UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALAN ALCEU LEACHENSKI

BINÔMIO DE NEWTON COM EXPOENTE NEGATIVO E FRACIONÁRIO

PONTA GROSSA
2017

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE PONTA GROSSA
SETOR DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

ALAN ALCEU LEACHENSKI

BINÔMIO DE NEWTON COM EXPOENTE NEGATIVO E FRACIONÁRIO

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática. Setor de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Estadual de Ponta Grossa.

Orientador: Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas

PONTA GROSSA
2017

Ficha Catalográfica
Elaborada pelo Setor de Tratamento da Informação BICEN/UEPG

Leachenski, Alan Alceu

L434 Binômio de newton com expoente negativo e fracionário/ Alan Alceu Leachenski. Ponta Grossa, 2017.
55f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - Área de Concentração: Matemática), Universidade Estadual de Ponta Grossa.
Orientador: Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas.

1.Binômio de Newton. 2.Expoentes negativos e fracionários. 3.Demonstra ção algébrica. I.Chagas, Jocemar de Quadros. II. Universidade Estadual de Ponta Grossa. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional. III. T.

CDD: 512.1

TERMO DE APROVAÇÃO

Alan Alceu Leachenski

"BINÔMIO DE NEWTON COM EXPOENTE NEGATIVO E FRACIONÁRIO"

Dissertação aprovada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Estadual de Ponta Grossa, pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. Jocemar de Quadros Chagas
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

juliana Sartori Ziebell

Prof. Dra. Juliana Sartori Ziebell
Departamento de Matemática Pura e Aplicada, UFRGS/RS

Prof. Dr. Marciano Pereira
Departamento de Matemática e Estatística, UEPG/PR

Dedicatória

À mulher da minha vida Daiane pelo apoio incondicional em todos os momentos, principalmente nos de incerteza, à minha pequena Alane minha alegria. Sem vocês nenhuma conquista valeria a pena.

Aos meus pais Alceu e Rosane a minha total admiração. Aqui cito uma frase certamente não de sua autoria mas dita por meu pai no inverno de 2008: "uma caneta é bem mais leve que uma marreta", quando contei-lhe que não iria prosseguir com os estudos. Certamente sem essa frase, não escreveria as seguintes.

Agradecimentos

Ao Prof. Jocemar, pela dedicação, amizade e grande desprendimento em ajudar, o meu reconhecimento e admiração pela sua serenidade, e principalmente pela oportunidade de ser seu orientando.

Aos professores membros da banca, pelas considerações e auxílio na melhoria do trabalho. Aos professores que participaram de forma direta ou indireta desta etapa de minha formação. À Capes, pela concessão de suporte financeiro.

Resumo

A discussão realizada neste trabalho gira em torno do desenvolvimento do Binômio de Newton. Porém, não estamos interessados em explorar o desenvolvimento somente para expoentes inteiros positivos, como normalmente é feito no âmbito do Ensino Médio, onde com o auxílio de técnicas de contagem, os alunos aprendem a utilizar um dispositivo prático. Tal conteúdo é geralmente introduzido sem nenhuma demonstração, pois a demonstração para expoentes naturais, atribuída a Pascal, necessita de conhecimentos em nível mais elevado de ensino. Ao buscarmos uma demonstração puramente algébrica, que fosse válida também para expoentes negativos e fracionários, e possível de ser entendida por alunos do ensino médio, encontramos uma demonstração proposta por Euler, que apresentamos ao final do texto. Como o desenvolvimento do método binomial não se deu exclusivamente para expoentes naturais, nem para outro conjunto numérico previamente fixado, acreditamos que uma abordagem que concilie a apresentação da demonstração de Euler com uma forma adequada de abordar o assunto seria viável de ser apresentada em uma sala de aula do Ensino Médio, permitindo o ensino e a aplicação do desenvolvimento binomial para expoentes em um conjunto de valores (racionais) relativamente maior que o trabalhado hoje.

Palavras-chave: Binômio de Newton; Expoentes negativos e fracionários; Demonstração algébrica.

Abstract

The discussion in this work revolves around the binomial expansion. We are not interested in exploring the expansion only for positive integer exponents, as is in the usual scope of a Secondary School, where with the aid of counting techniques, students learn a practical device for computations. Such content is usually introduced without any demonstration, since the demonstration for natural exponents, attributed to Pascal, requires knowledge at the highest level of teaching. When we look for a purely algebraic demonstration that is valid also for negative and rational exponents and that can be understood by students, we find a demonstration proposed by Euler, which we present at the end of the text. For, as of its origins, the binomial expansion was not exclusively for natural exponents nor for any other previously fixed numerical set, we believe that an approach that reconciles the presentation of Euler's demonstration with an appropriate way of approaching the subject in a Secondary School could be presented so to allow the teaching and application of the binomial expansion for exponents in a set of values (rationals) relatively larger than the current.

Keywords: Binomial expansion; Negative and rational exponents; Algebraic demonstration.

Sumário

Introdução

Quem passou pelo ensino médio e não dedicou um tempo razoável ao trabalho com binômio de Newton?

Binômio de Newton. O belo e simplificado modelo que permite desenvolver uma potência de uma soma algébrica de dois termos como um polinômio em sua forma canônica. E que geralmente (se não na totalidade das vezes) é apresentado utilizando como expoente um número n natural. Certamente não seria nada fácil encontrar em solo brasileiro um contraexemplo a isso, ou seja, encontrar professores ensinando o desenvolvimento do Binômio de Newton utilizando um expoente não natural.

Fomos motivados inicialmente por uma frase encontrada em [18], onde o autor, após apresentar o desenvolvimento do Binômio de Newton com expoentes naturais, amplia a exposição a expoentes negativos e fracionários, citando que tal demonstração era dispensável a um curso da época equivalente ao atual ensino médio:

> Esta extensão é demonstrável, mas não há interesse em fazer as demonstrações para não aumentar muito esta obra com exposições dispensáveis num curso comum.

Será que, à época que o autor escreveu a obra [18], foi este o único empecilho para não estar presente tal demonstração no trabalho? Não temos como assumir com total confiança esta afirmação, mas se foi, podemos concluir que tal demonstração seria totalmente aceitável em um curso comum por volta de 1950. E, quando chegamos a tal afirmação, são muitas as perguntas que surgem em nossa mente. A mais questionadora, que fez o trabalho avançar, é: *por que tal conteúdo não é cobrado no ensino médio da mesma maneira que parece já ter sido cobrado?*

Menos de 70 anos se passaram desde a publicação do livro [18] pelo Coronel Sinésio de Farias, e por qual motivo (razão, circunstância) atualmente não é cobrado mais tal conteúdo? Seria porque o grau de dificuldade, quando comparado com o do desenvolvimento do binômio de Newton com expoentes naturais, tem aumento irrisório, não se fazendo necessário falar disso? Ou a impossibilidade de utilizar combinações para determinar o termo geral (as quais não fazem grande falta) justificaria não abordar este conteúdo? Ou algum outro pequeno pseudo-obstáculo? Não vemos um bom motivo para este conteúdo não ser ensinado. Acreditamos que poderia (e deveria) ser ensinado atualmente a alunos do ensino médio, já que na Diretriz Curricular do Estado do Paraná para a área de Matemática [13] consta a seguinte (e única) citação ao conteúdo Binômio de Newton:

> Para o trabalho com o Conteúdo Estruturante Tratamento da Informação, o aluno do Ensino Médio deve dominar os conceitos do conteúdo binômio de Newton, pré-requisito também para a compreensão do conjunto de articulações que se estabelecem entre análise combinatória, estatística e probabilidade. As propriedades do binômio de Newton são ricas em agrupamentos, disposição de coeficientes em linhas e colunas e ideia de conjuntos e subconjuntos. Tanto o teorema das colunas como o teorema das diagonais trazem implícito o argumento binomial e o argumento combinatório, o que possibilita articular esses conceitos com os presentes em outros conteúdos. No cálculo de probabilidades, por exemplo, usa-se distribuição binomial quando o experimento constitui uma sequência de ensaios ou tentativas independentes.

Não visualizamos uma restrição aceitável que justifique este conteúdo ser apresentado apenas sob o ponto de vista dos expoentes naturais, já que o resultado é válido para qualquer expoente (incluindo números irracionais ou complexos, o que, isso sim, tornaria o desenvolvimento um tanto difícil de manipular, se caracterizando como uma restrição aceitável para não ser apresentada aos estudantes) e admite uma demonstração algébrica. Nos perguntamos então por que essa restrição é feita ao extremo, sendo apresentada apenas a fórmula para o desenvolvimento com expoentes naturais? A forma como o conteúdo é trabalhado no ensino médio cai literalmente como uma maçã na cabeça dos alunos, pois em geral simplesmente são feitas algumas análises para alguns casos iniciais e conclui-se com uma conjectura para $n \in \mathbb{N}$, a qual os estudantes devem aprender a aplicar. Como exemplo, poderíamos citar o livro mais utilizado no ensino de matemática em nivel médio na rede nacional, segundo o PNLD, que apresenta apenas dois exercícios (ou os alunos são muito bons que conseguem tão facilmente dominar os conceitos do conteúdo binômio de Newton, como sugerido em [13], ou tem mais alguma coisa errada).

Mas esta última barreira citada não é nosso foco, a quantidade de exercícios necessários para o domínio ou não de um conteúdo é item para outra conversa. Nosso foco, neste texto, volta-se a defender que é sim possível ensinar o desenvolvimento do Binômio de Newton com expoentes negativos e fracionários no ensino médio nacional; e não somente trabalhar com a aplicação efetiva de sua expressão para abrir potências da forma $(a + b)^{-r}$ ou calcular raízes aproximadas, como também acreditamos que é possível o total entendimento de sua demonstração, visto que pode ser totalmente construída utilizando elementos algébricos.

Capítulo 1

O desenvolvimento do Binômio de Newton

O cálculo de potências do tipo $(a+b)^n$, com n natural, inicia na vida escolar de qualquer aluno ainda em nível fundamental de ensino, com n relativamente pequeno: $n = 1, 2, 3, 4...$ pois tal desenvolvimento sem o conhecimento binomial tornaria tal tarefa realmente cansativa. Para valores pequenos são estabelidas regras para algumas potências, que muitas vezes acabam sendo apenas decoradas pelos estudantes. Mesmo sem as regras, estas potências podem simplesmente ser calculadas através de multiplicações sucessivas (usando a propriedade distributiva da multiplicação), como podemos observar no desenvolvimento a seguir:

$$(a+b)^4 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$$

Efetuando as propriedades algébricas, obtemos sucessivamente as seguintes linhas:

$$(a+b)^4 = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)(a+b)$$

$$(a+b)^4 = (a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3)(a+b)$$

$$(a+b)^4 = (a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4a^2b^3 + b^4)$$

Fácil, não é? Porém, dependendo do valor $n \in \mathbb{N}$ do expoente, esse método de calcular potências pode ser muito árduo, por isso um desenvolvimento rápido e sistemático se fez necessário.

1.1 Um pouco de história

Quando buscamos na história, encontramos o primeiro resquício do desenvolvimento binomial no livro II de Euclides [7], IV: "Se um segmento de reta for cortado aleatoriamente, o quadrado sobre o segmento total é igual a soma dos quadrados sobre os segmentos com duas vezes o retângulo de lados formados pelos segmentos obtidos no corte", que na linguagem algébrica atual retratamos como

$$(x+y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy.$$

Também encontramos a correspondente fórmula para o quadrado da diferença em Euclides, VII: "Se um segmento de reta é cortado aleatoriamente, os quadrados do todo e do primeiro segmento, juntos, são iguais ao dobro do retângulo de lados formado pelo todo e pelo referido segmento mais o quadrado do segmento restante", que, em linguagem algébrica e considerando x como o todo e y como o primeiro segmento, temos

$$x^2 + y^2 = 2xy + (x-y)^2.$$

Seria também perfeitamente fácil para Euclides obter a prova para o cubo de binômios, porém isto quebraria a linha de seu trabalho, visto que nos livros II e X ele mostrou prodígio interesse em quadrados de binômios.

Depois de Euclides, a primeira busca por uma fórmula para binômios foi para o cálculo de raízes por aproximação, o qual culminou na aproximação descrita como método geral de Heron de Alexandria. O método de Heron, descrito em seu livro A Métrica, é dotado de uma simplicidade e sutileza incríveis, e permite encontrar uma aproximação para $\sqrt{A}$. Se a_1 é um valor inicial (chute inicial), na notação atual, basta fazermos:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{A}{a_n}\right), n \geq 1.$$

Por exemplo, se $A = 2$ e o chute inicial escolhido é $a_1 = 2$, utilizando apenas dois passos no método de Heron, obtemos $a_3 = 1,4166...$, bastante próximo do valor exato.

Após isto, o conhecimento descrito circulou pelo mundo matemático por cerca de um milênio entre grandes centros de conhecimento (Grécia, Arábia,Índia,..), porém sem apresentar grandes avanços, até que, por volta de 1.300 d.C., surgiu algo extremamente familiar com o desenvolvimento binomial com expoentes inteiros positivos: Chu-Shih-Chieh, um dos principais matemáticos da china durante a dinastia Yuan, apresentou o interessante diagrama:

$$
\begin{array}{c}
1 \\
1 \quad 1 \\
1 \quad 2 \quad 1 \\
1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}
\tag{1.1}
$$

onde havia um forte indício de que os números que surgiam nas linhas horizontais eram os coeficientes de expansões binomiais, porém nada de sugestão quanto a uma prova. O primeiro a discorrer sobre esta relação quando os expoentes são inteiros positivos foi Michael Stifel [‡]. Usando o princípio combinatório, Stifel provou que os coeficientes do binômio com expoente $n \in \mathbb{N}$ poderiam ser obtidos através dos coeficientes do desenvolvimento imediatamente anterior, ou seja, usando o desenvolvimento para $n - 1 \in \mathbb{N}$. Hoje conhecemos sua contribuição como relação de Stifel, que em notação usual é

$$\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}; \quad n \in \mathbb{N} \text{ e } 0 \leq r \leq n.$$

Após todas essas grandes contribuições indicadas acima, a prova não demorou a surgir. Isaac Newton, no período entre 1665 e 1666 em que a universidade de Cambridge ficou fechada devido à grande praga de Londres (peste bubônica), ficou refugiado na aldeia de Woolsthorpe e produziu, entre outros resultados, uma demonstração para o conteúdo que é nosso foco, o teorema binomial. Newton obteve uma prova para o teorema binomial utilizando um desenvolvimento em séries, válido apenas para expoentes inteiros positivos. Outra demontração se deve a Blaise Pascal [§] que, utilizando indução matemática, também obteve o mesmo resultado, usando a notação que utilizaremos em grande parte deste trabalho:

$$
\begin{aligned}
(1+x)^n &= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\big(n-(n-1)\big)}{n!}x^n \\
&= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots + x^n,
\end{aligned}
$$

a qual é equivalente a outras que podem ser encontradas atualmente. No corpo deste trabalho trataremos de expor a equivalência entre a representação usal e a utilizada acima.

[‡] Matemático alemão (1487-1567), fez grandes contribuições nos campos da aritmética e álgebra.

[§] Matemático, físico, inventor e teólogo francês (1623-1662) com enormes contribuições na área de geometria projetiva e teoria das probabilidades.

Logo após o desenvolvimento inicial do binômio ter sido feito para números inteiros positivos, James Gregory descreveu a expansão binomial onde o expoente era uma fração. Sua prova, de 1676, se deu em termos de antilogaritmos. Após 6 anos da prova de Gregory, retornamos para Newton, que, estudando interpolação de Wallis, em sua construção das bases para o cálculo diferencial, estudava curvas e áreas sob estas curvas, e demonstrou o teorema binomial para qualquer expoente real.

Hoje, quando se ensina o Binômio de Newton, o principal foco fica em cima de expoentes inteiros positivos, não somente em nível médio de ensino, onde a grande maioria dos alunos aprendem apenas o dispositivo prático, sem qualquer ênfase na demonstração (visto que não há domínio do conteúdo necessário), mas também em nível superior (graduação), onde a demonstração é vista em alguns cursos de ciências exatas (quando é), muitas vezes também trabalhada apenas para $n \in \mathbb{N}$, sendo que a demonstração rotineiramente apresentada é por indução.

1.2 Binômio de Newton com expoente inteiro positivo

Nesta seção iremos tratar da expansão natural por soma de termos da potência

$$(a+b)^n. \tag{1.2}$$

Para a simplificação de notação e simplificação dos cálculos, e sem perda alguma de generalidade, adotaremos que $a > b$, assim o binômio em (1.2) será apresentado em grande parte no corpo deste trabalho como:

$$a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n, \tag{1.3}$$

e, fazendo $\dfrac{b}{a} = x$, obtemos:

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \\
&= a^n(1+x)^n \\
&= a^n\left(1+nx+\tfrac{n(n-1)}{2!}x^2+\tfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+x^n\right)
\end{aligned} \tag{1.4}$$

ou seja, todo binômio na forma $(a+b)^n$ pode ser escrito como $(1+x)^n$ multiplicado por um número a^n.

A veracidade de (1.4) para n inteiro positivo pode ser demonstrada por indução matemática sem grandes complicações, como veremos a seguir. Porém tal demonstração se torna inviável no ensino médio, visto que os alunos não detêm esse conhecimento.

Teorema 1.1 *Para todo $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ é satisfeita a igualdade*

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^n. \tag{1.5}$$

Demonstração: Usaremos Indução Matemática.

Tomamos como nosso caso base $n = 1$, para o qual a igualdade (1.5) é verificada facilmente.

Assumimos que a igualdade (1.5) é valida para algum k inteiro positivo. Logo, nosso problema consiste em mostrar que a igualdade (1.5) tembém é válida para $k+1$.

De fato, multiplicando ambos os membros de (1.5) por $1+x$ obtemos:

$$(1+x)^k(1+x) = (1+x)\left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^k\right)$$

que por sua vez equivale

$$\begin{aligned}(1+x)^{(k+1)} =& 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^k \\ & \ldots + x\left(1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + \cdots + x^k\right).\end{aligned}$$

A soma acima possui $k+1+k+1$ termos, logo agrupando o termo j, para $j \geq 2$, com o termo $j+k$, obtemos

$$(1+x)^{(k+1)} = 1 + (k+1)x + \frac{(k+1)(k)}{2!}x^2 + \frac{(k+1)k(k-1)}{3!}x^3 + \cdots + x^{k+1},$$

o que nos traz que a igualdade (1.5) é também obtida para $k+1$.

Concluímos que (1.5) é válida para todo $n \in \mathbb{N}$.

□

Entre tantas provas disponíveis para o teorema binomial, com $n \in \mathbb{N}$, podemos destacar aquelas por indução, como a exposta no teorema 1.1, e outras que se distinguem destas em sua essência, como por exemplo as que utilizam argumentos probabilísticos (ver [15], [16]). Deixamos o estudo desse tipo de argumento a critério do leitor, visto que não utilizamos tais métodos no que propomos. Apesar disso, como uma das mais recentes provas desenvolvidas, podemos destacar uma demonstração do teorema binomial utilizando cálculo diferencial, devida a Hwang (ver [11]), a qual é equivalente ao teorema anterior quando $y = 1$, como segue:

Teorema 1.2 *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$ segue que*

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C_{n,j} x^j y^{n-j}, \tag{1.6}$$

onde $C_{n,j} = \dfrac{n!}{j!(n-j)!}$.

Demonstração: Inicialmente, consideramos o produto

$$(x+y)^n = (x+y)(x+y)...(x+y),$$

onde, realizando a expansão do lado direto da igualdade para qualquer $n \in \mathbb{N}$, podemos concluir que existem inteiros positivos $C(n,0), ..., C(n,n)$ tais que para qualquer x e $y \in \mathbb{R}$, vale:

$$(x+y)^n = \sum_{j=0}^{n} C(n,j) x^j y^{n-j}, \tag{1.7}$$

restando determinar quem são os coeficientes $C(n,j)$.

Para qualquer valor de $k = 0, ..., n$, vamos calcular derivadas parciais em ambos os lados da igualdade (1.7).

Quando calculamos derivadas parciais do lado esquerdo de (1.7) k vezes com respeito a x e $n-k$ vezes com respeito a y, obtemos:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}} (x+y)^n = n!$$

e, quando calculamos derivadas parciais do lado direito de (1.7), para todos os inteiros k e j em $\{0, 1, 2, \cdots, n\}$, obtemos:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}} C(n,j) x^j y^{n-j} = 0 \quad \text{se} \quad k \neq j,$$

e

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}} C(n,k) x^k y^{n-k} = k!(n-k)! C(n,k) \quad \text{se} \quad k = j.$$

Logo, concluimos que vale:

$$\frac{\partial^n}{\partial x^k \partial y^{n-k}} \sum_{j=0}^{n} C(n,j) x^j y^{n-j} = k!(n-k)! C(n,k)$$

Igualando a derivada de ambos os membros obtemos:

$$n! = k!(n-k)! C(n,k),$$

ou seja,

$$C(n,k) = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

o que conclui a prova.

□

Ambas as demonstrações que apresentamos neste capítulo, válidas para $n \in \mathbb{N}$, são simples de entendimento e por outro lado sofisticadas em seus argumentos, mas utilizam conhecimentos matemáticos geralmente ensinados em nível superior, não sendo adequadas à aplicação no ensino médio.

Além disso, nosso foco neste trabalho não é apenas para expoentes $n \in \mathbb{N}$, e sim para expoentes negativos e fracionários. Logo, nossa ênfase a partir do próximo capítulo tomará um rumo relativamente diferente do apresentado até agora, onde passaremos a tratar do desenvolvimento binomial para $n \in \mathbb{R}$ (sendo os resultados válidos, portanto, para $n \in \mathbb{Q}$).

Capítulo 2

O uso de séries para a demonstração do desenvolvimento binomial

Como estamos interessados em estudar o desenvolvimento do binômio

$$(a+b)^n$$

com $n \in \mathbb{Q}$ (e não apenas com $n \in \mathbb{N}$), vamos dedicar este capítulo à visualização e ao entendimento da demonstração para o desenvolvimento binomial com n racional habitualmente ensinada na atualidade. Alertamos que a matemática utilizada na demonstração que segue é ensinada em nosso país em cursos de nível superior, com os conteúdos normalmente alocados em disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral III, e, com um enfoque mais rigoroso, em disciplinas de Análise Matemática. Apesar disso, a aplicação destes conteúdos para a demonstração do desenvolvimento binomial com n racional é constantemente omitida.

A seguir, apresentaremos uma sequência de conceitos e resultados que culminam na demonstração do teorema binomial para um expoente real qualquer.

Lembramos que o objetivo não é apresentar toda a teoria de sequências e de séries, nem esgotar todos os resultados e pormenores do estudo de sequências e séries, mas apenas apresentar os conceitos e resultados necessários para conseguir demonstrar o teorema binomial.

2.1 Principais ideias sobre sequências

O primeiro conceito a assimilar é o de sequência numérica. As principais definições e dois resultados necessários são apresentados nesta seção.

Definição 2.1: Uma *sequência* ou *sucessão* de números reais é um conjunto discreto dado por uma função real definida em um subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$, que associa a cada número natural n um número real $f(n) = a_n$:

$$\begin{aligned} f : A \subseteq \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\rightarrow f(n) = a_n. \end{aligned}$$

O valor de uma sequência f no número natural n é denominado *enésimo termo* ou *termo geral* da sequência, e pode ser representado pelo símbolo a_n (ou b_n, ou x_n, etc.).

Notação: Podemos denotar uma sequência f por seu termo geral $\{a_n\}$.

Definição 2.2: Uma sequência $\{a_n\}$ de números reais é chamada de *sequência monótona* quando

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots \leq a_n \leq a_{n+1} \leq \ldots$$

ou

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$$

No primeiro caso a sequência é monótona *não-decrescente*, e no segundo, monótona *não-crescente*. Quando $a_n < a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a sequência é monótona *crescente*, e quando $a_n > a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, a sequência é monótona *decrescente*.

Definição 2.3: Uma sequência $\{a_n\}$ de números reais é *limitada* quando existir uma constante positiva c tal que:

$$\left|a_n\right| \leq c, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Definição 2.4: Dizemos que um valor $L \in \mathbb{R}$ é o *limite de uma sequência* $\{a_n\}$ se, para todo $\varepsilon > 0$ fixado, existe algum índice n_0, tal que para todo $n > n_0$, obtemos $|a_n - l| < \varepsilon$. Neste caso, dizemos que L é o limite da sequência $\{a_n\}$, ou que a sequência $\{a_n\}$ converge para L. Em notação de limite, escrevemos:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = L.$$

Quando uma sequência tem limite, dizemos que ela é *convergente*.

Teorema 2.1 *Toda sequência convergente é limitada.*

Demonstração: Sejam $\{a_n\}$ uma sequência convergente, e $\varepsilon > 0$ um número fixo.

Como $\{a_n\}$ converge para um determinado limite L, existe um número n_0 tal que

$$\left|a_n - L\right| < \varepsilon, \quad \text{sempre que } n > n_0,$$

ou seja, tal que

$$|a_{\rm n}| < |L| + \varepsilon, \quad \text{sempre que } n > n_0.$$

Assim, existem na sequência $\{a_{\rm n}\}$ finitos elementos $\tilde{a}_{\rm n}$ que não estão necessariamente no intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$.

Seja $\tilde{c} = \max\big\{|\tilde{a}_{\rm n}| \;\big|\; n \leq n_0\big\}$.

Então, vale

$$|a_{\rm n}| \leq c = \max\big\{\tilde{c}; |L| + \varepsilon\big\}, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}.$$

Ou seja, a sequência $\{a_{\rm n}\}$ é limitada.

□

A noção de convergência de uma sequência é importante para várias aplicações dentro da matemática, como, por exemplo, no cálculo do limite de uma função real, ou para a verificação da convergência de séries. São também importantes critérios que garantam a convergência de uma determinada sequência. Dentre os vários critérios que existem, vamos apresentar dois, que serão úteis mais à frente.

Teorema 2.2 (Critério da convergência monótona) *Toda sequência que é ao mesmo tempo limitada e monótona é convergente.*

Demonstração: Faremos a demonstração para uma sequência crescente limitada (esta demonstração é facilmente adaptada para o caso contrário).

Seja $\{a_{\rm n}\}$ uma sequência crescente limitada, e seja $L = sup\{a_{\rm n}\}_{{\rm n}\in\mathbb{N}}$. Então, uma vez fixado algum $\varepsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < a_{{\rm n}_0}$.

Além disso, como $\{a_{\rm n}\}$ é uma sequência crescente, devemos ter:

$$L - \varepsilon < a_{{\rm n}_0} < a_{\rm n}, \quad \forall\ \ n \geq n_0.$$

Como L é o supremo da sequência $\{a_{\rm n}\}$, devemos também ter:

$$a_{\rm n} \leq L \quad \Rightarrow \quad a_{\rm n} < L + \varepsilon, \quad \forall\ \ n \geq n_0,$$

logo:

$$L - \varepsilon < a_{\rm n} < L + \varepsilon, \quad \forall\ \ n \geq n_0,$$

o que, quando escrevemos na notação de módulo, temos

$$|a_{\rm n} - L| < \varepsilon, \ \ \forall\ \ n \geq n_0,$$

e, em notação de limite:

$$\lim_{n\to+\infty} a_{\rm n} = L.$$

Ou seja, temos que a sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ converge.

$\square$

Teorema 2.3 (Teste da razão para sequências) *Se uma sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ de termos não nulos satisfaz a condição*

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{\mathrm{n}+1}}{a_\mathrm{n}}\right| = l < 1,$$

então a sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ converge para zero.

Demonstração: Como $\lim a_n = 0$ se, e somente se, $\lim |a_n| = 0$, podemos supor, sem perda de generalidade, que a sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ tem apenas termos positivos.

Escolhemos então um número real r com $l < r < 1$, e que satisfaça a

$$0 < \left(\frac{a_{\mathrm{n}+1}}{a_\mathrm{n}}\right) < r$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ a partir de um determinado índice n_0 (uma vez fixado algum $\varepsilon > 0$, este índice n_0 é obtido ao escolher $\varepsilon = r - l$ na definição de limite de uma sequência).

Para $n > n_0$ temos que

$$0 < a_{\mathrm{n}+1} < a_\mathrm{n} r < a_\mathrm{n}, \quad \forall\, n > n_0,$$

e, portanto, podemos concluir que a sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ se torna decrescente a partir de n_0. Ou seja, temos

$$0 < a_{\mathrm{n}+1} < a_\mathrm{n} < a_{\mathrm{n}_0} \;\; \forall \;\; n \geq n_0.$$

Assim, a sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ é limitada, e monótona decrescente (pelo menos a partir do índice n_0). Pelo teorema 2.2, concluímos que a sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ é convergente.

Resta mostrar que a sequência $\{a_\mathrm{n}\}$ converge para zero. Para fazer isso, admitimos por absurdo que a sequência é convergente para algo diferente de zero. Seja $s > 0$ o suposto limite de $\{a_\mathrm{n}\}$ (que também deve ser limite de $\{a_{\mathrm{n}+1}\}$).

Lembrando que por hipótese vale $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{\mathrm{n}+1}}{a_\mathrm{n}}\right) = l < 1$, devemos ter então:

$$l = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{\mathrm{n}+1}}{a_\mathrm{n}}\right) = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} a_{\mathrm{n}+1}}{\lim\limits_{n\to+\infty} a_\mathrm{n}} = \frac{s}{s} = 1$$

o que contradiz o fato de que $l < 1$.

Concluímos então que $a_\mathrm{n} \to 0$ quando $n \to +\infty$.

$\square$

2.2 Principais ideias sobre séries

Nesta seção, apresentaremos os principais conceitos e os resultados sobre séries necessários para a demonstração do teorema binomial.

Dada uma sequência $\{a_{\mathrm{n}}\}$ de números reais, representamos a soma infinita de seus termos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\mathrm{n}} + \ldots$$

simbolicamente por

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}.$$

Estas somas infinitas serão denominadas *séries*.

A principal tarefa no estudo das séries é determinar quais características uma sequência $\{a_{\mathrm{n}}\}$ deve satisfazer para que a soma infinita $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$ seja um valor real. Se isto acontecer dizemos que a soma infinita (ou série) *converge*. Uma série pode convergir ou não convergir, e se esse último for o caso, dizemos que a série *diverge*.

A convergência de uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$ está ligada com a convergência da sequência das somas parciais $\{S_{\mathrm{n}}\}$ que chamamos de *enésima soma parcial* e definimos por:

$$S_{\mathrm{n}} := a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{\mathrm{n}}.$$

Definição 2.5: Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$ é *convergente* se a sequência $\{S_{\mathrm{n}}\}$ das somas parciais for convergente. Neste caso, a soma da série é o limite da sequência $\{S_{\mathrm{n}}\}$, ou seja:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}} = \lim_{n \to +\infty} S_{\mathrm{n}}.$$

Exemplo 2.1 *Consideremos a série* $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$, *que também pode ser representada por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}.$$

Para cada número natural n, *temos que:*

$$S_{\mathrm{n}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots + \frac{1}{2^n},$$

e, ao aplicar a soma de uma progressão geométrica, encontramos:

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{n}} &= \frac{1}{2}.\left(\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}\right) \\ &= 1.\left(1-\frac{1}{2^n}\right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\lim_{n\to+\infty} S_{\mathrm{n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

A soma infinita $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ *é vista como o limite da soma parcial* S_{n}*, quando* $n \to +\infty$*, e dessa forma segue que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n} = 1.$$

Vale citar que a soma dos termos de uma progressão geométrica sempre irá convergir quando sua razão q satisfizer a $|q| < 1$.

Exemplo 2.2 *Trataremos agora a soma infinita* $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$*, que é representada simbolicamente por* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$*, a qual é conhecida como Série Harmônica.*

A figura 2.1 representa o gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x}$*, definida para* $x > 0$*, sobre o qual estão dispostos os pontos da forma* $(n, \frac{1}{n})$*.*

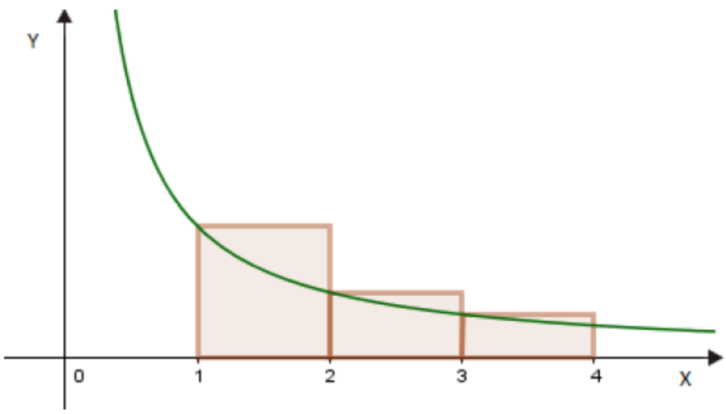


Figura 2.1: Gráfico da função harmônica

Comparando a soma das áreas dos retângulos sombreados, de base 1 *e altura* $\frac{1}{n}$ *para* $n \geq 1$*, com a área sob o gráfico de* f*, concluimos que*

$$\int_1^n f(x)dx \leq f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + \ldots + f(n)$$

ou seja,

$$ln(n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Como $\lim_{n \to +\infty} \ln(n) = \infty$, *temos que:*

$$\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = \infty,$$

e, logo, concluímos que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Observamos que neste exemplo a soma infinita não é um número real. Neste caso, dizemos que a série diverge.

Os exemplos expostos motivam o entendimento do conceito de convergência para séries númericas infinitas, e apontam para a necessidade de determinação de critérios sobre o termo geral que permitam decidir sobre a convergência de uma série. Apresentaremos, a seguir, três destes critérios.

Teorema 2.4 (Teste do n-ésimo termo) *Se a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$ *é convergente então*

$$\lim_{n \to +\infty} a_{\mathrm{n}} = 0.$$

Demonstração: Considere uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$, onde $\{S_{\mathrm{n}}\}$ denota a sequência das somas parciais da série.

Dessa forma, temos que

$$a_{\mathrm{n}} = S_{\mathrm{n}} - S_{\mathrm{n}-1}.$$

Admitindo que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$ é convergente, então a série das somas parciais $\{S_{\mathrm{n}}\}$ também converge para um certo limite l (e, devido à unicidade do limite, ocorre o mesmo com a sequência $\{S_{\mathrm{n}-1}\}$). Logo, devemos ter:

$$\lim_{n \to +\infty} a_{\mathrm{n}} = \lim_{n \to +\infty} S_{\mathrm{n}} - \lim_{n \to +\infty} S_{\mathrm{n}-1} = l - l = 0.$$

$\square$

O teorema 2.4 nos dá uma condição necessária para que uma série seja convergente: se o limite do termo geral da série não for zero, isto é, se $\lim_{n \to +\infty} a_{\mathrm{n}} \neq 0$, então a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$ não pode convergir. Porém, se limite do termo geral da série for zero, ou seja, se tivermos $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, nada poderemos concluir sobre a convergência da série, sem maiores investigações. Os dois exemplos apresentados ilustram isso. Em ambos os exemplos, 2.1 e 2.2, o termo geral da série tem limite zero, mas no exemplo 2.1 a série converge, enquanto que no exemplo 2.2 (série harmonica), a série diverge.

Teorema 2.5 (Teste de comparação) *Sejam* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *duas séries de termos positivos.*

(a) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *converge e* $a_n \leq b_n, \ \ \forall\, n$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também converge.*

(b) Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *diverge e* $a_n \geq b_n, \ \ \forall\, n$, *então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *também diverge.*

Demonstração item (a): sejam $\{S_n\}$ e $\{R_n\}$ as sequências de somas parciais das séries $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, respectivamente.

Como por hipótese a série $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, então $\{R_n\}$ é uma sequência convergente, e pelo teorema 2.1, é uma sequência limitada, digamos, por L. Temos, portanto:

$$0 \leq S_n \leq R_n \leq L, \ \ \forall\, n.$$

Isso diz que a sequência $\{S_n\}$ é limitada. Como esta sequência também é monótona (pois a cada novo termo é acrescentado um valor positivo à soma), pelo teorema 2.2, ela é também convergente.

Dessa forma, a série correspondente à sequência $\{S_n\}$, ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, é convergente.

A demonstração do item (b) se faz com raciocínio similar.

$\square$

Definição 2.6: Uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é chamada *absolutamente convergente* se a série dos valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ for convergente.

Definição 2.7: Uma série cujo termos são alternadamente positivos e negativos é denominada *série alternada.* Estas, em geral, se apresentam em uma das seguintes formas equivalentes:

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{(n-1)} a_n - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{(n-1)} a_n;$$

$$-a_1 + a_2 - a_3 + \ldots - (-1)^n a_{\mathrm{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_{\mathrm{n}}.$$

Teorema 2.6 (Teste da razão para séries) *Consideremos uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$*, onde cada termo* a_{n} *é diferente de zero.*

(a) *Se* $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} \right| = L < 1$*, então a série converge absolutamente.*

(b) *Se* $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} \right| = L > 1$*, ou* $L = \infty$*, a série diverge.*

(c) *Se* $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} \right| = 1$*, o teste da razão é inconclusivo.*

Demonstração: No item (a), supondo que $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} \right| = L < 1$, escolhendo um número real r tal que $L < r < 1$, e na definição de limite de uma sequência considerando $\varepsilon = r - L$, existirá um índice n_0 a partir do qual é válida a relação

$$\left| \left| \frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} \right| - L \right| < r - L, \quad \forall\, n \geq n_0,$$

ou, de modo equivalente:

$$-r + L < \left| \frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} \right| - L < r - L, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Segue daí que $|a_{\mathrm{n+1}}| < r.|a_{\mathrm{n}}|$, $\forall\, n \geq n_0$. E, se nessa última desigualdade fizermos sucessivamente $n = n_0$; $n = n_0 + 1$; $n = n_0 + 2$; $n = n_0 + 3$; $\ldots$, obtemos:

$$|a_{\mathrm{n_0+k}}| < r^k |a_{\mathrm{n_0}}|, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}^*.$$

Como r é tal que $0 < r < 1$, a série geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ converge. Assim, aplicando o teste da comparação (teorema 2.5), deduzimos que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\mathrm{n_0+k}}|$ também converge.

Para concluir que a série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\mathrm{n}}|$ é convergente, basta verificar que, como ela difere da série $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{\mathrm{n_0+k}}|$ em apenas uma quantidade finita de termos, as duas séries são convertentes. Isto prova o item (a).

Para provar o item (b), assumimos que $\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}} \right| = L > 1$, e consideramos agora um número real r tal que $1 < r < L$.

Novamente, se na definição de limite de uma sequência escolhermos $\varepsilon = L - r$, obtemos um índice n_0 tal que

$$1 < r = L - \varepsilon < \left|\frac{a_{\mathrm{n}+1}}{a_{\mathrm{n}}}\right| < L + \varepsilon, \quad \forall\ n \geq n_0,$$

e, daí, obtemos que $0 < |a_{\mathrm{n}_0}| \leq |a_{\mathrm{n}}|$, $\forall\ n \geq n_0$, e, portanto, a sequência $\{a_{\mathrm{n}}\}$, caso seja convergente, possui limite diferente de zero.

Pelo teste do n-ésimo termo (teorema 2.4) deduzimos que a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{\mathrm{n}}$ diverge.

O item (c) realmente é inconclusivo, como facilmente pode ser visto ao usar o teste da razão para sequências em $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ e em $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$. Estas sequências apresentam 1 como limite no teste da razão, mas a primeira, a série harmônica, é divergente, enquanto que a segunda é convergente.

$\square$

2.3 Séries de potências

No caminho que estamos trilhando para demonstrar o teorema binomial, para $n \in \mathbb{Q}$, objetivo deste texto, o próximo conceito de séries a ser estudado é o de séries de potências.

Séries de potências são séries do tipo

$$c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \ldots + c_{\mathrm{n}}(x-a)^n + \ldots,$$

onde os números c_i, para $i \geq 0$, são os coeficientes da série, e o valor de a é conhecido como *centro da série*. Resumidamente, podemos escrever

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x-a)^n.$$

Como um caso particular, se o valor de a for nulo, isto é, se $a = 0$, temos

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \ldots + c_{\mathrm{n}} x^n + \ldots,$$

ou resumidamente

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}} x^n.$$

Uma particularidade deste tipo de séries é que, agora, temos dois tipos de variáveis:

o índice n continua variando nos naturais (e caracterizando o somatório como uma série), mas a letra x representa uma variável que pode percorrer todos os números reais.

Dessa forma, ao lidarmos com séries de potências, uma das várias perguntas que surgem é: "para quais valores de x a série de potências é convergente?"

Os valores de x que tornam uma série de potências convergente podem ser determinados com o auxílio do teste da razão para séries (teorema 2.6), sendo que o caso extremo $L = 1$, quando aparecer, deve ser verificado por outros métodos.

Uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x-a)^n$ pode convergir apenas quando $x = a$ (e a convergência em $x = a$ sempre ocorre, pois para $x = a$ o valor da série será sempre c_0; desde que se convencione que $(x-a)^0 = 1$ quando $x = a$); pode convergir absolutamente; ou pode ser convergente no intervalo $|x-a| < R$ e divergente quando $|x-a| > R$, e nesse caso pode ser convergente ou não nos extremos desse intervalo. Assim, o *intervalo de convergência* de uma série de potências pode ser qualquer um dos seguintes tipos:

$$(a-R, a+R),\ [a-R, a+R),\ (a-R, a+]\text{ ou }[a-R, a+R],$$

onde R é conhecido como o *raio de convergência.*

Sobre o problema de determinar um intervalo de convergência para uma série de potências, ou seja, para o problema de determinar o raio de convergência R, que pode ir desde $R = 0$, quando a série converge apenas em $x = a$, até $R = \infty$, quando a série converge para todos os valores x reais (e em cujo intervalo I de convergência a série define uma função: $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x-a)^n$, $\forall\ x \in I$), apresentamos a seguir dois resultados que auxiliam nesta tarefa.

Teorema 2.7 *Se uma série de potências com a forma* $\sum_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x-a)^n$ *convergir em algum valor* $x_0 \neq a$, *então ela corvergirá absolutamente no conjunto*

$$\big\{x \in \mathbb{R}\ \big|\ |x-a| < |x_0 - a|\big\}.$$

E, se ela divergir em algum valor $x = x_1$, *então ela será divergente em todos os valores de* x *que atendam a* $|x-a| > |x_1 - a|$.

Demonstração: Se uma série com a forma $\sum_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x_0-a)^n$ for convergente, segue do teste do n-ésimo termo (teorema 2.4) que

$$\lim_{n\to+\infty} c_{\mathrm{n}}(x_0-a)^n = 0,$$

e então, pela definição de limite de uma sequência, se fixarmos $\varepsilon = 1$, existirá em correspondência um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ a partir do qual se tem:

$$\left|c_{\mathrm{n}}(x_0-a)^n\right| < 1.$$

Temos também que:

$$\left|c_{\mathrm{n}}(x-a)^n\right| = \left|c_{\mathrm{n}}(x_0-a)^n\right|.\left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n \tag{2.1}$$

e, tendo em vista que

$$\left|c_{\mathrm{n}}(x_0-a)^n\right| < 1, \quad \forall\ n \geq n_0,$$

deduzimos de (2.1) que vale

$$\left|c_{\mathrm{n}}(x-a)^n\right| < \left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n, \quad \forall\ n \geq n_0. \tag{2.2}$$

Ora, para os valores de x satisfazendo a $|x-a| < |x_0-a|$, a série geometrica

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x-a}{x_0-a}\right|^n$$

é convergente e, combinando (2.2) com o teste da comparação (teorema 2.5), concluímos que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x-a)^n$ converge absolutamente quando x satisfaz a $|x-a| < |x_0-a|$.

Para provarmos a segunda parte de teorema, admitiremos que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x_1-a)^n$ é divergente e raciocinaremos por absurdo.

Se a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x_2-a)^n$ fosse convergente em algum ponto x_2 tal que $|x_2-a| > |x_1-a|$, então, pelo que ficou estabelecido na primeira parte da demonstração, esta série seria convergente em todo valor de x, com $|x-a| < |x_2-a|$ e em particular seria convergente quando $x = x_1$, contrariando a hipótese.

Logo, não pode haver algum ponto x_2, com $|x_2-a| > |x_1-a|$, tal que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_{\mathrm{n}}(x_2-a)^n$ seja convergente.

$\square$

Teorema 2.8 *Dada uma série de potências na forma* $\sum_{n=0}^{\infty} c_{\rm n}(x-a)^n$, *considere* L *como sendo o limite* $L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{c_{\rm n+1}}{c_{\rm n}}\right|$, *e* R *como sendo o raio de convergência da série. Então:*

(a) Se L *existe e é diferente de zero, então* $R = \frac{1}{L}$;

(b) Se $L = 0$, *então* $R = \infty$, *e a série converge para todo* x *real;*

(c) Se $L = \infty$, *então* $R = 0$, *e a série só converge em* $x = a$.

Demonstração: Representando por $a_{\rm n}$ o termo geral da série, temos

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{\rm n+1}}{a_{\rm n}}\right| = |x-a|.L \tag{2.3}$$

e, como consequência de (2.3) e do teste da razão para séries (teorema 2.6), temos que:

- Se $0 < L < \infty$, então a série converge absolutamente quando $|x-a| < 1/L$ e, nesse caso, o raio de convergência é dado por $R = 1/L$;

- Se $L = 0$, a série converge absolutamente em qualquer valor de x e nesse caso, $R = \infty$;

- E finalmente, se $L = \infty$, então a única possibilidade de se ter $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{\rm n+1}}{a_{\rm n}}\right| < 1$ é quando $x = a$, e nesse caso $R = 0$;

□

2.4 Séries binomiais

Chegamos, finalmente, ao ponto de poder aplicar os conceitos e resultados do conteúdo *séries* já vistos para obter a demonstração para o desenvolvimento binomial, para n negativo ou fracionário (caso de nosso interesse neste texto). De fato, a demonstração que será apresentada a seguir faz mais que isso, e valida o desenvolvimento binomial para qualquer n real.

Como demonstrado no Capítulo 1, para n inteiro não negativo o desenvolvimento do binômio pode ser escrito na forma:

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{n(n-1)...(n-j+1)}{j!}x^j+...+x^n. \tag{2.4}$$

Motivados pela expressão apresentada em (2.4), pretendemos encontrar um desenvolvimento desse tipo para

$$(1+x)^{\lambda},$$

sendo λ um número real fixo qualquer.

Iniciamos nossa busca escrevendo a série desejada:

$$1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}x^n+... \quad (2.5)$$

onde o termo geral é dado por $a_{\mathrm{n}}=\dfrac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}x^n$.

Pelo teste da razão para séries (teorema 2.6), temos que:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{\mathrm{n+1}}}{a_{\mathrm{n}}}\right|=\lim_{n\to+\infty}|x|.\left|\frac{\lambda-n}{n+1}\right|=|x|,$$

o que nos garante a convergência da série para binomial quando $|x|<1$ (e também a divergência da série binomial quando $|x|>1$).

A partir daqui, chamaremos a série em (2.5) de $g(x)$, ou seja:

$$g(x)=1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}x^n+... \quad (2.6)$$

e, realizando derivação termo a termo na equação em (2.6) (mesmo sem a demonstração, que pode ser vista em [10] ou [12], considere que isso é possível; como dificuldade, lembre-se que a soma que estamos derivando é infinita...) obtemos:

$$g'(x)=\lambda+\lambda(\lambda-1)x+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{(n-1)!}x^{n-1}+...$$

de onde se pode deduzir que vale

$$g'(x)+xg'(x)=\lambda g(x). \quad (2.7)$$

Vamos agora mostrar que também vale $g(x)=(1+x)^{\lambda}$.

Para isso, derivamos o quociente $\dfrac{g(x)}{(1+x)^{\lambda}}$ em relação a x, e obtemos

$$\frac{d}{dx}\Big[\frac{g(x)}{(1+x)^{\lambda}}\Big]=\frac{g'(x)+xg'(x)-\lambda g(x)}{(1+x)^{\lambda+1}}$$

que, pela equação (2.7), é igual a zero. Logo, seque que

$$\frac{g(x)}{(1+x)^{\lambda}} = C,$$

em que C é uma constante.

Agora, como sabemos que $g(0) = 1$, encontramos facilmente o valor $C = 1$ para a constante. Com isso, obtemos que também vale $g(x) = (1+x)^{\lambda}$.

Obtivemos, desta forma, a representação

$$(1+x)^{\lambda} = 1+\lambda x+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}x^2+\frac{\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)}{3!}x^3+\ldots+\frac{\lambda(\lambda-1)...(\lambda-n+1)}{n!}x^n+... \tag{2.8}$$

válida para todo x tal que $|x| < 1$, e para qualquer λ real.

Em particular, o desenvolvimento apresentado em (2.8) é válido para expoentes n negativos ou fracionários, que é o que nos interessa neste texto.

Mas, embora a validade do desenvolvimento apresentado em (2.8) seja o resultado extremamente útil desejado neste texto, e embora a demonstração apresentada neste capítulo seja de compreensão razoavelmente fácil em um contexto de ensino de Matemática em nível superior, o foco deste trabalho não é para aplicações neste nível de ensino. Desejamos conseguir obter esse mesmo desenvolvimento para o binômio, com expoente n negativo ou fracionário, mas de forma que a demonstração apresentada possa ser ensinada e aprendida em turmas do ensino médio.

Capítulo 3

Uma prova algébrica para o Binômio de Newton com expoentes negativos ou fracionários

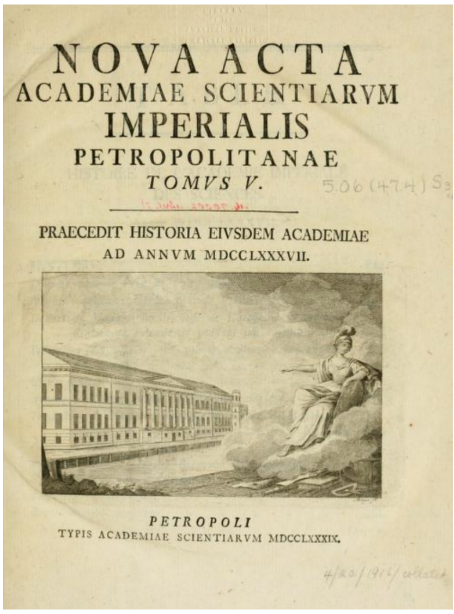
A maior parte das demonstrações apresentadas até agora para o desenvolvimento do Binômio de Newton para expoentes naturais e todas as demonstrações apresentadas para expoentes reais são extremamentes atraentes e significativas, porém quais destas demonstrações seriam viáveis de se apresentar a estudantes do ensino médio?

Após observar as provas apresentadas, é facil ver que apenas algumas das demonstrações para expoentes naturais usa uma matemática que pode ser plenamente explicada e entendida em aulas do ensino médio brasileiro. Além disso, nenhuma das demonstrações para expoentes reais pode ser apresentada por inteiro, pois necessita de uma matemática tipicamente ensinada no país apenas no ensino superior. Mas será que o desenvolvimento do Binômio de Newton para expoentes reais está destinado a ser apresentado apenas a quem acessa o ensino superior em alguns cursos da área das Ciências Exatas?

No livro [18] há uma referência a uma demonstração do desenvolvimento do Binômio de Newton para expoentes reais puramente algébrica que, devido ao objetivo do livro (preparar candidatos a resolver questões cobradas em provas de admissão ao ensino militar), não seria apresentada ali. Tal livro traz a fórmula para o desenvolvimento do Binômio de Newton com expoentes quaisquer (sem a demonstração) e apresenta exemplos de seus cálculos (isso em 1952, em um livro destinados a estudantes do nível equivalente ao Ensino Médio atual. Apesar de não ser este o objetivo desta dissertação, é inevitável uma pergunta: o que ocorreu com o ensino da Matemática no país neste período, afinal?).

Na busca por esta demonstração puramente algébrica para o desenvolvimento do

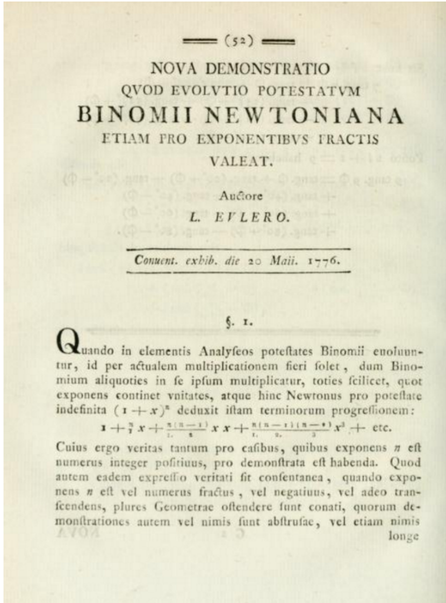
Binômio de Newton para expoentes reais (que, em teoria, poderia ser ensinado a estudantes do Ensino Médio), encontramos o artigo [8] (este artigo foi traduzido à Língua Portuguesa e encontra-se exposto na íntegra no Anexo II), que traz uma demonstração puramente algébrica, e é nesta prova apresentada por Euler em 1787 que se baseia o belo e simples método que apresentamos na próxima seção.


NOVA ACTA
ACADEMIAE SCIENTIARVM
IMPERIALIS
PETROPOLITANAE
TOMVS V.

PRAECEDIT HISTORIA EIVSDEM ACADEMIAE
AD ANNVM MDCCLXXXVII.

PETROPOLI
TYPIS ACADEMIAE SCIENTIARVM MDCCLXXXIX.

(a) Capa da Nova Acta


(52)

NOVA DEMONSTRATIO
QVOD EVOLVTIO POTESTATVM
BINOMII NEWTONIANA
ETIAM PRO EXPONENTIBVS FRACTIS
VALEAT.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 20 Maii. 1776.

§. 1.

Quando in elementis Analyseos poteſtates Binomii euoluuntur, id per actualem multiplicationem fieri ſolet, dum Binomium aliquoties in ſe ipſum multiplicatur, toties ſcilicet, quot exponens continet vnitates, atque hinc Newtonus pro poteſtate indefinita $(1+x)^n$ deduxit iſtam terminorum progreſſionem:

$$1 + \frac{n}{1} x + \frac{n(n-1)}{1.\ 2} xx + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3} x^3 + \text{etc.}$$

Cuius ergo veritas tantum pro caſibus, quibus exponens n eſt numerus integer poſitiuus, pro demonſtrata eſt habenda. Quod autem eadem expreſſio veritati ſit conſentanea, quando exponens n eſt vel numerus fractus, vel negatiuus, vel adeo tranſcendens, plures Geometrae oſtendere ſunt conati, quorum demonſtrationes autem vel nimis ſunt abſtruſae, vel etiam nimis longe

(b) Página inicial do artigo de Euler

Figura 3.1: Capa da Nova Acta, Tomus V; e página inicial do artigo de Euler

Não temos como afirmar que a prova exposta a seguir é a mesma que o autor de [18] se referia nas páginas 696-697 de sua obra. Mas, mesmo que não seja, acreditamos que ela cumpre os requisitos para poder ser explicada a (e entendida por) estudantes do Ensino Médio brasileiro, que é utilizar uma Matemática simples e acessível.

3.1 A prova de Euler

Iniciamos esta seção repetindo uma afirmação feita por Euler em [8]: Qualquer que seja a natureza do expoente n e com $|x| < 1$, a potência $(1 + x)^n$ sempre poderá ser expressa sob a forma:

$$(1 + x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots \tag{3.1}$$

Exemplo 3.1 *Como exemplo da possibilidade de expressar qualquer binômio do tipo* $(1 + x)^n$ *com a forma (3.1), independentemente do expoente* n*, iremos apresentar os cálculos que permitem expressar* $(1 + x)^{-5}$ *na forma (3.1).*

Utilizaremos a propriedade dos expoentes negativos para números reais e a expansão de binômios com expoente em $\mathbb{N}$ para poder expressar $(1+x)^{-5}$ em uma forma equivalente, mais propícia aos cálculos:

$$\begin{aligned}(1+x)^{-5} &= \frac{1}{(1+x)^5} \\ &= \frac{1}{1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5}.\end{aligned}$$

Então, para simplificar os cálculos, escrevemos

$$\alpha = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5,$$

e o procedimento que adotaremos será colocar o termo de menor grau do numerador da fração equivalente encontrada como um termo que, somado a outro termo, fracionário e com denominador α, resulta na fração anterior. Ou seja, nosso problema se resume a determinar um coeficiente β (e esse problema se repetirá a cada passo).

No primeiro passo, fazemos

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{\beta_1}{\alpha},$$

de onde obtemos $\beta_1 = 1-\alpha$; e portanto, podemos escrever

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{-5x-10x^2-10x^3-5x^4-x^5}{\alpha}$$

No segundo passo, realizamos o mesmo procedimento para a fração

$$\frac{-5x-10x^2-10x^3-5x^4-x^5}{\alpha}.$$

Escrevemos

$$\frac{-5x-10x^2-10x^3-5x^4-x^5}{\alpha} = -5x + \frac{\beta_2}{\alpha}$$

e assim, obtemos $\beta_2 = -5x-10x^2-10x^3-5x^4-x^5+5x\alpha$, ou seja,

$$\beta_2 = 15x^2+40x^3+45x^4+24x^5+5x^6.$$

Até agora já obtivemos

$$(1+x)^{-5} = \frac{1}{\alpha} = 1-5x+\frac{15x^2+40x^3+45x^4+24x^5+5x^6}{\alpha}.$$

Realizamos novamente o mesmo procedimento, para isolarmos o termo $15x^2$*:*

$$\frac{15x^2+40x^3+45x^4+24x^5+5x^6}{\alpha}=15x^2+\frac{\beta_3}{\alpha},$$

e encontramos $\beta_3=15x^2+40x^3+45x^4+24x^5+5x^6-15x^2\alpha$*, ou seja,*

$$\beta_3=-35x^3-105x^4-126x^5-70x^6-15x^7.$$

Ficamos então com:

$$(1+x)^{-5}=\frac{1}{\alpha}=1-5x+15x^2+\frac{-35x^3-105x^4-126x^5-70x^6-15x^7}{\alpha}.$$

Ao realizarmos o procedimento para isolarmos o termo $-35x^3$*, fica claro que encontraremos* $\beta_4=-35x^3-105x^4-126x^5-70x^6-15x^7+35x^3\alpha$*, ou seja,*

$$\beta_4=70x^4+224x^5+280x^6+160x^7+35x^8.$$

Ficaremos então com

$$(1+x)^{-5}=\frac{1}{\alpha}=1-5x+15x^2-35x^3+\frac{70x^4+224x^5+280x^6+160x^7+35x^8}{\alpha},$$

e assim podemos continuar procedendo. Isto já nos permite ver que o binômio $(1+x)^{-5}$ *realmente pode ser escrito na forma (3.1).*

Como uma última observação, cabe informar que a sequência formada pelos últimos termos obtidos em cada passo converge para zero, pois $|x|<1$*.*

No Anexo I, encontra-se um exemplo de expressão de um binômio com expoente fracionário na forma (3.1).

Da mesma forma que qualquer binômio $(1+x)^n$ pode ser escrito na forma (3.1), qualquer que seja a natureza do expente n, também é claro que os coeficientes A, B, C, D, E, ... em (3.1) denotam certos números que são determinados pelo expoente n. Quando o expoente n é um inteiro positivo, sabemos que valem as igualdades

$$A=\frac{n}{1};\quad B=\frac{n-1}{2}.A;\quad C=\frac{n-2}{3}.B;\quad D=\frac{n-3}{4}.C;\quad \ldots, \tag{3.2}$$

e se esses mesmos valores puderem ser deduzidos pelo método que será apresentado quando aplicado a n inteiro positivo, será uma forte evidência de que o método apresentado sempre terá validade, mesmo para outros expoentes que não inteiros positivos.

Ao tomarmos o expoente n em $(1+x)^n$ e aumentarmos em uma unidade a potência, pelo motivo de sempre existir uma expansão na forma (3.1) para o binômio, obteremos

$$(1+x)^{n+1} = 1 + A'x + B'x^2 + C'x^3 + D'x^4 + E'x^5 + \ldots, \tag{3.3}$$

onde é evidente que os coeficientes A', B', C', D', E', $\ldots$ também são números que devem de alguma forma ser determinados pelo expoente n (e, além disso, devem também atender a recorrência apresentada em (3.2), se no lugar de n colocarmos $n+1$, para n inteiro positivo). Como obviamente também vale

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n.(1+x),$$

é evidente que a série em (3.3) também deve surgir do produto da série em (3.1) por $(x+1)$.

Ao multiplicar (3.1) por $(x+1)$ obtemos

$$\begin{aligned}(1+x)^n.(1+x) &= (1+x).\big(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \ldots\big)\\ &= 1+x+Ax+Ax^2+Bx^2+Bx^3+Cx^3+Cx^4+Dx^4+Dx^5+Ex^5+\ldots\\ &= 1+(1+A)x+(A+B)x^2+(B+C)x^3+(C+D)x^4+(D+E)x^5+\ldots\end{aligned} \tag{3.4}$$

e, assim, por comparação, concluímos que (3.3) e (3.4) são iguais. Dessa forma, comparando separadamente os termos semelhantes, obtemos as seguintes igualdades:

$$A' = 1 + A \tag{3.5}$$

$$B' = A + B$$

$$C' = B + C$$

$$D' = C + D$$

$$E' = D + E,$$

e com isso podemos entender de que modo duas letras se relacionam: de forma geral, se no lugar de n colocarmos $n+1$, o valor resultante para o coeficiente indicado por N' será

$$N' = N + M.$$

Prosseguiremos com esta investigação, iniciando com a análise do caso mais simples, para então estabelecer uma sequência de resultados dedutivos que permitem concluir, sem muito esforço, a validade do desenvolvimento do Binômio de Newton para expoentes negativos e fracionários.

Se tomarmos

$$N = \alpha n,$$

ao trocarmos n por $n+1$ teremos

$$N' = \alpha(n+1) = \alpha n + \alpha,$$

e, portanto, neste caso concluímos que

$$M = \alpha.$$

Por outro lado, se soubermos que

$$M = \alpha, \tag{3.6}$$

é fácil verificar que devemos ter

$$N = \alpha n \tag{3.7}$$

De fato, podemos supor que sempre vale $N = \alpha n + \beta$, e então, ao substituirmos n por $n+1$ obtemos $N' = \alpha(n+1) + \beta$, de forma que, como $M = \alpha$, podemos concluir que $N = \alpha n + \beta$. Porém, observamos que todos os nossos coeficientes A, B, C, ... devem ser preparados de forma que se anulem quando $n = 0$; consequentemente, quando N denota cada uma dessas letras é necessário que $\beta = 0$, e, portanto, devemos sempre ter $\beta = 0$. Fica assim completamente provado que, quando $M = \alpha$, devemos ter $N = \alpha n$.

Se tomarmos

$$N = \alpha n(n-1),$$

ao trocarmos n por $n+1$ teremos

$$N' = \alpha(n+1)n = \alpha n^2 + \alpha n,$$

de onde se conclui que

$$M = 2\alpha n.$$

E, pelo mesmo argumento usado no caso anterior, se tomarmos $M = 2\alpha n$, concluiremos que se deve ter $N = \alpha n(n-1)$. Ainda, se no lugar de 2α escrevermos a, podemos concluir que, sempre que tomarmos

$$M = an, \tag{3.8}$$

deveremos ter

$$N = \frac{1}{2}an(n-1). \tag{3.9}$$

Note que todos os coeficientes calculados assim também devem se anular quando se faz $n = 0$, o que mostra que na expressão de N não devem haver constantes aditivas. Isso já ocorreu no primeiro caso, e irá permanecer válido nos casos seguintes.

Se tomarmos

$$N = \alpha n(n-1)(n-2),$$

ao trocarmos n por $n+1$ teremos

$$N' = \alpha(n+1)n(n-1),$$

de onde segue que

$$M = 3\alpha n(n-1).$$

Por outro lado, sempre que sempre que tomarmos

$$M = an(n-1), \tag{3.10}$$

encontraremos

$$N = \frac{1}{3}an(n-1)(n-2). \tag{3.11}$$

Se tomarmos

$$N = \alpha n(n-1)(n-2)(n-3),$$

ao trocar n por $n+1$ teremos $N' = \alpha(n+1)n(n-1)(n-2)$, e portanto

$$M = 4\alpha n(n-1)(n-2);$$

e por outro lado, quando tomamos

$$M = an(n-1)(n-2) \tag{3.12}$$

teremos certamente

$$N = \frac{1}{4}an(n-1)(n-2)(n-3). \tag{3.13}$$

Se tomarmos

$$N = \alpha n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

ao trocar n por $n+1$ teremos $N' = \alpha(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)$, logo valerá

$$M = 5\alpha n(n-1)(n-2)(n-3);$$

e por outro lado, quando tomamos

$$M = an(n-1)(n-2)(n-3),$$

teremos certamente

$$N = \frac{1}{5}an(n-1)(n-2)(n-3)(n-4).$$

Já está evidente que, sempre que tivermos

$$M = an(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

teremos certamente

$$N = \frac{1}{6}an(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5);$$

e de modo geral, sempre que tivermos

$$M = an(n-1)(n-2)(n-3)\ldots(n-\theta),$$

teremos

$$N = \frac{1}{\theta+2}an(n-1)(n-2)\ldots(n-\theta-1).$$

Observe que, até aqui, em nenhum momento nos restringimos aos números inteiros para efetuar qualquer um dos cálculos do procedimento apresentado.

Vamos agora determinar os coeficientes A, B, C, ...

De (3.5) sabemos que $A' - A = 1$, e tomando $M = 1$ em (3.6), no lugar de (3.7) encontraremos

$$A = n.$$

Da igualdade $B' = B + A$, se tomarmos $A = n$ em (3.8) ($M = A$, neste caso), no lugar de (3.9), obtemos para B ($N = B$, neste caso) o valor

$$B = \frac{1}{2}n(n-1)$$

(coincidindo com o que é obtido ao fazer o desenvolvimento newtoniano para n inteiro positivo).

Partindo da igualdade $C' = C + B$ e utilizando $B = \frac{1}{2}n(n-1)$ em (3.10), no lugar de (3.11), encontramos para o coeficiente C o valor

$$C = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2).$$

Com a igualdade $D' = D + C$, utilizando $C = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ em (3.12), no lugar de (3.13) encontramos

$$D = \frac{1}{24}n(n-1)(n-2)(n-3).$$

Uma vez encontrado este valor para D, avançamos para igualdade $E' = E + D$ e, agindo da mesma maneira, encontramos

$$E = \frac{1}{120}n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4),$$

e assim poderíamos prosseguir infinitamente.

Logo, podemos concluir que o desenvolvimento do Binômio de Newton apresentado em (3.1) é válido para qualquer valor n real, onde os coeficientes A, B, C, etc., são como descrevemos acima (note que não há restrição sobre o número n em nenhuma parte do argumento).

Em particular, vale

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{6}x^3+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}x^4+\ldots \quad (3.14)$$

para qualquer n negativo ou fracionário.

Exemplo 3.2 *Ao fazer a expansão binomial de $(1+x)^{-4}$, utilizando a expressão*

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}x^4 + \\ + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{5!}x^5 + \ldots$$

e substituindo n por -4, obtemos

$$(1+x)^{-4} = 1 + (-4)x + \frac{(-4)(-4-1)}{2!}x^2 + \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)}{3!}x^3 + \\ + \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)(-4-3)}{4!}x^4 + \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)(-4-3)(-4-4)}{5!}x^5 + \ldots$$

que tem como expressão final

$$(1+x)^{-4} = 1 - 4x + 10x^2 - 20x^3 + 35x^4 - 56x^5 + \ldots.$$

Para finalizar esta seção observamos que, se na expressão (3.14), o expoente n for um número natural, vale

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{(n)!}x^n+\frac{n(n-1)\cdots(n-n)}{(n+1)!}x^{n+1}, \tag{3.15}$$

sendo que o último termo vale zero, pois no numerador há um fator $(n-n)$. Como o fator $(n-n)$ ocorre também em todos os termos subsequentes na série infinita (e, como tais termos são nulos, não foram escritos na série infinita dada em (3.15)), conclui-se que, se n é um número natural, vale

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2+\ldots+\frac{n(n-1)\cdots(n-n+1)}{(n)!}x^n, \tag{3.16}$$

como era de se esperar.

3.2 Sugestões de abordagem e aplicações

Agora que já apresentamos uma demonstração algébrica para o desenvolvimento do Binômio de Newton, que acreditamos ser possível de apresentar a uma turma de estudandes do Ensino Médio, julgamos ser adequado apresentar também algum exemplo de aplicação deste conhecimento, que possa justificar, aos olhos do estudante, o seu estudo.

Começamos propondo que o método cuja demonstração apresentamos na seção anterior (e que, segundo já mencionado, parece já ter sido trabalhado anteriormente em solo brasileiro neste nível de ensino), após ser demonstrado em sala de aula, pode ser utilizado, inicialmente, em uma situação bastante simples: questionando aos alunos qual seria o valor de $\sqrt{1,01}$. Sem o conhecimento que propomos que seja trabalhado, possivelmente os alunos, se não pudessem utilizar uma calculadora, simplesmente seguiriam o método de "chutar" alguns valores para a raiz, calculando seu quadrado, e comparando o número obtido com $1,01$; e a seguir "chutando" valores cada vez mais aproximados. Porém, uma vez que o desenvolvimento binomial para expoentes negativos e fracionários já tenha sido trabalhado, bastaria apenas ao aluno em questão seguir o raciocínio:

$$\sqrt{1,01} = \sqrt{1+0,01} = (1+0,01)^{\frac{1}{2}},$$

expressão que, pelo desenvolvimento binomial, ficaria:

$$(1+0,01)^{\frac{1}{2}} = 1+\frac{1}{2}.(0,01)+\frac{\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}.(0,01)^2}{2!}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}.\frac{-3}{2}.(0,01)^3}{3!}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}.\frac{-1}{2}.\frac{-3}{2}\frac{-5}{2}.(0,01)^4}{4!}\dots$$

ou, efetuando as operações:

$$(1+0,01)^{\frac{1}{2}} = 1+0,005-0,0000125+0,0000000625+\dots$$

ou seja, considerando apenas 4 termos da série, o estudante pode obter o valor

$$(1+0,01)^{\frac{1}{2}} \simeq 1,004987563,$$

que é o número procurado, apresentando um erro apenas na nona casa decimal.

Na sequência, pode ser apresentado como exemplo ou exercício outras situações semelhantes, como encontrar $\sqrt[3]{24,3}$ ou $\sqrt[3]{75}$. Para o cálculo desse tipo de raiz, a estratégia seria identificar um número cúbico perfeito maior que o radicando, escrever o radicando como uma subtração, e colocar o número cúbico em evidência, ou seja:

$$\sqrt[3]{75} = \sqrt[3]{125-50} = \sqrt[3]{125.\left(1-\frac{50}{125}\right)} = \sqrt[3]{125}.\sqrt[3]{\left(1-\frac{50}{125}\right)} = 5.(1-0,4)^{\frac{1}{3}}.$$

Como alternativa de abordagem, anterior à apresentação do método de desenvolvimento binomial apresentado na seção anterior, caso o professor julgar conveniente, sugere-se uma introdução adequada à realidade da escola onde o professor trabalha, se possível utilizando ferramentas de modelagem matemática. Durante a criação deste texto, o autor exercia a profissão lecionando matemática no Colégio Estadual do Campo de Lustosa (Ipiranga - PR). Inserido neste contexto, e considerando que o aluno aprende melhor quando se sente fazendo parte do desenvolvimento do conteúdo que está sendo trabalhado, buscamos amparo na Lei de Diretrizes e Bases da Educação [3], que em seu artigo 28 estabele as seguintes normas:

> Na oferta da educação básica para a população rural, os sistemas de ensino proverão as adaptações necessárias à sua adequação, às peculiaridades da vida rural e de cada região, especialmente:
> I - conteúdos curriculares e metodologia apropriadas às reais necessidades e interesses dos alunos da zona rural;
> II - organização escolar própria, incluindo a adequação do calendário escolar às fases do ciclo agrícola e às condições climáticas;
> III - adequação à natureza do trabalho na zona rural.

Os itens I e III indicam o caminho para criar uma abordagem adequada ao conteúdo a ser trabalhado em Escolas do Campo: o conteúdo Binômio de Newton deve ser trabalhado no Ensino Médio, porém da forma que aparece nos livros, os alunos dessas localidades não conseguem ver sua empregabilidade no meio em que vivem. Uma vez que a grande maioria dos alunos da já citada escola reside em sítios, chácaras e fazendas que possuem açude ou represa para a criação de peixes, isto pode permitir a criação de um problema fictício que torne o conceito a ser trabalhado um caminho natural: suponhamos que deseja-se construir um viveiro para a recria de alevinos.

Sabe-se que o desenvolvimento dos peixes (e portanto, uma melhor produtividade futura) depende de um ecossistema aquático equilibrado, onde vários parâmetros devem ser controlados, tais como temperatura, oxigênio dissolvido, pH, alcalinidade, etc. (ver [9]). Sem entrar nas especificidades da medição e do controle de cada um destes parâmetros, sabe-se que alguns deles podem ser controlados com a adição de suplementos à água (por exemplo, aumento do pH pode ser obtido com o acréscimo de uma solução de cal, num processo conhecido como calagem). E, para facilitar o manejo deste viveiro e a adição de tais suplementos, deseja-se que o viveiro tenha 1 m^3 de volume (dessa forma, ao acresentar 1 kg de suplemento, a concentração desse suplemento no viveiro seria aumentada em 1 mg/ml). Para atingir este volume da maneira mais fácil (e poupando material), optou-se por um viveiro na forma de cubo, com arestas internas de 1 m de comprimento.

Porém, contratou-se um pedreiro de primeira viagem (ou altamente trapalhão) para construir este viveiro.

Em uma primeira tentativa, ele construiu um viveiro com arestas internas de 1 m de comprimento, mas esqueceu de considerar o reboco. Quando rebocou (e impermeabilizou) as paredes internas do viveiro, ele ficou, na realidade, com 99 cm de aresta. Dessa forma, o volume final do viveiro ficou com

$$V = (0,99)^3 \text{ m}^3,$$

e se o produtor permanecer acrescentando 1 kg do suplemento, como pretendia, qual será a porcentagem de acréscimo no aumento da concentração do suplemento na água?

Resposta: nosso problema consiste na divisão da unidade inicial do produto, diluida no novo volume:

$$\frac{1}{(1-0,01)^3}.$$

Utilizando o desenvolvimento estudado na seção anterior, devemos calcular $(1-0,01)^{-3}$, que por sua vez pode ser escrito como

$$(1-0,01)^{-3} = 1 - 3.(-0,01) + \frac{-3.-4.(-0,01)^2}{2!} + \frac{-3.-4.-5.(-0,01)^3}{3!} + \frac{-3.-4.-5.-6.(-0,01)^4}{4!} + \dots$$

e, se utilizarmos como aproximação os primeiros 5 termos, o que é aceitável, obtemos

$$(1 - 0,01)^{-3} \simeq 1 + 0,03 + 0,0006 + 0,00001 + 0,00000015$$

ou seja,

$$(1 - 0,01)^{-3} \simeq 1,0306015$$

e assim, o aumento da concentração do suplemento em relação ao pretendido originalmente foi de aproximadamente 3,06 por cento.

Mas, e se além de esquecer o reboco, o pedreiro se atrapalhou mais um pouco e usou um metro (instrumento de medição) que na verdade estava com 99cm, e acabou deixando a aresta interna com 0,98 cm de comprimento?

Ou, para não citar explicitamente todas as trapalhadas que o pedreiro poderia ter feito, acabando por deixar a medida interna com $1 + x$ metros onde $0 < |x| < 1$, e x é dado em centímetros, qual será a porcentagem de erro nestes casos todos?

Para responder a esta questão, podemos calcular, de uma forma geral, utilizando (3.16):

$$\frac{1}{(1+x)^3} = (1+x)^{-3} = 1 - 3.(x) + \frac{-3. - 4.(x)^2}{2!} + \frac{-3. - 4. - 5.(x)^3}{3!} + \frac{-3. - 4. - 5. - 6.(x)^4}{4!} \ldots$$

de onde podemos concluir que a alteração da concentração do suplemento, em porcentagem, pode ser expresso como a soma:

$$-3x + 6x^2 - 10x^3 + 15x^4 \ldots$$

O método acima descrito não é, de longe, o mais fácil de ser aplicado quando se deseja obter apenas um valor em uma situação específica (por exemplo, na primeira situação, onde a aresta interna ficou com 99 cm de comprimento), mas se aplicado também obtém o valor desejado com total confiança. E tem a grande vantagem de poder ser aplicado a qualquer outra situação hipotética que apareça, mostrando assim uma das maravilhas do pensamento matemático: a capacidade de abstração e generalização.

Capítulo 4

Conclusão

O desenvolvimento do Binômio de Newton é conteúdo previsto nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica: Matemática [13], mas consideramos a abordagem nos livros didáticos mais utilizados no país [4] insuficiente para um domínio completo deste conteúdo. Além disso, consideramos que o ensino do desenvolvimento binomial pode ser realizado utilizando como expoentes números em um conjunto maior que o normalmente abordado no Ensino Médio. Acreditamos que as demonstrações para o desenvolvimento binomial apresentadas nos primeiros capítulos, para expoentes naturais, apesar de serem as mais interessantes ou inovadoras, e de serem apresentadas normalmente no Ensino Superior, não são viáveis em turmas normais do Ensino Médio, pois os alunos não detém os conhecimentos necessários.

A questão central deste trabalho foi: Existe algum método de demonstração que poderia ser aplicado no Ensino Médio (em uma sala normal)? E a resposta apresentada a esta questão foi a volta à demonstração de Euler, que utiliza um raciocício puramente algébrico e de notável beleza, e que, sim, acreditamos que pode ser transmitida e entendida por nossos educandos.

Ousamos concluir que a aplicação desta demonstração é viável (e lembramos que, segundo mencionamos no decorrer do texto, aparentemente ela já foi trabalhada anteriormente neste nível de ensino em solo brasileiro). Além disso, tal desenvolvimento binomial apresenta extrema semelhança com o utilizado atualmente (porém sem a necessidade do uso de combinações), além de apresentar importantes oportunidades de aplicações.

ANEXOS

Anexo I

Com relação à afirmação de que, para qualquer que seja a natureza do expoente n, a potência $(1+x)^n$ sempre poderá ser expressa sob a forma (3.1), a saber:

$$(1+x)^n = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \dots$$

foi exposto, na seção 3.1, um exemplo da manipulação algébrica de um binômio com expoente inteiro negativo até deixá-lo com a forma (3.1).

Expomos a seguir um exemplo da expressão na forma (3.1) de um binômio com expoente fracionário:

Exemplo 4.1 *Considere a potência $(1+x)^{\frac{3}{2}}$. Podemos facilmente reescrevê-la como:*

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = \left[(1+x)^3\right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+3x+3x^2+x^3},$$

porém desejamos expressar tal binômio como:

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8} - \frac{3x^3}{48} + \dots$$

cuja expressão em série é facilmente obtida ao usar $n = \frac{3}{2}$ na expressão (3.14).

Para simplificar os cálculos, escreveremos $\alpha = 1 + 3x + 3x^2 + x^3$ e, analogamente ao feito no exemplo 3.1, a cada passo deveremos determinar um termo β.

No primeiro passo, escrevemos

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\alpha},$$

e, portanto, quando fazemos

$$\sqrt{\alpha} = 1 + \beta_1,$$

obtemos $\beta_1 = \frac{\alpha - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}$, ficando assim com

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{\alpha - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \tag{4.1}$$

No segundo passo, realizamos o procedimento para determinar β_2 na expressão

$$(1+x)^{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{3x}{2} + \beta_2. \tag{4.2}$$

e, ao comparar as expressões de $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ *em* (4.1) *e em* (4.2)*, obtemos*

$$\frac{\alpha-\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\alpha}}=\frac{3x}{2}+\beta_2,$$

o que permite concluir que

$$\beta_2=\frac{2\alpha-(2+3x)\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}$$

logo, ao substituirmos em (4.2)*, ficamos com:*

$$(1+x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3x}{2}+\frac{2\alpha-(2+3x)\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}.$$

Seguindo o mesmo procedimento para determinar β_3*, encontramos*

$$\frac{2\alpha-(2+3x)\sqrt{\alpha}}{2\sqrt{\alpha}}=\frac{3x^2}{8}+\beta_3$$

ou seja,

$$\beta_3=\frac{8\alpha-(8+12x+3x^2)\sqrt{\alpha}}{8\sqrt{\alpha}}.$$

Logo o desenvolvimento de $(1+x)^{\frac{3}{2}}$ *pode ser escrito, até aqui, como:*

$$(1+x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}+\frac{8\alpha-(8+12x+3x^2)\sqrt{\alpha}}{8\sqrt{\alpha}}.$$

De forma análoga podemos determinar o β_4*, que será dado por:*

$$\beta_4=\frac{48\alpha-(48+72x+18x^2+3x^3)\sqrt{\alpha}}{48\sqrt{\alpha}},$$

de forma que, até aqui, já encontramos o desenvolvimento

$$(1+x)^{\frac{3}{2}}=1+\frac{3x}{2}+\frac{3x^2}{8}-\frac{3x^3}{48}+\frac{48\alpha-(48+72x+18x^2+3x^3)\sqrt{\alpha}}{48\sqrt{\alpha}}, \tag{4.3}$$

e poderíamos prosseguir isolando consecutivamente os coeficientes que devem aparecer multiplicados por x^4*,* x^5*, etc.*

Finalizamos chamando a atenção para o fato que à medida que aumentamos a quantidade de $\beta_{k's}$ *determinados, o último termo no desenvolvimento (equivalente ao (4.3)) converge para zero quando o número de termos aumenta significativamente.*

Anexo II

NOVA DEMONSTRAÇÃO DE QUE A EXPANSÃO DOS

BINÔMIOS DE NEWTON

VALEM TAMBÉM PARA EXPOENTES FRACIONÁRIOS [1]

Autor

L. EULER.

Exibido em congresso em 20 de maio de 1776.

§. 1.

Quando os elementos da Análise das potências de um binômio foram desenvolvidos, pela ação da multiplicação indicada, com algum binômio sendo multiplicado por si mesmo, sendo o expoente formado por unidades, muito naturalmente pode Newton deduzir para a potência indefinida $(1+x)^n$ a seguinte progressão de termos:

$$1 + \frac{n}{1}\,x + \frac{n\;(n-1)}{1.\quad 2}\;x\,x + \frac{n\;(n-1)\;(n-2)}{1.\quad 2.\qquad 3}\;x^3 + \text{etc.}$$

cuja veracidade, por tal motivo, apenas para o caso onde o expoente n é um número inteiro positivo, pode ser demonstrada desta forma. Mas que esta mesma expressão é verdadeira, quando o expoente n é ou um número fracionário, ou negativo, ou mesmo transcendente, muitos Matemáticos vem tentando demonstrar, mas suas demonstrações ou são muito obscuras, ou muito exageradas para serem capazes de encontrar um lugar no limiar da Análise. Eu mesmo levei vários anos antes dessa demonstração, cujos elementos primordiais penosamente consegui obter: recentemente me ocorreu outro elemento, que me parece completar a tarefa, o qual exponho em seguida e no qual os Matemáticos podem confiar.

[1] Tradução à Língua Portuguesa do texto: "Nova demonstratio qvod evolvtio potestatvm Binomii Newtoniana etiam pro exponentibvs fractis valeat."; publicado originalmente em "Noua Acta Academiae Scientiarvm Imperialis Petropolitanae. Tomvs V.", 1787, pg. 52-58 (Mathematica). Disponível em https://archive.org/details/novaactaacademia05impe. Traduzido e digitado por A. A. Leachenski. e J. Q. Chagas.

§. 2. Qualquer que seja a natureza do expoente n, pode se assumir com segurança que a potência sempre poderá ser expressa sob o mesmo tipo de forma, que é

$$(1+x)^n = 1 \;+\; A\,x \;+\; B\,x\,x \;+ C\,x^3 \;+\; D\,x^4 \;+\; \text{etc.}$$

Aqui é claro que as letras maiúsculas A, B, C, D, etc. denotam certos números, determinados pelo expoente n, e já sabemos que, quando n é um número inteiro positivo, valem

$$A = \frac{n}{1}; \quad B = \frac{n-1}{2}\,.\,A; \quad C = \frac{n-2}{3}\,.\,B; \quad D = \frac{n-3}{4}\,.\,C \;\; \text{etc.}$$

portanto esses mesmos valores devem ser deduzidos pelo método que irei expor, assim se tornará evidente que o método sempre terá validade, mesmo quando os expoentes n não forem inteiros positivos.

§. 3. É imediatamente útil observar aqui, que o primeiro termo da série é tomado igual à unidade, pois sabemos que, se fizermos $x = 0$, caso em que todos os termos seguintes ao primeiro desaparecem, o valor da potência 1^n sempre permanece $= 1$, para qualquer número que n aceite. Em seguida, é evidente que, no caso em que $n = 0$, o valor da potência $(1+x)^0$ sempre é igual à unidade; pois um dos princípios da Análise mais que provado é que sempre se tem $z^0 = 1$. Daqui segue portanto, no caso em que $n = 0$, que os valores de todas as letras A, B, C, D etc. devem desaparecer, de modo que toda a expressão produz o valor 1. Portanto, é necessário que cada um desses fatores literais envolvam n, da mesma forma que acontece com a constituição dos valores obtidos por Newton.

§. 4. Ao aumentarmos em uma unidade o expoente n de nossa potência, obtemos de modo similar

$$(1+x)^{n+1} = 1 \;+\; A'\,x \;+\; B'\,x\,x \;+ C'\,x^3 \;+\; D'\,x^4 \;+\; \text{etc.}$$

onde é evidente que os signos literais A', B', C' etc. devem surgir como na fórmula precedente, se no lugar de n colocarmos $n+1$. Mas, como $(1+x)^{n+1} = (1+x)^n.(1+x)$, é evidente que esta nova série deve surgir da anterior, se a multiplicarmos por $1+x$; e, assim sendo, podemos dispor o produto segundo as potências de x de forma a se obter

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 1 & + & Ax & + & Bxx & + & Cx^3 & + & Dx^4 & + & Ex^5 & + & \text{etc.} \\ & + & x & + & Axx & + & Bx^3 & + & Cx^4 & + & Dx^5 & + & \text{etc.} \end{array}$$

e, portanto, essas duas séries tomadas em conjunto devem ser iguais à nossa série original.

§. 5. Portanto, comparando individualmente os termos de uma série com a outra obtemos as seguintes igualdades:

$$\begin{array}{lccc} 1^o. & A' = A + 1 & \text{ou} & A' - A = 1. \\ 2^o. & B' = B + A & \text{ou} & B' - B = A. \\ 3^o. & C' = C + B & \text{ou} & C' - C = B. \\ 4^o. & D' = D + C & \text{ou} & D' - D = C. \\ 5^o. & E' = E + D & \text{ou} & E' - E = D. \\ & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

e com isso entendemos de que modo duas letras sequentes e antecedentes se relacionam. Por exemplo, se a letra M é igual (ocupa a mesma posição que) a letra N, é necessário ter-se $N' - N = M$; portanto, toda a tarefa é reduzida a (entender) de que maneira, se o valor da letra M já foi encontrado, deve ser investigada a letra N de modo que, se no lugar de n colocarmos $n+1$, o valor resultante a ser indicado por N' será $N' - N = M$.

§. 6. Prosseguimos portanto esta investigação do seguinte modo, iniciaremos com casos mais simples, e ao final teremos estabelecidos uma sequência de Lemas.

Lema I.

§. 7. Se tomarmos $N = \alpha n$, teremos $N' = \alpha (n + 1)$, e portanto $N' - N = \alpha$; e por outro lado, é evidente que se tomarmos $M = \alpha$, teremos $N = \alpha n$. Aqui pode objetar-se que esta conclusão inversa não é um fato correto. (Mas de fato,) se instituirmos $N = \alpha n + \beta$, teríamos $N' = \alpha (n+1) + \beta$, e portanto $N' - N = \alpha$; de onde podemos concluir que, se tivermos $M = \alpha$, de forma geral deveremos ter $N = \alpha n + \beta$. Desde o início observamos que todos os nossos coeficientes A, B, C, D etc. devem ser preparados de forma a se anular quando colocamos $n = 0$; consequentemente, quando N denota cada uma dessas letras, é evidente que é necessário assumir $\beta = 0$, e assim fica completamente provado que quando $M = \alpha$, devemos se ter $N = \alpha n$.

Lema II.

§. 8. Se tomarmos $N = \alpha n (n-1)$, teremos $N' = \alpha (n+1) n$, de onde se conclui que $N' - N = 2 \alpha n$, de modo que neste caso teremos $M = 2 \alpha n$. Logo, se no lugar de 2α escrevermos a, concluiremos que, sempre que tomarmos $M = a n$, teremos certamente $N = \frac{1}{2} a n (n - 1)$, cujo valor também deve desaparecer quando se faz $n = 0$, e por isso não pode receber constantes aditivas; do mesmo modo já apontado antes, isto permanece válido nos casos a seguir.

Lema III.

§. 9. Se tomarmos $N = \alpha\, n\,(n-1)\,(n-2)$, teremos
$N' = \alpha\,(n+1)\,n\,(n-1)$, de onde segue que
$N' - N = 3\,\alpha\, n\,(n-1)$
de modo que neste caso teremos $M = 3\,\alpha\, n\,(n-1)$. Concluímos, por outro lado, que sempre que tomarmos $M = a\, n\,(n-1)$, teremos certamente
$N = \frac{1}{3}\, a\, n\,(n-1)\,(n-2)$.

Lema IV.

§. 10. Se tomarmos $N = \alpha\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$, teremos $N' = \alpha\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)$, cujo fator comum às duas fórmulas é $\alpha\, n\,(n-1)\,(n-2)$, a partir do qual podemos escrever $N' - N = \alpha\, n\,(n-1)\,(n-2)[(n+1)-(n-3)]$, e portanto $N' - N = 4\,\alpha\, n\,(n-1)\,(n-2) = M$; e, por outro lado, concluímos que sempre que tivermos $M = a\, n\,(n-1)\,(n-2)$, teremos certamente $N = \frac{1}{4}\, a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$.

Lema V.

§. 11. Se tomarmos $N = \alpha\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$, teremos $N' = \alpha\,(n+1)\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$ a partir do que deduz-se que $N' - N = M = 5\,\alpha\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$; e concluímos que sempre que tivermos
$M = a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$,
teremos certamente
$N = \frac{1}{5}\, a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$.

§. 12. A partir de agora, é claramente evidente que, sempre que tivermos
$M = a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)$,
é certo que teremos
$N = \frac{1}{6}\, a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4)\,(n-5)$,
e, de modo geral, sempre que
$M = a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,\cdots\,(n-\lambda)$,
teremos certamente
$N = \frac{1}{\lambda+2}\, a\, n\,(n-1)\,(n-2)\,\cdots\,(n-\lambda-1)$, cuja forma geral inclui completamente todos os lemas anteriores em si.

§. 13. Agora, como as letras M e N em geral denotam dois termos sequenciais na série literária A, B, C, D etc., podemos adaptar a equação geral de evolução $N' - N = M$ para cada uma das igualdades citadas no §. 5. Na primeira, como temos $A' - A = 1$, tomaremos $M = 1$, e pelo Lema I podemos inferir que para N, se tem o valor $A = n$, o que certamente é verdadeiro, para qualquer número que o expoente n aceitar, uma vez que o raciocínio realizado nunca se restringiu aos números inteiros.

§. 14. Passando à segunda igualdade $B' - B = A$, como descobrimos que se deve ter $A = n$, usando o valor $M = A = n$, pelo Lema II obteremos para N o valor $B = \frac{1}{2}\,n\,(n-1)$, ou $B = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}$, assim como o desenvolvimento Newtoniano nos dá.

§. 15. Como a terceira igualdade é $C' - C = B$, o Lema III pode ser usado para obtermos $M = \frac{1}{2}\,n\,(n-1)$, onde $a = \frac{1}{2}$, e para o valor de N obteremos $C = \frac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(n-2)$, ou $C = \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}$, bem como obtido pelo desenvolvimento Newtoniano.

§. 16. Nossa quarta igualdade é $D' - D = C$, que quando comparamos com o Lema IV nos fornece

$$M = C = \tfrac{1}{6}\,n\,(n-1)\,(n-2),$$

de modo que se tem $a = \frac{1}{6}$, e então para a letra N encontramos

$$D = \tfrac{1}{24}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3), \text{ ou}$$

$$D = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} \cdot \tfrac{n-3}{4}.$$

§. 17. Encontrado esse valor, vamos para a quinta igualdade $E' - E = D$, que o uso do Lema V nos exibe $M = D = \frac{1}{24}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)$, onde $a = \frac{1}{24}$, e para N no presente caso obtemos

$$E = \tfrac{1}{120}\,n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)\,(n-4),$$

ou como habitual

$$E = \tfrac{n}{1} \cdot \tfrac{n-1}{2} \cdot \tfrac{n-2}{3} \cdot \tfrac{n-3}{4} \cdot \tfrac{n-4}{5}.$$

§. 18. Seria supérfluo prosseguir com os casos posteriores, quando a mais clara luz do meio dia faz ver, para cada uma das letras seguintes, que necessariamente devem aparecer os mesmos valores que o desenvolvimento Newtoniano ensinou; e é particularmente tão bem apropriada a natureza da demonstração, que não se pode negar-lhe, sem antes negar os elementos básicos da Análise. Além disso, todo o raciocínio utilizado aqui mantém sua validade, mesmo que o expoente n seja considerado imaginário.

Referências Bibliográficas

[1] Affonso, A. - *O triângulo de Pascal e o Binômio de Newton.* Dissertação de Mestrado (PROFMAT), UFF, Niterói (2014).

[2] Bassanezi, R. C. - *Modelagem Matemática* teoria e prática. Ed. Contexto, São Paulo (2015).

[3] BRASIL, *Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996* (Lei de Diretrizes e Bases), Brasília (1996).

[4] BRASIL, *PNLD 2015* Coleções mais distribuídas por componente curricular. Brasília (2015).

[5] Coolidge, J. L. - *The story of the binomial theorem.* The American Mathematical Monthly, v.56, n.3 (1949). 147-157.

[6] Dante, L. R. - *Matemática* Contexto e Aplicações. 2ª ed., Editora Ática, São Paulo (2014).

[7] Euclides - *Os Elementos*, Ed. Unesp, São Paulo (2009).

[8] Euler, L. - *Nova demonstratio qvod evolvtio potestatvm Binomii Newtoniana etiam pro exponentibvs fractis valeat*, Nova Acta Academiae Scientiarvm Imperialis Petropolitanae, Tomvs V (1787), 52-58 (Mathematica). Disponível em: <https://archive.org/details/novaactaacademia05impe> Acesso em 19/09/2017.

[9] FAO (Organização das Nações Unidas para a Agricultura e a Alimentação). - *Manual sobre manejo de reservatórios para a produção de peixes*, Brasília (1988). Disponível em: <http://www.fao.org/docrep/field/003/ab486p/AB486P00.htm#TOC> Acesso em 19/09/2017.

[10] Guidorizzi, H. L. - *Um curso de Cálculo*, vol. 4, ed. LTC, Rio de Janeiro (2002).

[11] Hwang, L-C. - *A simple proof of the Binomial Theorem Using Differential Calculus*, The American Statistician, Vol. 63, No. I (2009), 43-44.

[12] Matos, M. P. - *Séries e Equações Diferenciais*, Prentice Hall, São Paulo (2002).

[13] PARANÁ. - *Diretrizes Curriculares da Educação Básica* Matemática, Curitiba (2008).

[14] Poskitt, K. - *Isaac Newton e sua maçã.* Companhia das Letras, São Paulo, (2001).

[15] Rosalski, A. - *A simple and probabilistic proof of the Binomial Theorem*, The American Statistician, 61, (2007) 161-162.

[16] Roos, S. - *A first course in Probability*, 7ª ed., Upper Saddle River, Prentice Hall, New Jersey (2006).

[17] Silva, S. D. - *Estudo do Binômio de Newton.* Dissertação de Mestrado (PROF-MAT), UFPB, João Pessoa (2013).

[18] Sinésio F. - *Curso de Álgebra* para uso dos candidatos à Escola Militar e à Escola de Aeronáutica. 4ª ed. Editora Globo, Porto Alegre (1952).