UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA EM PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

ANTONIO CARLOS DAMASCENO DOS SANTOS

UM RESGATE ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

FORTALEZA
2014

ANTONIO CARLOS DAMASCENO DOS SANTOS

UM RESGATE ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática, da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do titulo de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes

FORTALEZA
2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S233r Santos, Antonio Carlos Damasceno dos
Um resgaste às frações contínuas / Antonio Carlos Damasceno dos Santos. – 2014.
63 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes.

1. Números reais. 2. Números racionais. 3. Teoria da Aproximação. I. Título.

CDD 512.72

ANTONIO CARLOS DAMASCENO DOS SANTOS

UM RESGATE ÀS FRAÇÕES CONTÍNUAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 27 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. José Othon Dantas Lopes (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Antonio Caetano Monte
Universidade de Fortaleza (UNIFOR)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente aos meus pais, Francisco Abel e Ridelmar Damasceno, por toda estrutura familiar e pelos princípios de generosidade, honestidade e dignidade que foram base para formação do meu caráter.

Aos anjos da guarda que passaram pela minha vida e para o principal deles que se chama Ana Maria que esteve presente não só nesse desafio, mas em todos os degraus profissionais que tive que enfrentar em minha vida. Obrigado.

Aos colegas de curso, pois com certeza sem os estudos em grupo e a enorme generosidade de cada um em passar o conhecimento adquirido, seria impossível o êxito nas cadeiras.

Aos professores que tiveram a sabedoria necessária para entender a individualidade de cada aluno e assim ministrar aulas de ótimo nível.

E a UFC e CAPES, a primeira pela estrutura física e por ter cedido os grandes professores do seu quadro e a CAPES pelo apoio financeiro, pois sem esse apoio não seria possível acompanhar o curso.

RESUMO

Um Resgate As Frações Contínuas tem seu início com uma abordagem histórica, mostrando aquilo que se sabe hoje sobre esse assunto é fruto de estudos de vários matemáticos pelo mundo. Além da história, o texto é dividido em mais cinco capítulos e um apêndice, que mostram através de teoremas e exemplos a vantagem, indiscutível, da aproximação de números reais através de números racionais, usando o dispositivo das frações contínuas.
Palavras chaves: Frações Contínuas. Números Reais. Números Racionais. Aproximação.

ABSTRACT

The Rescue A Continuous Fractions got their start with a historical approach, showing what is known today about this issue is the result of studies by various mathematical world. Besides the story, the text is divided into five chapters and an appendix, showing through theorems and examples advantage, indisputable, the approximation of real numbers by rational numbers, using the device of continued fractions.

Keywords: Continued Fractions. Real Numbers. Rational Numbers. Approaches.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Já dizia o célebre matemático russo Nikolai N. Luzin

> "as vantagens do sistema decimal não são matemáticas, mas sim zoológicas. Se em vez de termos dez dedos nas mãos tivéssemos oito, a humanidade utilizaria um sistema de base oito" (Nikolai N. Luzin,1883-1950).

O estudo das frações contínuas não é abordado nos livros didáticos ou pelo menos a grande maioria dos livros de ensino fundamental e ensino médio não trazem esse assunto.

Esse trabalho tem caráter bibliográfico e seu principal objetivo é servir de fonte de pesquisa, tanto para professores de ensino fundamental e médio que queiram incrementar suas aulas, quanto para alunos mais curiosos que não se contentam somente com o que é visto em sala de aula e sentem dificuldade quando se deparam com questões sobre esse assunto.

Em geral, o trabalho apresenta ao longo de seis capítulos e um apêndice, além do contexto histórico, a representação de números racionais e irracionais em frações contínuas, mostrando as principais propriedades, teoremas e trazendo vários exemplos que servem para mostrar a vantagem do uso desse tipo de frações nas aproximações de números reais.

2 FRAÇÕES CONTÍNUAS: ASPECTOS HISTÓRICOS

Os livros didáticos deixaram de lado o uso das frações contínuas para representações de números reais substituindo essa representação pela decimal por parecer a mais obvia.

As frações contínuas foram objeto de trabalho de renomados matemáticos entre os séculos XVII e XIX , como Euller (1707-1783) que em 1737, no livro De Fractionibus Continuis, apresentou a seguinte expressão para o número ***e*** em frações contínuas.

$$\boldsymbol{e} = 2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\dots}}}}}}}$$

ou de forma abreviada: [2;1,2,1,1,4,1,1...]

E bem antes disso, no século V já existia registros de desenvolvimentos de frações contínuas de números. Por exemplo, Aryabhata (476 d.C.), matemático hindu, teria usado um método semelhante para encontrar as soluções inteiras de equações com uma ou mais incógnitas. As famosas equações diofantinas que recebem esse nome em homenagem ao matemático grego Diofanto de Alexandria (250 a.C.), contudo Aryabhata não resolveu de uma forma geral, particularmente usou frações contínuas somente em exemplos específicos. Quem generalizou o processo para resolver equações diofantinas com o uso de um processo semelhante ao desenvolvimento de uma fração contínua de um número foi o matemático, também hindu, Bháscara.

O primeiro uso conhecido desse tipo de fração é dado por Rafael Bombelli (1526-1572), que no livro *Álgebra,* acha uma boa aproximação para raízes quadráticas, do tipo $\sqrt{13}$, usando esse tipo de fração:

$$\sqrt{13} \approx 3 + \cfrac{4}{6 + \cfrac{4}{6}} = \frac{18}{5}$$

Que é uma aplicação do resultado abaixo,

$$\sqrt{a^2 + b} \approx a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + ...}}}}$$

O cientista italiano Cataldi (1548-1626) também obteve uma boa aproximação para o número $\sqrt{18}$:

$$\sqrt{18} = 4 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + \cfrac{2}{8 + ...}}}$$

Um dos fundadores da Royal Society o matemático inglês William Brouncker (1620-1684***),*** apresentou um desenvolvimento do número $\Pi/4$ = [1;3,1,1,1,15,2,72....] como frações contínuas.

$$\frac{\Pi}{4} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cfrac{81}{2 + ...}}}}}$$

Ou ainda;

$$\frac{\Pi}{4}=1+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{72+\ldots}}}}}}}$$

o que pode ser considerado importante para as aproximações do número Π.

Voltando a Euler, ele teria criado um método para encontrar as frações contínuas de raízes de uma equação quadrática com coeficientes inteiros, provando que qualquer irracionalidade quadrática é expressa na forma de fração contínua infinita, também em seu trabalho *De Fractionlous Continious.*

Mais a frente, em 1766, J.H. Lambert generalizou o trabalho de Euler sobre o número ***e,*** e ainda mostrou que:

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\frac{2}{x}+\cfrac{1}{\frac{6}{x}+\cfrac{1}{\frac{10}{x}+\cfrac{1}{\frac{14}{x}+\ldots}}}}$$

Vários outros matemáticos deram a sua contribuição para esse campo de estudos, como Karl Friedrich Gauss (1777-1855), Karl Jacobi (1804-1851), Augustin Cauchy (1789-1857), Charles Hermite (1822-1901), Thomas Stieltjes (1856-1894), OskarPerron e etc... Hoje a teoria das frações contínuas está presente em varias áreas, como as engenharias e a computação sendo objeto de pesquisa ainda longe de terminar.

3 FRAÇÕES CONTÍNUAS

Da relação de conjuntos N $\subset$ Z $\subset$ Q $\subset$ R $\subset$ C, a mais complicada é a passagem dos racionais para os reais.

Sabemos que,

$$N = \{0,1,2,3,4 \dots\}$$
$$Z = \{\dots -3, -2, -1,0,1,2,3 \dots\}$$
$$Q = \{{}^{p}/_{q}\,, p, q \in Z, q \neq 0, {}^{p}/_{q} = {}^{r}/_{s} \leftrightarrow ps = rq\}$$
$$R = Q \cup I$$
$$C = \{a + bi, a, b \in R\}$$

NOTA: I é o conjuntos dos números que não podem ser expresso pela divisão de dois números inteiros.

Partindo da afirmação que os racionais são densos nos reais, isto é, os números reais podem ser arbitrariamente aproximados por racionais, ou em uma linguagem um pouco mais formal temos,

$$\forall \alpha \in \text{R},\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists\ {}^{p}\!/_{q} \in Q \text{ com } \left|\alpha - {}^{p}\!/_{q}\right| < \varepsilon$$

Por exemplo, o número $\prod$ = 3,141592...

$$3 < \prod < 4$$

$$\frac{31}{10} < \prod < \frac{32}{10}$$

$$\frac{p_k}{10^k} < \prod < \frac{p_k + 1}{10^k} \Rightarrow \left|\prod - \frac{p_k}{10^k}\right| < \frac{1}{10^k}$$

Preposição: $\forall\ \alpha \in$ R, $\forall$ q > 0 inteiro, existe p inteiro com $\dfrac{p}{q} < \alpha < \dfrac{p+1}{q}$.

Prova: Seja p =$\lfloor q\alpha \rfloor \in$ Z, p < qα < p+1 $\Rightarrow \frac{p}{q} < \alpha < \frac{p+1}{q}$

NOTA: $\lfloor x \rfloor$ é o maior número inteiro menor ou igual a x.

Com isso, temos que,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q} \text{ e } \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| + \left|\alpha - \frac{p+1}{q}\right| = \frac{1}{q} \text{ ,}$$

Logo: $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$ ou $\left|\alpha - \frac{p+1}{q}\right| \leq \frac{1}{2q}$

Isso mostra que qualquer número real tem infinitas aproximações racionais, de fato, pois podemos ter aproximações racionais com o denominador que quisermos, com o erro menor ou igual a metade do inverso do denominador. Mas isso não é o melhor possível .

Por exemplo, Arquimedes sabia que $\prod \approx \frac{22}{7}$ = 3,1428571428...., o erro da aproximação de $\frac{22}{7}$ é,

$$\left|\alpha - \frac{22}{7}\right| = 0{,}0012... < \frac{1}{700}$$

O holandês Adriaen Antoniszoon, em 1585, encontrou uma aproximação ainda melhor para o número $\prod$ que é.

$\prod \approx \frac{355}{113}$ = 3,14159292... o erro dessa aproximação é:

$$\left|\prod - \frac{355}{113}\right| = 0{,}00000026... < \frac{1}{3000000}$$

3.1 Formação de frações continuas: desenvolvimento de um número real em frações continuas”

A representação de um número real por frações contínuas sempre fornece aproximações surpreendentemente boas e veremos que não só são muitos boas como ainda são as melhores aproximações.

Conceitos Básicos:

Seja α um número real e $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor \in Z$, ou seja, a_0 é a parte inteira de α, teremos dois casos.

1º caso: Se $\alpha = a_0$ paramos.

2º caso: Se $\alpha \neq a_0$ temos,

$$\alpha_1 = \frac{1}{\alpha - a_0} > 1 \; ; \quad \alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

A partir daí, faremos sempre a mesma coisa.

Para n≥ 1 ;$\alpha_n > 1$ e $a_n = \lfloor \alpha_n \rfloor$ um inteiro positivo.

Se $\alpha_n = a_n$, paramos

Senão, $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n} > 1$;$\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$

Daí segue:

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{\alpha_1}$$

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\alpha_2}}$$

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\alpha_3}}}$$

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n + \cfrac{1}{\alpha_{n+1}}}}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3 ..., a_n, \alpha_{n+1}]$$

Em geral.

Se $\alpha_n = a_n$ para algum n $\in N$, temos

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_n}}}}$$

$$\alpha_n = [a_0; a_1, a_2, ..., a_n] \in Q$$

Agora se $\alpha_n \notin Z$, $\forall n \in N$ temos

$$\alpha = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots}}}$$

$$\alpha_n = [a_0; a_1, a_2, ...]$$

Vamos usar esse processo para resolver alguns exemplos práticos, ou seja, seguiremos os dois passos de forma alternada abaixo.

Passo 1: Destaca-se a parte inteira do número, ou seja, representa-se este último sob a forma de uma soma, em que uma das parcelas é um número inteiro e a outra é o resto, inferior à unidade.

Passo 2: A segunda parcela é representada sob a forma de uma fração de numerador 1 e denominador igual ao inverso do resto. A este denominador, aplica-se de novo o primeiro passo, e assim sucessivamente.

Exemplo: Usando o algoritmo acima para o número $\prod$.

$$\prod = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}}$$

Se utilizarmos até a segunda parcela, ou seja

$$\prod \approx 3 + \frac{1}{7} = \frac{22}{7}$$

Teremos a aproximação de Arquimedes e se usar até a quinta parcela, ou seja

$$\prod \approx 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292}}}} = \frac{355}{113}$$

Teremos a aproximação de Adriaen Antoniszoon.

Existem representações por frações contínuas que são muito mais simples que a representação decimal, veja o exemplo a seguir.

Exemplo: Represente a razão áurea em forma de fração contínua.

A razão áurea é igual a $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = 1,618..... , esse número é raiz da equação $x^2 - x - 1 = 0$.

Fazendo o desenvolvimento temos

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\cfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}$$

Assim fica fácil ver que $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ = [1; 1, 1, 1...], e observe que esse resultado respeita a equação $x^2 - x - 1 = 0$ pois se isolamos o x na equação temos $x = 1 + \frac{1}{x}$.

Exemplo: Desenvolver $\sqrt{2}$ em frações contínuas.

$$\sqrt{2} = 1+\frac{1}{a_1}$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1 = 2+\frac{1}{a_2}$$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

Verificando que $a_2 = a_1$, concluímos que, a partir deste momento tudo irá repetir-se, isto é, $a_3 = a_2$, $a_4 = a_3$... Daí teremos que,

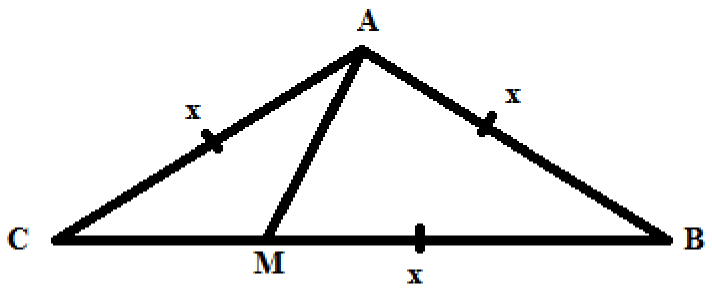
$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{a_4}}}}$$

É bom ressaltar que quando representamos $\sqrt{2}$ sob a forma finita incluindo o número irracional a_n, podemos utilizar o sinal de igualdade. Mas quando o processo de desenvolvimento se prolongar indefinidamente, escreveremos $\sqrt{2} \approx [1;2,2,2,2,...]$.

Em geometria também é possível desenvolver uma grandeza numa fração contínua, veja o exemplo abaixo.

Exemplo: Determinar a razão entre a base e um dos lados de um triângulo isósceles, com ângulo oposto à base de 108º.

Solução: Os ângulos do triângulo ABC medem, respectivamente, 108º, 36º, 36º. Marquemos na base o comprimento BM = x e BC = y.

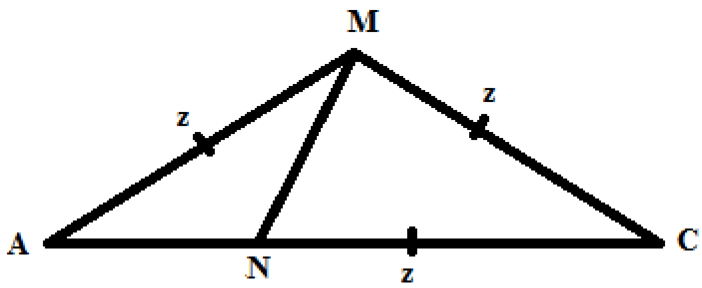


Daí temos:

$$\frac{y}{x} = \frac{BC}{BM} = \frac{BM + MC}{BM} = 1 + \frac{MC}{BM} = 1 + \frac{1}{a_1}$$

$$\frac{1}{a_1} = \frac{BM}{MC} = \frac{AC}{MC}$$

Agora fazendo CN = z e CA = w temos,



$$\frac{w}{z}=\frac{CA}{CN}=\frac{CN+NA}{CN}=1+\frac{NA}{CN}=1+\frac{1}{a_2}$$

$$\frac{1}{a_2}=\frac{CN}{NA}=\frac{MA}{NA}$$

E os ângulos do triângulo MAC medem, respectivamente 108º, 36º, 36º, isso torna o triângulo MAC semelhante com o triângulo inicial. Na primeira parte determinamos a razão $\frac{x}{y}$ entre a base e o lado do triângulo ABC e na segunda parte temos a razão $\frac{z}{w}$ entre a base e o lado do triângulo MAC. Nos dois casos temos a razão entre a base e o lado de triângulos semelhantes e uma vez que, após o primeiro passo voltamos à situação inicial e após o segundo voltamos ao primeiro, o processo nunca terminará.

Então podemos escrever,

$$\frac{x}{y}\approx[1;1,11,\ldots]$$

3.2 Algoritmos de Euclides

Utilizando o processo de Euclides para o calculo do máximo divisor comum entre dois números naturais, teremos uma representação, que será finita, de números racionais por frações contínuas.

Sejam p e q números naturais com q $\neq 0$, podemos escrever, p = $a_0 q + r_1, 0 \leq r_1 < q$.

q = $a_1 r_1 + r_2, 0 \leq r_2 < r_1$,

$r_1 = a_2 r_2 + r_3, 0 \leq r_3 < r_2$,

$\vdots \; \vdots$

$r_{n-1} = a_n r_n,\ r_{n+1} = 0$

Daí segue que,

1) $\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{q}$

2) $\frac{q}{r_1} = a_1 + \frac{r_2}{r_1}$

Repetindo esse processo várias vezes teremos,

$$\frac{p}{q} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}}$$

Ou ainda, $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots a_n]$

Exemplo: desenvolver $\frac{61}{27}$ e $\frac{91}{62}$ em frações contínuas utilizando o algoritmo de Euclides.

a) 61 = 27 x 2 + 7

$\frac{61}{27} = 2 + \frac{7}{27}$, $\frac{27}{7} = 3 + \frac{6}{7}$, $\frac{7}{6} = 1 + \frac{1}{6}$, $\frac{6}{1} = 6 + 0$

$$\frac{61}{27} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}$$ = [2;3,1,6]

b) 91 = 62 x 1 + 29

$$\frac{91}{62} = 1 + \frac{29}{62},\ \frac{62}{29} = 2 + \frac{4}{29},\ \frac{29}{4} = 7 + \frac{1}{4},\ \frac{4}{1} = 4 + 0$$

$$\frac{91}{62} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}$$ = [1;2,7,4]

Obs: Números racionais equivalentes possuem a mesma representação em frações contínuas, veja o desenvolvimento abaixo:

$$\frac{61x3}{27x3} = \frac{183}{81}$$ = [2;3,1,6], pois,

183 = 81 x 2 + 21

$$\frac{183}{81} = 2 + \frac{21}{81},\ \frac{81}{21} = 3 + \frac{18}{21},\ \frac{21}{18} = 1 + \frac{3}{18},\ \frac{18}{3} = 6 + 0$$

$$\frac{183}{81} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6}}}$$

Agora, se o processo de Euclides repetir-se infinitamente, teremos a representação de um número irracional.

A recíproca desse resultado é verdadeira, e então temos o seguinte teorema,

Teorema: Qualquer número racional pode ser representado sob a forma de uma fração contínua finita e qualquer fração contínua finita representa um número racional.

Daí podemos tirar uma conclusão sobre o desenvolvimento de um número real por frações contínuas. Se α for um número racional, ele poderá ser escrito na forma de fração contínua finita e nesse caso, poderíamos desenvolver o processo inverso. Por exemplo,

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{4}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{29}{4}}}=1+\cfrac{1}{2+\frac{4}{29}}=1+\cfrac{1}{\frac{62}{29}}=1+\frac{29}{62}=\frac{91}{62}$$

Isso significa dizer que $\frac{91}{62}$ e [1;2,7,4] são duas formas diferentes de representar o mesmo número.

Mas se α for um número irracional não poderíamos aplicar o processo inverso para chegar em uma igualdade.

4 FRAÇÕES REDUZIDAS

Se no desenvolvimento de uma fração contínua, em algum momento, parássemos o processo e descartássemos a parte posterior desse desenvolvimento, o número que nesse modo obteríamos receberia o nome de reduzida e seria representada por $\frac{p_n}{q_n}$, onde:

$$\frac{p_n}{q_n} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_n}}}}} = [a_0; a_1, a_2, a_3, \ldots a_n]$$

Em particular, a reduzida de ordem zero, isto é n = 0 será $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$

O prático é que o conceito de reduzida serve tanto para as frações contínuas finitas quanto as infinitas. E no caso das frações finitas, existe uma reduzida que coincide com a próprio número. Vejamos o exemplo abaixo,

$$\frac{p_0}{q_0} = \frac{1}{1}$$

$$\frac{p_1}{q_1} = [1;2] = \frac{3}{2}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = [1;2,7] = \frac{22}{15}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = [1;2,7,4] = \frac{91}{62}$$

Já no caso em que a fração contínua é infinita, as sucessões de reduzidas torna-se também infinita. Mas não nos impede de representar algumas reduzidas desse tipo de fração.

Por exemplo a fração [1;1,1,1,1,1,......] = $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}}}}}$ teremos as reduzidas abaixo,

$$\frac{p_0}{q_0}=\frac{1}{1}$$

$$\frac{p_1}{q_1}=[1;1]=\frac{2}{1}$$

$$\frac{p_2}{q_2}=[1;1,1]=\frac{3}{2}$$

$\vdots\ \vdots$

4.1 Determinação da n-ésima reduzida

Vamos agora deduzir uma fórmula de recorrência para determinar a n-ésima reduzida sem precisar efetuar longos cálculos, isto é, sem precisar escrevê-la na forma $\frac{p_n}{q_n}= a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}}$, para depois fazer todo o processo inverso que fizemos até agora.

Sejam,

a) $\dfrac{p_0}{q_0} = \dfrac{a_0}{1}$

b) $\dfrac{p_1}{q_1} = a_0 + \dfrac{1}{a_1} = \dfrac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$

c) $\dfrac{p_2}{q_2} = a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \dfrac{1}{a_2}} = a_0 + \dfrac{1}{\dfrac{a_1 a_2 + 1}{a_2}} = \dfrac{a_0 a_1 a_2 + a_0 + a_2}{a_1 a_2 + 1} = \dfrac{a_2(a_0 a_1 + 1) + a_0}{a_1 a_2 + 1}$

O item c) pode ainda ser escrita da seguinte forma,

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 a_2 + p_0}{q_1 a_2 + q_0}$$

Podemos usar essa igualdade para escrevemos uma regra geral.

$$\left\{ \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n-1} a_n + p_{n-2}}{q_{n-1} a_n + q_{n-2}} \right., \qquad \text{com } n = 2,3,4....$$

A demonstração dessa recorrência será feita por indução.

Primeiro vamos escrever o numerador e o denominador como duas equações.

$$p_n = p_{n-1} a_n + p_{n-2}$$

(1)

$$q_n = q_{n-1} a_n + q_{n-2}$$

Já vimos que essas equações valem para n = 2 no item c) e agora demonstraremos que se essas equações valem para algum n = k, continuarão valendo para n = k + 1.

Primeiramente analisaremos as expressões,

$$\frac{p_k}{q_k} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_k}}}}}$$

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\ddots \cfrac{1}{a_k + \cfrac{1}{a_{k+1}}}}}}}$$

Dessas duas expressões podemos concluir que para passar de $\frac{p_k}{q_k}$ para $\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}$ precisamos substituir a_k por $a_k + \frac{1}{a_k + 1}$. Fazendo essa substituição nas equações (1) teremos,

$$p_{_{k+1}} = p_{k-1}\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) + p_{k-2}$$

$$p_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}}\left[(p_{k-1}a_k + p_{k-2})a_{k+1} + p_{k+1}\right]$$

e

$$q_{k+1} = q_{k-1}\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right) + q_{k-2}$$

$$q_{k+1} = \frac{1}{a_{k+1}}\left[(a_{k-1}a_k + q_{k\_2})a_{k+1} + q_{k-1}\right].$$

Note que os números $p_{k-2}, q_{k-2}, p_{k-1}$ e q_{k-1} não serão alterados, pois suas expressões não incluem a_k.

Desprezando o fator comum $\frac{1}{a_{k+1}}$ e usando a hipótese que

$p_n = p_{n-1}a_n + p_{n-2}$

$q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}$ com n = k

Teremos que,

$p_{k+1} = p_k a_{k+1} + p_{k-1}$ e $q_{k+1} = q_k a_{k+1} + q_{k-1}$

E assim está demonstrado que essas equações são válidas para n = 2,3,4,...s. Daí poderemos escrever o seguinte corolário.

Corolário: Os numeradores p_n e os denominadores q_n de uma fração contínua simples satisfazem

$$\begin{cases} p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{cases} , \qquad n = 1,2,3,.....$$

Com as condições iniciais

$$\begin{cases} p_0 = a_0 \\ q_0 = 1 \end{cases} \text{e} \begin{cases} p_1 = a_0 a_1 + 1 \\ q_1 = a_1 \end{cases}$$

Esse corolário, nos leva ao um novo entendimento de reduzida, pois até o exato momento a ideia de reduzida era a de um número concreto, onde a forma como estivesse representado não era importante.

Mas agora responda a pergunta: Qual a reduzida de segunda ordem do número $\frac{61}{27}$?

As respostas para essa pergunta podiam ser várias. Por exemplo $2\frac{1}{4}$; $2{,}25$; $\frac{9}{4}$; $\frac{18}{8}$ e assim por diante. Todas elas representam o mesmo número, só que escritas de formas distintas. A partir desse corolário, porém, a noção de reduzida muda, pois esta não será só um número concreto, mas também uma forma concreta de representar um número. Isto é, de agora em diante, a fração reduzida de segunda ordem, ou seja, $\frac{p_2}{q_2}$ para o número $\frac{61}{27}$ é $\frac{9}{4}$, pois o numerador e o denominador de cada reduzida passarão a estar inteiramente definidos.

4.2 Tabela para cálculo de reduzidas

Essa tabela facilita no cálculo das reduzidas. Os valores de a_i ficam na primeira linha, os de p_i na segunda linha e o de q_i na terceira.

a_0	a_1	a_2	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
p_0	p_1	p_2	$\cdots$	p_{n-1}	p_n
q_0	q_1	q_2	$\cdots$	q_{n-1}	q_n

De inicio vamos preencher a primeira linha e as duas primeiras colunas como segue abaixo.

a_{n-2}	a_{n-1}	a_n		
p_{n-2}	p_{n-1}			
q_{n-2}	q_{n-1}			

Daí em diante, seguiremos os dois passos abaixo para completar o preenchimento dessa tabela.

Passo 1: A coluna que contém p_{n-1} e q_{n-1} é multiplicada por a_n .

Passo 2: A coluna obtida após o passo 1 é somada a coluna anterior.

Essa seqüência ajuda a calcular o valor de uma fração contínua finita, isto é, na última coluna obtém-se o resultado. Esse processo é muito mais prático do que calcular diretamente usando divisões sucessivas,

Exemplo: Preencha a tabela correspondente a fração [0;3,14,1,2,5].

0	3	14	1	2	5
0	1	14	15	44	235
1	3	43	46	135	721

Note que o seu preenchimento é bem mais simples que o método de divisões sucessivas abaixo,

$$0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5}}}}} = 0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{1+\frac{5}{11}}}} = 0+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{14+\frac{11}{16}}} = 0+\cfrac{1}{3+\frac{16}{235}} = \quad =$$

$$0+\frac{235}{721}=\frac{235}{721}$$

Exemplo: Preencha a tabela correspondente a fração[1;2,7,4].

1	2	7	4
1	3	22	91
1	2	15	62

Sem o uso da tabela teríamos,

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\frac{1}{4}}} = 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{29}{4}}} = 1+\cfrac{1}{2+\frac{4}{29}} = 1+\cfrac{1}{\frac{62}{29}} = 1+\frac{29}{62} = \frac{91}{62}$$

4.3 Quocientes completos

Muitas vezes interrompermos o processo de desenvolvimento de um número numa fração contínua. Veja o exemplo,

$$\frac{61}{27} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{27}{7}}$$

Ou ainda

$$\frac{61}{27} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\cfrac{7}{6}}}$$

Os números $\frac{27}{7}$ e $\frac{7}{6}$ que aparecem no desenvolvimento acima, são chamados de quocientes completos, onde também é usada a seguinte notação.

$$\frac{61}{27} = \left[2 \mid \frac{27}{7}\right] = \left[2;3 \mid \frac{7}{6}\right] = [2;3,1,6],$$

Ou seja, o quociente completo é separado dos elementos anteriores por um traço vertical.

4.4 Propriedades das reduzidas

1ª Propriedade: Diferença entre duas reduzidas adjacentes.

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

Demonstração:

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}}{q_n q_{n+1}}$$

Agora fazendo $D_n = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1}$ e usando a fato que, $p_n = p_{n-1}a_n + p_{n\_2}$ e $q_n = q_{n-1}a_n + q_{n-2}$ temos que, $p_{n+1} = p_n a_{n+1} + p_{n-1}$ e $q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1}$

$$p_{n+1} = p_n a_{n+1} + p_{n-1} \qquad (1)$$

$$q_{n+1} = q_n a_{n+1} + q_{n-1} \qquad (2)$$

Substituindo (1) e (2) em D_n temos,

$$D_n = (p_n a_{n+1} + p_{n-1})q_n - (q_n a_{n+1} + q_{n-1})p_n = p_n q_n a_{n+1} + p_{n-1}q_n - p_n q_n a_{n+1} - p_n q_{n-1}$$

=

$$= p_{n-1}q_n - p_n q_{n-1} = -(p_n q_{n-1} - p_{n-1}q_n) \text{(3)}$$

Observe que a expressão entre parênteses de (3) é a mesma que D_n, no entanto, com todos os indicies diminuídos de uma unidade. Assim concluirmos que,

$$D_n = -D_{n-1}$$

Usando esse resultado, várias vezes, podemos chegar até o índice zero, observe,

$$D_n = -D_{n-1} = D_{n-2} = -D_{n-3} = \ldots = (-1)^n D_0$$

Basta agora calcular o valor de D_0 ,

$$D_0 = p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_1 a_0 + 1).1 - a_0 a_1 = 1$$

Daí segue que,

$$D_n = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$$

Concluindo que,

$$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$$

2ª Propriedade: Cada reduzida com número de ordem impar é maior que as frações adjacentes, isto é, a imediatamente anterior e a imediatamente posterior e cada reduzida de número de ordem par é menor que as adjacentes.

Demonstração: Utilizando a fórmula $\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ para $n = 2k$ e $n = 2k+1$, com k pertencendo aos naturais temos,

1) $\Delta_{2k} = \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} - \frac{p_{2k}}{q_{2k}} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k} q_{2k+1}} > 0$

2) $\Delta_{2k+1} = \frac{p_{2k+2}}{q_{2k+2}} - \frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}} = \frac{(-1)^{2k+1}}{q_{2k+1} q_{2k+2}} < 0$

Exemplo: Verifique que $\frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} > 0$ e $\frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} < 0$.

Para fazer a verificação basta fazer a utilização direta da fórmula,

$\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$, para $n = 2$ e $n = 3$ veja,

$$\Delta_2 = \frac{p_3}{q_3} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{(-1)^2}{q_2 q_3} = \frac{1}{q_2 q_3} > 0$$

e

$$\Delta_3 = \frac{p_4}{q_4} - \frac{p_3}{q_3} = \frac{(-1)^3}{q_3 q_4} = \frac{-1}{q_3 q_4} < 0$$

3ª Propriedade: Em relação ao número de ordem, a diferença entre duas frações adjacentes é decrescente em valor absoluto.

Demonstração: Podemos utilizar diretamente a fórmula $\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ para a verificação, veja,

$$|\Delta_n| = \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

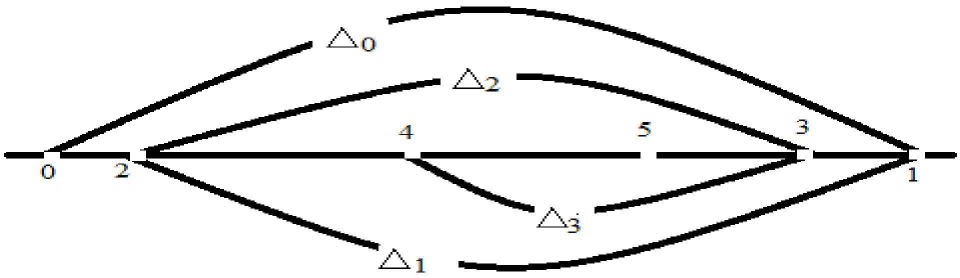
$$|\Delta_{n+1}| = \frac{1}{q_{n+1} q_{n+2}}$$

Como $q_{n+2} > q_n$, temos que,

$$|\Delta_{n+1}| < |\Delta_n|$$

4ª Propriedade: O valor exato de uma fração contínua finita situa-se entre os valores de quaisquer duas reduzidas adjacentes.

Para a demonstração dessa propriedade faremos a análise da figura abaixo. Os números 1, 2, 3, 4..., não representam o valor das frações, mas o seu número de ordem. No extremo esquerdo, situa-se a fração nº 0, isto é, a parte inteira da fração contínua. Para passar à fração nº 1, temos de nos deslocar para a direita. Para passar da fração nº 1 à fração nº 2, é necessário dar um passo no sentido inverso, para a esquerda, mas esse passo é mais curto que o anterior, e assim sucessivamente. Os passos à direita vão-se alternando com os passos à esquerda, sendo cada passo mais curto que o anterior. Com isso a 4ª propriedade se verifica.



5ª Propriedade: O erro absoluto cometido ao substituir o número α pela reduzida $\frac{p_n}{q_n}$ é menor que $\frac{1}{{q_n}^2}$ isto é,

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{{q_n}^2}$$

Prova: Usando a 4ª propriedade e a fórmula $\Delta_n = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n q_{n+1}}$ obteremos a seguinte desigualdade:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Agora substituindo o número q_{n+1} pelo número inferior q_n na fração $\frac{1}{q_n q_{n+1}}$, obteremos $\frac{1}{{q_n}^2}$, o que só reforça a desigualdade em causa.

6ª Propriedade: Todas as reduzidas são irredutíveis.

Demonstração: Admitamos que seja redutível a fração $\frac{p_n}{p_n}$, isso significa que o seu numerador e o seu denominador apresentam um fator comum γ diferente de um, ou seja,

$$p_n = \gamma p'_n$$
$$q_n = \gamma q'_n$$

Onde p'_n e q'_n são naturais. Agora utilizando a fórmula $D_n = p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = (-1)^n$ teremos,

$$\gamma(p_{n+1}q'_n - p'_n q_{n+1}) = (-1)^n$$

O que é um absurdo, pois o primeiro membro da igualdade é divisível por γ, mas o segundo não é.

5 FRAÇÕES CONTÍNUAS INFINITAS

5.1 Distância entre o finito e o infinito.

Apesar das possíveis semelhanças existentes entre o finito e o infinito, na verdade existe um enorme vazio entre eles.

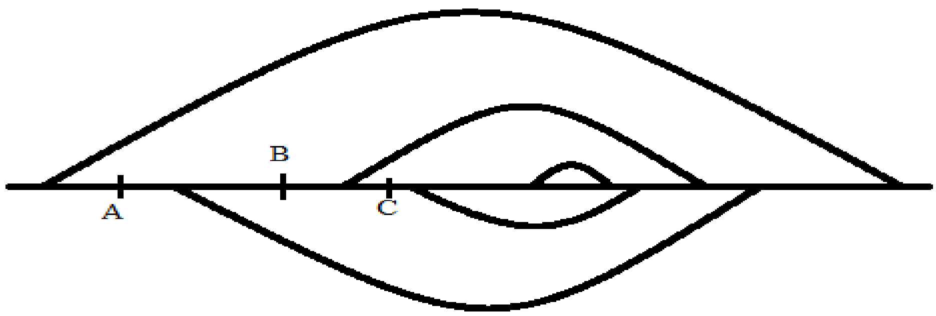
O significado de uma fração decimal finita é facilmente verificada. Por exemplo, a dizima $0{,}33$ é igual a $\frac{33}{100}$, mas qual é o significado do número $0{,}333\ldots$?

Outra pergunta que podemos fazer, é qual o significado da soma infinita $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\ldots$? Mas quando o número de parcelas é finito, a soma fica fácil de determinar, por exemplo: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$.

Esses exemplos mostram um pouco da distância que existe entre o finito e o infinito e afim de transpor essa distância usaremos o axioma de Cantor que também é conhecido por princípios dos seguimentos encaixados.

Axioma de Cantor: Se numa reta for dada uma sucessão infinita de segmentos que obedeça as seguintes condições: 1) cada segmento está contido no anterior; 2) o comprimento dos segmentos tende para zero, então existe um e só um ponto que pertence a todos os segmentos.

Vamos fazer uma analise mais detalhada desse axioma usando a figura abaixo.



Observe que a cada passo do processo são deixados de fora alguns pontos. Por exemplo, o ponto A pertence ao primeiro segmento, mas não pertence ao segundo. O ponto B pertence ao primeiro e ao segundo segmento, mas não pertence ao terceiro e assim sucessivamente. Assim existem pontos que farão parte dos primeiros 1000 segmentos, mas ficarão de fora do 1001° segmento.

Exemplo: Considere no eixo numérico os segmentos abaixo

$[0{,}1]$, $\left[\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right]$, $\left[\frac{3}{8},\frac{5}{8}\right]$, $\left[\frac{7}{16},\frac{9}{16}\right]$, ...,
$\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^n}\right]$,....

Assim fica fácil ver que o ponto $\frac{1}{2}$ é o único que pertence a todos os segmentos.

Exemplo: Analisando a sucessão de segmentos abaixo, fica fácil ver que o único ponto pertencente a todos os segmentos é o ponto zero.

$[0{,}1]$, $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\left[0,\frac{1}{3}\right]$, ..., $\left[0,\frac{1}{n}\right]$, ...

Com esses exemplos podemos escrever infinitos pontos que pertençam ao segmento $[o, 1]$, mas mesmo assim deixaríamos espaços vazios pois sabemos que os racionais não preenchem toda a reta.

Assim os pontos que preencheriam esses espaços vazios seriam designados de números irracionais e daí convencionou-se que todo número irracional seria representado por uma sucessão infinita de segmentos encaixados que não podem ser escritos sob forma da razão entre números naturais.

Antes de representar números irracionais em forma de fração contínua, vamos entender o conceito de valor numérico de uma fração contínua infinita.

Observe que as frações reduzidas de frações contínuas infinitas são números racionais, e esses números definem uma sucessão de segmentos encaixados,

$$\left[\frac{p_0}{q_0},\ \frac{p_1}{q_1}\right],\left[\frac{p_1}{q_1},\ \frac{p_2}{q_2}\right],\ \left[\frac{p_2}{q_2},\ \frac{p_3}{q_3}\right],\ldots,\left[\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\ \frac{p_n}{q_n}\right],\ldots \quad (*)$$

E como os denominadores

$$q_0 \leq q_1 < q_2 < q_3 < \cdots$$

São estritamente crescentes, temos que,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{qn}\right) = 0$$

Ou seja, a diferença entre frações reduzidas adjacentes tende para zero.

Agora de acordo com o axioma de Cantor, existe um único número real que pertence a todos os segmentos de (*). Vamos considerar, por definição, que este número é o valor da fração contínua infinita.

5.2 Representação de números irracionais por frações contínuas

Sendo α um número irracional será que seu valor numérico corresponde ao mesmo valor numérico da fração contínua infinita $[a_0; a_1, a_2, a_3 \dots]$ obtida a partir de α?

Para responder essa pergunta, examinemos o processo de desenvolvimento de α em uma fração contínua.

$\alpha = a_0 + \frac{1}{x_1}$, sendo $o < \frac{1}{x_1} < 1$

Obtendo que

$a_0 < \alpha.$

Daí segue que,

$$x_1 = \frac{1}{\alpha - a_0} = a_1 + \frac{1}{x_2}$$

Donde

$\frac{1}{\alpha - a_0} > a_1, \quad \alpha - a_0 < \frac{1}{a_1}, \quad \alpha < a_0 + \frac{1}{a_1}$

Concluindo que,

$$a_0 < \alpha < a_0 + \frac{1}{a_1}$$

Ou melhor ainda,

$$\frac{P_0}{q_0} < \alpha < \frac{p_1}{q_1}$$

Isso mostra que α está contido entre quaisquer duas frações reduzidas adjacentes.

Daí, concluímos que o valor de α é o mesmo valor da fração contínua infinita $[a_0; a_1, a_2, a_3 \dots]$, pois existe um único valor que pertence a todos os segmentos de (*) da seção 4.1.

5.3 Univocidade dos reais

Como os números racionais desenvolvem-se em frações contínuas finitas, e os números irracionais em frações contínuas infinitas, podemos afirmar que qualquer número real pode ser desenvolvido em uma fração contínua.

Mas ainda precisamos demonstrar que a representação de um número real por uma fração contínua é definida univocamente, isto é, de forma única. Para isso, basta fazer a demonstração do teorema abaixo,

Teorema: Duas frações contínuas $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ e$[b_0; b_1, b_2, \dots]$ (finitas ou infinitas) são iguais entre si, se e só se,

1º Tiverem o mesmo número de elementos,

2º Os elementos correspondentes de uma e outra coincidirem, isto é, $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ...

OBSERVAÇÃO: “Terem o mesmo número de elementos” deve ser entendida do seguinte modo: ou ambas as frações são finitas e têm o mesmo número de elementos, ou são infinitas.

Demonstração. Representemos por α o valor das duas frações contínuas iguais,

$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \ldots] = [b_0; b_1, b_2, \ldots]$.

O elemento a_0 (assim como b_0) é igual a $\lfloor\alpha\rfloor$, e, por conseguinte, é definido pelo valor de α. Logo

$$a_0 = b_0$$

Subtraia-se a_0 de α

$\alpha - a_0 = [0; a_1, a_2, \ldots] = [0; b_1, b_2, \ldots]$.

Considerando a grandeza inversa

$\frac{1}{\alpha - a_0} = [a_1; a_2, \ldots] = [b_1; b_2, \ldots]$.

O elemento a_1 (assim como b_1) é igual a $\left\lfloor\frac{1}{\alpha - a_0}\right\rfloor$ e, por conseguinte, define-se univocamente a partir do valor de $\frac{1}{\alpha - a_0}$. Logo,

$a_1 = b_1$,

E assim sucessivamente. Repetindo este raciocínio, podemos demonstrar que $a_2 = b_2$, $a_3 = b_3$, etc.

Para terminarmos a demonstração, basta verificar se em frações contínuas de valores iguais, podemos ter números de elementos diferentes.

Verificação: Suponhamos que a primeira fração contínua é finita e tem s elementos, enquanto a segunda é finita e tem t elementos, sendo t > s, ou é infinita. Daí, teremos que,

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_s}}} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{a_s + \cfrac{1}{b_{s+1} + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

Ou

$$a_s = a_s + \cfrac{1}{b_{s+1} + \cfrac{1}{\ddots}}$$

E, portanto,

$$\cfrac{1}{b_{s+1} + \cfrac{1}{\ddots}} = 0,$$

O que é impossível. Concluindo que t = s.

5.4 Irracionalidade quadrática

Definição: Irracionalidade quadrática é qualquer número irracional que constitua uma raiz de uma equação quadrática de coeficientes inteiros.

Exemplo: O número $1 + \sqrt{3}$ é uma racionalidade quadrática?

Para responder essa questão faremos uso do seguinte lema,

LEMA: Se $p + q\sqrt{M}$, com $p\ e\ q$ racionais e M um número não quadrado perfeito, for uma raiz da equação

$$a_0 x^{\,n} + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

Com coeficientes inteiros, $p - q\sqrt{M}$ também será uma raiz desta equação.

Daí, segue que para determinar a equação quadrática que gera esta irracionalidade, devemos tomar $1 + \sqrt{3}$ e $1 - \sqrt{3}$ como raízes de uma mesma equação. Logo, esta equação tem a seguinte forma:

$$\left(x - 1 - \sqrt{3}\right)\left(x - 1 + \sqrt{3}\right) = 0,$$

Ou ainda

$$x^2 - 2x - 2 = 0$$

Exemplo: O número $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ é uma irracionalidade quadrática?

Para responder essa questão faremos uso do lema seguinte,

LEMA: Se a expressão $p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N},$ com $p, q\ e\ r$ racionais e $M\ e\ N$ números não quadrados perfeitos, onde $\sqrt{M}\ e\ \sqrt{N}$ são radicais não semelhantes, representar uma raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, o número

$p \pm q\sqrt{M} \pm r\sqrt{N}$, seja qual for a combinação de sinais, também será raiz dessa equação.

NOTA: Os radicais quadráticos $\sqrt{M}\, e \,\sqrt{N}$ dizem-se semelhantes quando acontece a igualdade, $\sqrt{M} = p\sqrt{N}$, com p racional.

Desse lema segue que, para determinar a irracionalidade quadrática (ou não), do número $\sqrt{2} + \sqrt{5}$, devemos achar a equação com coeficientes inteiros que tenha como raízes $x_1 = \sqrt{2} + \sqrt{5}$,$x_2 = \sqrt{2} - \sqrt{5}$, $x_3 = -\sqrt{2} + \sqrt{5}$, $x_4 = -\sqrt{2} - \sqrt{5}$. Logo, esta equação tem a seguinte forma,

$$\left(x - \sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(x - \sqrt{2} + \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{2} - \sqrt{5}\right)\left(x + \sqrt{2} + \sqrt{5}\right) = 0$$

Ou ainda,

$$x^4 - 14x^2 + 9 = 0$$

Teorema. O valor de qualquer fração contínua infinita periódica é uma irracionalidade quadrática.

NOTA: Uma fração continua diz-se periódica se os seus elementos formam uma sucessão periódica. Por exemplo,

$[0; 1,1,1, \dots];$

$[2; 1,5,1,5,1,5 \dots];$

$[0; 1,2,3,5,3,5,3,5 \dots].$

Demonstração: Seja $\alpha = [0; a_1, a_2, \dots]$ uma fração contínua infinita periódica simples cujo período tem comprimento k. Sendo assim, $\alpha = \alpha_{k+1}$.

$\alpha = [0; a_1, a_2, \dots, a_k, a_1, a_2, \dots]$, com $\alpha_{k+1} = [a_1, a_2, \dots]$

Usando a fórmula $\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$, onde a demonstração será feita no apêndice deste texto, temos,

$$\alpha = \frac{p_k \alpha_{k+1} + p_{k-1}}{q_k \alpha_{k+1} + q_{k-1}}$$

Daí, segue que,

$$\alpha = \frac{p_k \alpha + p_{k-1}}{q_k \alpha + q_{k-1}}$$

Isto é, α satisfaz a equação quadrática:

$$q_k x^2 + (q_{k-1} - p_k)x - p_{k-1} = 0$$

Os sinais das raízes dessa equação são diferentes, sendo α positiva.

NOTA: Se a fração for periódica mista,

$\alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_N, a_{N+1}, \dots, a_{N+k}, \dots],$

Com período igual à $[a_{N+1}, \dots, a_{N+k}, \dots]$, é necessário desdobrar primeiro, da direita para a esquerda, o inicio da fração, até ao elemento a_N, inclusive, e depois utilizar a demonstração apresentada.

Exemplo: Verifique se a fração contínua $[0; 2,2,2, \dots]$ é uma irracionalidade quadrática.

Sabemos que,

$$\alpha = [0; 2,2,2 \dots] = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

Faremos o desdobramento dessa igualdade utilizando dois passos alternadamente:

1) Inverter ambos os membros;

2) Subtrair a cada membro da igualdade a parte inteira.

Seguindo os passos temos,

$$\frac{1}{\alpha} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

$$\frac{1}{\alpha} - 2 = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Com isso o segundo membro da igualdade é o próprio α, ou seja,

$$\frac{1}{\alpha} - 2 = \alpha$$

Daí podemos escrever a seguinte equação quadrática para α,

$\alpha^2 + 2\alpha - 1 = 0$,

Com $\alpha = -1 + \sqrt{2}$.

Exemplo: Verifique se $[0; 1,3,1,3,1,3, \dots]$ é uma irracionalidade quadrática.

Nesse caso o período é constituído de dois algarismos, e teremos que usar os dois passos do exemplo anterior mais de uma vez.

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}}}$$

$$\frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

$$\frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha} - 1} - 3 = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\ddots}}}$$

Novamente o segundo membro da igualdade é igual à α, ou seja,

$$\frac{1}{\frac{1}{\alpha}-1}-3=\alpha$$

Daí, podemos escrever a equação quadrática abaixo,

$$\alpha^2+3\alpha-3=0$$

Com,

$$\alpha=\frac{-3+\sqrt{21}}{2}$$

Teorema: Qualquer irracionalidade quadrática se exprime através de uma fração contínua periódica.

Demonstração: Seja α uma irracionalidade quadrática. Vamos desenvolver α em uma fração contínua, detendo-nos a cada passo, a partir do segundo:

$$\alpha=[a_0;a_1|\alpha_2]=[a_0;a_1,a_2|\alpha_3]=\cdots=[a_0;a_1,a_2,\dots,a_{n-1}|\alpha_n]=\cdots$$

Nestas igualdades, $\alpha_2,\alpha_3,,\dots,\alpha_n,\dots$ são quocientes completos. Usaremos o fato que quando um quociente completo se repete, isto é, $\alpha_n=\alpha_{n-1}$, a fração contínua é periódica.

Em primeiro lugar, demonstraremos que todo quociente incompleto satisfaz uma equação quadrática de coeficientes inteiros:

$$A_n{\alpha_n}^2+B_n\alpha_n+C_n=0 \qquad (1)$$

Em segundo lugar, demonstraremos que os coeficientes da equação (1) são limitados em módulo.

$$\begin{aligned}&|A_n|<L;\\&|B_n|<M; \qquad (2)\\&|C_n|<N\end{aligned}$$

Observe que os limites L, M e N não dependem de n (dependem apenas de α). Uma vez que A_n, B_n, C_n são números inteiros, cada um deles só pode tomar um conjunto finito de valores admissíveis. Logo, para um dado α, o número de diferentes equações do tipo (2) possíveis e, por conseguinte, o número de diferentes raízes destas equações, é finito. Assim, é evidente que a sucessão de quocientes completos $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ a repetição é inevitável, tal como se pretende demonstrar.

Demonstraremos primeiro (1) e depois (2).

A irracionalidade quadrática α satisfaz uma certa equação quadrática com coeficientes inteiros

$$A\alpha^2 + B\alpha + C = 0 \qquad \text{(i)}$$

Vamos também usar a fórmula abaixo,

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}} \qquad \text{(ii)}$$

Substitua-se em (i) α pela expressão (ii), e depois de alguns cálculos:

$$A(p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2})^2 + B(p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2})(q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}) + C(q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2})^2 = 0$$

Ou

$$A_n{\alpha_n}^2 + B_n\alpha_n + C_n = 0$$

Onde

$$\begin{aligned} A_n &= A{p_{n-1}}^2 + Bp_{n-1}q_{n-1} + C{q_{n-1}}^2; \\ B_n &= 2Ap_{n-1}p_{n-2} + B(p_{n-1}q_{n-2} + p_{n-2}q_{n-1}) + \\ &\quad +2Cq_{n-1}q_{n-2}; \\ C_n &= A{p_{n-2}}^2 + Bp_{n-2}q_{n-2} + C{q_{n-2}}^2 \end{aligned} \qquad \text{(iii)}$$

Resta demonstrar que os coeficientes (iii) têm valor absoluto limitado. De acordo com o resultado abaixo,

$$\left|\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} - \alpha\right| < \frac{\delta}{{q_{n-1}}^2}$$

Onde $-1 < \delta < 1$, pelo que

$$p_{n-1} = \alpha q_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}} \qquad (-1 < \delta < 1).$$

Substitua-se esta expressão de p_{n-1} na primeira das fórmulas (iii):

$$\begin{aligned} A_n &= A\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}}\right)^2 + B\left(\alpha q_{n-1} + \frac{\delta}{q_{n-1}}\right) q_{n-1} + C{q_{n-1}}^2 \\ &= {q_{n-1}}^2(A\alpha^2 + B\alpha + C) + 2A\delta + B\delta + \frac{A\delta^2}{{q_{n-1}}^2} = \cdots \end{aligned}$$

A expressão entre parênteses, de acordo com a fórmula (i), é igual a zero, pelo que

$$\ldots = \left(2A\alpha + B + \frac{A\delta}{{q_{n-1}}^2}\right)\delta$$

Visto que $|\delta| < 1$, teremos

$$|A_n| < \left|2A\alpha + B + \frac{A\delta}{{q_{n-1}}^2}\right|$$

Tomemos ainda em consideração que ${q_{n-1}}^2 > 1$ ($q_0 = 1$ e a sucessão q_n é crescente). Logo, ao retirarmos ${q_{n-1}}^2$, isto é, ao substituirmos o seu valor por 1, apenas reforçamos a desigualdade:

$$|A_n| < |2A\alpha + B + A\delta| \leq |2A\delta| + |B| + |A|.|\delta| < |2A\alpha| + |B| + |A|$$

Atingimos assim o nosso objetivo: obtivemos um limite de $|A_n|$, não dependente de n.

Em vez de repetir este raciocínio para o caso de $|C_n|$, notemos que $|C_n|$ se obtém a parti de A_n por meio da substituição de n por $n-1$, isto é, $C_n = A_{n-1}$. Uma vez que o limite encontrado não depende de n, também se aplica a C_n. Quanto a B_n é melhor utilizar um método indireto. Calculemos o discriminante da equação (1), aplicando as fórmulas (iii). Depois de alguns cálculos obtemos:

$$B_n{}^2 - 4A_nC_n = (p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1})^2(B^2 - 4AC)$$

Agora, usando a fórmula $D_n = p_{n+1}q_n - p_nq_{n+1} = (-1)^n, temos$

$$p_{n-1}q_{n-2} - p_{n-2}q_{n-1} = (-1)^{n-2}$$

Logo,

$$B_n{}^2 - 4A_nC_n = B^2 - 4AC \qquad (3)$$

Esta fórmula exprime um fato natural: os quocientes que fazem parte do desenvolvimento da irracionalidade quadrática α em uma fração contínua são irracionalidades quadráticas do mesmo tipo que α. Este tipo é definido pelo discriminante.

Todos eles têm a forma

$$\alpha_n = s_n + r_n\sqrt{D}$$

Sendo D um valor constante.

Podemos agora concluir da equação (3) que

$$B_n{}^2 = B^2 - 4AC + 4A_nC_n$$

Uma vez que todos os termos do segundo membro são limitados, obtemos que $B_n{}^2$ é, portanro, $|B_n|$, é limitado.

Agora podemos concluir que as irracionalidades quadráticas e só elas exprimem-se através de frações contínuas periódicas.

6 APROXIMAÇÃO DE NÚMEROS REAIS

6.1 As reduzidas são boas aproximações

Na seção 2.1 foi dito que, as frações contínuas nos fornece aproximações surpreendentemente boas de número reais e ainda afirma que tais aproximações são as melhores possíveis.

Nesse capítulo, veremos que as frações reduzidas são as mais vantajosas não só em relação às frações de denominadores inferiores ou iguais, mas também em relação às frações de denominadores superiores mais próximos. Sendo assim, só obteremos vantagem maior quando atingirmos o valor do denominador da reduzida seguinte.

Teorema. Para todo $p, q \in Z$, com $0 < q < q_{n+1}$ temos

$$|q_n\alpha - p_n| \leq |q\alpha - p|$$

Além disso, se $0 < q < q_n$ a desigualdade acima é estrita.

Demonstração. Como o $\mathrm{mdc}(p_n, q_n) = 1$, temos que se $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ então $p = kp_n$ e $q = kq_n$ para algum inteiro$k \neq 0$ e neste caso o resultado é claro. Assim, podemos supor que $\frac{p}{q} \neq \frac{p_n}{q_n}$ de modo que

$$\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} > \frac{1}{q_n q_{n+1}}$$

Já que $q < q_{n+1}$. Assim, $\frac{p}{q}$ está fora do intervalo de extremos $\frac{p_n}{q_n}$ e $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ e portanto

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq min\left\{\left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right|, \left|\frac{p}{q} - \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\right|\right\} \geq \frac{1}{qq_{n+1}}$$

O que implica

$$|q\alpha - p| \geq \frac{1}{q_n + 1} \geq |q_n\alpha - p_n|$$

Além disso, a igualdade só pode ocorrer se $\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, donde $a_{n+1} \geq 2$ e $q_{n+1} > 2q_n$, pois em uma fração contínua finita, o último coeficiente a_n é sempre maior que 1. Nesse caso, se$q < q_n$, teremos

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geq \left|\frac{p}{q} - \frac{p_n}{q_n}\right| - \left|\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n}\right| \geq \frac{1}{qq_n} - \frac{1}{q_nq_{n+1}} = \frac{q_{n+1} - q}{qq_nq_{n+1}} > \frac{1}{qq_{n+1}}$$

O que implica

$$|q\alpha - p| > \frac{1}{q_{n+1}} \geq |q_n\alpha - p_n|$$

Isso mostra que as reduzidas, e só elas, têm um erro absoluto reduzido inferior ao de todas as outras frações de denominador menor, e assim, também, um coeficiente de vantagem superior.

NOTAS

NOTA 1: Entenda por aproximação vantajosa, quando não for possível elevar a exatidão sem aumentar o denominador.

NOTA 2: Erro reduzido é igual à metade do quociente entre o erro absoluto real e o máximo erro possível, ou seja

$$\frac{\left(\frac{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right|}{\frac{1}{2q}}\right)}{2} = \frac{2|q\alpha - p|}{2} = |q\alpha - p|$$

NOTA 3: Coeficiente de vantagem indica quantas vezes o erro absoluto real é menor que o máximo erro possível, e podemos designá-la como,

$$\lambda = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2|q\alpha - p|}\text{ , onde } h = |q\alpha - p|$$

7 CONCLUSÃO

Para concluir vejamos agora alguns exemplos que reforçam a idéia que as frações continuas são ótimas aproximações.

Exemplo: Usando $\alpha = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$, $p = p_{n+1} - p_n$ e $q = q_{n+1} - q_n$; mostre que a fração $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1}-p_n}{q_{n+1}-q_n}$, apesar de não ser reduzida e de $q_n < q < q_{n+1}$, é tão vantajosa como a reduzida $\frac{p_n}{q_n}$.

Solução: Basta desenvolver o módulo $|q\alpha - p|$.

$$|q\alpha - p| = \left|(q_{n+1} - q_n)\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - p_{n+1} + p_n\right| = \left|\frac{p_n q_{n+1} - q_n p_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_{n+1}};$$

$$|q_n\alpha - p_n| = \left|q_n\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - p_n\right| = \left|\frac{q_n p_{n+1} - p_n q_{n+1}}{q_{n+1}}\right| = \frac{1}{q_{n+1}}$$

Logo temos que $|q\alpha - p| = |q_n\alpha - p_n|$.

Exemplo: Verifique o que foi feito no exemplo anterior com a fração $\alpha = \frac{91}{62}$.

Solução: Sabemos que,

$$\frac{91}{62} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{4}}}$$

Daí tiramos suas reduzidas,

$$\frac{p_0}{q_0} = 1,$$

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{22}{15}$$

$$\frac{p_3}{q_3} = \frac{91}{62}$$

Agora fazendo

$$\frac{p}{q} = \frac{p_3 - p_2}{q_3 - q_2}$$

Temos

$$\frac{p}{q} = \frac{91 - 22}{62 - 15} = \frac{69}{47}$$

Vamos agora calcular o coeficiente de vantagem para as frações $\frac{22}{15}$ e $\frac{69}{47}$ usando a fórmula $\lambda = \frac{1}{2h} = \frac{1}{2|q\alpha - p|}$.

1) Para a fração $\frac{22}{15}$ temos

$$\frac{1}{2|q\alpha - p|} = \frac{1}{2\left|15.\frac{91}{62} - 22\right|} = 31$$

2) Para a fração $\frac{69}{47}$ temos

3)

$$\frac{1}{2|q\alpha - p|} = \frac{1}{2\left|47.\frac{91}{62} - 69\right|} = 31$$

O que mostra que mesmo sem ser reduzida, a fração $\frac{69}{47}$ é tão vantajosa quanto a fração $\frac{22}{15}$. Mas, a primeira fração têm o denominador bem maior que o da segunda fração, reforçando a idéia que só a próxima reduzida seria realmente mais vantajosa.

Exemplo: Faça a aproximação do número π por meio de frações de diferentes denominadores, deste 1 até o denominador 10.

$$para\ q = 1\ temos\ \frac{3}{1}$$

$$para\ q = 2\ temos\ \frac{6}{2}$$

$$para\ q = 3\ temos\ \frac{9}{3}$$

$$para\ q = 4\ temos\ \frac{13}{4}$$

$$para\ q = 5\ temos\ \frac{16}{5}$$

$$para\ q = 6\ temos\ \frac{19}{6}$$

$$para\ q = 7\ temos\ \frac{22}{7}$$

$$para\ q = 8\ temos\ \frac{25}{8}$$

$$para\ q = 9\ temos\ \frac{28}{9}$$

$$para\ q = 10\ temos\ \frac{31}{10}$$

Exemplo: Calcule o coeficiente de vantagem de cada fração do exemplo anterior.

1) $\frac{1}{2|1.\pi-3|} = 3{,}5$

2) $\frac{1}{2|2.\pi-6|} = 1{,}8$

3) $\frac{1}{2|3.\pi-9|} = 1{,}2$

4) $\frac{1}{2|4.\pi-13|} = 1{,}2$

5) $\frac{1}{2|5.\pi-16|} = 1{,}7$

6) $\frac{1}{2|6.\pi-19|} = 3{,}3$

7) $\frac{1}{2|7.\pi-22|} = 56{,}5$

8) $\frac{1}{2|8.\pi-25|} = 3{,}8$

9) $\frac{1}{2|9.\pi-28|} = 1{,}8$

10) $\frac{1}{2|10.\pi-31|} = 1{,}2$

Veja que a fração $\frac{22}{7}$ é de longe a mais vantajosa, mesmo quando comparada com frações com denominadores maiores próximos, reforçando mais uma vez a grande ferramenta que são as reduzidas na aproximação de números irracionais.

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Vimos nesse trabalho que podemos obter ótimas aproximações de números irracionais com números racionais usando o dispositivo das frações contínuas, mesmo sabendo que no caso dos irracionais as frações contínuas são infinitas, temos a opção de interromper o desenvolvimento da fração para achar uma reduzida e essa será uma ótima aproximação.

A exclusão desse tema dos livros didáticos, a meu ver, é um erro, pois o estudo das frações contínuas ajudaria, e muito, no estudo dos números racionais e principalmente no entendimento dos irracionais, que são motivos de vários questionamentos tanto no ensino fundamental como no médio.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, E.X.L. e BRACCIALI, C.F. **Frações contínuas**: propriedades e aplicações. Editora Plêiade, 2005.

BESKIN, N.M. **Frações contínuas**: iniciação à matemática. Editora Mir Moscovo, 1987. Tradução de Pedro Lima.

NIVER, I. Números racionais e irracionais. **SBM**, 1984.

POMMER, W.M. **Frações contínuas no ensino médio?** São Paulo: FEUSP, 2009. P. 3-4; 11-12.

SANTOS, J.P. de O. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: Impar, 1998. P. 139-159.

APÊNDICE A – DEMOSTRAÇÕES DE FÓRMULA E LEMAS

1) Demonstração da fórmula $\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$.

Sabendo que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{p_{n-2}a_{n-1} + p_{n-3}}{q_{n-2}a_{n-1} + q_{n-3}}$, e se substituirmos a_{n-1} por $a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}$, teremos

$$\alpha = \frac{p_{n-2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}\right) + p_{n-3}}{q_{n-2}\left(a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n}\right) + q_{n-3}} = \frac{(p_{n-2}a_{n-1} + p_{n-3})\alpha_n + p_{n-2}}{(q_{n-2}a_{n-1} + q_{n-3})\alpha_n + q_{n-2}}$$

Daí, segue que

$$\alpha = \frac{p_{n-1}\alpha_n + p_{n-2}}{q_{n-1}\alpha_n + q_{n-2}}$$

2) Prova do lema: Se $p + q\sqrt{M}$, com $p\ e\ q$ racionais e M um número não quadrado perfeito, for uma raiz da equação

$a_0 x^{\,n} + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$,

Com coeficientes inteiros, $p - q\sqrt{M}$ também será uma raiz desta equação.

Prova. É dado que

$$a_0\left(p + q\sqrt{M}\right)^n + a_1\left(p + q\sqrt{M}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(p + q\sqrt{M}\right) + a_n = 0 \qquad (1)$$

Precisamos demonstrar que

$$a_0\left(p - q\sqrt{M}\right)^n + a_1\left(p - q\sqrt{M}\right)^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\left(p - q\sqrt{m}\right) + a_n = 0 \qquad (2)$$

Desenvolvendo os parênteses na igualdade (1), teremos que os termos da forma $\left(q\sqrt{M}\right)^{\alpha}$ que se obtêm são divididos em dois grupos:

1º α é um número par $(em\, particular,\ \ \alpha = 0)$. Todos estes termos são racionais. Representemos a sua forma $k;$

2º α é um número ímpar. Todos estes termos são da forma $s\sqrt{M}$. Representemos a sua soma por $l\sqrt{M}$.

Com isso, a igualdade (1) toma a seguinte forma:

$$k + l\sqrt{M} = 0 \qquad (3)$$

Faça uma transformação análoga na igualdade (2).

Esta última igualdade obtém-se de (1) substituindo $q\sqrt{M}$ por $-q\sqrt{M}$. Essa substituição não se reflete nos termos que constituem potências pares de $q\sqrt{M}$, mas altera o sinal dos que constituem potências ímpares. Logo a igualdade (2) pode ser escrita assim:

$$k - l\sqrt{M} = 0 \qquad (4)$$

A igualdade (3) só se verifica para $k = l = 0$.

Isso se verifica pois, para $l = 0$, a igualdade (3) significa que $\sqrt{M}$ é um número racional. Logo, pelo contrário, $l = 0$, teremos a igualdade $k = 0$.

Concluindo que, se $k = l = 0$, a igualdade (4) será verdadeira.

3) Prova do lema: Se a expressão $p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}$, com $p, q\ e\ r$ racionais e $M\ e\ N$ números não quadrados perfeitos, onde $\sqrt{M}\ e\ \sqrt{N}$ são radicais não semelhantes, representar uma raiz de uma equação algébrica com coeficientes inteiros, o número $p \pm q\sqrt{M} \pm r\sqrt{N}$, seja qual for a combinação de sinais, também será raiz dessa equação.

Se $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$, então por hipótese temos que,

$$P\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) =$$
$$= a_0\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right)^n + a_1\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right)^{n-1} + \cdots$$
$$+ a_{n-1}\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) + a_n = 0$$

Precisamos demonstrar que

$$P\left(p \pm q\sqrt{M} \pm r\sqrt{N}\right) = 0 \qquad (1)$$

Desenvolvendo os parênteses da igualdade (1), obteremos temos que terão a seguinte forma

$$Ap^{\alpha}\left(q\sqrt{M}\right)^{\beta}\left(r\sqrt{N}\right)^{\gamma}$$

Onde A é um coeficiente, e α, β, γ são expoentes inteiros não neativos. Esse termos serão divididos em quatro grupos

1º $Se\ \beta\ par\ e\ \gamma\ par\ teremos\ um\ termo\ racional$

2º $Se\ \beta\ par\ e\ \gamma\ ímpar\ teremos\ um\ termo\ da\ forma\ r\sqrt{N}$

3º $Se\ \beta\ ímpar\ e\ \gamma\ par\ teremos\ um\ termo\ da\ forma\ q\sqrt{M}$

4º $Se\ \beta\ ímpar\ e\ \gamma\ ímpar\ teremos\ um\ termo\ da\ forma\ n\sqrt{MN}$

Com isso a igualdade (1) tomará a forma,

$$P\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) = k + l\sqrt{M} + m\sqrt{N} + n\sqrt{MN} = 0$$

Os termos do 1º e 2º grupos não sofrem alteração se substituirmos $q\sqrt{M}$ por $-q\sqrt{M}$, mas os termos do 3º e 4º grupos ficarão com o sinal contrário.

Logo, se

$$P\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) = k + l\sqrt{M} + m\sqrt{N} + n\sqrt{MN}$$

Então teremos

$$P\left(p - q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) = k - l\sqrt{M} + m\sqrt{N} - n\sqrt{MN}$$

Fazendo nas diferentes combinações de sinais um raciocínio análogo, obteremos os seguintes resultados, ou seja

Se $P\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) = k + l\sqrt{M} + m\sqrt{N} + n\sqrt{MN}$

Então

$$P\left(p + q\sqrt{M} - r\sqrt{N}\right) = k + l\sqrt{M} - m\sqrt{N} - n\sqrt{MN}$$

$$P\left(p - q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) = k - l\sqrt{M} + m\sqrt{N} - n\sqrt{MN}$$
$$P\left(p - q\sqrt{M} - r\sqrt{N}\right) = k - l\sqrt{M} - m\sqrt{N} + n\sqrt{MN}$$

Como $P\left(p + q\sqrt{M} + r\sqrt{N}\right) = 0$, só ocorre se $k = l = n = 0$, temos que todos os restantes valores $P\left(p \pm q\sqrt{M} \pm r\sqrt{N}\right)$ são iguais a zero.