremos uma formalização do conteúdo. Feito isso, comentaremos sobre alguns novos conceitos que aparecem mediante o surgimento desse conjunto numérico.

2.1. Contexto histórico dos números negativos

Na Grécia antiga surgiu o matemático às vezes considerado como criador da álgebra, Diofanto de Alexandria (aprox. 250 A.E.C.-350 A.E.C.), que ao publicar sua obra "Livro I: Aritmética" apresentou uma declaração em que é possível perceber que os gregos tinham alguma percepção sobre a grandezas negativas. De acordo com Lisboa (2013), um trecho dessa obra afirma que:

> Aquilo que está em falta multiplicado pelo que falta resulta em algo positivo, enquanto que aquilo que está em falta multiplicado pelo que é positivo resulta em algo que está em falta. De maneira implícita temos menção à, atualmente consolidada, regra dos sinais: "menos com menos dá mais" e "menos com mais dá menos". (2013, p. 3)

Corroborando, Roque (2012), nos diz que:

> Nas civilizações mais antigas (babilônios, egípcios, chineses, gregos, hindus, etc), não se usavam números negativos no sentido próprio [...] As regras de operação entre somas ou diferenças, que exprimimos hoje como $(a + b) \times (a - b)$ ou $(a - b) \times (a - b)$, e que eles exprimiam para valores numéricos específicos, deviam levar em consideração regras de sinais. Muitos destes povos já sabiam, portanto, intuitivamente, que mais com mais dá mais, menos com mais dá menos e menos com menos dá mais. No entanto, esse problema, bem como o dos números imaginários, só surgirá, de modo mais explícito, com o desenvolvimento da álgebra a partir do Renascimento.

Alguns matemáticos indianos, como Fibonacci, já propunham interpretar um número negativo como uma perda, no lugar de um ganho. No século XV, Nicolas Chuquet já representava o número negativo

"−a" como "0 − a", o que indica que o sinal "−" ainda não era um atributo do número, mas sim a indicação de uma operação (ROQUE, 2012).

Podemos notar que ao longo do tempo práticas matemáticas de diversos povos envolviam ideias que, de alguma forma, têm a ver com o que interpretamos na matemática contemporânea como número negativo, e, a sua maneira, abordaram o assunto. Mesmo sem os mesmos padrões de rigor da matemática contemporânea, ideias de números negativos foram utilizadas ao longo da história por povos em diversas épocas. Como comenta Gleaser, "Assim a prática clandestina do cálculo dos números negativos antecedeu em 1600 anos sua compreensão." (apud Lisboa, 2013, p.4). Segundo Lisboa, para argumentar:

> Na Idade Média, o uso dos números negativos foi marcado por sua prática no cálculo, apesar de sempre usado pelos matemáticos com certo receio [...]. A existência dos números negativos no período que se inicia na idade média e se estende até o início da idade moderna é marcada pelo uso operatório eficaz no campo algébrico, todavia inexplicável conceitualmente pela comunidade Matemática. (Lisboa, 2013, p.4)

A partir do século XVIII os números negativos começaram a aparecer em artigos científicos pela sua usabilidade nos cálculos, no entanto, não havia ainda uma formalização para o conceito. Alguns matemáticos colaboraram para o processo de consolidação formal dos números negativos como sendo o objeto matemático que é hoje. Destacaremos aqui alguns deles. François Viète (1540-1603) foi um dos primeiros matemáticos a utilizar os símbolos "+" e "-", mesmo que somente em operações com números positivos. Segundo Lisboa (2013), Viète considerava que os números negativos não possuíam um significado intuitivo ou físico; dizia "diminua 3" em vez de dizer "acrescente -3". Intuitivamente ele sabia que "somar -a" tem o mesmo significado que "subtrair a".

René Descartes (1596-1650) chamou de falsas as raízes negativas que apareceram na geometria cartesiana, desenvolvendo um método para transformá-las em positivas. Gottfried Leibniz (1646-1716) foi responsável por mostrar que poder-se-ia efetuar cálculos com as proporções $(-1) : 1 = 1 : (-1)$, já que formalmente isso era equivalente a calcular quantidades imaginárias, dando condições para validação das operações com números negativos. Colin Maclaurin (1698-1746) publicou "O tratado da Álgebra", obra em que define quantidades negativas e discute como essas são tão "reais" quanto as positivas, tendo sentido oposto.

De acordo com Lisboa (2013), Maclaurin admitia quantidades negativas em relação ao zero origem, o que anteriormente causava conflitos pois não se distinguia o zero absoluto do zero origem. Assim, ao darmos sentido aos números negativos, o zero deixa de ser apenas a ausência de quantidades e passa a ter o importante papel de referencial (origem). Ainda em sua obra, define a regra dos sinais, o que marcou o início do formalismo e a conceituação atual dos números negativos.

Augustin Cauchy (1789-1857) lançou uma obra em que faz uma distinção entre os números reais positivos e as quantidades positivas e negativas. Nessa obra, ele define as quantidades positivas por grandezas que aumentam representadas por um número com um sinal de mais (+) na frente e quantidades negativas por grandezas que diminuem representadas por um número como sinal de menos (-) na frente. Essas definições que facilitavam a compreensão das propriedades aditivas, em contrapartida acabaram dificultando o entendimento da multiplicação.

Herman Hankel (1839-1873), revolucionou a forma com que os números negativos eram percebidos através da formalização que propôs. Hankel abandonou a ideia de procurar na natureza exemplos para ilustrar as propriedades dos números negativos, passando a adotar as propriedades aditivas e multiplicativas de $\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}_+$, respectivamente, como veremos a seguir de acordo com Glaeser (????, apud Lisboa, 2003, p. 6)

O Teorema de Hankel foi enunciado da seguinte forma: "*A única multiplicação sobre* $\mathbb{R}$*, que prolonga a multiplicação usual sobre* $\mathbb{R}_+$ *respeitando as distribuições (à esquerda e à direita) é conforme a regra de sinais.*" A demonstração de Hankel para a regra dos sinais da multiplicação é assim apresentada:

0 = a.0 = a.(b + oposto b) = ab + a.(oposto b) ***(I)***

0=0.(oposto b)=(a+oposto a).(oposto b) = (oposto a).(oposto b)+a.(oposto b); ***(II)***

Comparando I e II temos:

(oposto a) . (oposto b) = ab.

Notemos que a formalização dos números negativos é muito posterior a suas utilizações – como é o caso de grande parte dos conceitos da matemática contemporânea – e que a história dos números negativos envolveu muitos percalços, até que os matemáticos abrissem mão de encontrar "um modelo concreto" capaz de explicar a existência de tais números, e buscassem uma construção formal baseada em um modelo geométrico compatível com sua estrutura algébrica.

2.2. Construção e formalização dos números inteiros

Nesta sessão, construiremos o conjunto dos números inteiros de acordo com os padrões formais da matemática contemporânea, definiremos suas operações e demonstraremos suas propriedades. É importante deixar claro que não é essa abordagem que sugerimos que seja adotada no ensino básico. A noção de conhecimento de conteúdo no horizonte, proposta por Ball e seus colaboradores, que discutiremos mais adiante, sugere que de fundamental importância para o professor desenvolver uma visão panorâmica sobre o conteúdo a ser ensinado, que inclui sua construção formal.

Considerando o conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) construído, com suas operações de soma e multiplicação bem definidas. Para isso, observamos a definição de operação binária.

Definição 2.2.1: Operação

Uma operação (binária) $*$ *em um conjunto A é definida como uma função*

$$* : A \; x \; A \; \rightarrow A$$

que associa, a cada par de elementos de A um elemento de A

Assim, a adição e a multiplicação em $\mathbb{N}$ são de fato operações no sentido matemático do termo:

$$+ : \mathbb{N} \; x \; \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \qquad \cdot : \mathbb{N} \; x \; \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(a,b) \longmapsto a + b \qquad (a,b) \longmapsto a \cdot b$$

Dada a definição acima, pode-se notar que a subtração e a divisão não são operações bem definidas em $\mathbb{N}$, pois seriam necessários objetos matemáticos que estariam além das limitações impostas pelas características desse conjunto numérico. Para que essas operações sejam bem definidas precisamos de "novos números", o que leva à construção dos conjuntos dos inteiros (para a operação de subtração) e dos racionais (para a divisão). Assim, como não podemos subtrair dois números naturais e garantir que o resultado seja um número natural, construiremos então o conjunto dos números inteiros. Para a divisão ser bem definida precisamos do conjunto dos números racionais que não será abordado neste trabalho.

Seguiremos a proposta descrita em Ripoll et al (2016), segundo a qual a construção se dá a partir de uma relação de equivalência entre pares de números naturais, que corresponde a uma ideia de *subtrações equivalentes.* Cada número inteiro será então associado a uma *classe de equivalência*, que corresponde a uma família de subtrações equivalentes. Assim, desenvolveremos a construção do conjunto dos números inteiros definindo seus elementos como classes de equivalência a partir de uma relação de equivalência entre pares de números naturais. Em seguida, definiremos as operações de soma e multiplicação e finalmente a operação subtração. Começaremos definindo os conceitos que fundamental essa construção: *relação de equivalência*, *classe de equivalência* e *conjunto quociente*.

Definição 2.2.2: Relação de Equivalência

Uma relação binária $\mathcal{R}$ em um conjunto A é chamada uma relação de equivalência se satisfaz às seguintes proposições:

reflexiva: $a\mathcal{R}a, \forall\ a, b, c\ \in A$

simétrica: $a\mathcal{R}b\ \Rightarrow\ b\mathcal{R}\mathrm{a}, \forall\ a, b \in A$

transitiva: $a\mathcal{R}b, b\mathcal{R}c \Rightarrow a\mathcal{R}c, \forall\ a, b, c\ \in A$

Definição 2.2.3: Classe de equivalência

Se $\mathcal{R}$ é uma relação de equivalência no conjunto A e a $\in A$, então o conjunto

$$[\mathrm{a}] = \{\ \mathrm{b} \in A|\ b\mathcal{R}\mathrm{a}\ \}$$

É chamado de classe de equivalência determinada por a. Neste caso, o elemento a é chamado um representante da classe [a].

Definição 2.2.6:Conjunto Quociente

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência no conjunto A. Então o conjunto de todas as classes de equivalência determinadas em A pela relação $\mathcal{R}$ é chamado conjunto quociente de A pela relação $\mathcal{R}$ e denotado por:

$$\mathrm{A} / \mathcal{R} = \{\ [\mathrm{a}]\ |\ \mathrm{a} \in \mathrm{A}\}$$

Exploraremos melhor a ideia de subtrações equivalentes, e em seguida usaremos o conceito de classe de equivalência, definido acima, para formalizar a construção dos números inteiros.

Tomemos como exemplo as subtrações 6 - 7 e 9 - 10, que são subtrações equivalentes, no sentido em que 6 - 7 = 9 - 10 = -1, ou seja, o primeiro número de cada par subtraído pelo segundo de cada par gera o mesmo resultado. Como no conjunto dos números naturais não faz sentido enunciar essas subtrações, pois não existem números naturais que possam representar seus resultados, devemos então substituir a igualdade 6 - 7 = 9 - 10 por 6 + 10 = 9 + 7, que essa faz sentido nos naturais. Podemos generalizar essa ideia para quaisquer dois pares de números naturais (a,b) e (c,d), substituindo a igualdade a - b = c - d por:

$$a + d = b + c\ .$$

Temos então uma relação entre dois pares de números naturais, que é equivalente à igualdade de que nos interessa (aquela que define subtrações equivalentes) e que utiliza apenas a soma, operação definida neste conjunto numérico. De acordo com Machado (2014), esta foi a forma encontrada pelos matemáticos do século XIX para formular a construção do conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) sem usar explicitamente a subtração, mas trazendo sua essência, tendo como ponto de partida os naturais e suas operações. Enunciamos a seguir a definição que estabelece formalmente essa relação de equivalência.

Definição 2.2.4: Relação $\simeq$

Em $\mathbb{N} \, x \, \mathbb{N}$, definimos a relação $\simeq$ por:

$$(a,b) \simeq (c,d) \iff a + d = b + c$$

Observemos alguns exemplos da definição acima:

$(2,8) \simeq (10,16) \iff 2 + 16 = 8 + 10$

$(4,1) \simeq (3,0) \iff 4 + 0 = 1 + 3$

A seguir demostramos que a relação binária $\simeq$ é uma relação de equivalência (veja a definição 2.2.2).

Reflexividade: Seja $(a,b) \in \mathbb{N} \, x \, \mathbb{N}$, pela comutatividade dos naturais temos que $a + b = b + a$, e da definição de $\simeq$ temos que

$(a,b) \simeq (a,b)$, logo, $\simeq$ é reflexiva.

Simetria: Se $(a,b), (c,d) \in \mathbb{N} \, x \, \mathbb{N}$, e $(a,b) \simeq (c,d)$, pela definição de $\simeq$,

$a + d = b + c$. Pela comutatividade dos números naturais temos

$c + b = d + a$, novamente pela definição de $\simeq$, temos $(c,d) \simeq (a,b)$, logo $\simeq$ é simétrica.

Transitividade: Sejam (a,b) , (c,d), $(e,f) \in \mathbb{N} \, x \, \mathbb{N}$, tais que $(a,b) \simeq (c,d)$

e $(c,d) \simeq (e,f)$.

Pela definição da relação $\simeq$, temos:

$a + d = b + c \Rightarrow a + d + f = b + c + f$ (igualdade I) e

$c + f = d + e \Rightarrow b + c + f = b + d + e$ (igualdade II)

Das igualdades I e II , temos:

$a + d + f = b + c + f = b + d + e$, segue que:

$a + d + f = b + d + e$. Pela lei do cancelamento da soma nos naturais, ficamos com $a + f = b + e$. Pela definição da relação $\simeq$:

$(a,b) \simeq (e,f)$,

Logo $\simeq$ é transitiva.

Tendo demostrado que a relação $\simeq$ é uma relação de equivalência, usaremos a definição 2.2.3 para finalmente construirmos o conjunto dos números inteiros. Denotaremos por [(a,b)] a classe de equivalência do par ordenado (a,b), determinada em $\mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}$, pela relação $\simeq$, ou seja:

$$[(a,b)] = \{ (x,y) \in \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N} \mid (x,y) \simeq (a,b)\}.$$

Em outras palavras, cada classe de equivalência [(a,b)] corresponde a uma classe de subtrações equivalentes, como veremos em alguns exemplos a seguir. Observemos os seguintes exemplos:

[(5,2)] = {(3,0), (4,1), (5,2), (6,3)... }

[(1,3)] = {(0,2), (1,3), (2,4),.. }

[(50,50) = {(1,1), (2,2), (3,3)...}

É importante notar que para esta construção devemos considerar a ordem dos números naturais a e b envolvidos, daí segue a importância de utilizarmos pares ordenados. O par ordenado (a,b) corresponde a subtração do número a, na primeira posição pelo número b, na segunda posição.
Finalmente definiremos formalmente o conjunto dos números inteiros.

Definição 2.2.5: Conjunto dos números inteiros

O conjunto quociente $\mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}/_{\simeq}$ constituído pelas classes de equivalência [(a, b)] será denotado por $\mathbb{Z}$ e chamado de conjunto dos números inteiros. Assim temos:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}/_{\simeq}$$

De acordo com Ripoll (2016), na construção de $\mathbb{Z}$ por classes de equivalência, cada par ordenado de números naturais também pode ser associado a um segmento orientado da reta. Por exemplo, os pares ordenados (5,10), (2,7) e (0,5), que representam uma mesma classe, podem ser interpretados, respectivamente, como os segmentos orientados que vão de 10 a 5, de 7 a 2 e de 5 a 0. Assim um número inteiro pode ser interpretado como uma classe de subtrações equivalentes ou como uma classe de segmentos equipolentes. Nesse sentido, os segmentos orientados de 10 a 5, de 7 a 2 e de 5 a 0 são equipolentes. Logo, correspondem a um mesmo número inteiro, que chamaremos de -5. Por outro lado, os segmentos orientados de 5 a 10, de 2 a 7 e de 0 a 5, que têm orientação oposta, serão associados ao número +5. Desta forma, além de representar quantidades (como é o caso dos naturais), os números ganham um novo atributo: a orientação. No conjunto dos inteiros, os números passam a representar *quantidades munidas de orientação*.

2.3. Operações e relações no conjunto dos inteiros

Na seção anterior construímos o conjunto dos números inteiros de maneira formal. Nesta, definiremos as operações de adição e multiplicação e mostraremos que existe uma relação de ordem no conjunto dos inteiros. Com isso, mostraremos que $\mathbb{Z}$ é uma estrutura algébrica do tipo $(\mathbb{Z},+,\cdot,\leq)$, conhecida como anel ordenado (não nos aprofundaremos neste conceito). Além disso, veremos que $\mathbb{N}$ pode ser identificado com um subconjunto de $\mathbb{Z}$, o que nos permite considera-lo como tal para todos os efeitos. Discutiremos ainda os conceitos de simétrico, módulo, valor absoluto, e abordaremos de maneira informal a subtração como uma operação no conjunto dos inteiros. Na verdade, conceituaremos a subtração como uma variação, ou melhor, um desdobramento da adição. Iniciamos pela definição de adição.

As operações de adição e de multiplicação nos inteiros

Vale lembrar que construímos o conjunto dos números inteiros por meio de subtrações equivalentes, ou seja, devemos pensar no par (a,b) como sendo associado à subtração (a - b). Logo, a definição de soma entre dois números inteiros deve corresponder a somar duas subtrações equivalentes. Devemos, portanto, reescrever essa soma como uma subtração equivalente: (a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d). Feito isso, reescrevemos esse resultado como um par ordenado, (a + c, b + d). Assim, definiremos a adição entre [(a, b)] e [(c, d)] $\in \mathbb{N}\, x\, \mathbb{N}/_{\simeq}$ como

$$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(a + c, b + d)].$$

Como estamos lidando com classes de equivalência, precisamos mostrar que o resultado da operação independe da escolha do representante de cada classe. Perceba que cada número inteiro é representado por uma classe de equivalência, esta por sua vez pode ser representada por infinitas subtrações equivalentes, ou seja, infinitos pares ordenados. Sendo assim, se o resultado da operação dependesse da escolha do representante de cada classe, teríamos infinitos resultados para adição de dois números inteiros.

Teorema 2.3.1: Se [(a, b)] = [(a’, b’)] e [(c, d)] = [(c’, d’)], então [(a, b)] $\oplus$ [(c, d)] = [(a’, b’)] $\oplus$ [(c’, d’)], isto é, a expressão acima é consistente.

Demonstração:

Como [(a, b)] = [(a’, b’)], temos que (a, b) $\simeq$ (a’, b’) , ou seja,

a + b’ = b + a’ (1)

analogamente, temos:

c + d' = d + c' (2).

Por definição, $[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$ *e*

$[(a', b')] \oplus [(c', d')] = [(a' + c', b' + d')]$,

mostraremos que $[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$.

Somando as equações (1) e (2) temos:

$(a + b') + (c + d') = (b + a') + (d + c') \Longrightarrow (a + c) + (b' + d') = (b + d) + (a' + c')$.

Daí, temos:

$[(a + c, b + d)] = [(a' + c', b' + d')]$, *como queríamos demostrar.*

Definição 2.3.1: Adição no conjunto dos inteiros

A adição em $\mathbb{Z}$ é a operação:

$\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por: $[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(a + c, b + d)]$

Mostraremos a seguir que a adição satisfaz as propriedades básicas usuais, que são: comutatividade, associatividade, elemento neutro e elemento inverso.

<u>Comutatividade:</u> $[(a, b)] \oplus [(c,d)] = [(c, d)] \oplus [(a, b)] \ \forall \ [(a, b)], [(c, d)] \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

$[(a, b)] \oplus [(c, d)] = [(a + c, b + d)] = [(c + a, d + b)] = [(c, d)] \oplus [(a,b)]$, *como queríamos demostrar.*

<u>Associatividade:</u> $\big([(a, b)] \oplus [(c,d)]\big) \oplus [(e,f)] = [(a, b)] \oplus \big([(c, d)] \oplus [(e,f)]\big) \ \forall \ [(a, b)], [(c, d)],[(e, f)] \in \mathbb{Z}$.

Demonstração:

$\big([(a, b)] \oplus [(c,d)]\big) \oplus [(e,f)]$

$= ([(a + c, b + d)]) \oplus [(e,f)]$

$= ([(a + c) + e, (b + d) + f])$

$= ([(a+ (c + e), b+ (d + f)])$

$= [(a, b)] \oplus [(c+e, d+f)]$

$= [(a, b)] \oplus \big([(c, d)] \oplus [(e, f)]\big)$, *como queríamos.*

<u>Elemento Neutro</u>: $\exists \ z \in \mathbb{Z}$ *tal que* $\forall \ [(a, b)] \in \mathbb{Z}, [(a, b)] \oplus z = [(a, b)]$

Demonstração:

Como $z \in \mathbb{Z}$ $z = [(c, d)]$, seja $[(c, d)] = [(0,0)]$, temos,
$[(a, b)] \oplus [(0,0)] = [(a+0, b+0)] = [(a, b)]$, como queríamos.

<u>*Elemento inverso*</u>*: $\forall\ [(a, b)] \in \mathbb{Z}\ \exists\ [(a',b')] \in \mathbb{Z}$ tal que $[(a, b)] \oplus [(a', b')] = z$*
Demonstração:
Como vimos na propriedade III, $z = [(0,0)]$, mostraremos que existe um único $[(a', b')]$ para cada $[(a, b)]$ de modo que $[(a, b)] \oplus [(a',b')] = [(0,0)]$
Tomemos $[(a', b')] = [(b, a)]$
$[(a, b)] \oplus [(a', b')] = [(c, d)] \Rightarrow [(a, b)] \oplus [(b, a)] = [(c, d)$
$\Rightarrow [(a + b, b + a)] = [(c, d)]$
*$\Rightarrow$ $a + b + d = b + a + c$, pela lei do cancelamento**
$\Rightarrow d + 0 = c + 0$
$\Rightarrow [(d,e)] = [(0,0)]$
$\Rightarrow [(a, b)] \oplus [(b, a)] = [(0,0)]$
A demonstração da unicidade do elemento inverso deixaremos como exercício.

**A lei do cancelamento é uma propriedade da soma nos números naturais, como a igualdade $a + b + d = b + a + c$ envolve apenas números naturais, podemos aplica-la, no conjunto dos inteiros ela é consequência do inverso aditivo (simétrico).*

A propriedade IV mostrada acima é de suma importância para entendermos dois conceitos relativos a números inteiros, que são: simétrico ou oposto, valor absoluto ou módulo de um número. Voltaremos a esses assuntos mais a frente, após definirmos a multiplicação, a relação de ordem, e determinarmos $\mathbb{N}$ como subconjunto de $\mathbb{Z}$.
Adotaremos um raciocínio análogo ao da adição. Para a multiplicação teremos o produto entre duas subtrações equivalentes e temos que reescrevê-la como uma subtração equivalente. Temos $(a - b).(c-d) = (ac + bd) - (ad + bc)$ associando o resultado ao par ordenado $(ac + bd, ad + bc)$. Definiremos a adição entre $[(a, b)]$ e $[(c, d)] \in \mathbb{N}\ x\ \mathbb{N}/_{\simeq}$ como:

$$[(a, b)] \odot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)].$$

Assim como na adição, estamos lidando com classes de equivalência e precisamos mostrar que o resultado da operação independe da escolha do representante de cada classe.
Teorema 2.3.2: Se $[(a, b)] = [(a', b')]$ e $[(c, d)] = [(c', d')]$, então $[(a, b)] \odot [(c, d)] = [(a', b')] \odot [(c', d')]$, isto é, a expressão acima é consistente.

O raciocínio dessa demonstração é análogo ao que foi utilizado na demonstração do teorema 2.3.1, sendo assim, a demonstração deste, fica a cargo do leitor.

Definição 2.3.2: Multiplicação no conjunto dos inteiros

A multiplicação em $\mathbb{Z}$ é a operação:

$\odot : \mathbb{Z} \, x \, \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ definida por: $[(a, b)] \odot [(c, d)] = [(ac + bd, ad + bc)]$.

As propriedades básicas acima demonstradas são válidas também para a multiplicação, deixaremos suas demonstrações para o leitor, haja vista a semelhança no raciocínio utilizado (ver por exemplo Ferreira, 2013, p. 40).

Mostraremos, como exemplo, a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Sejam $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$, $z = [(e,f)] \in \mathbb{Z}$.

$x(y + z) = [(a,b)] \odot([(c,d)] + [(e,f)]) = [(a,b)] \odot[(c + e, d + f)]$

$= [a(c+e) + b(d+f), a(d+f) + b(c+e)]$

$=[(ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be)]$

$= [(a,b)] \odot [(c,d)] + [(a,b)] \odot [(e,f)] = xy + xz$

Relação de ordem nos inteiros

Tendo definido adição e multiplicação, nos resta mostrar que é possível definir uma relação de ordem no conjunto dos inteiros, para em seguida concluir que $\mathbb{N}$ pode ser indentificado com um subconjunto de $\mathbb{Z}$, sendo preservadas as estrutura algébrica e de ordem.

Definição 2.3.3: Relação de ordem nos inteiros

Dados os inteiros $[(a,b)]$ e $[(c,d)]$ temos que:

$[(a,b)] \trianglelefteq [(c,d)] \Leftrightarrow a + d \leq b + c$

Mostraremos que esta é, de fato, uma relação de ordem, isto é, que a relação $\trianglelefteq$ satisfaz as propriedades reflexiva, antissimétrica e transitiva. Em seguida, mostraremos que a relação $\trianglelefteq$ satisfaz também a tricotomia, isto é, que é uma relação de ordem total, e, ainda, que preserva as operações.

Teorema:

A relação $\trianglelefteq$ é uma relação de ordem.

Demonstração:

Propriedade reflexiva:

Seja $x = [(a,b)] \in \mathbb{Z}$.

Como $a + b = b + a$, temos que $[(a,b)] = [(a,b)]$,e então $[(a,b)] \trianglelefteq [(a,b)]$.

Propriedade antissimétrica:

Seja $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)] \in \mathbb{Z}$, $x \trianglelefteq y$ e $y \trianglelefteq x$, assim temos:

$x \trianglelefteq y$

$[(a,b)] \leq [(c,d)]$

$a + d \trianglelefteq b + c$, por outro lado,

$y \trianglelefteq x$

$[(c,d)] \trianglelefteq [(a,b)]$

$c + b \trianglelefteq d + a$.

Como a,b,c,d são números naturais podemos afirmar, pela tricotomia dos naturais, que $a + d = b + c$, ou seja:

$[(a,b)] = [(c,d)]$.

Propriedade transitiva:

Seja $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$, $z = [(e,f)] \in \mathbb{Z}$, $x \trianglelefteq y$ e $y \trianglelefteq z$.

Daí temos $a + d \trianglelefteq b + c$ *e* $c + f \trianglelefteq d + e$.

Com isso, existem $m,n \in \mathbb{N}$ tais que:

$a + d + m = b + c$ *e* $c + f + n = d + e$.

somando as desigualdades de maneira ordenada, temos:

$$a + d + m + c + f + n = b + c + d + e$$

$$a + m + f + n = b + e$$

Como m e n são números naturais podemos afirmar que:

$a + f \trianglelefteq b + e$, o que nos permite concluir que $[(a,b)] \trianglelefteq [(e,f)]$.

Assim está demostrado que se $x \trianglelefteq y$ e $y \trianglelefteq z$, então $x \trianglelefteq z$.

Tendo demostrado que a relação $\trianglelefteq$ satisfaz as 3 propriedades, nos resta mostrar que satisfaz a tricotomia e preserva as operações.

Teorema 2.3.3 (Tricotomia)

Dados os inteiros $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$, apenas pode ocorrer uma das três opções:

$x \vartriangleleft y$, $x = y$ ou $y \vartriangleleft x$.

Demonstração:

Suponhamos que $x \vartriangleleft y$ e $y \vartriangleleft x$ ocorram simultaneamente. Assim temos:

$x \vartriangleleft y \rightarrow [(a,b)] \vartriangleleft [(c,d)] \rightarrow a + d < b + c$

$y \lhd x \rightarrow [(c,d)] \lhd [(a,b)] \rightarrow c + b < d + a$

O que pela tricotomia dos números naturais é um absurdo, logo apenas uma das premissas deve ser verdadeira, $x \lhd y$ ou $y \lhd x$.

Suponhamos agora, sem perda de generalidade, $y \lhd x$(ou $x \lhd y$) e $y = x$.

Assim temos:

$y \lhd x \rightarrow [(c,d)] \lhd [(a,b)] \rightarrow c + b < d + a$

$y = x \rightarrow [(c,d)] = [(a,b)] \rightarrow c + b = d + a$

O que é um absurdo pela tricotomia dos números naturais.

Portanto somente uma das suposições pode ser verdade, $y \lhd x$ ou $y = x$.

Sendo assim, a relação $\unlhd$ satisfaz a tricotomia e portanto é uma relação de ordem total.

Podemos ainda dizer que $[(a,b)] \lhd [(c,d)]$ *se* $[(a,b)] \unlhd [(c,d)]$ e $[(a,b)] \neq [(c,d)]$, a esta ordem damos o nome de ordem estrita.

Teorema 2.3.4

Dados os inteiros $x = [(a,b)]$, $y = [(c,d)]$, $z = [(e,f)]$ vale:

$x \unlhd y \rightarrow x \oplus z \unlhd y \oplus z$

$x \unlhd y , [(0,0)] \unlhd z \rightarrow x \odot z \unlhd y \odot z$

Demonstração:

$x \unlhd y \rightarrow [(a,b)] \unlhd [(c,d)] \rightarrow a + d \leq b + c$

$\rightarrow a + e + d + f \leq b + f + c + e$

$\rightarrow [(a + e, b + f)] \unlhd [(c + e, d + f)]$

$\rightarrow [(a,b)] \oplus [(e,f)] \unlhd [(c,d)] \oplus [(e,f)]$

$\rightarrow x \unlhd y \rightarrow x \oplus z \unlhd y \oplus z$

Considerando $x \unlhd y , [(0,0)] \unlhd z$ temos:

$a + d \leq b + c$ e $f \leq e$.

Sendo assim existem p e q naturais, tais que, $b + c = a + d + p$ e $e = f + q$. Temos que,

$b + c = a + d + p \rightarrow be + ce = ae + de + pe \rightarrow ae + de + pe = be + ce$ (I)

$b + c = a + d + p \rightarrow bf + cf = af + df + pf$ (II)

$e = f + q \rightarrow pe = pf + pq$. (III)

Somando I e II:

$ae + de + pe + bf + cf = be + ce + af + df + pf$

Substituindo III, temos:

$ae + de + pf + pq + bf + cf = be + ce + af + df + pf$

$ae + de + pq + bf + cf = be + ce + af + df$

$ae + de + bf + cf \leq be + ce + af + df$

$[(ae + bf, af + be)] \trianglelefteq [(ce + df, cf + de)]$

$[(a,b)] \odot [(e,f)] \trianglelefteq [(c,d)] \odot [(e,f)]$

$x \odot z \trianglelefteq y \odot z$

Tendo demostrado a compatibilidade da relação de ordem com as operações de definidas em $\mathbb{Z}$, concluímos que a estrutura: $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ é um *anel ordenado*.

Tendo completado a construção de $(\mathbb{Z}, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$, mostraremos que tal estrutura contém uma cópia isomorfa de $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$. De acordo com Ripoll, et. al. (2016), para que este objetivo seja atingido, não é suficiente provar que existe um subconjunto de $\mathbb{Z}$ que pode ser posto em bijeção com $\mathbb{N}$. Deve-se provar ainda que existe um subconjunto $\overline{\mathbb{N}} \subset \mathbb{Z}$ que replica a estrutura de $\mathbb{N}$, isto é, em que as operações de adição e de multiplicação e a relação de ordem se comportem da mesma forma que aquelas de $\mathbb{N}$.

O conjunto $\overline{\mathbb{N}}$ procurado é:

$$\overline{\mathbb{N}} = \{[n,0] \in \mathbb{Z} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{Z}$$

Deixaremos como exercício para o leitor a prova de que existe uma função bijetiva entre $\overline{\mathbb{N}}$ e $\mathbb{N}$ que preserva a adição, multiplicação e a relação de ordem.

Assim o conjunto dos números naturais está identificado com um subconjunto dos números inteiros e que as operações e relações de ordem possuem o mesmo comportamento. Dito isso, não há mais necessidade de diferenciar os símbolos utilizados para operações e ordem em $\mathbb{Z}$, podendo utilizar os mesmos de $\mathbb{N}$. Passaremos a escrever: $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$.

2.4. A polissemia do sinal de menos e seus desdobramentos

Nos números naturais, o sinal de "$-$" possui um único significado: *subtração*. Com a introdução dos números negativos o sinal de "$-$" passa a ser polissêmico, adquirindo pelo menos outros dois significados: *número negativo* e *simétrico*. Nesta seção discutiremos, no contexto dos números inteiros, essa polissemia, que embora possa parecer sutil é de central importância para o ensino de números negativos na educação básica. A partir daí, introduziremos os conceitos de simetria e de módulo, discutiremos a regra dos sinais na multiplicação, e comentaremos sobre a subtração no conjunto dos inteiros.

2.4.1. Simetria

Expandindo o conjunto dos números naturais para os números inteiros, incluímos os inversos aditivos (simétricos) dos números naturais. O inverso aditivo de um número inteiro n é representado por -n, ou seja, um sinal de menos na frente do número, dando assim outro significava ao sinal de menos, antes visto apenas como um sinal operatório pelos alunos.

Qualquer número inteiro pode ser escrito como um número natural ou seu simétrico (a demonstração desse fato pode ser vista em Ripoll at. al., 2016). Assim o conjunto dos números inteiros pode ser escrito como a união disjunta de três subconjuntos:

$$\mathbb{Z} = \{0\} \cup \mathbb{Z}^{+} \cup \mathbb{Z}^{-}$$

Isto é, $\mathbb{Z}$ pode ser decomposto da seguinte forma:

- $0 = [(0,0)]$ é o zero de $\mathbb{Z}$.
- $\mathbb{Z}^{+} = \overline{\mathbb{N}}^{*} = \overline{\mathbb{N}} = \{[n,0] \mid n \in \mathbb{N}\} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a > 0 \}$ é o conjunto dos números inteiros maiores que zero, chamados números positivos.
- $\mathbb{Z}^{-} = \{[n,0] \mid n \in \mathbb{N}\} = \{ a \in \mathbb{Z} \mid a < 0 \}$ é o conjunto dos números inteiros menores que 0, chamados de números negativos.

No conjuntos dos números naturais, o sinal de menos assume três possíveis significados:

- Subtração: Diferença entre dois números inteiros quaisquer
  Por exemplo: 7 - 10
- Número Negativo: Como foi explicado os números negativos são representados pelo sinal de menos.
  Por exemplo: -3
- Simétrico: o sinal de menos pode ainda ser utilizado quando queremos representar o simétrico de algum número.
  Por exemplo: o simétrico de 3 é - (3) ou ainda, o simétrico de -3 é -(-3)

Note que no caso do número positivo, utilizar o sinal de menos para identificar o simétrico é o mesmo que identificá-lo como número negativo. De acordo com Ripoll et. al.(2016) o aluno no ensino fundamental não precisa saber classificar interpretações do sinal “$-$” (e muito menos ser cobrado nesse sentido). Porém, é importante que o professor proponha atividades que envolvam os 3 significados. A atenção por parte do professor dos diferentes significados do sinal “$-$” é fundamental para aprendizagem dos alunos. Explorar com o aluno esses diversos significados poderá evitar dúvidas recorrentes em sala de aula, que aparecem em perguntas como: “Professor, esse sinal é do número ou da conta?” Mais à frente deixaremos sugestões de como solucionar esse tipo de questionamento.

2.4.2. Módulo

Podemos entender módulo de um número com sua distância até o zero. Portanto, o módulo de n é a distância do número n ao zero, que é igual a n; e o módulo de -n é a distância do número -n até o zero, que também é n. Assim, podemos afirmar que o módulo de um número é seu valor absoluto, ou seja, o valor numérico independente do sinal. Para sinalizar o módulo, a notação usual corresponde a colocar o número entre duas barras verticais, como nos exemplos a seguir.

Ex:

$| 5 | = 5$

$| - 5 | = 5$

É interessante comentar sobre módulo com os alunos pois ao ensinarmos as operações com números negativos podemos fazer associações aos números de maior módulo.

2.4.3. Regra dos sinais

Uma características das operações com números inteiros, que usualmente envolve reconhecidos desafios na educação básica, é chamada a “regra dos sinais” da multiplicação. Tal regra é consequência da estrutura algébrica dos inteiros – e não fruto de convenções matemáticas ou escolhas arbitrárias, como às vezes ela é apresentada. É possível mostrar (com os argumentos da demonstração a seguir) que as propriedades que constituem essa regra são válidas não apenas em $\mathbb{Z}$, como em qualquer anel. Isto é, a regra dos sinais é intrínseca à estrutura algébrica de anel.

Teorema 2.4.3.1

Sejam $p, q \in \mathbb{Z}$, então:

i. $p.0 = 0$;
ii. $- (-p) = p$
iii. $p . (- q) = (- p).q = - (p.q)$
iv. $(- p).(- q) = p.q$

Demonstração:

$p.0 = p.(0 + 0) = p.0 + p.0$, somando $-(p.0)$ em ambos os lados da igualdade, temos: $p.0 - p.0 = p.0 + p.0 - p.0$

O que nos dá $0 = p.0$

Esta afirmação decorre da definição de inverso aditivo. Como o inverso aditivo de p é -p , pois $p + (- p) = 0$. o inverso aditivo de - p é p, isto é, $- (- p) = p$.

Mostraremos que $p. (- q)$ é inverso aditivo de $p.q$, isto é,

$p.(-q)+p.q = 0$. De fato, temos:

$p.(-q) + p.q = p.[(-q) + q] = p.0 = 0$. Analogamente é possível mostrar que $(-p).q = -(p.q)$

Aplicaremos as propriedades ii e iii para assim demostrarmos a (iv)

$(-p).(-q) = (-(p.(-q))) = -(-p.q) = p.q$.

2.4.4. Subtração

Com a regra dos sinais, torna-se mais claro como efetuamos a operação de subtração no conjunto dos números inteiros.

Podemos entender a subtração como uma variação da soma, portanto, a parte formal já foi demonstrada anteriormente, ficaremos aqui com alguns exemplos práticos.

Exemplos:

10 - 20

$-20 = 10 + (-20)$, ou seja, subtrair 20 de 10 é o mesmo que somar 10 ao inverso aditivo de 20, somando e subtraindo 10, temos:

$10 + (-20) + 10 - 10 = 20 + (-20) - 10 = 0 - 10 = -10$.

Ou seja, $10 - 20 = -10$.

-10 - 20

$$-10 - 20 = -10 + (-20) = -1.(10 + 20) = -1.30 = -30.$$

10 - (- 20)

Como vimos anteriormente $-(-p) = p$, portanto, temos:

$10 - (-20) = 10 + 20 = 30$.

Nos capítulos finais do trabalho, deixaremos algumas sugestões de abordagens pedagógicas para os conceitos, definições, propriedades e operações abordadas neste capítulo.

2.5. Números inteiros no PCN

Finalizando este capítulo, faremos uma breve discussão sobre como os números inteiros, agora formalmente construídos, aparecem nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), apresentando nossa próprias visões sobre o ensino de números inteiros no ensino fundamental. É interessante frisar que os PCN são 1998, ou seja, são concebidos para o Ensino Fundamental de 20 anos atrás, não contemplando as mudanças que ocorreram nas últimas duas décadas, especialmente em relação à tecnologia e ao modo como a sociedade – e nisso incluímos as escolas – se organizam. Nos PCN, a nomenclatura do Ensino Fundamental se dá pela divisão de séries: quinta, sexta, sétima e oitava série. Faremos a conversão para nomenclatura atual que são: sexto, sétimo, oitavo e nono ano, respectivamente.

Os PCN sugerem que os números inteiros devam ser abordados no terceiro ciclo do ensino fundamental (6º e 7º ano), não deixando claro especificamente em qual dos anos abordar. Entendemos que o mais adequado é abordar o conteúdo no 7º ano, porém, não de maneira exclusiva. Para isso, o professor de matemática deve considerar o conceito de conhecimento de conteúdo no horizonte. Com isso, mesmo lecionando nas séries anteriores ao 7º ano, o professor deve ter conhecimento do conteúdo que está por vir e sempre que possível leva-lo em conta ao planejar sua abordagem. Assim, o professor permite que os alunos que ingressarem no 7º ano não se deparem com algo totalmente novo, algumas vezes tido como inexistente, tornando possível a aplicação do conceito de aprendizagem significativa, que consiste em iniciar um conteúdo buscando objetos matemáticos já conhecidos pelos alunos, ancorando a parte nova em algo já parcialmente construído.

De acordo com o PCN (1998, p. 66):

> Os números inteiros podem surgir como uma ampliação do campo aditivo, pela análise de diferentes situações em que esses números estejam presentes. Eles podem representar diferença, falta, orientação e posições relativas. As primeiras abordagens dos inteiros podem apoiar-se nas ideias intuitivas que os alunos já têm sobre esses números por vivenciarem situações de perdas e ganhos num jogo, débitos e créditos bancários ou outras situações.

Assim, é sugerido que iniciemos os números inteiros como uma expansão do campo aditivo. De certa forma, essa sugestão está atrelada a construção que fizemos no início do capítulo, utilizando subtrações equivalente de números naturais. No trecho acima podemos notar o caráter posicional e de orientação dos números inteiros, no entanto. Talvez não seja tão natural então restringir a abordagem a comentários sobre débitos e créditos bancários. É válido explorar a relação de simetria entre os números positivos e negativos através de situações concretas não necessariamente associada a números.

Os PCN (1998, p. 66) esclarecem ainda que:

> O estudo desses números não poderá, no entanto, restringir-se apenas a esses aspectos mas incorporar situações que permitam a compreensão das regras do cálculo com os inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais.

A partir do terceiro ciclo os alunos devem ser estimulados a reconhecer a importância de uma argumentação matemática. Podemos fazer isso através da busca de diferentes soluções para situações problema, como nos sugerem os PCN (1998, p. 70):

> No terceiro ciclo é importante que os alunos sejam estimulados a construir e analisar diferentes processos de resolução de situações-problema e compará-los. Ao desenvolver a capacidade de buscar soluções favorece a que o aluno passe a reconhecer a necessidade de construir argumentos plausíveis.

Isso é bastante importante no que tange à compreensão dos números inteiros, sobretudo dos negativos. Algumas vezes é possível que os alunos façam alguma confusão com o papel do sinal de menos, ou seja, ora este sinal "é do número" ora "é da conta". Esta é uma excelente oportunidade para abordar diferentes olhares sobre um mesmo problema e que consequências isso irá acarretar. Falaremos mais de situações práticas de sala de aula no Capítulo 5.

Os PCN destacam no terceiro ciclo o tópico "conceitos e procedimentos", e neste "números e operações", com recomendações de abordagens dos temas do ciclo. Nesse tópico, os PCN (1998, p.71) nos esclarecem que:

> Reconhecimento de números inteiros em diferentes contextos -cotidianos e históricos- e exploração de situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos.

A respeito de avaliações, os PCN nos sugerem abordar os diferentes significados dos números inteiros, como podemos ver no trecho a seguir:

> Utilizar os diferentes significados e representações dos números naturais, inteiros, racionais e das operações envolvendo esses números, para resolver problemas, em contextos sociais, matemáticos ou de outras áreas do conhecimento. (1998, p.76).

Sobre o que foi citado acima, considerando os números negativos, podemos verificar através das avaliações se o aluno compreende os diferentes significados que o sinal de menos possui, se os algoritmos das operações estão bem definidos, se consegue interpretar em uma situação problema como utilizar devidamente os números negativos. Ainda como sugestão de avaliação podemos utilizar os números inteiros e a geometria de maneira colaborativa através do plano cartesiano. Isso nos ajudará a avaliar as noções geométricas de direção e sentido e avaliar se o aluno consegue atribuir significado algébrico a essas noções. Como elucidam os PCN (1998, p. 76):

> Utilizar as noções de direção, sentido, ângulo, paralelismo e perpendicularismo para representar num sistema de coordenadas a posição e a translação de figuras no plano.

A respeito do trecho acima, os PCN (1998, p. 76) completam:

> Por meio deste critério o professor verifica se o aluno é capaz de utilizar as noções geométricas como paralelismo, perpendicularismo, ângulo, direção, sentido, para descrever e representar a posição e o deslocamento de figuras no referencial cartesiano.”

As recomendações dos PCN no que diz respeito aos números inteiros no quarto ciclo são semelhantes às do terceiro, para não dizer iguais. Portando não há acréscimo substancial em relação a este tema. Os PCN apresentam ainda, orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos. O objetivo dessas orientações é provocar os docentes para que, a partir delas, busquem mais conhecimento e tenham insights para planejar suas aulas. De acordo com os PCN (1998, p. 95):

> As orientações didáticas apresentadas a seguir pretendem contribuir para a reflexão a respeito de como ensinar, abordando aspectos ligados às condições em que se constituem os conhecimentos matemáticos. Analisam conceitos e procedimentos a serem ensinados, modos pelos quais eles se relacionam entre si, e também formas por meio das quais os alunos constroem esses conhecimentos matemáticos.

As orientações não são regras para serem seguidas, haja visto que sequer abordam todo o conteúdo. Além disso conferem ao professor autonomia pedagógica para estabelecer a sequência didática de sua preferência. O trecho a seguir, extraído dos PCN (1998, p. 95), corrobora com o parágrafo acima:

> Certamente estas orientações não abordam todos os aspectos dos conteúdos a serem desenvolvidos nos terceiro e quarto ciclos e, portanto, devem ser complementadas e ampliadas com a leitura de documentos e trabalhos que discutam pesquisas, estudos e outras orientações didáticas sobre os conteúdos matemáticos que fazem parte do currículo do ensino fundamental. Elas também não indicam uma sequência de tratamento dos blocos ao longo dos terceiro e quarto ciclos. Também na escola o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades, e os resultados, no que se refere à sua aprendizagem ao longo do ensino fundamental, têm sido bastante insatisfatórios. (PCN, 1998, p.97)

A seguir destacaremos alguns dos obstáculos enfrentados pelos alunos em relação aos números inteiros, mais especificamente no que tange aos números negativos. De acordo com PCN (1998, p. 98) alguns dos obstáculos enfrentados são:

- conferir significado às quantidades negativas;
- reconhecer a existência de números em dois sentidos a partir de zero, enquanto para os naturais a sucessão acontece num único sentido;
- reconhecer diferentes papéis para o zero (zero absoluto e zero origem);

- perceber a lógica dos números negativos, que contraria a lógica dos números naturais - por exemplo, é possível "adicionar 6 a um número e obter 1 no resultado", como também é possível "subtrair um número de 2 e obter 9";
- interpretar sentenças do tipo x = - y, (o aluno costuma pensar que necessariamente x é positivo e y é negativo).

Um outro problema em relação ao ensino de números negativos é citado nos PCN (1998, p. 98) como podemos ver no trecho a seguir:

> Quanto ao tratamento pedagógico dado a esse conteúdo, a ênfase na memorização de regras para efetuar cálculos, geralmente descontextualizados, costuma ser a tônica da abordagem dada aos números inteiros no terceiro e no quarto ciclos. Uma decorrência dessa abordagem é que muitos alunos não chegam a reconhecer os inteiros como extensão dos naturais e, apesar de memorizarem as regras de cálculo, não as conseguem aplicar adequadamente, por não terem desenvolvido uma maior compreensão do que seja o número inteiro.

Uma das motivações deste trabalho é ajudar professores que ensinam matemática a buscarem novas abordagens, que redução alguns dos obstáculos já citados. Mais adiante, daremos sugestões sobre como lidar com cada um desses obstáculos. Os PCN nos apresentam alguns recursos como alternativas para abordagens tradicionais, geralmente descontextualizadas. Um dos recursos sugeridos é a utilização do contato prévio que os alunos possam ter tido com número negativos em algumas situações como jogos, saldos, comparações de altura, saldo de gols etc.

> "Os contatos dos alunos com os significados dos números inteiros podem surgir da análise de situações-problema do campo aditivo. Situações em que esses números indicam falta, diferença, posição ou deslocamento na reta numérica". (PCN,1998, p.98)

A utilização da reta numérica é um recurso bastante útil, como nos sugerem os PCN (1998, p. 98- 99):

- A representação geométrica dos inteiros numa reta orientada também é um interessante recurso para explorar vários aspectos desse conteúdo, como:
- Visualizar o ponto de referência (origem) a partir da qual se definem os dois sentidos;
- Identificar um número e seu o oposto (simétrico): números que se situam à mesma distância do zero;
- Reconhecer a ordenação dos inteiros: dados dois números inteiros quaisquer, o menor é o que está à esquerda (no sentido positivo da reta numérica); assim, dados dois números positivos será maior o que estiver mais distante do zero e dados dois negativos será maior o que estiver mais próximo do zero;
- Comparar números inteiros e identificar diferenças entre eles;
- Inferir regras para operar com a adição e a subtração, como: (+3) + (-5) = +3 - 5 = -2

Outros recursos que os PCN nos apresentam é a utilização de tabelas, que é bastante útil par elucidar multiplicação e divisão de inteiros, além da utilização de fatos históricos. Abaixo temos um exemplo extraído do PCN(1998, p.100)

-3	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**	**x**
-9	-6	-3	0	3	6	9	**3**
-6	-4	-2	0	2	4	6	**2**
-3	-2	-1	0	1	2	3	**1**
0	0	0	0	0	0	0	**0**
							-1
							-2
							-3

Podemos utilizar tabelas como essa para comentarmos sobre sequências numéricas, progressões aritméticas, descobrir padrões etc. Com base no conceito de conhecimento de conteúdo no horizonte, podemos familiarizar os alunos com conceitos com que terão contanto nos anos seguintes. O interessante é que quando chegarem ao ensino médio, podemos refazer este quadro e usá-lo como conexão com conceitos já vistos, fazendo assim uso do conceito de aprendizagem significativa, ancorando o conteúdo a algo já conhecido.

Não podemos nos limitar a situações concretas, algumas vezes elas não são suficientes para construirmos as noções desejadas, como afirmar o trecho a seguir (PCN, 1998, p.100).

> Ao buscar as orientações para trabalhar com os números inteiros, deve-se ter presente que as atividades propostas não podem se limitar às que se apoiam apenas em situações concretas, pois nem sempre essas concretizações explicam os significados das noções envolvidas. É preciso ir um pouco além e possibilitar, pela extensão dos conhecimentos já construídos para os naturais, compreender e justificar algumas das propriedades dos números inteiros.

Os PCN deixam claro que o formalismo é necessário, porém não suficiente para o aprendizado, é possível perceber isso no trecho a seguir (PCN, 1998, p. 100).

> "Ao desenvolver um tratamento exclusivamente formal no trabalho com os números inteiros, corre-se o risco de reduzir seu estudo a um formalismo vazio, que geralmente leva a equívocos e é facilmente esquecido.".

É possível notar que embora os PCN nos forneçam diversos recursos para uso em sala de aula, todos eles se utilizam de algum conceito matemático. É bastante interessante recorrer a fatos cotidianos que trazem a noção de oposição e associar tais fatos aos números positivos e negativos. Falaremos melhor sobre esses recursos no capítulo de sugestões.

Capítulo 3: A formação do professor de matemática

> “[...] O domínio desses conhecimentos certamente proporcionará condições para o professor explorar e desenvolver, em aula, uma matemática significativa, isto é, uma matemática que faça sentido aos alunos, ao seu desenvolvimento intelectual.” (FIORENTINI, OLIVEIRA, 2013, p. 924)

Neste capítulo, analisamos a formação do professor de matemática, verificando que a mesma vem sendo apontada ao longo de décadas por pesquisadores e professores como pouco articulada com a prática profissional na educação básica. Propomos algumas sugestões que acreditamos ser pertinentes e ao final comentamos sobre como essas sugestões podem se aplicar à prática docente.

3.1. A formação do professor de matemática e suas necessidades

Nesta sessão, propomos a seguinte provocação: *O que um profissional formado em licenciatura em matemática sabe, ou deveria saber, para prática de ensino, que outras pessoas não sabem?* Procuraremos responder essa pergunta ao longo deste capítulo.

A princípio, a resposta imediata para esta pergunta é provavelmente a respeito do conteúdo ministrado, a ideia de que o professor deve ser detentor de todo conteúdo técnico da disciplina. Não negamos a importância do conhecimento de conteúdo para o professor, no entanto há saberes tão relevantes quanto esses. Quando nos debruçamos sobre essa questão com mais cautela, percebemos que os saberes do professor vão além do saber técnico. De fato, é de suma importância que o professor domine o conteúdo a ser lecionado, mas embora esta habilidade seja necessária, não é suficiente.

Antes de ponderarmos os números inteiros na formação do professor de matemática, consideramos importante discutir saberes necessários para a prática pedagógica no ensino básico e a formação do profissional de professores de matemática. De acordo com Fiorentini e Oliveira (2013, p.924):

> Os cursos de licenciatura em geral, isto é, não só de matemática, têm sido alvo de inúmeras críticas[...]. Essas críticas referem-se aos currículos, sobretudo às disciplinas específicas, às metodologias de ensino das aulas, ao distanciamento ou desconexão ente as práticas de formação e as práticas de ensinar e aprender na escola básica, à falta de diálogo ou inter-relação entre as disciplinas específicas e as de formação didático- pedagógica [...].

Como mencionamos acima, é precipitado acreditar que para lecionar basta dominar o conteúdo matemático. Como argumentam Moreira e David (2005), a matemática escolar não se reduz a uma versão elementar e “didatizada” da matemática científica. Ainda segundo Moreira e David:

> “A prática profissional do professor de matemática da escola básica é uma atividade complexa, cercada de contingências, e que não se reduz a uma transmissão técnica e linear de um “conteúdo” previamente definido.” (Moreira e David, 2005, p.51)

Reforçamos que o domínio do conteúdo é importante para o processo de ensino, no entanto, este por si só não garante os conhecimentos necessário para o ensino. É interessante que o professor adquira ferramentas pedagógicas eficazes e objetivas, enriquecendo assim sua prática docente. Deixamos aqui um questionamento para o leitor: As disciplinas pedagógicas presentes na graduação em licenciatura acrescentam de maneira eficaz na prática em sala de aula?

Neste ponto do trabalho iremos considerar três perspectivas que foram destacadas no trabalho de Fiorentini e Oliveira (2013) a respeito da prática docente do professor de matemática e sua formação profissional.

> A primeira perspectiva parte do princípio que a prática do professor de matemática pode ser vista como essencialmente prática, bastando a ele apenas o domínio do conhecimento matemático que é objeto de ensino e aprendizagem [...]. O lugar da matemática, nessa concepção de prática de formação docente, é central e majoritária, porém mais voltado ao conhecimento matemático clássico [...]. Além disso, as disciplinas didático-pedagógicas ocupam um lugar secundário, pois priorizam aspectos genéricos das ciências da educação [...], não situando-as ou focalizando-as nas práticas de ensinar e aprender a matemática da escola básica. (Fiorentini e Oliveira, 2013, p.920)

Nessa primeira perspectiva temos uma visão contrária à de Moreira e David, ou seja, de acordo com ela, a prática pedagógica se resume a didatizar a matemática pura. Tal perspectiva considera que a habilidade de ensinar se aprende ensinando, diminuindo a importância da pesquisa na área de educação. A segunda perspectiva é, de certa forma, um contra ponto da primeira. Ainda no trabalho de Fiorentini e Oliveira (2013, p.921) temos que:

> A segunda perspectiva vê a prática de ensino da matemática como campo de aplicação do conhecimento produzido, sistematicamente, pela pesquisa acadêmica. Para essa concepção de prática, faz-se necessário o futuro professor ter, primeiramente, uma sólida imersão teórica tanto em termos de conhecimentos matemáticos quanto das ciências educativas e dos processos metodológicos de ensino da matemática (enfatizando mais a dimensão didática do que pedagógica). A aplicação desses conhecimentos na prática educativa viria somente mais tarde, mediante um processo de treinamento profissional.

Como destacam Fiorentini e Oliveira (2013, p. 921), nessa concepção a matemática ocupa um lugar central, porém ainda distante da realidade escolar. O processo formativo enfatiza mais a dimensão técnica e didática (relação entre professor-aluno-conteúdo e método de ensino) do que a pedagógica (o sentido, a relevância, e as consequências do que ensinamos).

Na terceira e última perspectiva que abordaremos, a matemática, embora seja importante, não ocupa um lugar tão destacado quanto nas anteriores.

> Na terceira perspectiva, a prática pedagógica da matemática é vista como prática social, sendo constituída de saberes e relações complexas que necessitam ser estudadas, analisadas, problematizadas, compreendidas e continuamente transformadas. Isso requer uma prática formativa que tenha como eixo principal de estudo e problematização as múltiplas atividades profissionais do educador matemático. Fiorentini e Oliveira (2013, p.921).

Nesta terceira abordagem o educador matemático pode assumir diferentes funções dentro do universo de educação, trabalhando direta ou indiretamente com a educação básica. É possível notar que nesta terceira perspectiva, há uma maior liberdade de atuação em relação às anteriores.

Acreditamos que o professor de matemática deve encontrar uma harmonia entre as 3 abordagens supracitadas, sabendo escolher o momento mais propício para cada uma delas, ou seja, o ensino fundamental, o ensino médio e os cursos preparatórios requerem diferentes perspectivas sobre o ensino da matemática.

Vamos nos apegar aqui ao ensino fundamental, período no qual é ensinado o conteúdo de números negativos. Nesta etapa do ensino, acreditamos que as perspectivas 2 e 3 devem ser predominantes. A seguir destacaremos saberes que consideramos necessárias que um professor de matemática desenvolva e que deveriam ser contempladas no curso de formação de licenciatura, nos baseando livremente em Shulman (1987) e Ball, Thames e Phelpes (2008).

- Conhecimento didático/pedagógico coerente ao ensino básico;
- Domínio do conteúdo matemático do ensino básico;
- Conhecimento sobre o currículo do ensino básico;
- Domínio de turma;
- Montagem do quadro nas aulas expositivas;
- Criatividade para resolução de problemas e explicabilidade;
- Planejamento das aulas.

Deixaremos aqui uma observação pertinente: De fato, ao concluir o curso de licenciatura o graduando é capaz de resolver problemas matemáticos de nível superior e boa parte do ensino básico (contemplando um dos itens citados). No entanto, os saberes docentes não são claramente ensinados,

o que nos leva a crer que a formação acadêmica vai de encontro a primeira perspectiva que apresentamos, que não é a mais adequada para o ensino de matemática no ensino fundamental.
Corroborando com nosso texto trazemos um trecho de Moreira e David (2005, p.55) que nos diz o seguinte:

> “num projeto de formação matemática na licenciatura, assumir a posição do matemático diante dessas questões[...] significa furtar-se ao enfrentamento de questões postas pelas necessidades concretas da própria prática para a qual se pretende formar o profissional”

Ainda de acordo com Fiorentini e Oliveira (*2013, p.926)* a modelagem matemática e a educação estatística podem ajudar a compreender e problematizar a relação da matemática com a sociedade e a realidade.

> Mizukami e Reali (2002) defende que a formação matemática deve continuar possibilitando aos futuros professores o acesso aos conhecimentos acadêmicos e às teorias, não como fins em sim mesmos, mas como ferramentas intelectuais capazes de enriquecer seu pensamento e sua ação, além de instruí-los na análise e síntese da realidade pedagógica. (apud Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 926)

Historicamente tiveram algumas tentativas de enfrentar o problema da formação do professor de matemática, iremos elucidar algumas aqui. Um dos pioneiros nesta empreitada foi Felix Klein (1849-1925). De acordo com Veloso (2004, p.58) “Klein interessava-se profundamente pelo ensino de matemática nas escolas secundárias, tanto no que diz respeito aos conteúdos a ensinar, como no melhor modo de o fazer. [...] Procurou reduzir a distância entre as escolas e a universidade, para tirar as escolas da letargia da tradição[...].” (apud Fiorentini e Oliveira, 2013, p.927). Em 1908, Klein publicou o livro “Elemnetary Mathematics from na advanced Standpoint, no qual denunciava que os professores de matemática da universidade estavam “preocupados exclusivamente com a sua ciência, sem pensar sequer um momento nas necessidades das escolas, sem mesmo se preocuparem em estabelecer ligações com a matemática escolar” .(KLEIN,1908, apud VELOSO, 2004, p59 apud Fiorentini e Oliveira, 2013, p.927)
Consequentemente, ao iniciar a docência o professor de matemática se sentia “incapaz e sem ajuda, de descobrir qualquer ligação entre esta tarefa e a matemática universitária”. (KLEIN,1908, apud VELOSO, 2004, p. 59 apud Fiorentini e Oliveira, 2013, p.927). O resultado disso era o abandono do que havia aprendido na universidade, recaindo rapidamente no modo tradicional de ensinar. (Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 927). Ao publicar o livro, Klein tinha o objetivo de mostrar: “ As conexões mútuas entre os problemas dos vários domínios(álgebra, teoria dos números, teoria das funções, geometria...), coisa que não é feita suficientemente nas aulas habituais e, em especial,

salientar as relações entre estes problemas e os da matemática escolar" (KLEIN,1908, apud VELOSO, 2004, p59 apud Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 927).

Quem deu sequência ao projeto de Klein foi o matemático Richard Courant (1888 - 1972) tendo publicado dois livros: " What is Mathematics" e Differential and Integral Calculus". O segundo livro é, de acordo com Fiorentini e Oliveira, 2013, *p.927, "*um dos mais importantes livros didáticos sobre cálculo e análise real do século XX. Essa obra deu destaque especial à origem e evolução dos conceitos fundamentais do Cálculo, sem seguir uma abordagem formal ou axiomática do Cálculo."

Os questionamentos feitos por Klein no século passado ainda estão presentes atualmente, o que nos permite constatar que evoluímos muito pouco e vamos além, esta evolução é lenta.

A seguir veremos um caso interessante que ocorreu em curso de Licenciatura em Matemática da UNICAMP. O relato deste caso foi retirado da obra de Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 927.

> [...] no final dos anos 80, foi introduzida a disciplina Geometrias não Euclidianas. A ementa sugeria uma exploração histórica, experimental e investigativa de várias geometrias não euclidianas, a partir da negação do 5º postulado de Euclides. E, assim foi feito, enquanto Beatriz D'Ambrosio assumiu a disciplina, sendo apontada pelos futuros professores como uma disciplina importante e contributiva para sua prática na educação básica. Entretanto, com a mudança de Beatriz para os Estados Unidos, docentes de matemática pura assumiram a disciplina e passaram a trabalhá-la formalmente sob um enfoque algébrico e axiomático. E, pouco tempo depois, a disciplina seria excluída da grade curricular, tendo em vista a pouca importância na formação do professor de matemática.

O caso citado acima nos faz pensar sobre a importância das disciplinas que são lecionadas na graduação, na maneira como são ensinadas, e por último, mas não mesmo importante, sobre as diversas ferramentas importantes que não são ensinadas na graduação. Te convidamos a fazer a seguinte reflexão: "O que você, professor de matemática, sabe sobre técnicas de ensino e que aprendeu na graduação em uma de suas disciplinas e coloca em prática no seu cotidiano profissional?

Daremos um destaque maior à pesquisadora que mencionaremos a seguir, Deborah Ball, devido ao seu conceito de conhecimento de conteúdo no horizonte, o qual dedicaremos a próxima sessão.

Como sugere Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 928: "A partir de estudos e pesquisas que vem sendo realizados na Universidade de Michigan, aponta o distanciamento entre a prática e a formação necessária ao professor de matemática."

Os resultados de tais estudos corroboram com a nossa crítica a respeito da formação do professor de matemática, havendo algumas lacunas pedagógicas a serem preenchidas. Salientamos novamente que o conhecimento técnico matemático não deve estar em segundo, mas sim entrelaçado com o conhecimento pedagógico.

> Para ela, embora o conhecimento do assunto a ser ensinado seja um componente essencial do conhecimento dos professores, a preparação dos professores para o ensino desses assuntos raramente é o foco central de qualquer fase do processo de formação. (Fiorentini e Oliveira, 2013, p.928)

A autora nos mostra, através de suas pesquisas, que os futuros professores de matemática são preparados para aprender o conteúdo ao invés de serem preparados para ensiná-los. Ainda sob o olhar de Fiorentini e Oliveira (2013) podemos afirmar que Deborah Ball apresenta três grandes problemas a ser enfrentados, na formação docente.

O primeiro consiste em identificar o conhecimento de conteúdo que importa para o ensino; o segundo consiste em considerar como tal conhecimento tem que ser estudado e compreendido para ser ensinado; o terceiro consiste em criar oportunidades de aprendizagem do conteúdo de forma a capacitar futuros professores não somente a ter domínio do conhecimento desses conteúdos, mas, também, saber utilizá-los em contextos variados de prática. (BALL,2000, apud, Fiorentini e Oliveira, 2013, p. 928).

Estamos indo na direção de encontrarmos a resposta, ou uma das respostas, para a pergunta proposta no início desta sessão. Faremos isso na sessão seguinte, através dos trabalhos de Deborah Ball. Ela se propõe a destacar saberes inerentes a profissão de professor de matemática e diferenciá-los dos saberes comuns no campo matemático.

Nesta sessão percebemos que a formação do professor de matemática vem sendo questionada ao longo de décadas, quiçá, séculos; e mesmo assim parece que o movimento para mudança é lento. Os profissionais da educação básica, no entanto, não precisam esperar passivamente que a mudança surja advinda de alguma entidade competente à educação para iniciarem essa transformação. Essa fomentada mudança pode ser protagonizada pelo professor dentro da sala de aula. A finalidade deste trabalho, como já foi dito, é servir de suporte e ferramenta para que o profissional consiga transformar sua prática, a princípio de números inteiros, sendo este trabalho extensível para outras áreas, dependendo apenas da criatividade do leitor.

3.2. O conhecimento de conteúdo no horizonte e sua aplicação na prática docente

Antes de abordarmos o conceito propriamente dito, faremos uma contextualização a respeito das habilidades/saberes do professor.

O conceito introduzido pela pesquisadora e professora Debora Ball está alinhado com a nossa proposta feita na sessão 3.1 deste trabalho. A aplicabilidade deste conceito se dá quando o profissional alcança a interseção de três itens dentre os que citamos como saberes/habilidades do professor: Conhecimento didático/pedagógico coerente ao ensino básico, domínio do conteúdo matemático do ensino básico e conhecimento sobre o currículo do ensino básico. Esses três itens são considerados por Shulman (1986) como essenciais para que o professor exerça sua profissão. Posteriormente em 1987, em seu trabalho intitulado *“Conhecimento e ensino: fundamentos para uma nova reforma”*, Shulman aperfeiçoou as bases de conhecimentos necessárias para um professor, reescrevendo-as da seguinte forma:

Se o conhecimento dos professores viesse a ser organizado em um manual, uma enciclopédia, ou outro formato para organizar o conhecimento, que título de tópicos poderia ter? No mínimo deveria incluir (SHULMAN, 1987, p. 8, livre tradução):

- Conhecimento de conteúdo;
- Conhecimento pedagógico geral, com referência especial aos princípios e estratégias de gestão e organização de sala de aula que aparecem e transcendem a matéria específica;
- Conhecimento de currículo, com uma compreensão particular dos materiais e programas que servem de ferramenta de trabalho para os professores;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo, especialmente o entrelace de conteúdo específico e pedagogia que é da alçada dos professores, e que cada um possui uma forma única de entendimento profissional;
- Conhecimento sobre os alunos e de suas características;
- Conhecimento do contexto educacional, indo desde os trabalhos com grupos ou classes, a administração e finanças das escolas, até as características das comunidades escolar e sua cultura;
- Conhecimento dos fins educacionais, seus propósitos e valores bem como sua base filosófica e raízes históricas.

Baseando-se no trabalho de Shulman, Ball, Thames e Phelps criaram o termo “*Mathematical knowledge for teaching (MKT*)”,ou seja, conhecimento matemáticos para ensinar, o qual comentaremos adiante. É interessante notarmos que pela nomenclatura usada, há diferença em “conhecimento matemático puro” e “conhecimento matemático para ensinar”. Convidamos o leitor a fazer a seguinte reflexão:

Quando um aluno erra um exercício, será que somente repetir os algoritmos matemáticos corretos é o suficiente para que ele a aprenda ou temos que entender onde o erro foi cometido? Há mais de uma maneira de errar, portanto há mais de uma maneira de corrigir os erros, sendo assim a repetição de algoritmos de forma mecânica (matemática pura) não é suficiente para o reconhecimento do erro e sua correção, o professor precisa identificar como corrigir aquele erro específico.

De acordo com Ball e Bass (2009) essa análise de erros para futuras correções é algo que professores habilidosos fazem com facilidade enquanto outros profissionais da área de matemática que não são professores possuem certa dificuldade.

Ainda citando Ball e Bass (2009), esta habilidade não é útil apenas para correção de erros, mas também é bastante útil para quando algum aluno resolve um exercício corretamente de maneira não convencional. É interessante verificarmos se foi coincidência ou não, se o método utilizado funciona de modo geral ou se é particularidade. Se for uma particularidade devemos pesquisar quais as condições necessárias para que tal resolução seja possível.

Estamos construindo a resposta para a pergunta feita na sessão anterior em relação aos saberes do professor de matemática. O MKT engloba alguns saberes que vão muito além do conhecimento técnico da disciplina, o que não significa de forma alguma que este saber fica de fora ou é menos importante, o fato é que ele sozinho não é suficiente para a boa prática de um professor de matemática. Sobre o MKT Ball e Bass (2009) nos diz:

> Nossa análise sobre o trabalho de dar aula, combinado com a análise empírica a respeito do saber e do raciocínio dos professores no que tange ao trabalho e lecionar nos permitiu produzir uma estrutura que articula domínios distintos do MKT (Ball, Thames e Phelps, 2008)

Apoiados no trabalho de Shulman (1987), Ball, Thames e Phelps (2007) refinaram as categorias implementadas por ele, adaptando-as para o universo do professor de matemática, além de terem feito uma sutil reorganização, como eles mesmo afirmam:

> Nossa noção do MKT compreende duas das categorias de conhecimento definidas por Shulman e seus colegas: conhecimento de conteúdo pedagógico (PCK); e conhecimento de conteúdo(CK) (Shulman, 1986).Em nosso trabalho , nós refinamos as caracterizações anteriores , particularmente o conhecimento de conteúdo.

O trabalho de Ball, Thames e Phelps (2009) nos explica que no *conhecimento de conteúdo*, ficaram as habilidades requeridas em professores de matemática, especificamente. Neste campo há 3 subdivisões:

- Conhecimento comum de conteúdo (CCK)
- Conhecimento especializado de conteúdo (SCK)
- Conhecimento de conteúdo no horizonte

Já o *conhecimento de conteúdo pedagógico* foi definido como uma mistura de conhecimento de conteúdo e conhecimento pedagógico. Dentro dessa estrutura há 3 subdivisões:

- Conhecimento de conteúdo e de alunos (KCS)

- Conhecimento de conteúdo e de ensino (KCT)
- Conhecimento do currículo

A seguir temos a figura do trabalho de Ball, Thames e Phelps (2007) (figura 1) e a tradução da mesma, retirada do trabalho de Silva e Carvalho (2017) (figura 2).

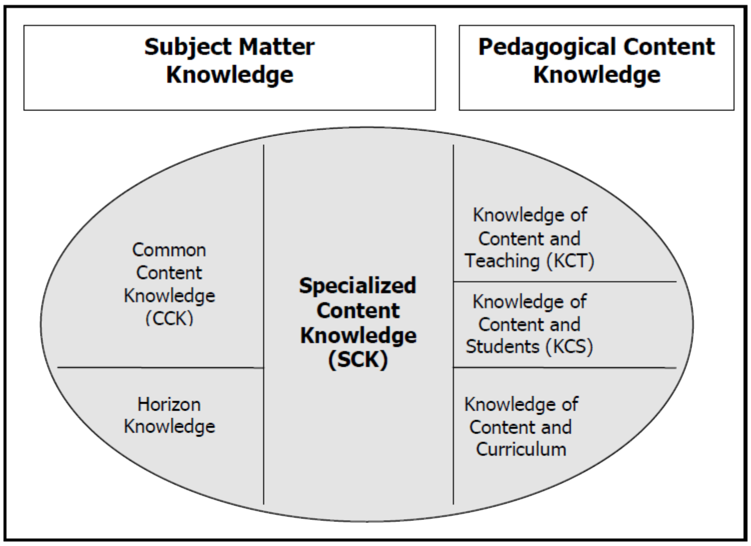


Figura 1: Estrutura proposta por Ball, Thames e Phelps (2007).

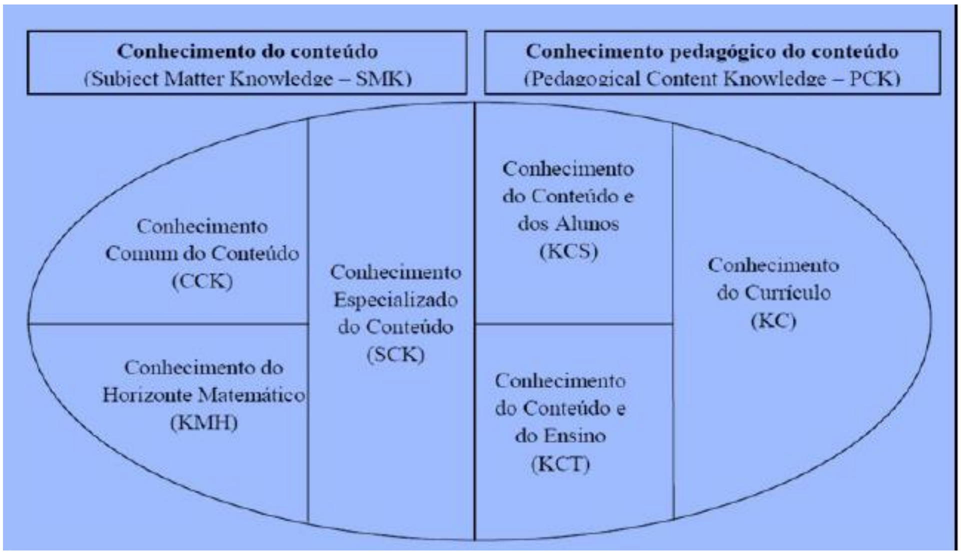


Figura 2: Tradução feita por Silva e Carvalho (2017) baseando-se em Ball, Thames e Phelps (2007).

Explicaremos adiante cada uma das subdivisões nos baseando no trabalho de Ball, Thames e Phelps (2007) e posteriormente focaremos no conhecimento de conteúdo no horizonte, objeto principal desta sessão e uma das duas habilidades propostas neste trabalho para que seja usada em sala de aula na prática de ensino dos números inteiros. A outra habilidade será comentada na próxima sessão, relembramos que é o conceito de aprendizagem significativa, sugerido por Ausubel.

- **Conhecimento comum do conteúdo:** É o conhecimento e habilidades matemáticas que não são necessariamente exclusivas do professor. Os professores precisam conhecer o material que ensinam. Precisam saber quando seus alunos têm respostas erradas, ou quando o livro dá uma definição imprecisa. Além disso precisam utilizar as notações corretamente ao longo das aulas,e estarem aptos a exercerem a profissão. No entanto há conceitos que outras pessoas, não professoras, também sabem. Um exemplo disso é o fato de amigos ou parentes conseguirem ensinar o conteúdo mesmo sem o mesmo rigor do professor.
- **Conhecimento especializado de conteúdo:** É o conhecimento do conteúdo e as habilidades necessárias para professores conduzirem seu trabalho. É uma espécie de conhecimento específico dos professores. Esse conhecimento não é o conhecimento passado aos alunos, é o conhecimento utilizado para ensinar da melhor forma o conteúdo matemático. Esse conhecimento engloba a habilidade de encontrar padrões de respostas erradas dos alunos, perceber uma abordagem pouco vantajosa para algum exercício, coisas desse tipo que não são comuns às outras áreas. Podemos citar como exemplo de aplicação desse conhecimento: A explicação de ideias matemáticas, encontrar os melhores exemplos para cada caso específico facilitando o processo de aprendizagem dos alunos, conectar tópicos dentro do conteúdo ministrado. Observe que dentro do conteúdo de números inteiros esta habilidade é bastante útil para tornar um conteúdo abstrato em algo mais palpável através da utilização dos exemplos que tenham estreita ligação com a realidade dos alunos e que tragam significado ao conteúdo numérico, que é abstrato.
- **Conhecimento do conteúdo no horizonte:** Na figura 2 acima, denominado como *"conhecimento do horizonte matemático"* por Silva e Carvalho (2017) o conhecimento de conteúdo no horizonte é o tipo de conhecimento responsável pela alocação do conteúdo curricular dentro do cronograma, além da antecipação de um conteúdo futuro com forma de provocação aos alunos, é também responsável pelas conexões de conteúdos atuais com os que estão por vir. Na linguagem informal utilizada atualmente, é o conhecimento que permite que o professor forneça alguns *"spoilers"* aos alunos. Mais adiante nos aprofundaremos mais neste no conhecimento de conteúdo no horizonte.
- **Conhecimento do conteúdo e dos alunos:** É o conhecimento que combina o saber sobre os alunos e o saber sobre matemática. Os professores precisam ter a habilidade de antecipar o que os alunos provavelmente pensarão e o que eles acharão confuso, e assim ter uma estratégia para esclarecer as confusões. Ao escolher um exemplo,os professores precisam prever o que os alunos acharão interessante e motivador, além de prover um exemplo que faça parte do universo

em que os aluos estão inseridos. Ao atribuir uma tarefa, eles precisam antecipar o que os alunos provavelmente farão com ela e se acharão fácil ou difícil. Eles também devem ser capazes de ouvir e interpretar o pensamento emergente e incompleto dos alunos, conforme expresso nas formas como os alunos usam a linguagem. Cada uma dessas tarefas requer uma interação entre compreensão matemática específica e familiaridade com os alunos e seu pensamento matemático.(trecho baseado no trabalho de Ball, Thames e Phelps, p. 42, 2008)

- **Conhecimento do conteúdo de ensino:** é o conhecimento que combina saber sobre ensinar e saber sobre matemática. Muitas das tarefas matemáticas de ensino exigem um conhecimento matemático do design de instrução. Os professores precisam sequenciar conteúdos específicos para instrução, decidindo quais exemplo para começar e que exemplos usar para levar os alunos mais fundo na conteúdo. Eles precisam avaliar as vantagens e desvantagens de instrução de representações utilizadas para ensinar uma ideia específica e identificar os diferentes métodos e procedimentos disponíveis instrucionalmente (trecho baseado no trabalho de Ball, Thames e Phelps , p.38 2008), É bastante interessante utilizar os exemplos corretos para cada situação, e através deles mostrar aos alunos como pensar no conteúdo abordado. A utilização de exemplos é muito interessante para mostrar uma generalização quando pertinente ou para mostrar as particularidades de alguns casos.
- **Conhecimento de conteúdo de currículo:** É necessário conhecer o currículo o qual o conteúdo está inserido para que todos os outros conhecimentos supracitados sejam aplicados de maneira eficaz.

A seguir, elucidaremos um exemplo de como utilizar o conhecimento de comum de conteúdo, conhecimento de conteúdo especializado e conhecimento do conteúdo e dos alunos:

Reconhecer uma resposta errada é parte da habilidade "conhecimento comum de conteúdo", enquanto a capacidade de dimensionar a natureza do erro pode ser um "Conteúdo especializado Conhecimento" ou "conhecimento de conteúdo e alunos" , dependendo de como o professor vai intervir. Ele pode usar predominantemente seu conhecimento de matemática e sua capacidade de transportar um tipo de análise matemática ou em vez disso, compara o erro com erros cometidos comumente por outros alunos. (trecho baseado no trabalho de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 37).

Acreditamos que os conhecimentos/habilidades que foram expostos acima são de extrema necessidade para a formação do professor, ajudando a construirmos uma boa resposta para a provocação feita na sessão 3.1, iremos relembra-la: *"O que um profissional formado em licenciatura em matemática sabe, ou deveria saber, para prática de ensino, que outras pessoas não sabem?"*

Como pudemos verificar nos baseando em Shulmann e Ball, Thames e Phelps há conhecimentos que são inerentes aos professores de matemática, e esses conhecimentos deveriam ser aprendidos dentro dos cursos de graduação.

Dos 6 diferentes tipos de conhecimento citados acima, iremos focar no **"conhecimento de conteúdo no horizonte",** nos aprofundando um pouco mais neste conceito e através dele sugerir abordagens a alguns temas , inclusive números inteiros, que é o objeto pricipal deste trabalho.

Muitas vezes nos deparamos com a seguinte situação em sala de aula:

Um aluno faz uma pergunta a respeito de um assunto que, de acordo com o currículo, é de alguma série posterior(para isso o professor precisa ter o domínio do conhecimento curricular). Temos 3 possíveis reações dos professores nesse momento e para mostrá-las mais claramente, vamos utilizar a seguinte situação: Jorge é um aluno do 6º ano do ensino fundamental, e ao se deparar com a reta numérica colocada no quadro pelo professor, fez o seguinte questionamento: "Professor, o que acontece antes do zero?"

Rapidamente um colega, Pedro, interviu: "Nada, ué, os números começam no zero"

Neste ponto temos 3 possíveis reações de professores:

1. Afirmar que não há números antes do zero(ideia que alguns alunos trazem do ensino fundamental 1)
2. Comentar que existem números que ele irá aprender nas séries posteriores.
3. Aproveitar a oportunidade e comentar a respeito de números negativos.

A reação 1, é a menos indicada pois certamente na série em que o aluno se deparar com números negativos, irá relutar ou questionar o motivo de ter aprendido errado em alguma série anterior.

A reação 2 é um alerta da existência do conteúdo, porém deixando implícito que não é simples a ponto de ser entendido naquele momento. O aluno entenderá que o conteúdo não é fácil. Na série seguinte, ao se deparar com números negativos, ele terá a recordação da dificuldade imposta no ano anterior.

A reação 3 é a ideal. É interessante comentar com os alunos que o conteúdo será visto por completo e de maneira aprofundada na série seguinte, mas nada impede que uma prévia seja feita. É interessante propor uma discussão de maneira informal e buscar algum significado para a existência desses números. Adotando esta estratégia, na série seguinte os alunos se lembrarão, mesmo que vagamente, que esses tipos de números já foram vistos e que possuem algum significado, assim será possível ancorar eses novo conhecimento em algo que já conhecem dentro do conteúdo.

Na reação 3 utilizamos o conceito de aprendizagem significativa (veremos na próxima sessão) e o conhecimento de conteúdo de horizonte, que permite, através do domínio do curriculo, um debate acerca de conteúdos posteriores.

Ao fazer isso conseguimos duas vantagens, a primeira é estimular o aluno mosntrando-o que tem capacidade de entender conceitos posteriores e a segunda é que na série posterior o aluno não irá aprender um novo conteúdo a partir do nada, e sim a partir de algo que já fora visto.

> O conhecimento do horizonte é uma consciência de como os tópicos matemáticos estão relacionados ao longo do período de matemática incluído no currículo. Professores de ensino fundamental, por exemplo, podem precisar saber como matemática que eles ensinam está relacionado com os alunos do ensino médio, para ser capaz de definir a base matemática para o que virá mais tarde. (Ball, Thames e Phelps , 2009)

Baseando em dois outros autores (Bruner e Schwab), Ball, Thames e Phelps esclarecem:

> Amplamente conhecida é a afirmação de Bruner (1960) de que é possível ensinar qualquer sujeito a qualquer aluno de forma intelectualmente honesta - uma afirmação que inspira desenvolvedores de currículo e professores para considerar maneiras de envolver os alunos e plantar sementes de ideias grandes e complexas. Schwab (1961/1978) também defendeu a importância de familiarizar os alunos com as principais estruturas de uma disciplina como base para a apreciação de suas principais ideias e formas de aprendizado.

Ainda de acordo com Ball, Thames e Phelps (2009):

> Nosso interesse na relação da disciplina com o ensino e aprendizagem de qualquer idade particular está em simpatia com as idéias de Bruner e Schwab, mas surge diretamente de nossos estudos da prática. Repetidamente vemos que conexões surgem e idéias se tocam, mesmo através de grandes extensões de sequência curricular. Nós vemos que o ensino requer um senso de como o a matemática em jogo agora está relacionada a idéias matemáticas maiores, estruturas, e princípios. Alguns podem ser aqueles que os alunos aprenderão em séries posteriores; alguns podem estar no centro do que é matemática. A tenção para o horizonte matemático é, portanto, importante na orientação da instrução para incorporar tanto a previsão pedagógica como a integridade matemática.

Corroborando com os trechos supracitados, afirmamos que é de suma importância que o professor faça as devidas conexões dos assuntos que se intersectam dentro do currículo matemático, independentemente da idade ou série do aluno, cabe ao professor utilizar suas habilidades para adaptar a linguagem, abordagem e dosagem do conteúdo à série em questão.

Ainda seguindos os ensinamentos de Ball, Thames e Phelps, chegamos a uma interessante definição do Conhecimento de conteúdo no horizonte.

> Definimos o conhecimento do horizonte como um tipo de sabedoria - mais como um turista experiente e apreciativo do que como guia turístico - das grandes paisagem matemática em que a presente experiência e instrução é situado. Ela envolve os aspectos da matemática

> que, enquanto talvez não contidos no currículo, são úteis para o aprendizado dos alunos, que iluminam e conferem um sentido compreensível do maior significado do que pode ser apenas parcialmente revelado na matemática aprendida naquela momento. É um tipo de conhecimento que pode guiar os seguintes tipos de responsabilidades de ensino e atos:
>
> - Fazer julgamentos sobre importância matemática
> - Perceber o significado matemático no que os alunos estão dizendo
> - Realçar e destacar pontos-chave
> - Antecipar e fazer conexões
> - Perceber e avaliar oportunidades matemáticas
> - Capturar distorções matemáticas ou possíveis precursores de futuras confusões ou deturpações.
>
> (Ball, Thames e Phelps, 2009)

De acordo com Ball, Thames e Phelps há 4 elementos constituintes na concepção do conhecimento de conteúdo no horizonte, que são:

1. Uma noção do ambiente matemático em torno da “localização” atual na instrução.
2. Principais ideias e estruturas disciplinares
3. Principais práticas matemáticas
4. Valores matemáticos e sensibilidades fundamentais

Esses 4 elementos norteiam a atitude do professor na intervenção em alguma situação de sala de aula como vimos na situação que descrevemos anteriormente em uma turma de 6º ano, na qual Jorge questiona o professor a respeito “do que acontece antes do zero?” Vamos fazer uma breve análise da reação 3, considerada por nós a mais adequada.

O professor utilizou o elemento (1) ambientando os alunos para iniciar a discussão, trocando a nomenclatura dada pelo aluno pela nomenclatura matemática. O elemento (2) traz para o aluno a ideias principais que serão utilizadas naquele debate, são as ferramentas que eles possuem para argumentar. O elemento (3) são as ferramentas do professor, já que após o debate feito, este irá mostrar o que de fato é verdade através de equivalências , relações, provas matemáticas e algum outro artifício que esteja ao alcance dos alunos. O elemento (4) é o responsável pela precisão, linguagem, consistência na explicação e percepção do quão longe se pode chegar em um debate sem que ele fique confuso ou desinteressante para os alunos, é importante que o professor tenha a consciência de que o protagonista no processo é o aluno e não ele próprio.

De fato, a aplicação do conhecimento de conteúdo no horizonte não é algo engessado, não funciona como uma receita de bolo, o professor precisa de prática, conhecimento do currículo e uma noção

ampla do que está por vir em relação ao conteúdo. Entendemos que este conceito é uma habilidade essencial para a prática docente e deveria ser ensinada nos cursos de graduação.
Deixaremos uma analogia bastante interessante para que o entendimento do conteúdo fique ainda mais claro.
Quando viajamos de carro vemos apenas alguns metros a nossa frente, a paisagem é vista de maneira direcionada e linear, ainda que passando pelo caminho diversas vezes não sabemos se na próxima vez houve alguma mudança. Ao viajarmos de avião, basta subir um pouco para que consigamos ter uma visão bem mais ampla, sendo possível enxergar a paisagem de maneira mais completa e conexa, e não linear ou direcionada como na viagem de carro.
Perceba que uma excelente aplicação do conhecimento de conteúdo no horizonte relaciona, basicamente, o conteúdo presente, que o aluno está vendo em sua série, com algum conteúdo posterior.
A seguir, usaremos uma habilidade denominada aprendizagem significativa que nos permite utilizar o que o aluno já conhece (do universo matemático ou não) para fazer com que a prática docente fique mais precisa, clara e concreta. Essa conexão de habilidades é muito interessante pois uma complementa a outra, se usadas em conjunto são muito poderosas no ensino de matemática como um todo, e no ensino de números inteiros.
Ilustraremos essa conexão no exemplo a seguir:
No ensino fundamental quando os alunos aprendem potenciação, os professores podem comentar sobre logaritmos, que está totalmente conectado (uso do conhecimento de conteúdo no horizonte). Quando esses alunos chegarem no ensino médio e forem aprender a respeito de logaritmo, já terão alguma familiaridade com o significado dessa linguagem, permitindo ancorar este conteúdo em algo que já fora visto (uso da aprendizagem significativa).
Na próxima sessão comentaremos sobre aprendizagem significativa nos aprofundando mais neste conceito para que em seguida possamos explicar sobre a conexão dos dois conceitos/habilidades.

3.3. A aprendizagem significativa e sua aplicação na prática docente

Nesta sessão iremos abordar um conceito fundamentado por David Ausubel(1968, 1978, 1980) denominado aprendizagem significativa que é extremamente útil no processo de ensino-aprendizagem e essencial no ensino de matemática, uma vez que os conteúdos estão intimamente conectados. No entanto, além de conectarmos conteúdos antes vistos com conteúdos que desejamos ensinar, iremos além; proporemos que qualquer conhecimento (seja ele matemático ou não) que o aluno possua, pode nos auxiliar no ensino de matemática, dando significado e concretude ao que se está aprendendo.
Para entendermos melhor o conceito fundamentado por David Ausubel é necessário que façamos uma breve contextualização para nos situarmos a respeito da teoria da aprendizagem que circunda o estudo

de Ausubel. De acordo com Moreira (1999) em sua obra "Teorias de aprendizagem" temos três tipos gerais de aprendizagem: Cognitiva, afetiva e psicomotora.

- Cognitiva: é aquela que resulta no armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende. E esse complexo organizado é conhecido como estrutura cognitiva;
- Afetiva: é aquela que resulta de sinais internos ao indivíduo e pode ser identificada como experiências tais como prazer e dor, satisfação ou descontentamento, alegria ou ansiedade. Algumas experiências afetivas acompanham sempre as experiências cognitivas, portanto a aprendizagem afetiva é concomitante com à cognitiva.
- Psicomotora: é aquela que envolve respostas musculares adquiridas mediante treino e prática, mas alguma aprendizagem é geralmente importante na aquisição de habilidades psicomotoras tais como aprender a tocar piano jogar golfe ou dançar balé.

Os três tipos acima apresentados não são excludentes, pelo contrário, são muitas vezes concomitantes. Por exemplo, se uma pessoa deseja aprender a tocar cavaquinho, ela pode iniciar sua aprendizagem de forma psicomotora mas em algum momento irá precisar da teoria musical o que envolve a aprendizagem cognitiva e nada impede que esta seja também entrelaçada à afetiva.

Queremos nos aprofundar e oferecer ao leitor a o conceito de aprendizagem significativa, que é um excelente ferramenta para o processo de aprendizagem do aluno, por isso daremos mais atenção à aprendizagem cognitiva, por ser o foco da teoria de Ausubel, como nos ensina Moreira (1999):

> A teoria de Ausubel focaliza primordialmente a aprendizagem cognitiva. Ausubel é um representante do cognitivismo e, como tal, propõe uma explicação teórica do processo de aprendizagem, segundo o ponto de vista cognitivista, embora reconheça a importância da experiência afetiva. Para ele, aprendizagem significa organização e interação do material da estrutura cognitiva. Como outros teóricos do cognitivismo, ele se baseia na premissa de que existe uma estrutura na qual essa organização e integração se processam. É a estrutura cognitiva, entendida como conteúdo total de ideias de um certo indivíduo e sua organização; ou, conteúdo e organização de suas ideias em uma área particular de conhecimentos. É o complexo resultante dos processos cognitivos, ou seja, dos processos por meio dos quais se adquire e utiliza conhecimento. (Moreira, 1999, p.152)

Ainda de acordo com Moreira (1999)

> Estrutura cognitiva significa, portanto, uma estrutura hierárquica de conceitos que são representações de experiências sensoriais do indivíduo". Trazendo para o campo do ensino em matemática, a estrutura cognitiva é, então, o conteúdo e organização das ideias dos alunos em relação a matemática, ou seja, tudo que ele adquiriu e armazenou faz parte de uma estrutura cognitiva.

A ampliação da estrutura cognitiva através da incorporação de novas ideias e conceitos chama-se aprendizagem, Ausubel distingue 2 eixos em relação a aprendizagem escolar e nos apresenta duas distinções. As principais distinções que devemos fazer são:

- Aprendizagem por recepção versus Aprendizagem por descoberta
- Aprendizagem Automática (por decoração) versus Aprendizagem significativa.

Em relação a essas duas distinções Ausubel (1980, p.20) afirma que:

> A primeira distinção é importante porque grande parte das informações adquiridas pelos alunos tanto dentro como fora das escolas é apresentada preferencialmente descoberta. E uma vez que a maior parte do material de aprendizagem é apresentado verbalmente, é igualmente importante observar que a aprendizagem receptiva verbal não é necessariamente automática em caráter e pode ser significativa sem uma experiência prévia não verbal ou de solução de problema.

Pelizzari et al, nos explica os diferentes eixos adotados por Ausubel a respeito da aprendizagem escolar. “Para esclarecer como é produzida a aprendizagem escolar, Ausubel propõe distinguir dois eixos ou dimensões diferentes que originarão, a partir dos diversos valores que possam tomar em cada caso, a classes diferentes de aprendizagem.” (Pelizzari, et al., 2002, p. 39).

Continuando sob a ótica dos estudos de Pelizzari *et al* em relação a David Ausubel temos que:

> O primeiro é o eixo relativo à maneira de organizar o processo de aprendizagem e a estrutura em torno da dimensão **aprendizagem por descoberta/aprendizagem receptiva**. Essa dimensão refere-se à maneira como o aluno recebe os conteúdos que deve aprender: quanto mais se aproxima do polo de aprendizagem por descoberta, mais esses conteúdos são recebidos de modo não completamente acabado e o aluno deve defini-los ou “descobri-los” antes de assimila-los; inversamente, quanto mais se aproxima do polo da aprendizagem receptiva, mais os conteúdos a serem aprendidos são dados ao aluno em forma final, já acabada.

Como foi possível notar, o primeiro eixo diz respeito de como o aprendiz recebe o conteúdo a ser aprendido, que pode ser de forma não lapidada (aprendizagem por descoberta) ou de forma bem lapidada, já refinada (aprendizagem receptiva), corroborando com o que afirma Ausubel:

> Na aprendizagem receptiva (automática ou significativa) todo o conteúdo daquilo que vai ser aprendido é apresentado ao aluno sob a forma fina! A tarefa de aprendizagem não envolve qualquer descoberta independente por parte do estudante. Do aluno exige-se somente internalizar ou incorporar o material (uma lista de sílabas, sem sentido ou adjetivos emparelhados; um poema ou um teorema geométrico) que é apresentado de forma a tornar-se acessível ou reproduzível em alguma ocasião futura. (Ausubel, 1980, p. 20)

A aprendizagem por recepção nos auxilia na objetividade do conteúdo, no entanto perdemos a oportunidade de fazer com que o aluno explore de maneira intuitiva o conteúdo a ser incorporado em sua estrutura cognitiva. É interessante para conteúdos inicias que servem como alicerce para dar sequência a conteúdos posteriores.

A aprendizagem por descoberta é dada de forma menos refinada, ou seja, o conteúdo a ser aprendido não é fornecido diretamente, ele é descoberto pelo aluno antes de ser aprendido de fato. É interessante que o aluno já tenha algum conceito prévio para que consiga fazer associações e a partir daí descobrir o novo conteúdo a ser incorporado a sua estrutura cognitiva.

Como afirmar Ausubel:

> A característica essencial da aprendizagem por descoberta, seja a formação de conceitos ou a solução automática do problema, é que o conteúdo principal daquilo que significativamente incorporado à sua estrutura cognitiva. A tarefa prioritária deste tipo de aprendizagem, em outras palavras, é descobrir algo - qual das duas passagens do labirinto leva ao objetivo, a natureza precisa das relações entre duas variáveis, os atributos comuns de diferentes objetos, e assim por diante. (Ausubel et al, 1980, p. 20)

Ainda seguindo os ensinamentos de Ausubel a respeito da aprendizagem por descoberta temos:

> A primeira fase de aprendizagem por descoberta envolve um processo bastante diferente daquele da aprendizagem receptiva. O aluno deve reagrupar informações, integrá-las à estrutura cognitiva existente e reorganizar e transformar a combinação integrada, de tal forma que dê origem ao produto final desejado ou à descoberta de uma relação perdida entre meios significativos da mesma forma que o conteúdo apresentado torna-se significativo na aprendizagem receptiva. Os dois tipos de aprendizagem os quais citamos acima tem suas características específicas e cada um com sua utilidade. Segundo Ausubel et al: "é importante observar nesse ponto que a aprendizagem receptiva e por descoberta diferem também com respeito aos seus respectivos papéis principais no funcionamento e desenvolvimento intelectual" (1980, p. 21)

O outro eixo adotado nos fornece outras duas diferenciações que são A aprendizagem significativa e aprendizagem mecânica, que é o tipo de processo pelo qual o aluno (no caso da aprendizagem escolar) expande sua estrutura cognitiva.

Abordaremos uma discussão a respeito de aprendizagem significativa versus aprendizagem automática. É interessante salientar duas coisas: a primeira é que esse debate nada tem a ver com o debate anterior, que relaciona aprendizagem receptiva versus aprendizagem por descoberta. A segunda coisa é que a aprendizagem significativa e a aprendizagem mecânica não são mecanismos necessariamente excludentes.

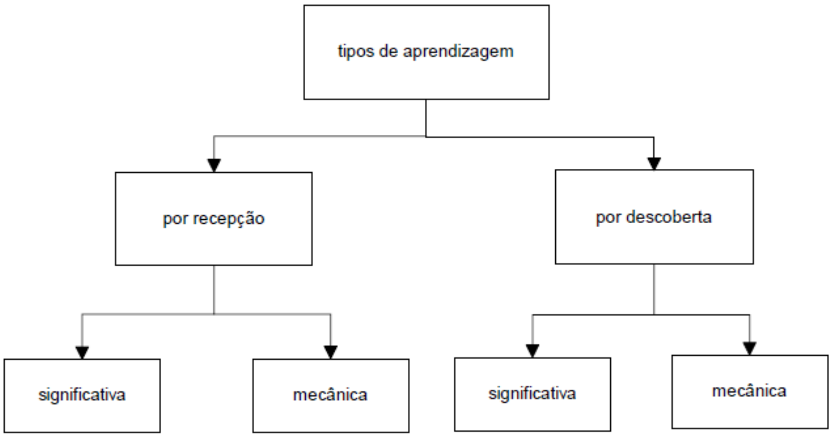
Corroborando com os dois fatos salientadas, destacamos os trechos a seguir:

> Embora a distinção entre aprendizagem receptiva e aprendizagem por descoberta discutida acima não tenha absolutamente nada a ver com a dimensão automático-significativa do processo de aprendizagem, existe comumente muita confusão em torno destas duas dimensões de aprendizagem. Grande parte da confusão nas discussões de aprendizagem escolar tem origem na deficiência de se reconhecer que as aprendizagens automáticas e significativa não são completamente dicotomizadas. (Ausubel et al, 1980, p. 22)

Ainda segundo Ausubel, há uma falsa correlação entre Aprendizagem receptiva e Mecânica e aprendizagem significativa e por descoberta. Como vemos no trecho a seguir.

> [...] crença gêmeas muito difundidas porém infundadas de que a aprendizagem receptiva é invariavelmente automática e que a aprendizagem por descoberta é inerente e necessariamente significativa." (Ausubel et al, 1980, p. 22)

Segue a figura retirada de Jesus (1999) para ilustrar o que fora dito até aqui.



Retomando a discussão anterior, vamos pontuar as diferenças entre aprendizagem significativa e a mecânica e, feito isso, focaremos no objeto principal desta sessão que é a aprendizagem significativa. A aprendizagem mecânica e significativa se diferem basicamente pelo grau de relação entre o conteúdo a ser aprendido com o conteúdo já estabelecido na estrutura cognitiva do aluno. Na aprendizagem mecânica, o conteúdo a ser aprendido não precisa ter alguma relação com o conteúdo já conhecido pelo aluno e instaurando em sua estrutura cognitiva. Já na aprendizagem significativa, o conteúdo a ser aprendido é relacionado com os conteúdos já conhecidos pelos aprendiz, e através dessa relação ocorre a expansão da estrutura cognitiva do aluno.

A respeito dos conceitos supracitados, Ausubel fomenta que:

> [...] a aprendizagem significativa ocorre quando a tarefa de aprendizagem implica relacionar, de forma não arbitrária e substantiva (não literal), uma nova informação a outras com as quais o aluno já esteja familiarizado, e quando o aluno adota uma estratégia

> correspondente para assim proceder. Aprendizagem automática, por sua vez, ocorre se a tarefa consistir de associações puramente arbitrárias, como na associação de pares, quebra-cabeça, labirinto ou aprendizagem de séries e quando falta ao aluno o conhecimento prévio relevante necessário para tornar a tarefa potencialmente significativa, e também (independente do potencial significativo contido na tarefa) se o aluno adota uma estratégia apenas para internalizá-la de uma forma arbitrária, literal [...] (Ausubel et al, 1980, p. 24).

A Aprendizagem Significativa

Neste momento iremos nos aprofunda na forma de aprendizagem que, para nós, é de suma importância no processo de ensino/aprendizagem do aluno.

Adotaremos uma definição simples e bastante objetiva do que é aprendizagem significativa, que nos é dada por Moreira (2012).

> Aprendizagem significativa é aquela em que ideias expressas simbolicamente interagem de maneira substantiva e não-arbitrária com aquilo que o aprendiz já sabe. Substantiva quer dizer não-literal, não ao pé-da-letra, e não-arbitrária significa que a interação não é com qualquer ideia prévia, mas sim com algum conhecimento especificamente relevante já existente na estrutura cognitiva do sujeito que aprende. (Moreira, p.2, 2012)

A aprendizagem significativa, como já foi explica anteriormente, necessita que a estrutura cognitiva do aprendiz tenha algum conteúdo prévio para que o mesmo possa interagir com o novo conteúdo. Este conteúdo não necessita ser, necessariamente, relacionado à Matemática, explicaremos isso depois. O conhecimento relevante à nova aprendizagem que está presente na estrutura cognitiva do aluno é chamado por David Ausubel de subsunçor, podemos chamá-lo também de conceitos âncoras pois servem de ponto de ancoragem para uma nova informação, permitindo que o aprendiz atribua um significado ao novo conceito. Aos poucos este novo conceito vai se naturalizando, podendo inclusive virar um novo conceito subsunçor. No entanto, é natural que tenhamos o seguinte questionamento: “De onde vem os subsunçores?”.

Uma resposta imediata para essa pergunta e sem muita profundidade é através do uso da aprendizagem mecânica. Quando o aprendiz se depara com alguma área de conhecimento completamente nova para ele, a aprendizagem mecânica é a maneira mais eficiente para que o mesmo possa adquirir informação a respeito daquele assunto. “A aprendizagem mecânica ocorre até que alguns elementos de conhecimento relevantes a novas informações na mesma área, existam na estrutura cognitiva e possam servir de subsunçores, ainda que pouco elaborados” (Moreira, 1999 , p.154).

Uma outra forma bastante interessante para que o aluno adquira conceitos subsunçores é o uso de organizadores prévios como âncoras para o novo conceito a ser aprendido (futuro subsunçor). Moreira nos ensina que *"o uso de organizadores prévios é uma estratégia proposta por Ausubel para, deliberadamente, manipular a estrutura cognitiva, a fim de facilitar a aprendizagem significativa"* (Moreira, 1999, p.155).

Os organizadores prévios não precisam ser conceitos diretamente relacionados ao conteúdo técnico da disciplina, eles funcionam como um ponto de partida para que o aluno consiga associar conceitos já conhecidos por ele aos novos conceitos que devem ser aprendidos. Moreira (1999), baseando-se nos ensinamentos de Ausubel afirma:

> Segundo o próprio Ausubel, no entanto, a principal função do organizador prévio é a de servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber, a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa, ou seja, organizadores prévios são úteis para facilitar a aprendizagem na medida em que funcionam como "pontes cognitivas" (Moreira, 1999 , p. 155).

Observe o seguinte exemplo:

Um aluno do 7º ano irá aprender a respeito de raiz quadrada. O professor pode utilizar o conceito de potenciação como âncora, ou ainda o conceito de áreas de quadrado para fazer uma associação com a definição de raiz quadrada. O fato é que dar significado ao que se aprende é de suma importância para o processo de aprendizado. Talvez, você esteja se fazendo a seguinte pergunta: "E se o aluno não possuir qualquer conceito prévio em sua estrutura cognitiva?"

Respondemos esta pergunta na discussão acima, o professor deverá ser criativo o suficiente para usar de organizadores prévios ou outros conceitos subsunçores para conseguir expandir a estrutura cognitiva do aluno. Por esse e outros motivos citamos a criatividade como uma das habilidades inerentes ao professor de Matemática.

Os organizadores prévios, vão sendo descartados conforme a estrutura cognitiva se expande e o aprendiz desenvolve subsunçores.

Para que ocorra uma aprendizagem significativa deve-se haver duas condições muito importantes. A primeira condição é que o material a ser aprendido seja relacionável, ou seja, deve ser possível conectar o material a ser aprendido com a estrutura cognitiva do aprendiz. Para satisfazer esta condição o aprendiz deve possuir subsunçores em sua estrutura cognitiva e o professor deve ser criativo o suficiente para criar organizadores prévios par esse material.

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que ideias simbolicamente expressas sejam relacionadas de maneira substantiva(não-literal) e não arbitrária ao que o aprendiz já sabe, ou seja, a algum aspecto de sua estrutura cognitiva especificamente relevante para a aprendizagem dessas ideias. Este aspecto especificamente relevante pode

> ser, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito, uma proposição, já significativo. (Ausubel, 1978, p.41 apud, Moreira 1999, p. 155)

A segunda condição é que o aprendiz deve apresentar disposição para relacionar o novo conceito a sua estrutura cognitiva, ou seja, ele não pode ter a intenção de simplesmente mecanizar conceitos. Ausubel afirma que "*a aprendizagem significativa pressupõe que o aluno manifeste uma disposição para a aprendizagem significativa." (Ausubel et al. p.34, 1980)* .

Há 3 diferentes tipos de aprendizagem significativa que são distinguidos por Ausubel: *representacional, de conceitos e proposicional.*

- *Aprendizagem representacional*: De acordo com Ausubel é o tipo mais básico de aprendizagem significativa, sendo uma condição para que os outros tipos ocorram. Diz respeito a atribuição de significados à símbolos (tipicamente palavras). Por exemplo, após ver algumas vezes dois objetos e vivenciar situações concretas onde haja dois objetos, o aprendiz consegue, ao ver o símbolo "2", conectar a uma determina quantidade de objetos, por isso o nome representacional, o símbolo 2 representa uma determinada quantidade.
- *Aprendizagem de conceitos:* Semelhante a forma representacional, porém, a formação do conceito advém de experiências com o conceito a ser aprendido e após algumas experiências o aprendiz assimila os conceitos, ou seja, amplia seu vocabulário. Por exemplo: Ao conversar com outras pessoas ele escuta coisas do tipo "você tem dois anos", "faz com o dedo quantos anos tem" ou ainda, "você pode comer dois biscoitos", assim, o "dois" adquire , para ele significado.
- *Aprendizagem proposicional:* O objetivo neste tipo de aprendizagem é aprender o significado de ideias em forma de proposição, combinando diversas palavras produzindo esta proposição em questão.

A teoria de aprendizagem significativa de Ausubel é bastante interessante e bem fundada; para o nosso trabalho, é necessário e suficiente sabermos os conceitos que foram explicitados acima. Por ser uma teoria bastante interessante, deixamos como sugestão a leitura dos livros que tratam desta teoria que foram utilizados na bibliografia deste trabalho.

Se pudéssemos resumir a teoria da aprendizagem significativa em uma frase, podemos mencionar uma frase de Ausubel na qual ele diz que: "Se eu tivesse que reduzir toda a pscicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator singular mais importante que influencia na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos" .

Capítulo 4: Sugestões para o ensino dos números inteiros

Neste capítulo iremos sugerir abordagens que envolvam a aplicação do conhecimento de conteúdo no horizonte e da aprendizagem significativa para o ensino de matemática, e predominantemente no que diz respeito aos números inteiros. A intenção deste capítulo é ser totalmente prático, podendo ser aplicado assim que acabar de ser lido. Esperamos ainda que, além da praticidade, este capítulo, bem como todo o trabalho, seja fonte de inspiração para outras ideias criativas além das que serão vistas aqui. Gostaríamos de salientar ainda que este capítulo foi construído para ser um diálogo entre o autor e o leitor.

A matemática é uma disciplina que, ao longo do ensino básico está totalmente interligada do 6º ano do ensino fundamental até a 3ª série do ensino médio, dito isso, é possível “anteciparmos” determinados conteúdos nas séries iniciais, para isso o professor precisa dominar o currículo (conhecimento de conteúdo no horizonte) e feito isso, ao chegar nas séries posteriores utilizar o que fora dito anteriormente como subsunçor (Aprendizagem significativa) , facilitando assim o processo de aprendizagem do aluno.

É comum que nas séries iniciais (ensino fundamental I ou II) os alunos façam perguntas a respeito de conteúdos que serão vistos posteriormente, esta é uma ótima oportunidade para gerar engajamento e mostrar aos alunos que mesmo sendo de uma série antes, são capazes de entender determinados conteúdos, por nossa experiência profissional e empírica percebemos que os alunos ficam bastante satisfeitos com isso. Contrário a isso, alguns professores dessas séries deixam essa oportunidade passar, afirmando que o conteúdo é muito difícil para que aprendam naquele momento ou ainda afirmando que determinadas situações são impossíveis, causando no aluno enorme frustração ao chegarem nas séries posteriores e se depararem com o suposto inexistente.

Abordando raízes de números negativos

Uma pergunta bastante frequente entre os alunos é a respeito das raízes de números negativos, excelente oportunidade para comentar sobre números complexos. Em uma turma de 7º ou 8º ano, quando o professor de matemática se aprofunda um pouco mais no assunto radiciação e os alunos já sabem da existência dos números negativos, é comum que os alunos se deparem com a seguinte afirmação: “não existe raiz quadrada de número negativo” .

Abordando o assunto através desse recorte superficial, o professor está mentindo para o aluno que, posteriormente, irá descobrir a mentira e se frustrar, considerando que em matemática primeiro aprende-se errado para depois aprender certo. O ideal é comentar com os alunos que essas raízes “não existem nos conjuntos dos números reais” e fazendo com que os alunos fiquem curiosos e perguntem onde elas existem. Eis que surge o momento de escolher entre duas respostas:

Resposta 1: Vocês irão ver isso no ensino médio.
Dando essa resposta, o professor perde uma excelente oportunidade de iniciar um rico debate acerca de números complexos, mesmo que de maneira superficial. Não subestime a capacidade dos alunos de compreenderem conceitos ou ideias, por mais que eles aparentem ser desinteressados, quando algo novo aparece eles ficam no mínimo, curiosos. O professor que domina o conteúdo poderia facilmente envolver os alunos utilizando frases como: “Olha, vamos aprender aqui, um conteúdo do ensino médio, uau!”. Repare que está sendo dita a mesma coisa, porém valorizando a capacidade do aluno de aprender.

Resposta 2: Ótima pergunta, vamos explorar um pouco esses números.
O professor seguro de sua capacidade e com domínio do currículo, aproveita esta pergunta para explorar o universo dos números complexos, certamente de maneira adaptada, com uma linguagem que os alunos de ensino fundamental entendam. Temos aqui a aplicação do conhecimento de conteúdo no horizonte, para que posteriormente, ao chegar no ensino médio, o aluno possua alguma âncora na sua estrutura cognitiva que o permita conectar o conteúdo de números complexos.

Há duas abordagens bastante interessantes como citamos acima, a primeira é valorizar a capacidade do aluno de aprender, afirmando que irão ver um conteúdo de ensino médio mas que como professor, acredita na capacidade deles. Em seguida, é interessante deixar que eles debatam entre si e como professor, colocar-se na função de mediador para depois explicitar alguns pontos importantes.

- É pertinente comenta que existe em um “lugar” chamado conjunto dos números complexos.
- É bastante plausível aproveitar o debate para reforçar a importância do plano cartesiano.
- É interessante também a abordagem histórica, traçando um paralelo dos números complexos com os números negativos e a rejeição histórica ao redor de ambos.

Perceba que utilizamos uma ferramenta de ensino/aprendizagem a qual conectamos o conhecimento do conteúdo no horizonte com a aprendizagem significativa. Tais conceitos podem ser usados separadamente, mas são muito poderosos quando usados juntos, possuem a habilidade de conectar o passado ao futuro.

O mostramos no exemplo acima pode ser feito com diversos conteúdos, basta que o profissional tenha domínio do conteúdo de maneira ampla não verticalizada e que tenha criatividade para gerar situações as quais vão resultar naturalmente em possíveis questionamentos.
Vejamos a seguir um exemplo de mais uma aplicação de conhecimento de conteúdo no horizonte e aprendizagem significativa.

Onde está o expoente?

No 8º ou 9º ano do ensino fundamental, quando os alunos se aprofundam em potenciação e radiciação, o professor pode aproveitar a oportunidade e instiga-los de modo a introduzir o básico sobre logaritmos. Assim, ao chegarem no ensino médio, já vão possuir alguma informação sobre aquele assunto em sua estrutura cognitiva, o que pode diminuir a barreira que os alunos possuem ao se depararem com logaritmo. Mas como fazer com que surja de maneira natural a partir dos alunos um questionamento que envolva logaritmos?
A maneira com que o professor apresenta o conteúdo faz toda a diferença neste momento. Veja uma sugestão de abordagem para esse assunto:
Note que esta sugestão é dada para um segundo momento de aprendizado em potenciação e radiciação, o aluno já sabe como resolver tais operações. A seguir, a abordagem sugerida.
O professor pode falar: “Nas potenciações temos a base e expoente e queremos determinar o resultado da potenciação.”
“A pergunta que fazemos é: Qual resultado temos ao colocarmos o expoente 3 na base 2?”
Exemplo: $2^3 = ?$ *, portanto* $? = 8$*.*
Continuando a fala: “Na radiciação temos o expoente e o resultado da potência e queremos determinar a base”
Exemplo: $\sqrt[3]{8} = ?$
“A pergunta que fazemos é: Qual a base que precisamos abaixo do expoente 3 para obtermos resultado 8 ? Repare que podemos reescrever a radiciação em forma de potência, vejam”
$?^3 = 8$, logo, $? = 2$.
E então o professor continua e conduz os alunos: “Vejam bem, na potenciação nós temos a base, o expoente e queremos o resultado. Na radiciação nós temos o expoente, o resultado e queremos a base. O que está faltando?”
Neste momento, pelo menos alguns alunos irão responder que está faltando querer descobrir o expoente, e é neste momento que o professor comenta que existe esta pergunta também. E a maneira de escrever também é diferente, mas assim como a radiciação pode ser transformada em potenciação.

Exemplo: $\log_2 8$ = ?

Então o professor continua a fala: “ Este símbolo significa que temos o resultado 8 e a base 2 , e queremos saber qual expoente devemos colocar nesta base para obter este resultado. Vamos transformar para potência”

$2^? = 8$ portanto temos que ? = 3.

Em seguida comenta-se com os alunos que este assunto é visto no ensino médio. Com algumas repetições simples eles irão entender. Com isso usamos o conceito e conhecimento de conteúdo no horizonte, criando na estrutura cognitiva do aluno um gatilho para logaritmos, gatilho esse que será ativado no ensino médio através da técnica de aprendizagem significativa, e assim conectamos as duas técnicas.

Deixaremos aqui uma sugestão de atividade lúdica para potenciação, radiciação e opcionalmente logaritmo que já foi testada por nós.

Coloca-se para os alunos três peças numéricas, por exemplo: 2, 3, 8 e eles deverão organizá-las de modo que a conta dê certo. Os números deverão ser alocados onde estão as letras e o jogo é dividido em 3 fases:

1ª fase: easy

$$A^B = C$$

2ª fase: medium

$$\sqrt[D]{E} = F$$

3ª fase: Hard

$$\log_G H = \mathrm{I}$$

Podemos ainda aproveitar esse jogo simples para trabalhar assuntos como:

- O que é uma incógnita;
- Valor numérico;
- Análise combinatória e noções de probabilidade;

Este último tópico podemos trabalhar questionando aos alunos de quantos modos eles podem organizar os 3 números nos locais permitidos em cada fase, em seguida podemos perguntar a probabilidade de um aluno que chutou a organização fazê-la de modo correto.

Note que esta atividade por nós elaborada é carregada de aplicações úteis e deixas para aplicarmos o conhecimento de conteúdo no horizonte como alicerce para a posterior aplicação da aprendizagem significativa.

Números inteiros

A seguir daremos sugestões embasadas nas teorias de conhecimento de conteúdo no horizonte e aprendizagem significativa para a abordagem dos números inteiros. Essas sugestões se iniciam para professores de 6º ano, ou até mesmo séries anteriores dependendo da turma, dos alunos e da habilidade do profissional. Daremos a seguir, algumas sugestões para a construção dos números inteiros, de alguns conceitos importante e de como realizar as operações neste conjunto.

1ª sugestão: Construção da reta numérica. (utilização do conhecimento de conteúdo no horizonte)

Nas séries iniciais, ao ensinar sobre números naturais, evite colocar o zero no início da reta numérica, isso faz com que os alunos assumam que os números se iniciam ali mesmo que o professor não comente isso.

Colocando o zero deslocado para a direita e a partir daí iniciando a contagem dos números naturais, os alunos provavelmente se questionarão o motivo de ter algo antes do zero desenhado. A esquerda do zero pode-se desenhar uma nuvem, uma floresta, deixar somente a reta, desenhar um cadeado fechado sinalizando algo bloqueado, evidenciando que há alguma coisa antes do zero fazendo com que o aluno pergunte: "Professor, o que tem antes do zero?" Nosso objetivo foi atingido. Já sabemos que não podemos perder essas oportunidades de aplicação do conhecimento de conteúdo no horizonte. Neste momento o professor repassa a pergunta para os alunos questionando-os o que eles acreditam ter ali, alguns irão responder que são os números negativos, outros não fazem ideia. É importante que os alunos façam parte desta construção, após isso o professor pode comentar que existem alguns tipos de números que estão antes do zero, dar alguns exemplos simples e afirmar que nas séries posteriores os alunos vão aprender este conteúdo com mais profundidade.

Esta primeira sugestão nos permite utilizar o conhecimento de conteúdo no horizonte como ferramenta pois ela é aplicável ao 5º ou 6º ano, séries em que os alunos não irão aprender de fato a respeito dos números negativos, mas com isso terão ciência de que existe algo antes do zero. Ao chegarem no 7º ano, o professor poderá utilizar a mesma construção e a técnica de aprendizagem significativa para conectar o conteúdo de números inteiros com esta experiência proporcionada nas séries anteriores. É interessante que no 7º ano o professor comece com uma construção semelhante a anterior para ancorar o novo conhecimento no que os alunos já possuem (subsunçores). Uma maneira muito interessante de se começar a aula é relembrar aos alunos que este conteúdo fora visto superficialmente na série anterior, boa parte irá se recordar.

2ª sugestão: Construa a parte negativa dos inteiros por simetria.

Construindo a reta como sugerido anteriormente, é interessante neste momento usar a ideia de um espelho, objeto de funcionamento já conhecido pelos alunos. Comente com a turma: "imaginem que colocamos um espelho no zero, como a imagem do espelho irá aparecer? "Peça para que alguns alunos desenhem no quadro, ele irão desenhar os números de maneira invertida. O professor então introduz o que é oposto/simétrico mas comenta que não são usados os números invertidos, e sim o sinal de menos.

Nota: Sabemos que a construção formal não é feita dessa forma, é importante que isso também fique claro para os alunos, explique para eles que você está dando uma ideia de forma concreta para que eles entendam o que é simétrico.

Para este momento é válido também comentarmos que o zero adquiriu um papel de ponto de referência; ao andarmos para a direita do zero representamos com números positivo, ao andarmos para a esquerda estamos indo para o lado do simétrico, para "dentro" do espelho, portanto representamos o número com o sinal de " - " na frente. Com isso damos a ideia de orientação aos números.

> Neste contexto o 0 (zero) determina o referencial que distingue os números negativos dos números positivos. Dessa forma, o 0 (zero) adquire um novo estatuto e deixa de representar apenas a ausência de quantidade para também estar associado à ideia de referencial para a orientação que determina a distinção entre números positivos e números negativos. (Ripoll et al, 2016, p.69)

É oportuno comentarmos ainda a respeito do módulo de um número. Mostrar aos alunos que a distância do -3 ao zero é igual a distância do 3 ao zero. Para isso basta que utilizem a régua. É válido comentar com os alunos que sempre que lerem "módulo de um número" a tradução feita deve ser "distância deste número até o zero". Para concluir esta etapa, reforçamos que o módulo de um número é sempre um número positivo por se tratar de uma distância. Cabe, neste momento, usarmos o sinônimo valor absoluto de um número.

Na segunda sugestão comentamos a respeito da construção dos números inteiros a partir de um espelho ou do conceito de distância, ambas situações são de conhecimento do aluno e não estão diretamente relacionados ao conteúdo matemático, portanto funcionaram como organizadores prévios e posteriormente foram formalizados e substituídos por subsunçores.

Dentro dessa sugestão podemos comparar os números inteiros. A comparação entre números positivos é bem simples e já conhecida pelos alunos, o que nos leva a crer que é mais interessante focar na comparação entre números negativos. É fácil mostrar, pela reta numérica, que qualquer número negativo é menor que qualquer positivo. Sendo assim iremos abordar a comparação de números negativos com mais cautela. Nesse ponto é válido comentar que, como estamos no “mundo dos números negativos” e a construção foi feita por um espelho, os fatos acontecem de maneira invertida, ou seja, se na parte positiva o número 10 é maior que o 5, na parte negativa, o número -5 é maior que -10. De fato, no universo dos números negativos o número de maior módulo é menor.

3ª sugestão: Ressignificando o “sinal de menos”

O “sinal de menos” é um símbolo conhecido dos alunos, porém, o aprendizado de números inteiros é o momento em que o “sinal de menos” passa por um momento de ressignificação.

Nós entendemos que é muito importante dedicar parte da aula para deixar claro aos alunos os novos significados do já conhecido “sinal de menos”. Não devemos naturalizar essa ressignificação por parte dos alunos.

Sugerimos que os professores deixem claro que o “sinal de menos” (-) possui 3 significados:

- Está associado a subtração
- Identificação de um número negativo
- Determinação de simétrico

Dar esta noção ao aluno antes de iniciar o ensino das operações é importantíssimo e para isso o professor deve dominar o currículo e prever os possíveis questionamentos dos alunos, ou seja, estamos aplicando o conhecimento de conteúdo no horizonte.

> Ainda no contexto da abordagem dos inteiros, o sinal “ $-$“ fica associado à operação de determinar o oposto. Assim, na expressão $-(-1)$, o primeiro sinal “$-$" não indica um número negativo, mas o comando “determinar o oposto de” .Essa determinação exige um referencial, o zero. “$-(-1)$" é o oposto do número negativo (-1) ,que é, por definição, o número positivo + 1 (ou, simplesmente, 1). Da mesma forma, o oposto do número positivo + 1, indicado por $-(+1)$ é o número negativo -1. (Ripoll et al, 2016, p.73)

Neste momento é interessante utilizarmos a reta numérica, que foi mostrada inicialmente, para ilustrar geometricamente os 3 significados do “sinal de menos”.

O leitor deve ter em mente que cada aluno irá assimilar o conteúdo de maneira particular, por isso explique de maneiras diferentes e deixe claro que cada um poderá entender melhor em uma das explicações fornecidas.

Nesta parte cabe ainda exemplificar diversas situações cotidianas nas quais os números inteiros se tornam essenciais como: Temperaturas abaixo de zero, saldo de gols, pontuação em um determinado jogo, profundidade(ou altitude em relação ao nível do mar), alguns prédios que possuem andares negativos, saldo bancário, dentre outros.

4ª sugestão: Faça analogias simples (utilização de organizadores prévios)

Nesta sugestão iremos abordar as operações entre números inteiros. Antes de apresentá-las formalmente ou de enunciar qualquer regra, iremos nos valer de diversos organizadores prévios para que estes auxiliem na formação dos subsunçores. Futuramente os alunos vão estar habilitados a ancorar um novo conteúdo no antigo, expandindo sua estrutura cognitiva.

Gostaríamos de deixar claro que operações trazidas dos números naturais como a soma de números positivos ou subtração de um número maior por um número menor, não serão abordadas aqui pois estas estão incorporadas a estrutura pedagógica dos alunos, corroborando com isso citamos Ripoll et al: “ [...] Eles já sabem que, por exemplo, ‘7 - 5 = 2’. Isso não muda! No entanto é necessário que ampliem o conceito de subtração para alcançar os números inteiros.” (Ripoll et al, 2016, p.76).

Soma entre números inteiros.

Como foi dito, não abordaremos neste tópico a soma entre números positivos, acreditamos que esta os alunos já dominam por conta das operações já vistas no conjunto dos naturais, afirmamos isso apoiados em Ripoll *et al*.

> A adição de números inteiros preserva as interpretações de juntar e de acrescentar. Neste sentido, nada muda em relação aos números positivos. Entretanto, diferentemente do que ocorria com os números naturais, o resultado de uma adição com inteiros nem sempre é um número maior que as parcelas, em virtude do atributo de orientação incorporado. (Ripoll et al, 2016, p. 86)

Deixaremos duas propostas de analogias que funcionam com organizadores prévios para a aprendizagem de soma de números inteiros e uma terceira proposta utilizando o conceito de módulo como subsunçor.

A primeira analogia elaborada por nós, que é bastante interessante, e funciona como organizador prévio, é a da brincadeira do cabo de guerra. O professor inicia a aula contando alguma história a respeito de cabo de guerra, e sugestiona os alunos a imaginarem duas equipes. A positiva e a negativa. A mesma quantidade de participantes nas equipes, faz com que a brincadeira dê empate, sendo mais específico: se temos um integrante na equipe positiva (+ 1) e um na equipe negativa (- 1) o resultado é empate, ou seja, dá zero. + 1 + (- 1) = 0.

Exemplo 1: Vamos calcular 4 + (- 4)

Situação proposta: 4 pessoas na equipe positiva e 4 pessoas na equipe negativa.

Reescrevendo isso matematicamente: +4 + (- 4)

Chamaremos de empate o fato de dar zero e deixaremos claro que para saber o resultado da brincadeira faremos uma adição de forças onde o mais forte ganha.
Portanto + 4 + (- 4) = 0

Exemplo 2: Vamos calcular 10 + (- 15)

Situação proposta será: 10 integrantes na equipe positiva e 15 na equipe negativa, somaremos as forças.
Matematicamente temos: +10 + (- 15)
Note que a equipe negativa possui 5 integrantes a mais, logo é mais forte e será a campeã, ser a campeã é um código para dizermos que o sinal do resultado será negativo. O valor numérico vem da diferença entre a quantidade de integrantes. Assim o resultado da conta é: 10 + (- 15) = - 5

Mais um exemplo de soma de números inteiros, agora com dois números negativos.

Exemplo 3: Vamos resolver a operação - 4 + (- 10)

A situação proposta será a seguinte: A equipe negativa possui 4 integrantes e logo em seguida chegaram mais 10 integrantes.
Matematicamente nós temos: - 4 + (- 10)
Se estão todos na mesma equipe, a quantidade de integrantes aumenta, portanto teremos 14 integrantes, e são da equipe negativa, logo o resultado da operação é - 14.

Outra analogia que serve como organizador prévio é a situação dos líquidos mágicos. Conte aos alunos uma história de dois líquidos que ao se misturarem em mesma quantidade evaporam, são os líquidos mais e menos.
Por exemplo, 1 litro do liquido mais (+ 1) se juntando com 1 litro do liquido menos (- 1) evapora e restam 0 Litros.
Matematicamente: +1 + (- 1) = 0.
A partir daí peça que os alunos inventem situações. É interessante que eles participem do processo.
Vamos utilizar dois exemplos para melhor ilustrar a situação.

Exemplo 1: Vamos calcular +10 + (- 25)

Situação: Um recipiente contem 10L do líquido + e adicionamos 25L do líquido - .
Matematicamente temos: +10 + (- 25)
Os 10L positivos evaporam com 10L negativos, sobrando 15 litros do tipo negativo, ou seja, sobrando - 15. Portanto 10 + (- 25) = -15.

Após estas duas propostas pedagógicas utilizando organizadores prévios, mostraremos uma terceira proposta para o ensino da soma dos números inteiros. Nesta vamos utilizar o conceito de módulo como subsunçor, tornando o processo de aprendizagem da soma sutilmente mais formal

Para exemplificar, vamos calcular 40 + (- 50) utilizando como âncora o conceito de módulo.

1. Determinamos junto aos alunos o número de maior módulo (seria o mais forte na linguagem do cabo de guerra), neste caso é o 50. Este número é responsável por fornecer o sinal ao resultado da operação.
2. Como os sinais são diferentes, faremos a diferença entre os módulos, ou seja, 50 - 40 = 10.

Assim, temos que o resultado será - 10.

Esta terceira proposta ajuda a formalização do processo, substituímos os organizadores prévios por subsunçores, como sugerimos no capítulo 3.

Além das estratégias pedagógicas mostradas para a adição de números inteiros, o professor deve utilizar a criatividade e elaborar outras estratégias, tendo a sensibilidade de perceber qual é a mais adequada ao seu público. Veremos a seguir uma sugestão de Ripoll et al, 2016, p 87:

> Algumas estratégias pedagógicas específicas podem amparar o ensino de adição. Uma possibilidade bastante conhecida envolve coleções de fichas (ou de algo semelhante), diferenciadas pela cor ou de alguma outra forma, por exemplo os sinais " - " e " + "(como propõe Malaguti & Baldin (Malagutti et al., 2012)). Esse tipo de material tem como propósito representar quantidades positivas e quantidades negativas, como por exemplo, fichas azuis representando números positivos e fichas vermelhas representando números negativos.

Note que a fundamentação da estratégia das fichas é a mesma das outras duas estratégias que sugerimos. A reunião das fichas representa a soma dos números que elas representam, é importante deixar claro que duas fichas de cores diferentes unidas resulta em zero.

Vamos calcular a adição 4 + (- 7)

Utilizaremos 4 fichas azuis e 7 vermelhas, como na figura 1.

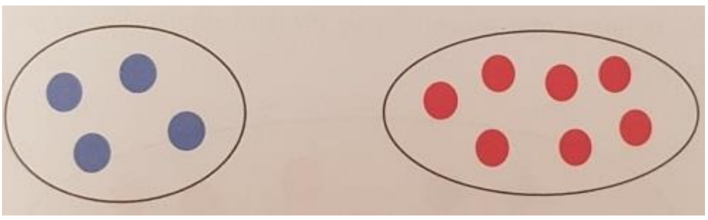


Fig 1: Figura retirada da obra de Ripoll et al, 2016, p 88

Como foi dito, a reunião das fichas representa a soma das quantidades. Além disso, quantidades iguais de fichas de cores diferentes se anulam.

Após unirmos em um mesmo conjunto as fichas azuis e as fichas vermelhas, vamos juntar pares de cores diferentes e eliminá-los como pode-se ver na figura 2.

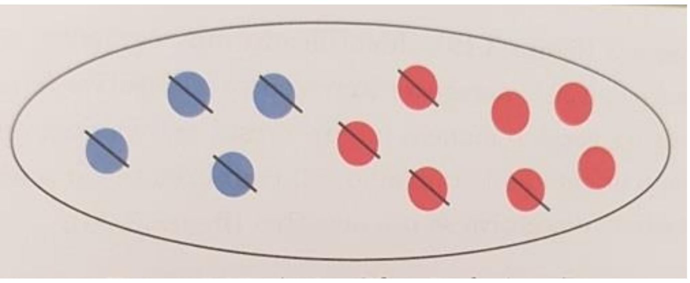


Fig 2: Figura retirada da obra de Ripoll et al, 2016, p 89

Com isso, restarão apenas 3 fichas vermelhas, portanto a resposta é -3. (figura 3)

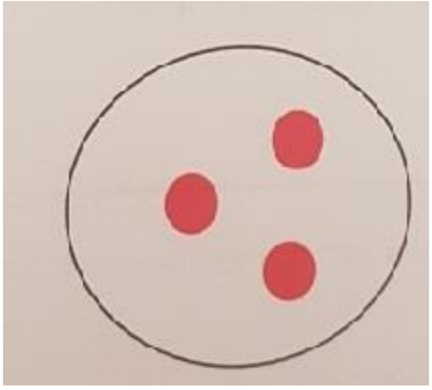


Fig 3: Figura retirada da obra de Ripoll et al, 2016, p 89

Além das estratégias pedagógicas mostradas por nós para a adição de números inteiros, o professor deve utilizar a criatividade e elaborar outras estratégias, tendo a sensibilidade de perceber qual é a mais adequada ao seu público.

Subtração entre números inteiros

Neste ponto é interessante comentar com os alunos que podemos adaptar a subtração e transformá-la em uma adição e em seguida utilizaremos as técnicas sugeridas anteriormente.

É pertinente comentar a respeito das diferentes funções do sinal de menos. O sinal de menor pode funcionar como um sinal para indicar a subtração, pode funcionar como um sinal para indicar simetria ou ainda para indicar que determinado número é negativo. O interessante é que independente da abordagem do aluno em relação a sinal de menos, o resultado da operação não se altera.

Utilizaremos o seguinte exemplo:

Vamos calcular a operação 10 - (+15).

Neste caso o número 10 e o número 15 são positivos, neste ponto já foi dito aos alunos que não há a necessidade de se colocar o sinal de + quando um número for positivo, portanto podemos reescrever a operação como 10 - 15.

Esta operação causa estranheza aos alunos pois estarão tirando do número 10 uma quantidade maior que a "permitida". Uma forma de solucionar este problema é fazer com que o sinal de " - " funcione como um sinal do número negativo " - 15" e aí nós teríamos a operação: 10 + (- 15) que já foi vista anteriormente. Logo surgirá, da parte dos alunos a pergunta:

"De onde saiu esse sinal de + ? "

Pode-se explicar que a operação original era 10 - (+ 15) e que trocar os sinais de - e + de posição não prejudica o resultado.

Outra maneira de abordar esse tipo de operação é utilizar o sinal de " - " como um orientador, ou seja, a operação 10 - 15 significa que a localização inicial é no ponto 10 e teremos que voltar (por causa do sinal de -) 15 números, o que significa que pararíamos no -5. Sendo assim, 10 - 15 = - 5.

Neste momento é interessante mostrar ao aluno que somar algo negativo é o mesmo que subtrair algo positivo, esta ideia ajuda bastante posteriormente (aplicação de conhecimento de conteúdo do horizonte).

Dando seguimento à subtração nós sugerimos que inicialmente sejam feitas operações de formatos diversos. Iniciamos com 10 - 15, faremos agora a subtração: - 20 - 50.

Perceba que a analogia dos líquidos ou a do cabo de guerra torna a operação mais concreta.

Situação proposta: "há 20L do líquido negativo, adicionando-se 50L do líquido negativo ficamos com quanto?"

Os alunos novamente irão perguntar o motivo de adicionarmos os números pois a conta é uma subtração. Temos mais uma oportunidade para explicarmos que subtrair 50 é o mesmo que somarmos o número menos 50, ou seja, - (+50) = + (- 50) .

Em outras palavras, subtrair um número é o mesmo que somar seu simétrico.

Corroborando com esta afirmação citamos Ripoll *et al*, 2016, p 89:

> "Na extensão dos naturais para os inteiros, a inclusão de inversos aditivos (ou simétricos) possibilita que toda subtração seja expressa como uma adição(com o simétrico). Por exemplo, a subtração 7 - 4 pode ser expressa como 7 + (- 4)"

Dito isso, voltemos ao problema em questão: 20L do líquido negativo: - 20

Somaremos 50L do líquido negativo: - 50

Como ambas quantias são de líquidos negativos, a quantidade de líquido negativo aumenta, o que nos permite afirmar que -20 + (-50) = -20 - 50 = - 70

O último modelo de subtração que apresentaremos é o modelo no qual subtraímos de um número negativo.

Por exemplo, vamos calcular: 40 - (- 10).

Lembre-se que é interessante interagir com os alunos. Utilize o subsunçor já plantado no aluno. Pergunte quais possíveis papeis do sinal de “ - “ e conduza para que algum aluno responda “o sinal de ‘- ‘ representa o simétrico.

Consideremos que o primeiro sinal de menos pode ser usado como sinônimo de “simétrico“ a leitura ficaria:

40 + 10 pois o simétrico de - 10 é 10.

Portanto 40 - (- 10) = 50.

Repare que nesta operação nós utilizamos o conceito de simetria como subsunçor ao invés de utilizarmos um organizador prévio como feito anteriormente, isto pois o nível de abstração começa a aumentar e os alunos começam a amadurecer.

É muito importante que o professor leitor perceba que essas ideias são concretas e funcionam como organizadores prévios para que os alunos entendam através de situações comuns como o mecanismo das operações funciona. A assimilação deste conhecimento funcionará como os subsunçores para conteúdos seguintes serem ancorados. Isto é a utilização do conhecimento de conteúdo no horizonte para preparar a estrutura cognitiva do aluno para situações posteriores. No futuro utilizaremos a aprendizagem significativa ancorando conhecimento nestes subsunçores que foram gerados.

Uma pergunta constante feita pelos alunos, Sobretudo em subtrações, é: “ Professor, este sinal é da conta ou do número?” Para sanar este tipo de dúvida é interessante nos apoiarmos nas diferentes funções do sinal de menos e no conceito que explicamos anteriormente que somar um número negativo é o mesmo que subtrair um número positivo, com isso mostramos aos alunos que o resultado da operação não depende de “onde é o sinal”, posteriormente isso será naturalizado pelos alunos e este tipo de pergunta irá ser cada vez menos frequente.

5ª sugestão: Explore o conceito de simétrico e evite frases prontas

Nesta quinta sugestão iremos abordar estratégias pedagógicas referentes à multiplicação e divisão de números inteiros. Como as regras operatórias em relação aos sinais são as mesmas, iremos nos referir somente a multiplicação. O professor pode aproveitar este momento para comentar que nas séries seguintes os alunos irão aprender sobre os números racionais, e perceberão que a divisão e a multiplicação podem ser resumidas em uma operação, apenas, isto é a utilização do conhecimento ode conteúdo no horizonte.

A ideia de multiplicação dos números naturais (somas repetidas) não faz sentido para todas as possibilidades de números inteiros. Na verdade a multiplicação no conjunto dos números inteiros nos remete uma ideia de reflexão e orientação.

> A operação de multiplicação pode ser interpretada com base na ideia de soma de parcelas iguais (isto é, 3 x 5 pode ser interpretado como 5 somado a sim mesmo 3 vezes), que emerge a noção de contagem. Esta ideia não pode ser generalizada diretamente para interpretar a multiplicação de inteiros, pois, por exemplo, não faz sentido dizer que (- 3) x (- 5) é 5 somado a sim mesmo - 3 vezes. A noção de orientação, incorporada à contagem na expansão dos números naturais para os inteiros, implica em uma ressignificação da multiplicação, que passa a ser interpretada como a composição de uma ampliação com uma reflexão. (Ripoll et al, 2016, p. 92)

Inicialmente utilizaremos a noção de ampliação dos números naturais, como subsunçor. Isso será válido para multiplicações de números inteiros (positivos ou negativos) por fatores positivos.
Para multiplicações entre números negativos usaremos o conceito de simétrico como subsunçor.

Exemplo 1: Vamos calcular 3 x (- 2)

Podemos reescrever esta operação como sendo -2 + (-2) + (-2), com isso podemos usar a teoria da soma de números inteiros para resolver este produto e assim nos resta fazer uma soma que já é conhecida. Sendo assim, 3 x (- 2) = -6 .
Ou seja, ao multiplicarmos números com sinais diferentes, basta calcularmos o produto como no conjunto dos números naturais para obtermos o módulo e o sinal será negativo, isto pois estamos ampliando um número negativo, portanto ele aumentará de módulo e continuará negativo.

Exemplo 2: Vamos calcular -3 x (- 2)

Nesta operação, diferentemente da anterior, não será possível aproveitar a noção de ampliação dos números naturais. Neste ponto utilizaremos como referência os significados do "sinal de menos" . Pode-se combinar com os alunos que o "sinal de menos" do número 3 carrega a ideia de reflexão em relação ao zero, ou seja, simétrico. E o valor absoluto 3 é o quanto ampliaremos o número inteiro -2. Com isso, inicialmente, esta operação será composta por duas etapas.

1. Ampliação do número inteiro em questão. 3 x (- 2) = -2 + (-2) + (-2) = - 6
2. Utilização do "sinal de menos" para indicar reflexão em relação ao zero, ou seja, queremos o simétrico da resposta do item 1. Assim, temos que - (- 6) é o simétrico de (- 6) que é +6 ou somente 6.

Sendo assim, podemos utilizar o "sinal de menos" de um dos números com sendo o comando "simétrico de" .

Na prática é interessante mostrarmos aos aluno que a operação - 3 x (- 2) pode ser lida como:
-[3 x (- 2)], ou seja, “ o simétrico de (-2) + (- 2) + (-2)” que é igual a - (- 6) = 6.

Após algumas soluções de operações desse e de outros tipos é uma boa ideia perguntar aos alunos se perceberam algum padrão, e provavelmente irão responder que dois sinais negativos seguidos resulta em algo positivo.

Tendo os alunos percebido os padrões existentes tem-se um momento oportuno para enunciar a regra dos sinais para multiplicação.

Regra 1: Produto de sinais diferentes resulta em um número negativo.

Regra 2: Produto de sinais iguais resulta em um número positivo.

É de suma importância ter a sensibilidade de notar que a última coisa que deve ser feita me sala de aula é a menção de qualquer regra ou algoritmo mecânico, e quando o fizer, é interessante que a percepção do padrão parta dos alunos.

A seguir deixaremos algumas sugestões de exercícios bastante interessantes para auxiliar na abordagem dos números inteiros em sala de aula.

6ª sugestão: Há exercícios além da resolução de operações

Nossa última sugestão diz respeito a alguns exercícios que podem ser aplicados em sala de aula. Antes, gostaríamos de esclarecer que a resolução de operações convencionais são bastante úteis mas não podem ser o único recurso para exercitar o conteúdo aprendido, por isso deixaremos aqui algumas propostas de exercícios.

Proposta 1: Forneça aos alunos resultados e peça-os que inventem alguma operação que tenha o resultado fornecido como resposta. O grau de dificuldade pode aumentar de acordo com as restrições feitas.

Exemplo 1:

Sem restrição: Determine uma operação que tenha como resultado o número - 5

Há diversas possibilidades de resposta.

Com restrição: Determine uma operação que tenha como resultado o número - 5 e que os dois números a serem operados possuam sinais iguais.

As possibilidades de resposta se restringem a:

(-1) + (-4);

(-2) +(-3) ;

Exemplo 2:

Determine dois números negativos que ao serem subtraídos, gere como resultado - 10.

Algumas possibilidades de resposta:

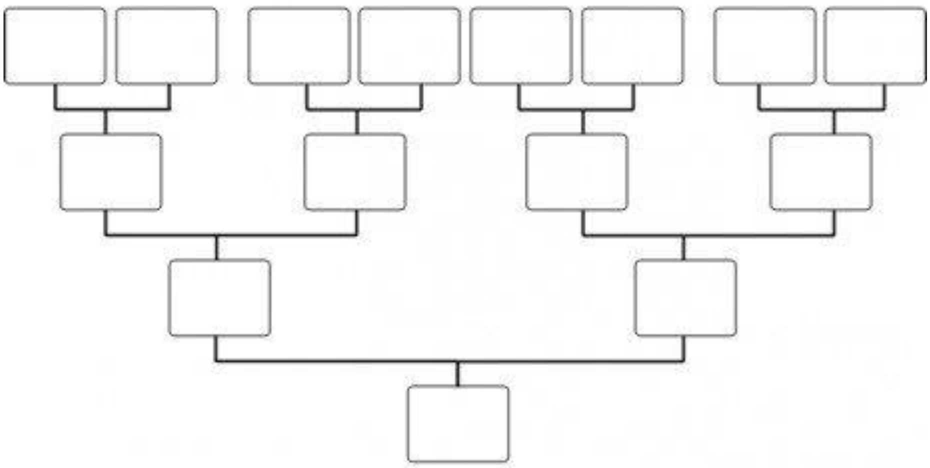
- 20 - (- 10) ;

- 45 - (- 35) ;

Proposta 2: Operando com sinais, a árvore da multiplicação.

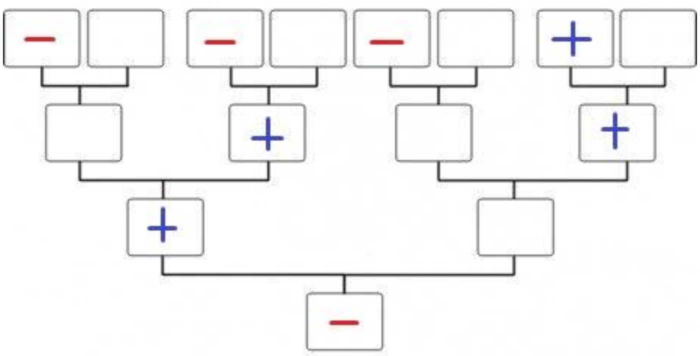
Esta atividade é indicada para que os alunos exercitem a multiplicação entre números inteiros. O fato é que a maior dificuldade dos alunos de modo geral não é na parte numérica e sim nos sinais, por isso elaboramos uma atividade na qual os alunos devem operar somente com sinais.

A estrutura remete a uma árvore genealógica como podemos ver na figura abaixo.



O professor completa alguns espaços com sinais de " + " ou " - " e os alunos devem completar o restante de modo que as operações entre os sinais estejam corretas. É importante mencionar que a operação em questão é multiplicação

Abaixo temos um exemplo de um exercício sugerido aos alunos utilizando a árvore da multiplicação.



Ao receber este exercício o aluno deverá preencher corretamente os espaços vazios com “sinais de mais” ou “sinais de menos” de modo que todas as multiplicações fiquem corretas.
O professor poderá fazer as árvores do tamanho que quiser variando o grau de dificuldade.
Nossa expectativa com este capítulo é ajudar no aprimoramento da prática pedagógica dos professores bem como estimulá-los a criar estratégias criativas para o ensino de números inteiros.

Capítulo 5: Conclusão e Sugestões de Pesquisa

É indiscutível a importância dos números inteiros ao longo da vida acadêmica dos alunos, bem como fora dela. O conteúdo de números negativos é um divisor de águas para os estudantes que o aprendem, sendo um marco no ensino fundamental e acompanhando-os por toda vida escolar. É de suma importância que os professores de matemática percebam a importância deste conteúdo e tenham todo o cuidado para que seus alunos o aprendam de maneira sólida e profunda, evitando a memorização de frases ou procedimentos sem significado.

Para dar o devido suporte ao leitor no que diz respeito aos números inteiros, sobretudo aos negativos, nos valemos de 4 pilares que são: os números negativos ao longo da história, a construção dos números inteiros, os números inteiros no PCN e estratégias pedagógicas práticas para sala de aula.

Acredito verdadeiramente que o aluno de graduação (futuro professor) deveria ter em sua formação acadêmica disciplinas que abordem de maneira prática algumas estratégias pedagógicas como as que foram apresentadas neste trabalho. Com isso o professor entraria no mercado de trabalho mais bem preparado e com menos insegurança, haja visto o respaldo teórico e prático que sua formação iria proporcionar.

Uma proposta de inserção deste conteúdo prático na graduação se dá através de disciplinas eletivas ou complementares, ou até mesmo dentro das disciplinas já existentes. Dito isso, o graduando teria em sua formação uma disciplina que o ensinaria habilidades únicas do professor de matemática, levando a profissão para um patamar que transcende o conhecimento técnico.

Para os professores já graduados é interessante que sejam oferecidos cursos (online ou presenciais) a respeito de estratégias a serem adotadas em sala de aula, como o "conhecimento de conteúdo de horizonte" e a "aprendizagem significativa".

Em ambos casos (professores graduados e alunos de licenciatura) há uma carências no que diz respeito a estratégias práticas para abordagem de assuntos específicos em sala de aula. É pensando nessa carência que pretendo dar continuidade a esse trabalho, promovendo pesquisas de campo com professores que já estão inseridos no mercado de trabalho e ministrando possíveis aulas complementares em turmas de graduação .

Bibliografia

AUSUBEL, D.P., NOVAK, J.D. e HANESIAN, H. **Psicologia educacional**. (trad. de Eva Nick *et al.)* Rio, Interamericana, 1980. 625p

Ball, D.L., & Bass, H. (2009) **With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathe- matics for Teaching to Learners' Mathematical Futures,** Michigan USA.

Ball, D.L , Thames, M.K. , Phelps G. **Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special?** Journal of Teacher Education August 15, 2007

FERREIRA, Jamil. **A construção dos números**, 3ª edição, 2013. Coleção textos universitários.

Fiorntini, D. , Oliveira , A.T.C.C. **O Lugar das Matemáticas na Licenciatura em Matemática: que matemáticas e que práticas formativas? ,** *Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 917-938, dez. 2013*

JESUS, Marcos A. S. de. **Jogos na educação matemática:** análise de uma proposta para a 5ª Série do ensino fundamental**.** 1999. Dissertação de Mestrado em Psicologia da Educação Matemática. Universidade Campinas. Campinas

Lisboa, M. L. C. **Produto de números negativos: identificando um obstáculo.** Curitiba (PR) , abr. 2013

Moreira, M.A. **Teorias da aprendizagem**, 1ª edição, EPU, 1999. 195p

Moreira P.C . ***3+1 e suas (In)Variantes (Reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na Licenciatura em Matemática*),** B*olema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1137-1150, dez. 2012*

Moreira P.C , Ferreira, A.C **O Lugar da Matemática na Licenciatura em Matemática**, *Bolema, Rio Claro (SP), v. 27, n. 47, p. 981-1005, dez. 2013*

Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília : MEC / SEF, 1998. 148 p.

Ripoll, C., Rangel, L. Giraldo, V. **Livro do Professor de Matemática da Educação Básica - Volume 2 - Números Inteiros,** 1ª edição, SBM, 2016. 120p

Shulman, S. L **. Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching ,** American Educational Research Association, Educational Researcher, Vol. 15, No. 2 (Feb., 1986), pp. 4-14

Roque, T., Pitombeira J. B **Tópicos de História da Matemática,** 1ª Edição, SBM, 2012, 269p.