SOCIEDADE BRASILEIRA DE MATEMÁTICA

FUNDAÇÃO UNIVERSIDADE FEDERAL DE RONDÔNIA

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

Vicente Ferrer Trajano Bezerra

# O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS COM A UTILIZAÇÃO DA PLANILHA EXCEL NA FORMA DE APLICATIVO

Porto Velho

2014

Vicente Ferrer Trajano Bezerra

# O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS COM A UTILIZAÇÃO DA PLANILHA EXCEL NA FORMA DE APLICATIVO

Trabalho de Conclusão apresentado ao Mestrado Profissional em Matemática em rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática Profissional, sob orientação do Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva.

Porto Velho
2014

# FICHA CATALOGRÁFICA

## BIBLIOTECA PROF. ROBERTO DUARTE PIRES


Bezerra, Vicente Ferrer Trajano.

B574e

O ensino das funções exponenciais e logarítimas com a utilização da planilha Excel na forma de aplicativo / Vicente Ferrer Trajano Bezerra, Porto Velho / RO, 2014.

79 f.

Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Fundação Universidade Federal de Rondônia / UNIR / RO.

Orientador: Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva

1.Matemática. 2.Ensino e aprendizagem. 3.Engenharia Didática. 4.Funções Exponenciais e Logarítmicas. I.Silva, Marinaldo Felipe da. II.Título.

CDU: 510.5

Bibliotecária Responsável: Rejane Sales CRB11/903

Vicente Ferrer Trajano Bezerra

**O ENSINO DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS COM A UTILIZAÇÃO DA PLANILHA EXCEL NA FORMA DE APLICATIVO**

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT, do Departamento de Matemática da Fundação Universidade Federal de Rondônia – UNIR, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática aplicada, aprovado no dia 19 de setembro de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos docentes:

Prof. Dr. Marinaldo Felipe da Silva
Orientador / Presidente
PROFMAT / UNIR

Prof. Dr. Flávio Batista Simão
PROFMAT / UNIR

Prof. Dr. Edcarlos Miranda de Souza
PROFMAT / UFAC

# DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho ao meu querido pai, Cícero Trajano Bezerra e à minha querida mãe, Josefa Francisca Bezerra, pelos ensinamentos e pelos exemplos de honradez e perseverança.

## AGRADECIMENTOS

Aos meus pais pelo exemplo, pela educação herdada e pelas orações.
Aos meus irmãos: Francisco, Socorro, Raimundo, Mauro e Antônio pelo apoio sempre prestado.
A Lucélia de Lima Teixeira, minha esposa, pela cumplicidade, companheirismo e apoio, e, ainda, a minha filha, Josefa Isabele Teixeira Trajano, por ser a razão do meu existir.
Aos meus colegas de curso pelo coleguismo e pelas discussões que tanto me ajudaram nesta caminhada.
Aos colegas de alojamento, Sales, Gilson e Guilherme, por fazerem minhas noites de estudo no Sintero mais descontraídas.
Ao Instituto Federal de Rondônia - Campus Colorado do Oeste, nas pessoas do Diretor Geral Prof. Carlos Henrique dos Santos e do Diretor de Ensino Prof. José Ribamar pela colaboração prestada sempre que necessária.
Aos meus colegas de trabalho pelo companheirismo.
Ao meu amigo Antônio Neto, por ter me incentivado a fazer o exame de acesso ao Profmat.
Aos meus alunos por se disponibilizarem a me ajudar no procedimento experimental.
Ao professor Tomás Daniel Menéndez Rodríguez, pela disposição em relação ao PROFMAT, e aos demais professores pelos ensinamentos.
Ao professor Marinaldo Felipe da Silva pelo zelo e comprometimento na orientação.
A Capes pelo financiamento e a SBM pela oportunidade que me deu de fazer um mestrado tão importante para minha formação.
A todos que de alguma forma contribuíram para o êxito deste trabalho.

BEZERRA, V. F. T. O ensino das funções exponenciais e logarítmicas com a utilização da planilha eletrônica Excel na forma de aplicativo. TCC (Mestrado) – Programa de Pós Graduação. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT no Polo da Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, 2014.


**RESUMO**

Este trabalho apresenta uma sequência de desafios e atividades interdisciplinares com o objetivo de proporcionar o ensino e aprendizagem de aplicações das funções exponenciais e logarítmicas por meio de aplicativos elaborados em planilha eletrônica Excel.

Visa ainda investigar o uso de tal ferramenta no dia a dia da sala de aula, entre o público alvo do trabalho, no caso, alunos do 1º ano do ensino médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – Campus Colorado do Oeste. E ao mesmo tempo propõe situações-problema desafiadoras para o aprendizado consistente desse tipo de função. Essa abordagem encontra respaldo nos PCN's (Parâmetros Curriculares Nacionais) ao trabalhar com resolução de problemas.

A fundamentação teórico-metodológica se embasou nos princípios da Engenharia Didática e a metodologia empregada tomou como base os fundamentos da pesquisa qualitativa. Os alunos não foram identificados e os dados foram coletados por meio de pré-teste, pós-teste, participação nas atividades didáticas e fichas de avaliação que serviram para embasar e fundamentar a pesquisa.



**Palavras-Chave:** Matemática. Física. Função Exponencial. Função Logarítmica. Interdisciplinaridade. Ensino.

A imaginação é mais importante que o conhecimento. Conhecimento auxilia por fora, mas só o amor socorre por dentro. Conhecimento vem, mas a sabedoria tarda.

**Albert Einstein**

BEZERRA, V. F. T. The teaching of exponential and logarithmic functions using an Excel spreadsheet in the form of an application. TCC (MA) - Graduate Program. Professional Masters in Mathematics in National Network - PROFMAT in the Polo at the Universidade Federal de Rondônia, Porto Velho, Brazil, 2014.


## ABSTRACT

This paper presents a series of interdisciplinary challenges and activities with the objective of supporting the teaching and learning of exponential and logarithmic functions available through a Microsoft Excel spreadsheet.

It also seeks to investigate the use of this tool on a daily basis in the classroom among 1st-year high school students at the Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – Campus Colorado do Oeste, Brazil. On the basis of the findings, issues for consistent learning of this type of function are identified. The approach investigated finds support in the Brazilian National Curricular Parameters (NCPs) related to problem-solving.

The theoretical and methodological foundation of this research is based on the principles of Teaching Engineering, and the methodology reflects the fundamentals of qualitative research. The students were not identified, and the data were collected through pre-tests, post-tests, participation in didactic activities, and assessment sheets; the findings that served to support and justify the research.



**Keywords:** Mathematics. Physics. Function. Exponential Function. Logarithmic Function. Interdisciplinarity. Education.

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE TABELAS

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

# SUMÁRIO

# INTRODUÇÃO

O projeto de pesquisa “O ensino das funções exponenciais e logarítmicas com a utilização da planilha Excel na forma de aplicativo” foi desenvolvido com alunos do primeiro ano do Ensino Médio do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia de Rondônia – Campus Colorado do Oeste.

Pretendemos investigar se o uso da planilha Excel como um aplicativo pode tornar mais eficiente o aprendizado, sendo um meio complementar ao ensino tradicional que faz uso de livros didáticos, de listas de exercícios, intermediados pelo professor em sua exposição no quadro branco.

Esta investigação é relevante, pois o uso e disponibilidade de computadores, *notebooks*, *tablets* e até mesmo celulares que têm o pacote *Microsoft Office*, ou simular, com planilha eletrônica Excel é cada vez mais frequente entre professores e alunos. Isso permite o uso desse *software* de modo mais relevante e com o objetivo de fortalecer o aprendizado.

É nosso objetivo verificar, ainda, se o uso da planilha Excel desperta o interesse e é mais atraente do que a aula tradicional que apresenta um baixo rendimento, por mais esforços que os professores dediquem, quando lecionam funções e especificamente, funções exponenciais e logarítmicas.

Tendo em vista que as aplicações de funções exponenciais e logarítmicas estão presentes em diversas áreas do conhecimento, é preponderante a necessidade de despertar o interesse do aluno nessa área da Matemática, já que ela é o fio condutor para a boa interação com outras ciências.

Para o bom entendimento do leitor, este trabalho está desenvolvido da seguinte forma:

O Capítulo 1 contém a Introdução. Onde são expostos os objetivos almejados com o desenvolvimento deste trabalho.

No Capítulo 2 estão a Justificativa e a Contextualização, onde são apresentados os problemas existentes na nossa trajetória pessoal e profissional. Apresenta-se ainda o problema central do trabalho, identificado em sala de aula, no decorrer de três anos lecionando de maneira tradicional o tema funções. Também estão listadas as questões a serem investigadas e os objetivos pretendidos.

O Capítulo 3 explora o Referencial Teórico no qual este autor se embasou. São explorados trabalhos já desenvolvidos e que serviram de subsídio para dá bom andamento aos temas abordados, agora com nuances antes não percebidas. Além disso, é explicitada a metodologia utilizada para obter os resultados almejados.

O Capítulo 4 contém Os Fundamentos das Funções Exponenciais e Logarítmicas. Mostra e desenvolve os conceitos dessas funções e a relação entre elas, mostrando que se trata de funções inversas.

No Capítulo 5 é explorada A Planilha na Prática Docente, onde é evidenciada uma das formas de se usar a Planilha para o aprendizado.

O Capítulo 6 trata da Metodologia. É apresentada uma descrição dos elementos explorados durante a pesquisa e bem como os elementos que a nortearam. Nesse capítulo também é feita uma análise dos dados coletados pelos instrumentos de pesquisa.

O Capítulo 7 descreve as Aplicações. São expostas as situações-problema e bem como os meios para resolvê-las. Também são apresentados alguns dos resultados obtidos pelos alunos.

No Capítulo 8 são feitas as Considerações Finais. São apresentadas algumas considerações a respeito do ensino da Matemática com a Planilha, assim como as limitações que apareceram durante a pesquisa.

# 1. JUSTIFICATIVA E CONTEXTUALIZAÇÃO

Como professor do IFRO – Campus Colorado do Oeste, temos ministrado desde 2010, tanto aulas de Física, que é a área da nossa formação, quanto aulas de Matemática para turmas do Ensino Médio. Nas aulas de Física desde algum tempo vinha fazendo uso frequente de objetos de aprendizagem assistidos por computador. Tais objetos, geralmente obtidos na *Internet*, apresentam formas rígidas de manuseá-los, e apesar de chamarem bastante a atenção do aluno e proporcionarem aprendizagem significativa, não permitem que tanto o professor quanto o aluno possam criar e adaptar problemas teóricos aos seus algoritmos já estabelecidos e programados.

Pensando na superação dessas limitações, passamos a elaborar aplicativos usando a planilha do Excel, que em referências futuras, neste texto, chamaremos apenas de Planilha. O seu uso se mostrou extremamente profícuo em diversas áreas da Física, a exemplo de conservação da energia mecânica ou de trocas de calor, como sugerem as Figuras 1 e 2. E que apesar de serem pré-moldados, permitiam a alteração de suas fórmulas, tanto pelo professor, quanto pelos alunos. Com a vantagem de incluir em um mesmo aplicativo diversas grandezas presentes nas áreas de estudo.

Os recursos algébricos associados ao esboço de gráficos na Planilha permitem um sem número de atividades didáticas, de acordo com a criatividade do professor e até mesmo do aluno. Este pode ser encorajado a produzir aplicativos voltados para situações-problema em diversas áreas da Matemática. Dessa forma, as potencialidades da Planilha devem instigar o educador a explorar formas inovadoras de possibilitar também, por parte do aluno, a busca autônoma do aprendizado.

FIGURA 1: Aplicativo conservação da energia mecânica

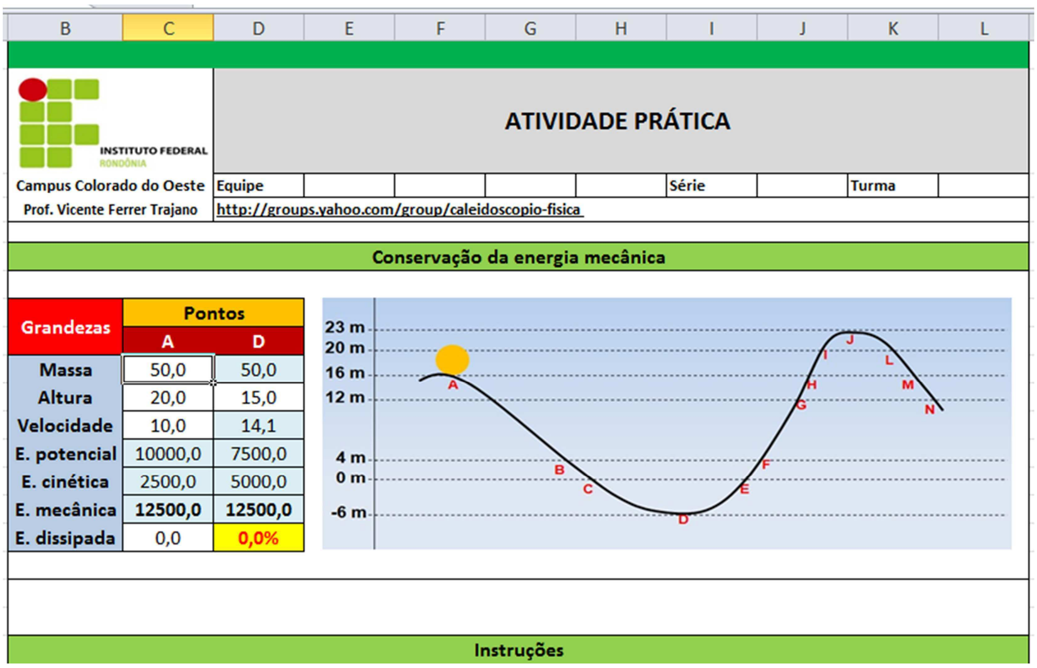



FIGURA 2: Aplicativo trocas de calor


Um dos seus objetivos é proporcionar ao aluno uma aprendizagem mais significativa, tornando a obtenção de resultados extremamente rápida por meio do aplicativo da Planilha, que não prima somente pela funcionalidade mais também pela boa aparência e que como ressalta Selbach:

> Cabe ao professor tornar os conteúdos conceituais com que trabalha algo interessante, novo, surpreendente, colorido, grande, criativo, desafiador, etc., principalmente quando se trabalha com alunos mais novos que ainda não agregam razões externas (medo de uma nota baixa e outros medos) para a sua atenção (SELBACH, 2010, p.16).

Sem abrir mão das atividades convencionalmente desenvolvidas em sala de aula, como a exposição teórica, a resolução de lista de exercícios, de situações-problema ou de aulas práticas, a Planilha os complementa e proporciona um novo olhar sobre o que é aprendido. E como diz Feijó:

> As planilhas devem ser utilizadas para demonstrar uma mudança de comportamento educacional que proporciona ao aprendiz verificar que apesar de seu processo de aprendizagem ficar em suas mãos o mesmo perceba que não existe somente a transferência do conhecimento e sim um processo de construção do conhecimento (FEIJÓ, 2007, p.41).

O uso de tal ferramenta tornou-se interessante não somente porque as salas de aulas são equipadas com computador e *Datashow*, onde o professor pode fazer uso de recursos multimídia em diversos momentos da aula, mas, sobretudo porque os alunos dispõem de acesso aos computadores da biblioteca e dos laboratórios de informática ou porque parte deles tem *notebook*. Onde eles poderão em outros momentos explorar um recurso que já está instalado em todos os computadores, que é o pacote *Microsoft Office*, do qual faz parte o Excel.

O uso desses dois aplicativos nas aulas de Física permite aos alunos, inclusive das turmas de nível superior, onde tal disciplina é parte da grade curricular, prever resultados de questões e irem muito além, elaborando suas próprias questões ao atribuírem valores às grandezas presentes na Planilha.

No ensino de Matemática para turmas de 1º ano do Ensino Médio, percebemos ser possível também lançar mão de tal ferramenta, e no estudo de funções quadráticas, no ano de 2012, os alunos tanto puderam ver e discutir a construção de gráficos de acordo com a função adotada quanto aprender como se escreve uma função na Planilha, quando eram solicitados a participar indo ao computador digitar uma função por eles escolhida, como é exemplificado na Figura 3. Mas queríamos que os alunos explorassem aplicações não somente fazendo cálculos nos cadernos ou em trabalhos escritos e então vimos a oportunidade de usar a Planilha para verificar também o comportamento no gráfico de uma aplicação de função.

Para aplicar essa atividade, o trabalho se desenvolveu com a divisão de situações-problema presentes no livro didático adotado para aquela série, em equipes de três componentes. Os temas eram todos diferentes e envolvia cálculo da área máxima de um galinheiro, altura máxima atingida por uma pedra em lançamento vertical, produto máximo de dois números e o faturamento máximo mensal de uma empresa de televisão, como sugere a Figura 4.

FIGURA 3: **Aplicativo função quadrática**

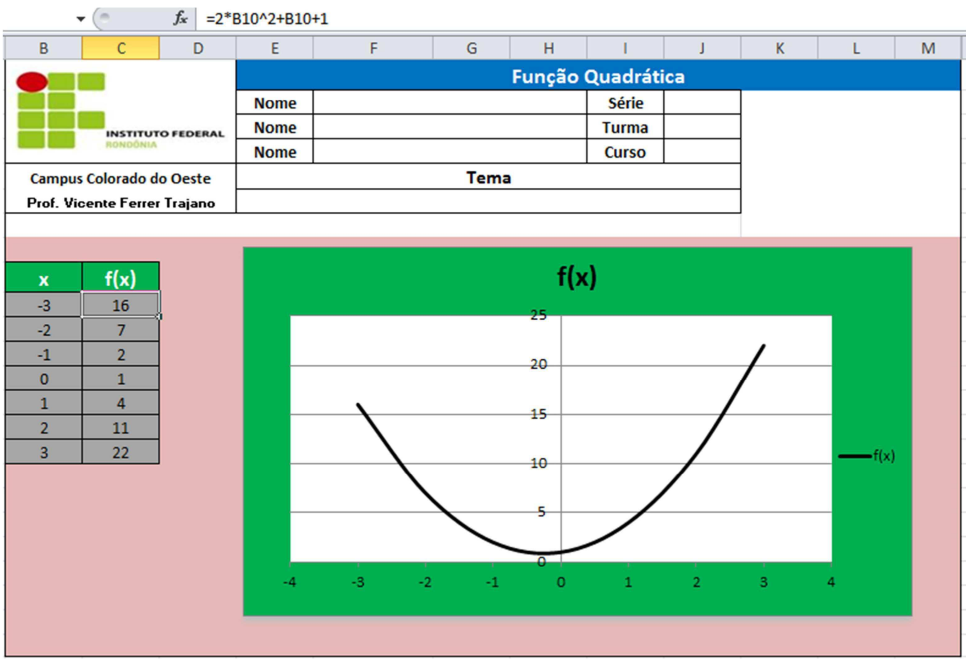
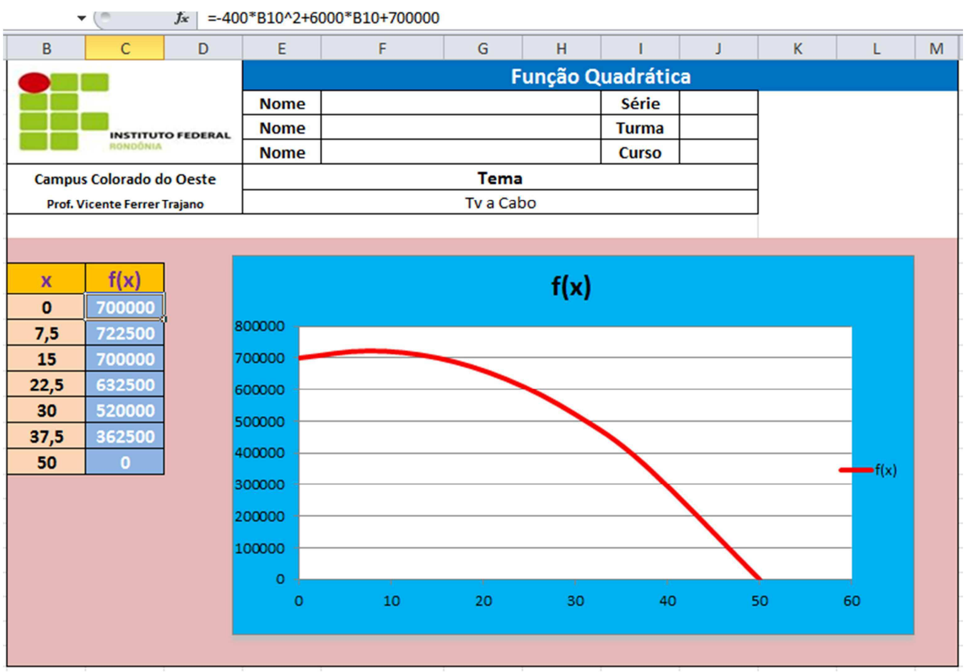



FIGURA 4: **Aplicativo faturamento máximo**




Assim, objetivamos uma abordagem interdisciplinar ao relacionar Matemática e informática e outras áreas como a Física, já que em diversos momentos os alunos precisaram recorrer à pesquisa ou esclarecer dúvidas inclusive com professores de informática para digitar corretamente as fórmulas na Planilha. Por outro lado, o uso do computador já presente na vida dos nossos alunos, assíduos usuários de redes sociais, os aproxima dessa realidade. E como apregoa Selbach:

> Nosso aluno é sempre um aluno curioso, mas vivendo tempo de *Internet* e *Twitter*, cercado de estímulos e de aparelhos eletrônicos, usuários de telefones celulares que sintetizam ferramenta de busca notável, geralmente não sentem curiosidade pelas mensagens e pelos desafios que seu professor ou que sua professora propõe (SELBACH, 2010, p. 31).

Diante dessa aceitação do desafio, por parte dos alunos, que foi usar a Planilha sem terem conhecimento aprofundado, ou em muitos casos, sem terem tido contato com a mesma, é que concluímos ser pertinente abordar aplicações das funções exponenciais e logarítmicas. Porém agora explorando a necessidade por parte do aluno de resolver uma situação-problema e ao mesmo tempo analisar seu comportamento a partir do gráfico fornecido pela Planilha.

Essa proposta de abordagem torna-se mais desafiadora, pois se inserem em uma só Planilha quatro aplicações das funções mencionadas, além de contemplar em alguns casos, mais de duas grandezas. E se justifica pela importância dessas funções, como defende Lima:

> Os logaritmos continuam, por diversos motivos, a merecer posição de destaque no ensino da Matemática, devido à posição central que ocupa nessa ciência e em suas aplicações. Essa posição é permanente porque a função logarítmica e a sua inversa, a função exponencial, constituem a única maneira de descrever matematicamente a

> evolução de uma grandeza cuja taxa de crescimento (ou decrescimento) é proporcional à quantidade daquela grandeza existente em dado momento (LIMA, 1996, p.07).

O uso da informática, portanto, não deve resumir-se apenas ao desenvolvimento de atividades corriqueiras, para o desenvolvimento de procedimentos técnicos como o preenchimento de diários ou a elaboração de trabalhos e avaliações escritas, ademais, deve prestar-se ao fortalecimento das relações de ensino-aprendizagem, como defende Chaves, apud Francisco:

> Além das vantagens e os benefícios da introdução de microcomputadores na Educação, é necessário indicar algumas das possíveis maneiras de o microcomputador auxiliar o processo pedagógico (CHAVES, apud FRANCISCO, 2006, p.08).

A presença das funções exponenciais e logarítmicas no mesmo aplicativo é necessária já que uma é a inversa da outra. Isso permitirá a percepção da relação intrínseca dessas duas funções em diversas aplicações, pois na função exponencial o domínio é o expoente e na função logarítmica o seu domínio é a potência. Isso permitirá a aproximação dessas duas funções, já que em muitos livros didáticos o seu estudo é segmentado, tornando mais difícil a percepção da correlação didática de ambas.

# 2. REFERENCIAL TEÓRICO

Fazemos aqui uma breve análise sobre algumas dissertações relacionadas ao tema abordado. Nosso objetivo é tomar como base dissertações que exploraram o uso da Planilha e ao mesmo tempo se debruçaram sobre as aplicações de funções exponenciais e logarítmicas. Contudo, tal abordagem não é comum e as que encontramos procuraram trabalhar as duas temáticas separadamente. Mas aproximando-se desse propósito, encontramos o trabalho de FERREIRA (2006) e FEIJÓ (2007) e sobre os quais teceremos observações.

Na dissertação de Feijó (2007) - *O ensino de matemática financeira na graduação com a utilização da planilha e da calculadora: uma investigação comparativa* – o objetivo central é analisar as vantagens de se utilizar a Planilha em comparação com o uso apenas da calculadora em um ensino essencialmente tradicional.

A pesquisa teve como corpo experimental três turmas de um curso de Ciências Contábeis de uma faculdade de Porto Alegre. O autor, professor dessas turmas, explora tópicos de Matemática Financeira por meio da Planilha e ao mesmo tempo compara os resultados com os obtidos em avaliações desse mesmo tema, mas na perspectiva de uma abordagem tradicional, que usa como instrumento para auxiliar nos cálculos a calculadora HP. O trabalho foi desenvolvido em sequências, que foram desde a sondagem em relação ao uso de computadores pelos alunos até a averiguação dos conhecimentos prévios dos mesmos alunos quanto ao uso da Planilha e culminou com comparação entre as duas formas de aprendizagem já expostas acima.

Os temas abordados foram operações baseadas nas capitalizações descontínuas simples e compostas, sistemas de amortização, taxa interna de retorno, valor presente líquido e série de pagamentos variáveis. O autor procurou identificar a preferência dos alunos pelo uso da calculadora ou da Planilha em cada tema específico, tendo como resposta em alguns casos a escolha pelo uso da primeira ferramenta e em outros casos pelo uso da segunda. Isso resultou na constatação de que os conteúdos podem ser trabalhados com os dois recursos e concluindo que a inserção da Planilha no ensino é inevitável e uma questão de cidadania.

O trabalho de FERREIRA (2006) – *Uma sequência de ensino para o estudo de Logaritmos usando a Engenharia Didática* – tem como pressupostos a utilização da Engenharia Didática e usando uma sequência didática que privilegia situações reais e a origem dos logaritmos. As atividades foram elaboradas para alunos da 1ª série do Ensino Médio do Colégio Militar de Santa Maria – RS com a participação de 27 alunos divididos em trios, usando a ferramenta computacional *Winplot*; software gratuito, disponível para *download* na *Internet*. Tal divisão, segundo a autora, devia-se à possibilidade de proporcionar a aquisição de aprendizado por meio da mediação entre os componentes do trio e entre os alunos do grupo maior e também com o professor.

A autora defende que o estudo de logaritmos deve ir muito além da aplicação direta de propriedades operatórias, levando em consideração as aplicações de logaritmo em diversas áreas do conhecimento. O aprendizado se daria de forma gradual pela construção do conceito de logaritmo.

O desenvolvimento desse trabalho ocorreu em quatro etapas. A primeira se deu pela aplicação de um questionário, que visava fazer um levantamento dos conhecimentos prévios dos alunos e para fundamentar uma análise *a priori*. Essa análise fez parte da segunda etapa, junto com a construção da sequência didática. Em seguida foi desenvolvida a terceira etapa, que foi a aplicação da sequência, onde a autora analisa o desempenho dos alunos e só interfere quando solicitada, dando autonomia para que os trios construam suas respostas e considerações. Ela conclui o trabalho com a quarta etapa, onde é feita uma análise *a posteriori* com base nos dados colhidos e consequente validação das hipóteses de pesquisa.

A autora defende que o uso do laboratório de informática é motivador, pois nele as ansiedades são rapidamente suprimidas e o *software* em questão é de fácil manipulação, dispensando conhecimentos prévios para seu uso. Foram abordados temas relacionados à escala Richter sobre magnitude de terremotos e *tsunamis* ou à determinação do PH de uma substância e conclui que a aplicação dessa sequência mostrou-se eficaz para minimizar dificuldade na construção do conceito de logaritmo.

## 2.1. Informática na Educação Formal

Ainda é recente a introdução da informática na educação formal, tendo a década de 1990 a sua inserção mais efetiva por meio do uso dos microcomputadores e do acesso à *Internet*. E a plenitude do seu uso ainda não é uma realidade, haja vista as fervorosas discussões quanto a sua utilização no ambiente escolar e quanto à necessidade de expandir o seu acesso a escolas que ainda não dispõem sequer de laboratório nessa área.

A vida em um mundo globalizado sugere que quem quiser evoluir e ter acesso aos meios necessários que permitam o domínio e transformação do conhecimento atual deva ter acesso à informática por meio dos microcomputadores, e seus similares, e por sua vez o acesso à rede mundial de computadores, hoje um celeiro de troca e construção de conhecimento. No ambiente educacional essa troca e interação é cada vez mais premente, como defende SOUSA et al:

> O que se vem afirmando na literatura e na experiência até aqui construída é que no cenário escolar integrado com vivências em multimídia, estas geram: a dinamização e ampliação das habilidades cognitivas, devido à riqueza de objetos e sujeitos com os quais permitem interagir; a possibilidade de extensão da memória e de

> atuação em rede; ocorre a democratização de espaços e ferramentas, pois facilitam o compartilhamento de saberes, a vivência colaborativa, a autoria, coautoria, edição e publicação de informações, mensagens, obras e produções culturais tanto de docentes quanto de discentes (SOUSA et al, 2011, p.12).

A urgência na inserção da informática como elemento indispensável para o aprendizado se deve em última instância à necessidade de dinamizar a troca de saberes na sala de aula e fora dela, já que atualmente o professor não deve ser mais visto como o detentor do saber. Cabendo a ele alicerçar-se, inclusive apropriando-se da informática, para proporcionar ao educando o aprender ativo e participativo usando, sobretudo, as tecnologias digitais. De outro modo, como ressalta Feijó (2007, p. 37), "o computador reduz o tempo de cálculo e em alguns casos é a única alternativa para a resolução de problemas, sendo possível aproveitar todas as informações para a análise de dados".

Ademais, é cada vez maior o número de pessoas que acessam a *Internet* no Brasil, pois de acordo com dados do IBOPE Media, esse número chegou a 105,1 milhões no segundo semestre de 2013. Isso representa a grande importância que assumiu o uso das tecnologias digitais na sociedade, estando ainda longe das metas governamentais de democratização do acesso à *Web* pelos brasileiros.

O uso da informática pelo aluno além de atender aos propósitos educacionais de aprendizado mais eficiente, também tem como premissa a sua inclusão no mundo cada vez mais exigente, que leva em consideração não apenas conhecimentos específicos, mas a capacidade de dominar aplicativos presentes em computadores para solucionar problemas diversos. Assim, o uso de ferramentas como as planilhas irão possibilitar não só o seu uso restrito no estudo das funções exponenciais e logarítmicas, mas abrirá uma porta para a sua exploração em outros contextos e aplicações reais do seu cotidiano, incluindo aí o profissional.

O cerne da computação e por sua vez dos computadores é reduzir o trabalho braçal do ser humano, realizando tarefas, muitas vezes enfadonhas, como cálculos longos e repetitivos, como quando se fazia uso de ábacos, tábuas de calcular ou logarítmicas. E como disse Leibniz: "É injusto que excelentes pessoas percam seus tempos como escravos no trabalho de executar cálculos que poderiam seguramente ser relegados a qualquer outro se fossem usadas máquinas". Contudo, diferentemente do que se pensava até algum tempo, na educação a informática não se presta apenas para esse fim; ela também permite fortalecer o aprendizado e o pensar crítico sobre a realidade, encurtando caminhos para a tomada de decisão.

## 2.2. Engenharia Didática

Fizemos uso da Engenharia Didática para o desenvolvimento dessa pesquisa. Segundo Rossi (2008), a Engenharia Didática desenvolveu-se no contexto da Didática da Matemática criada na França na década de 1980. Para Artigue (apud ALMOULOUD, 2008), esta metodologia tem semelhanças com o trabalho de um engenheiro, que somados aos seus conhecimentos científicos estão os problemas da vida prática. Assim, na sala de aula também é preciso lidar com problemas que fogem ao controle de teorias preestabelecidas, o que torna o uso dessa proposta extremamente relevante.

A Engenharia Didática é composta por quatro etapas: análise inicial, análise *a priori*, a análise *a posteriori* e validação. O ambiente da sala de aula e o professor adquirem relevância nesse instrumento de pesquisa e se embasa na percepção de um problema de ensino-aprendizagem e na proposta de resolvê-lo mediante a aplicação de uma intervenção didática. No nosso caso, percebemos a oportunidade de dá mais relevância e significação a algumas aplicações das funções exponenciais e logarítmicas por meio do uso da Planilha pela sua disponibilidade tanto nos laboratórios de informática quanto nos computadores pessoais dos alunos.

Para a composição da pesquisa com base nessa metodologia, primeiramente fizemos um estudo inicial, onde foi possível adquirir a devida fundamentação teórica sobre o tema. Também refletimos sobre a nossa experiência com a disciplina de Matemática para o ensino médio, levando em consideração as possibilidades de melhorias que poderíamos ocasionar com uma mudança em nossa prática. Em seguida, construímos um plano de ação, com as etapas da proposta de atividade e a devida análise *a priori*.

Na fase de experimentação os alunos foram postos diante da Planilha e de forma autônoma desenvolveram as atividades propostas, podendo interagir com os colegas ou pedir auxílio ao professor, autor deste trabalho, para sanar dúvidas referentes ao desenvolvimento das atividades, mas tendo claro que eles tinham liberdade para escolher os caminhos necessários à obtenção das respostas requeridas. Nessa etapa foi feita a coleta de dados referentes ao desempenho e dificuldades apresentadas pelos alunos e anotações de possíveis mudanças a serem feitas tanto na metodologia quanto no instrumento de pesquisa.

Na última etapa, como descrita na Engenharia Didática, procedemos à análise *a posteriori* e consequente validação da proposta didática. Nessa fase, todos os elementos percebidos e avaliados são passíveis de comparação, de modo que possam constituir um quadro completo daquilo que pretendemos oferecer como prática necessária para se alcançar os objetivos da pesquisa.

## 2.3. Interdisciplinaridade

Desde sua descoberta pelo escocês John Napier e pelo suíço Jost Bürgi no início do século XVII, os logaritmos vêm desempenhando papel crucial no desenvolvimento de diversas áreas do conhecimento, com suas múltiplas aplicações. Destacando-se inicialmente pelo seu uso na Astronomia, sendo bem recebido por um dos maiores astrônomos da antiguidade, Kepler, que segundo Soares (2007, p. 107) teria visto tal descoberta não como um acréscimo às ideias já existentes, mas como uma ferramenta de computação extremamente poderosa para cálculos dos astrônomos.

A proeza dos logaritmos reside no fato de poderem transformar produtos em somas ou divisão em subtração, isso porque multiplicar ou dividir números com muitas casas decimais, por exemplo, é uma tarefa enfadonha, enquanto a soma ou a subtração torna a operação menos demorada. Sendo assim, áreas como Astronomia estariam fadadas à estagnação, já que o uso de operações do gênero se tornou corriqueiro, desde os tempos de Galileu Galilei, no século XVI. Eles também representam um meio fácil para calcular raízes e expoentes.

No ambiente escolar esse aspecto interdisciplinar ganha importância em função, inicialmente, da possibilidade de tornar o aprendizado mais significativo e em conexão com outras áreas do conhecimento. Além disso, essa abordagem coaduna com os prepostos dos PCN's, quando enfatiza que a investigação e a compreensão sejam competências e habilidades inerentes à disciplina de Matemática.

Essa abordagem deverá ser complementada com a própria História da Matemática no que diz respeito aos personagens e aos eventos que levaram à descoberta dos logaritmos e bem como a sua definição, em essência. Isso porque a maioria dos livros didáticos não dá ênfase à historicidade desses acontecimentos, como bem atesta Soares:

> A História da Matemática vem sendo predominantemente abordada apenas com característica informativa, deixando de explorar as categorias lúdica, situações-problema, sem mostrar, ainda, a evolução e concepções ao longo do tempo, para que se possa utilizar com fins pedagógicos em sala de aula (SOARES, 2011, p. 34).

Assim, ao mesmo tempo em que o professor explora situações-problema com seus alunos, deve estimular a investigação de como se chegou àquela lei Matemática aplicada a outra área do conhecimento, pois certamente faz parte da curiosidade do aluno. A ênfase na Matemática pura ou na resolução de exercícios repetitivos, além de tornar esta ciência obscura, passa a falsa impressão que os matemáticos não fazem outra coisa senão isso. Contra essa conduta alerta Ferreira:

> A importância da realização de estudos quanto ao surgimento dos logaritmos, faz-se necessário para mostrar aos alunos o quão útil foi sua descoberta, em uma época em que se fazia necessário efetuar cálculos complexos, principalmente nas orientações astronômicas durante as grandes navegações para exploração e expansão territorial. Acredita-se ser necessário colocar os alunos a par dos obstáculos e esforços da época, dos empreendimentos e falhas para se chegar a esta Matemática de hoje que nos parece sabida de todos (FRREIRA, 2006, p. 45).

O conhecimento matemático puro aparece para os educandos, contido apenas nos livros e sendo encontrado apenas nos centros universitários de Matemática, por isso inalcançável para muitos. Enquanto na sala de aula de ensino tradicional predomina a reprodução de fórmulas e teoremas prontos e acabados. Mas segundo os PCN's "o conhecimento matemático dever ser apresentado aos alunos como historicamente construído e em permanente evolução. O contexto histórico possibilita a compreensão do lugar que ela tem no mundo".

# 3. FUNDAMENTOS DAS FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS

Nas caracterizações elencadas a seguir, a demonstrações serão omitidas, mas poderão ser encontradas em LIMA (1996), BUCCHI (1998) e IEZZI (2007).

## 3.1. Caracterização da Função Exponencial

Chama-se função exponencial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, tal que $f(x) = a^x$ com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Para essa função verificam-se as seguintes propriedades:

**I.** $f(nx) = f(x)^n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$ e todo $x \in \mathbb{R}$;

**II.** $f(x) = a^x$ para todo $x \in \mathbb{R}$, onde $f(1) = a$;

**III.** $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

A função exponencial também pode ser crescente ou decrescente onde:

**I.** Função crescente: $a > 1$.

**II.** Função decrescente: $0 < a < 1$.

As Figuras 5 e 6 representam respectivamente a função exponencial crescente e a decrescente.

**FIGURA 5:** Gráfico da função exponencial crescente

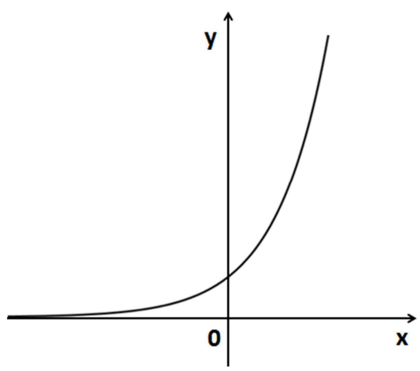
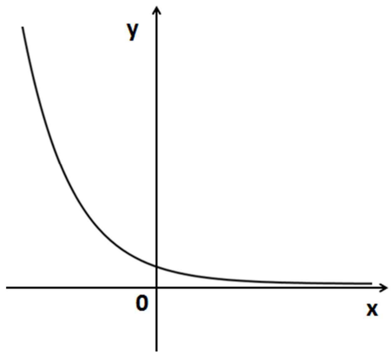


FIGURA 6: **Gráfico da função exponencial decrescente**

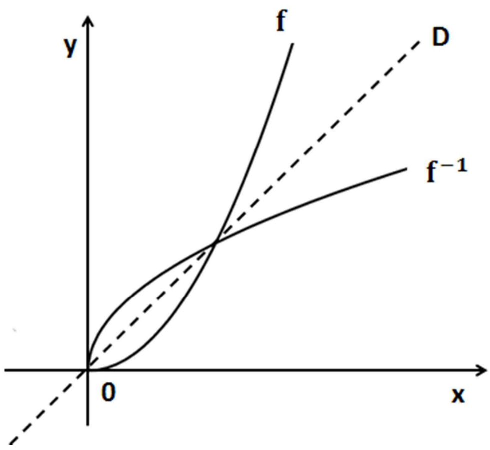



## 3.2. Caracterização da Função Inversa

Seja $f : A \rightarrow B$. A relação $f^{-1}$ é uma função de B em A se, e somente se, f é bijetora, ou seja, é uma correspondência biunívoca entre A e B.

Se A e B são conjuntos de números reais e $f^{-1}: B \rightarrow A$ é a inversa da função $f : A \rightarrow B$ então o gráfico da função $f^{-1}$ é o simétrico do gráfico da função $f$ em relação à diagonal $D \subset \mathbb{R}^2$, como esquematizado na Figura 7.

FIGURA 7: **Gráfico de funções inversas**



## 3.3. Caracterização da Função Logarítmica

Sendo $a$ e $b$ números reais positivos, com $a \neq 1$, chama-se logaritmo de $b$ na base $a$ o expoente $x$ tal que $a^x = b$. Assim dizemos que $\log_a b = x$.

Definido o logaritmo de um número, chama-se função logarítmica $\mathrm{f}: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\mathrm{f(x)} = \log_\mathrm{a} \mathrm{x}$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$.

Para essa função são válidas, entre outras, as seguintes propriedades:

**I.** $\log_\mathrm{a}(\mathrm{x} \cdot y) = \log_\mathrm{a} \mathrm{x} + \log_\mathrm{a} \mathrm{y}$

**II.** $\log_\mathrm{a} \frac{\mathrm{x}}{y} = \log_\mathrm{a} \mathrm{x} - \log_\mathrm{a} \mathrm{y}$

**III.** $\log_\mathrm{a} \mathrm{x}^n = n \cdot \log_\mathrm{a} \mathrm{x}$

A função logarítmica também pode ser crescente ou decrescente e onde:

**I.** Função crescente: $\mathrm{a} > 1$.

**II.** Função decrescente: $0 < a < 1$.

As Figuras 8 e 9 representam respectivamente os gráficos da função logarítmica crescente e decrescente.

**FIGURA 8 : Gráfico de função logarítmica crescente**

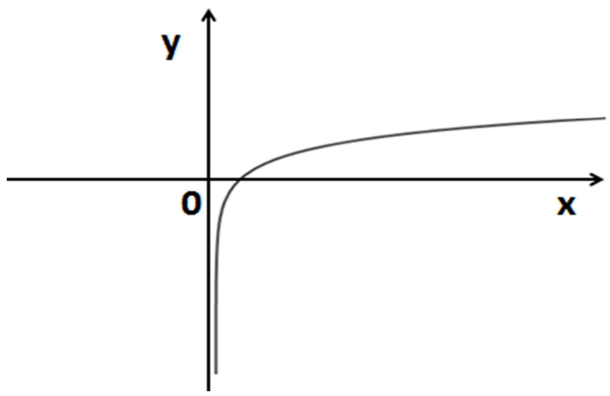
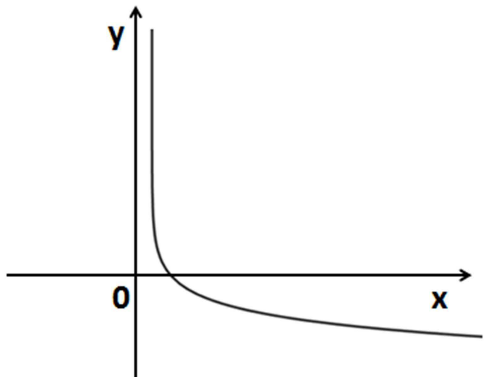


FIGURA 9: Gráfico de função logarítmica decrescente




## 3.4. Ensino de Aplicações de Funções Exponenciais e Logarítmicas

Para o estudo de aplicações logarítmicas é fundamental o embasamento teórico anterior. Isto se faz necessário para que o aluno dispondo da fundamentação necessária possa construir seu próprio conhecimento por meio da análise de aplicações das funções exponenciais e logarítmicas. Se tomarmos, por exemplo, a seguinte situação-problema: “Qual é o tempo necessário para que um capital inicial dobre quando aplicado a uma taxa mensal de 5% em um investimento a juros compostos?”, o aluno deverá saber que o montante é dado por $M = C \cdot (1 + i)^t$. Onde $C$ é o capital inicial, $i$ é a taxa de juros e $t$ é o tempo em meses.

Sem esse conhecimento prévio, a demanda de tempo usado para pesquisar ou deduzir a fórmula, por aqueles pouco afeitos à Matemática, seria bem maior. Contudo, mesmo conhecendo a fórmula ele faria alguns cálculos, podendo chegar a uma indefinição em relação ao tempo procurado, pois não encontraria as bases iguais que permitiriam concluir que os expoentes também são iguais.

Temos que

$$\mathrm{i} = 5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$$

E

$$M = 2 \cdot C$$

Daí

$$M = C \cdot (1 + i)^t => 2 \cdot C = C \cdot (1 + 0{,}05)^t => 1{,}05^t = 2$$

Sendo assim, o professor deve conduzir o aprendizado para o estudo dos logaritmos e chegar aos fundamentos necessários para calcular o tempo. Com os devidos formalismos necessários, pode ser feito o seguinte procedimento e com o auxílio da calculadora científica, tão comum entre os alunos e presentes até em *smartphones,* obter os valores dos logaritmos requeridos:

$$1{,}05^t = 2 => \log 1{,}05^t = \log 2 => t \cdot \log 1{,}05 = \log 2 => t = \frac{\log 2}{\log 1{,}05} =>$$

$$t = \frac{0{,}301}{0{,}021} => t = 14{,}3\ meses$$

Este cálculo de aplicação das funções aqui exploradas se torna particularmente instigante para os alunos quando associado ao investimento em caderneta de poupança, pois leva os mesmos a se surpreenderam com o tempo que levarão para fazer duplicar o capital inicial de 100 reais, por exemplo, que para uma taxa de juros atual de 0,5% é de 139 meses ou 11 anos e 7 meses aproximadamente. Essa aplicação de logaritmo permite ver o quanto é importante o seu aprendizado para resolver problemas práticos.

As Orientações Curriculares Nacionais do Ensino Médio enfatizam essa abordagem:

> Dentre as aplicações da Matemática, tem-se o interessante tópico de Matemática Financeira como um assunto a ser tratado quando do estudo da função exponencial – juros e correção monetária fazem uso desse modelo. Nos problemas de aplicação em geral, é preciso resolver uma equação exponencial, e isso pede o uso da função inversa – a função logaritmo. O trabalho de resolver equações exponenciais é pertinente quando associado a algum problema de

> aplicação em outras áreas de conhecimento, como Química, Biologia, Matemática Financeira, etc (BRASIL, 2006).

Porém, não restam dúvidas que ao manipular a calculadora usando a função logaritmo, o nosso educando constrói significados e se indaga sobre o que de fato é logaritmo. Isso passa a ser uma chama acesa para o seu aprofundamento nos tópicos seguintes a serem abordados pelo professor, pois, como bem diz Selbach (2010, p. 21): “as operações simples que o aluno já aprendeu com a vida que vive e com o entorno que o cerca, devem representar “ganchos” essenciais para a consolidação de sua aprendizagem”.

As aplicações devem acima de tudo representar não apenas a obtenção de um resultado, mas a oportunidade de esclarecer dúvidas e de chamar a atenção de como a natureza se comporta e como o homem ou mulher pode fazer uso de modelos matemáticos para entendê-la e dominá-la.

# 4. PLANILHA NA PRÁTICA DOCENTE

Neste capítulo são apresentadas sugestões de estudo de aplicações de função exponencial e logarítmica na forma de um tutorial, dando ênfase ao caráter interdisciplinar, com o uso da Planilha na forma de aplicativo. Essas sugestões são voltadas para o professor do ensino médio, foco deste trabalho. E deverão ser trabalhadas tanto em sala de aula, com a manipulação do professor e bem como dos alunos, no laboratório de informática ou mesmo somente pelo aluno em qualquer outro ambiente.

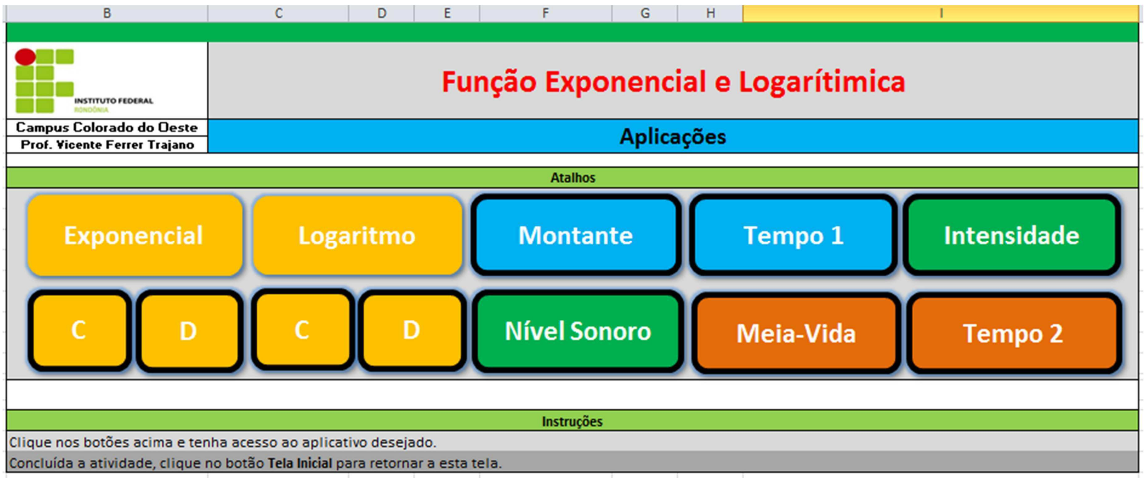
Incialmente o aplicativo a ser usado estará voltado para a exploração da definição das funções exponenciais e logarítmicas. Em seguida, serão sugeridas atividades voltadas para a aplicação das funções antes citadas. Dentre tantas aplicações, destacaremos as seguintes: montante e tempo de uma aplicação a juros compostos, intensidade e nível sonoro, meia-vida e tempo de decaimento. Assim, além de poder ser integrado ao planejamento das aulas de Matemática, servirá de estímulo para a inserção em outras aplicações das funções em tela e bem como em diversas áreas da Matemática e das demais ciências exatas como a Física, a Química e a Biologia.

## 4.1. O Aplicativo

O aplicativo na Planilha foi pensado levando em consideração a elegância e a funcionalidade, permitindo ao professor ter o controle do que será manipulado em dados momentos e ao mesmo tempo dá liberdade aos alunos para modificá-los em outros. E nasceu da necessidade de aproximar os alunos dos cálculos, visto com receio e dificuldade por muitos deles. Obter respostas rápidas e proporcionar a criação de elos entre diversos fenômenos, sem que para tanto tivesse que sempre fazer cálculos demorados de uma situação-problema. Ademais, o uso de um aplicativo sempre atrai a atenção para o que ele pode fazer, ou seja, para as suas potencialidades.

Para melhorar o seu design foi criada uma tela inicial, onde é possível ver todos os aplicativos e em um clique decidir qual deles usar. Ao mesmo tempo, ocultaram-se os botões das planilhas, que dificultavam a identificação dos aplicativos. Algumas células foram bloqueadas, com o intuito de evitar alterações que poderiam ser um empecilho ao aprendizado desejado. Porém, o professor deve fazer uma introdução mostrando como esse bloqueio foi feito, a fim de permitir que o aluno possa também produzir seus próprios aplicativos, até mesmo mais sofisticados do que os usados naquele momento.

**FIGURA 10: Tela inicial dos aplicativos**




Em alguns aplicativos as células das fórmulas foram bloqueadas, mas a seleção das mesmas não foi desativada. Assim, ao clicar sobre uma dessas células é possível ver a fórmula. Isso será útil para que ela seja facilmente identificada e associada ao formato e simbologia adotados nos livros. Assim, por exemplo, a fórmula de uma função quadrática aparecerá no livro da seguinte forma: $f(x) = x^2 + 2x + 3$, enquanto que na planilha terá o seguinte formato quando os valores do domínio, x, estiverem na célula A2, por exemplo: $= A2^{\wedge}2 + 2 * A2 + 3$. Isso permite que o trânsito entre esses dois formatos seja o mais fácil possível para dinamizar a execução das atividades.

A planilha deve representar uma das formas de enriquecer o aprendizado, já alicerçado pela resolução de situações-problema por outros meios, como por meio da escrita. Ou podem-se explorar as duas de modo concomitante. O mais relevante é proporcionar o saber rico e dinâmico na forma de desafios e da necessidade da descoberta, associando o raciocínio lógico à possiblidade de corrigir erros rapidamente, como defendem Stieler e Ferreira:

> Outro ponto a ser analisado é que o computador manifesta os "erros" de forma menos traumática que as tradicionais (normalmente corrigidos, grifados e reescritos em vermelho). No computador o erro é um desafio, que automaticamente leva o sujeito a buscar novas descobertas (STIELER e FERREIRA, 2007, p. 3).

O desenvolvimento dessas sugestões de atividades envolvendo as funções exponenciais e logarítmicas visam possibilitar a compreensão das potencialidades da abordagem interdisciplinar por parte do professor e do aluno. Permitindo reforçar a importância das aplicações dos logaritmos em diversos campos da ciência e da conexão dessas áreas com a Matemática estudada no ensino médio. Cada exemplo será composto por desafios que levam os envolvidos no processo de ensino-aprendizagem a desenvolver meios investigativos necessários para obter respostas para problemas do cotidiano.

Antes de explorar as aplicações de funções exponenciais e logarítmicas, faz-se necessário desenvolver a definição dessas funções, reconhecendo-as como inversas uma da outra. E isso será feito manipulando o aplicativo, inserindo funções e comparando os resultados obtidos. Todo o trabalho, pode opcionalmente, ser feito em dupla e os resultados podem ser registrados em um arquivo do *Word* ou do

*PowerPoint*, clicando na tecla “*prt sc*”, recortando no *software Paint* e colando em um desses arquivos. Os alunos devem acrescentar as reflexões advindas de cada atividade executada ou resolvida. Em um momento posterior pode-se possibilitar uma apresentação de alguns dos trabalhos desenvolvidos para troca de experiências e reflexões sobre os saberes desenvolvidos.

Criamos um fórum na *Internet* para permitir ao aluno o acesso a diversos materiais como listas de exercícios, textos, simuladores, sites para pesquisa, entre outros instrumentos de obtenção de conhecimento. Nesse espaço também é possível a interação entre professor e alunos por meio da aplicação de atividades a serem respondidas no próprio fórum, por exemplo. Lá também está disponível para *download* a Planilha com os aplicativos explorados neste trabalho. Segue o endereço para acessá-la: http://fisica-superior.forumeiros.com/. Na página que se abrirá, o internauta deve clicar na pasta Aplicativos.

## 4.2. Funções Exponenciais e Logarítmicas

Após apresentada a Planilha e os comandos necessários à execução das atividades aos alunos, o professor deve distribuir as atividades àqueles, preferencialmente em formato digital, que nesse momento já devem estar diante do aplicativo.

**Atividade 1**

A função exponencial é dada por $f(x) = a^x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

Essa função é classificada como:

**I.** Crescente: $a > 1$;

**II.** Decrescente: $0 < a < 1$.

Na Planilha, se os valores do domínio, no caso $x$, estiverem a partir da célula B10, por exemplo, essa fórmula terá a seguinte configuração em outra célula, $= a^{\wedge}B10$, e deverá ser arrastada para preencher as demais.

Sendo assim, resolva as questões seguintes, usando o aplicativo Função Exponencial.

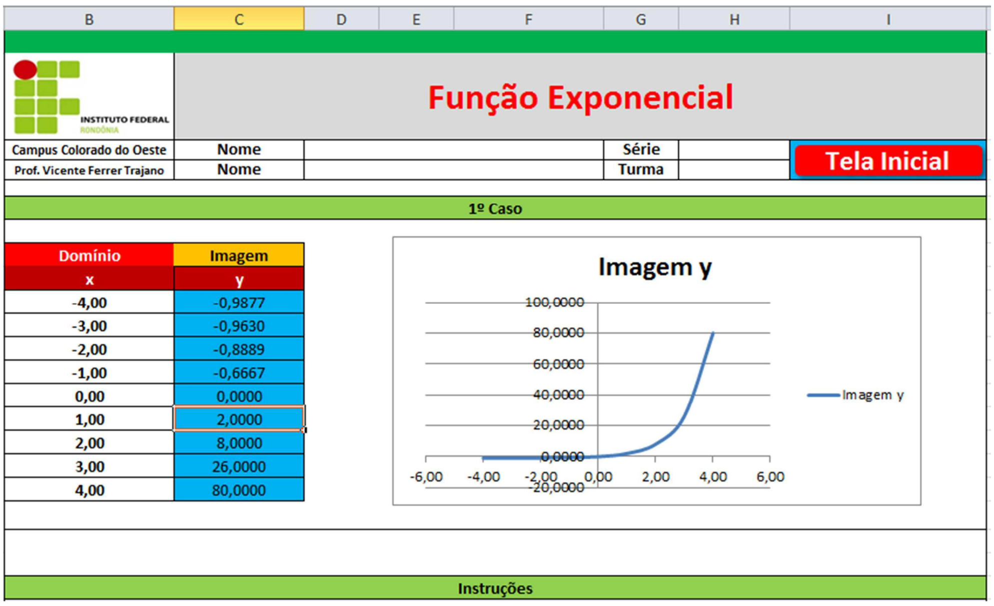
**Atenção**: use valores para $x$, de tal forma que os valores de $y$ tenham dígitos decimais finitos.

**A)** Represente no aplicativo uma função exponencial crescente e desenhe o seu gráfico.

**B)** Represente no aplicativo uma função exponencial decrescente e desenhe seu gráfico.

**C)** Comparando as duas funções, o que as diferencia no que diz respeito à variação dos valores da imagem em relação aos valores do domínio?

**FIGURA 11: Aplicativo função exponencial**



**Atividade 2**

A função logarítmica é dada por $f(x) = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$.

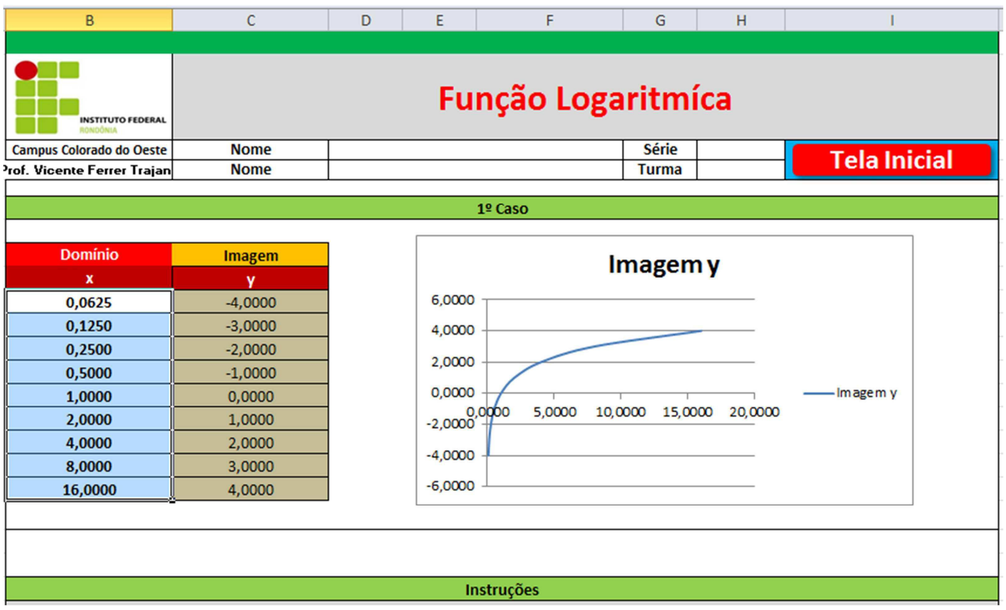
Essa função é classificada como:

**I.** Crescente: $a > 1$;

**II.** Decrescente: $0 < a < 1$.

Na Planilha, se os valores do domínio, no caso $x$, estiverem a partir da célula B10, por exemplo, essa fórmula terá a seguinte configuração em outra célula, $= LOG(B10;\, a)$, e deverá ser arrastada para preencher as demais. Sendo assim, resolva as questões seguintes, usando o aplicativo Função Logarítmica.

**FIGURA 12: Aplicativo função logarítmica**




**Atenção:** use valores para $x$, de tal forma que os valores de $y$ sejam inteiros.

**A)** Represente uma função logarítmica crescente e desenhe seu gráfico.

**B)** Represente no aplicativo uma função logarítmica decrescente desenhe seu gráfico.

**C)** Comparando as duas funções, o que as diferencia no que diz respeito à variação dos valores da imagem em relação aos valores do domínio?

## 4.3. Montante e Tempo de Aplicação

Feitas as atividades anteriores, os alunos revisaram e adquiriram novos saberes sobre o comportamento das funções exponenciais e logarítmicas, estando aptos a explorar aplicações das mesmas por meio de situações-problema.

**Atividade 3**

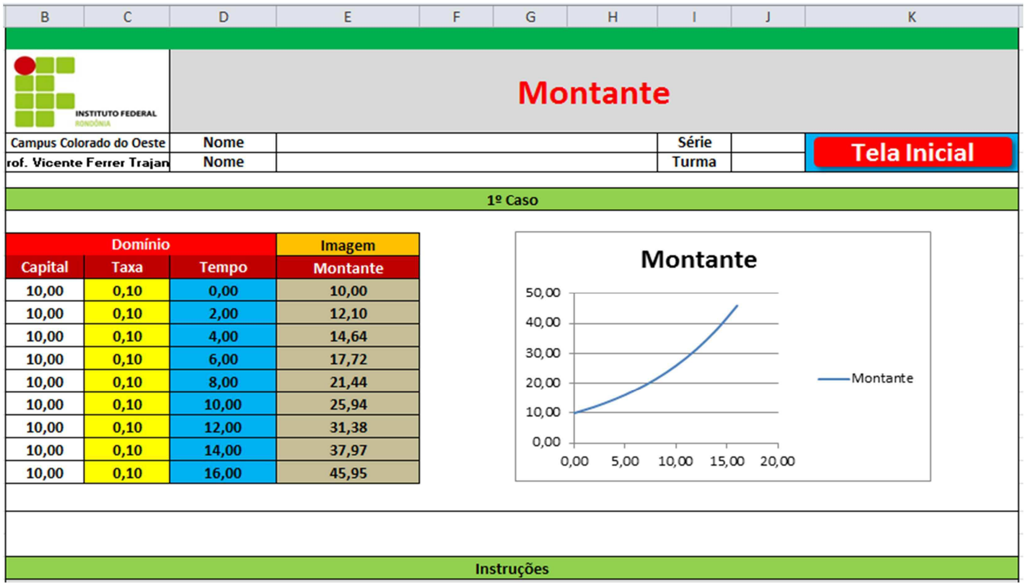
O montante de um investimento, a juros compostos, pode ser dado por

$$M = C_0 \cdot (1 + i)^t$$

Onde $C_0$ é o capital inicial, $i$ é o rendimento e $t$ é o tempo em meses. E esta é uma função do tipo exponencial.

Na Planilha, esses valores foram distribuídos em quatro colunas. Na última coluna estão os valores do montante a partir da célula E10, cuja fórmula tem a seguinte configuração, $= B10 * (1 + C10)^\wedge D10$, naquela célula, e deverá ser arrastada para preencher as demais.

FIGURA 13: **Aplicativo montante**




| Domínio | | | Imagem |
|---|---|---|---|
| Capital | Taxa | Tempo | Montante |
| 10,00 | 0,10 | 0,00 | 10,00 |
| 10,00 | 0,10 | 2,00 | 12,10 |
| 10,00 | 0,10 | 4,00 | 14,64 |
| 10,00 | 0,10 | 6,00 | 17,72 |
| 10,00 | 0,10 | 8,00 | 21,44 |
| 10,00 | 0,10 | 10,00 | 25,94 |
| 10,00 | 0,10 | 12,00 | 31,38 |
| 10,00 | 0,10 | 14,00 | 37,97 |
| 10,00 | 0,10 | 16,00 | 45,95 |

Certa quantia será investida na caderneta de poupança. E o seu objetivo será responder algumas dúvidas inerentes a esse tipo de investimento.

Sendo assim resolva as questões seguintes, usando o aplicativo da Figura 13.

**Atenção:** antes de iniciar esta atividade, pesquise na *Internet*, em sites de bancos, o valor atual do juro (rendimento) da caderneta de poupança.

Atribua um valor para o capital inicial de acordo com o que você deseja investir, insira o valor do juro da caderneta de poupança na forma decimal e nos dois casos preencha todas as células das respectivas colunas. Atribua valores crescentes para o tempo, em progressão aritmética a partir de 1, de tal forma que o último valor da coluna do montante responda a sua dúvida.

**A)** Um jovem acaba de descobrir que a sua esposa está grávida. Então ele resolve investir 500,00 reais durante três trimestres para com o rendimento comprar o enxoval. Quanto terá rendido na poupança durante esse período? Você esperava um valor maior ou menor? Desenhe o gráfico e indique esse valor no mesmo.

**B)** Com base nos dados obtidos na questão interior, calcule a diferença entre os rendimentos ao final de cada mês. Como se comporta essa diferença?

**C)** E se o juro fosse de 10% como ficariam os resultados dos itens anteriores?

**Atividade 4**

Para determinarmos o tempo de investimento, a juros compostos, tomemos a fórmula do montante:

$$M = C_0 \cdot (1+i)^t$$

Calculando o logaritmo na base 10 nos dois lados da equação, vem:

$$\log M = \log[C_0 \cdot (1+i)^t] => \log M = \log C_0 + log(1+i)^t =>$$

$$\log(1+i)^t = \log M - \log C_0 => \mathrm{t} \cdot \log(1+i) = \log\frac{M}{C_0}$$

Logo temos que,

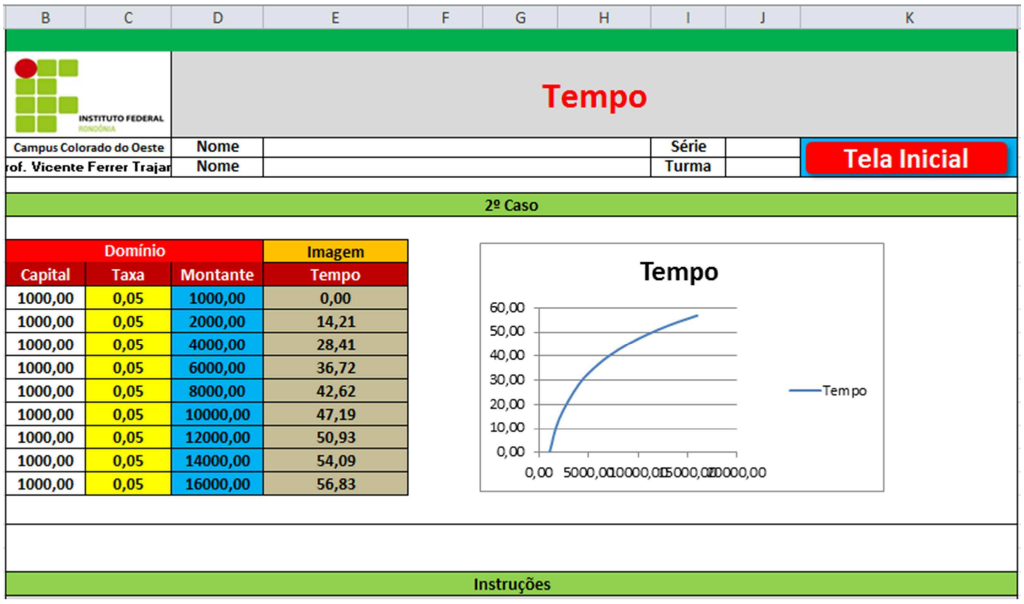
$$\mathrm{t} = \frac{\log M/C_0}{\log(1+i)}$$

Na Planilha, esses valores foram distribuídos em quatro colunas. Na última coluna estão os do tempo a partir da célula E10, cuja fórmula tem a seguinte configuração, $=(LOG(D10/B10;\ 10)/LOG(1+C10;\ 10))$, naquela célula, e deverá ser arrastada para preencher as demais.

Certa quantia será investida na caderneta de poupança. E o seu objetivo será responder algumas dúvidas inerentes a esse tipo de investimento.

Sendo assim resolva as questões seguintes, usando o aplicativo representado na Figura 14.

**FIGURA 14: Aplicativo tempo de aplicação**




| Domínio | | | Imagem |
|---|---|---|---|
| Capital | Taxa | Montante | Tempo |
| 1000,00 | 0,05 | 1000,00 | 0,00 |
| 1000,00 | 0,05 | 2000,00 | 14,21 |
| 1000,00 | 0,05 | 4000,00 | 28,41 |
| 1000,00 | 0,05 | 6000,00 | 36,72 |
| 1000,00 | 0,05 | 8000,00 | 42,62 |
| 1000,00 | 0,05 | 10000,00 | 47,19 |
| 1000,00 | 0,05 | 12000,00 | 50,93 |
| 1000,00 | 0,05 | 14000,00 | 54,09 |
| 1000,00 | 0,05 | 16000,00 | 56,83 |

**Atenção:** antes de iniciar esta atividade, pesquise na *Internet*, em sites de bancos, o valor atual do juro (rendimento) da caderneta de poupança.

Atribua um valor para o capital inicial de acordo com o que você deseja investir, insira o valor do juro da caderneta de poupança na forma decimal e nos dois casos preencha todas as células das respectivas colunas com os mesmos valores. Atribua valores crescentes para o montante, em progressão aritmética a partir do valor do capital inicial, de tal forma que o último valor da coluna do tempo responda a sua dúvida.

**A)** Um jovem deseja aplicar 500 reais na caderneta de poupança. Após quanto tempo em meses e em anos esse valor será duplicado? Desenhe o gráfico e indique esse valor no mesmo.

**B)** Existe alguma diferença entre o gráfico dessa atividade e o da questão anterior?

**C)** Atribua outro valor para o capital inicial e verifique se o tempo a ser calculado foi alterado? Desenhe os gráficos antes e depois da alteração do valor do capital inicial.

**D)** E se o juro fosse de 10% como ficariam os resultados dos itens anteriores?

## 4.4. Intensidade e Nível Sonoro

A intensidade sonora é dada por:

$$\mathrm{I} = \frac{P}{4\pi \cdot \mathrm{R}^2}$$

Onde P é a potência da fonte e $4\pi \cdot R^2$ é a área da superfície da esfera cujo centro está na fonte. Assim, se a potência for dada em W e a distância à fonte for dada em m, a intensidade sonora será dada em $W/m^2$.

A mínima intensidade sonora audível pelo ser humano é $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$. Já a máxima intensidade, que se situa no limiar de dor é $1\, W/m^2$.

A intensidade sonora cai com o quadrado da distância, ao passo que o observador se afasta da fonte sonora, ou seja, a intensidade e o quadrado da distância são inversamente proporcionais. Contudo, para medir-se o quanto a intensidade sonora pode ser danosa ao ser humano, usa-se uma escala logarítmica que relaciona a intensidade mínima audível e a intensidade no ponto considerado.

Essa nova grandeza é o nível sonoro, que é dado por:

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

A unidade para nível sonoro é o bel (B), mas usa-se comumente o decibel (dB) e assim, $1\, B = 10\, dB$.

A poluição sonora está relacionada aos elevados níveis sonoros e se constitui um dos graves problemas de saúde pública da atualidade. Segundo Machado (apud Magrini):

> A poluição sonora passou a ser considerada pela OMS (Organização Mundial da Saúde), uma das três prioridades ecológicas para a próxima década e diz, após aprofundado estudo, que acima de 70 decibéis o ruído pode causar dano à saúde. De modo que, para o ouvido humano funcionar perfeitamente até o fim da vida, a intensidade de som a que estão expostos os habitantes das metrópoles não poderia ultrapassar os 70 decibéis estabelecidos pela Organização Mundial da Saúde (MACHADO apud MAGRINI, p. 2).

A Tabela 1 relaciona o nível sonoro de alguns ruídos e o tempo de exposição que o ouvido humano pode ficar submetido sem que sofra lesões, com base em recomendações da OSHA (Occupational Safety & Health Administration):

**TABELA 1: Nível sonoro**

| Ruído | Nível Sonoro (dB) | Tempo |
|---|---|---|
| Intensidade mínima audível | 0 | - |
| Biblioteca | 20 – 30 | - |
| Conversa | 40 – 60 | - |
| Aspirador de pó | 70 | - |
| Trânsito das cidades | 80 – 90 | - |
| - | 90 | 8 h |
| Trem a 60 m | 95 | 4 h |
| Motocicleta | 100 | 2 h |
| Concerto | 110 | 30 min |
| Show de rock | 115 | 15 min |

| | | |
|---|---|---|
| Motor de avião a jato | 120 | 0 |
| Limiar de dor | 125 | 0 |

**Atividade 5**

Esta atividade tem como objetivo calcular a intensidade sonora de alguns equipamentos eletrônicos, por exemplo, e bem como a distância relacionada a essa intensidade.

Para determinar as fórmulas da intensidade sonora em função do nível sonoro, temos que

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} => N = 10 \cdot (\log I - \log I_0) => \log I = \frac{N}{10} + \log I_0 =>$$

$$I = 10^{(\frac{N}{10} + \log I_0)}$$

Mas $I_0 = 10^{-12}\, W/m^2$, daí

$$I = 10^{(\frac{N}{10} - 12)}$$

Para determinar a distância em função da potência temos que

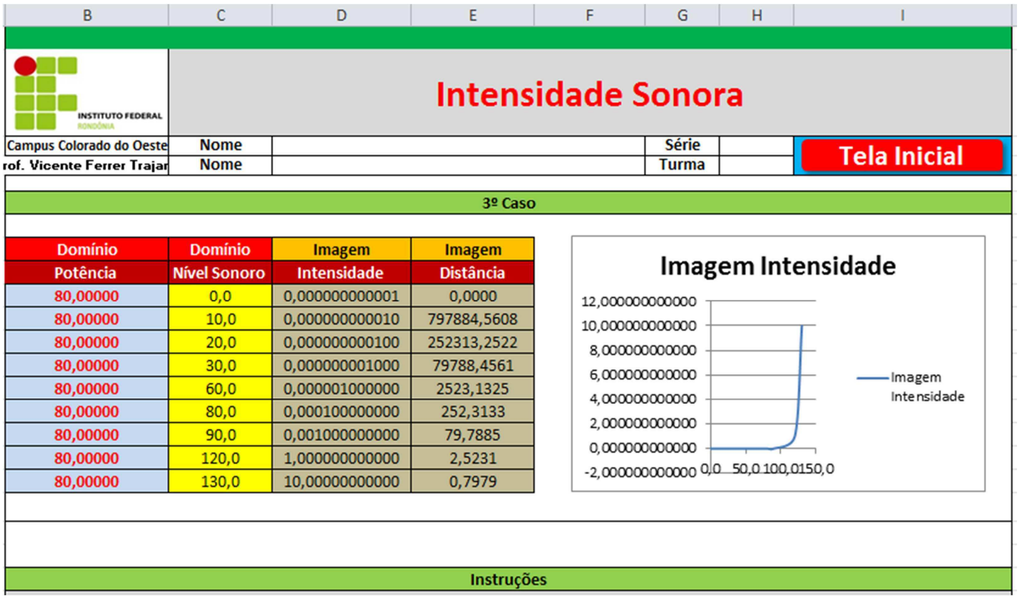
$$\mathrm{I} = \frac{P}{4\pi \cdot \mathrm{R}^2} => \mathrm{R}^2 = \frac{P}{4\pi \cdot \mathrm{I}} => R = \sqrt{\frac{P}{4\pi \cdot \mathrm{I}}}$$

Na Planilha os valores das grandezas foram distribuídos em quatro colunas. Na coluna D a intensidade sonora em função do nível sonoro tem a seguinte fórmula,$= 10\text{^}((C10/10) - 12)$, na célula D10. Na coluna E a distância à fonte terá a seguinte fórmula, $= RAIZ(B10/(4 * PI() * D10))$, na célula E10.

Nesta atividade, pesquise a potência de alguns aparelhos, como por exemplo, TV, CD *player*, fone de ouvido, ou seja, equipamentos eletrônicos comuns no seu cotidiano. Consulte o manual de instrução deles e os dados afixados nos mesmos.

Sendo assim resolva as questões seguintes, usando o aplicativo da Figura 15.

FIGURA 15: Aplicativo intensidade sonora




| Domínio Potência | Domínio Nível Sonoro | Imagem Intensidade | Imagem Distância |
|---|---|---|---|
| 80,00000 | 0,0 | 0,000000000001 | 0,0000 |
| 80,00000 | 10,0 | 0,000000000010 | 797884,5608 |
| 80,00000 | 20,0 | 0,000000000100 | 252313,2522 |
| 80,00000 | 30,0 | 0,000000001000 | 79788,4561 |
| 80,00000 | 60,0 | 0,000001000000 | 2523,1325 |
| 80,00000 | 80,0 | 0,000100000000 | 252,3133 |
| 80,00000 | 90,0 | 0,001000000000 | 79,7885 |
| 80,00000 | 120,0 | 1,000000000000 | 2,5231 |
| 80,00000 | 130,0 | 10,00000000000 | 0,7979 |

**Atenção:** antes de iniciar esta atividade, pesquise na *Internet*, em *sites* relacionados com saúde pública, os valores atualizados dos níveis sonoros.

Preencha a coluna da potência com os valores encontrados para cada equipamento. Em seguida preencha a coluna do nível sonoro com os valores desde o limiar de audição até o limiar de dor.

**A)** Sabendo que a partir de 70 dB, o ouvido humano pode sofrer danos irreparáveis, determine a que distância uma pessoa deve ficar de cada um dos equipamentos escolhidos por você, de tal forma que ela não sofra danos auditivos. Desenhe os gráficos.

**B)** Se um fone de ouvido tiver 1500 mW de potência, a que distância deverá ficar do ouvido para o limiar de dor? Desenhe o gráfico.

**C)** Para um ouvido humano adulto, discuta com seu colega um valor adequado para ouvir música.

**D)** Se a potência da fonte for duplicada, a distância também duplica, para o mesmo nível sonoro? Explique.

**Atividade 6**

Nesta atividade o aluno irá relacionar a intensidade e o nível sonoro de equipamentos. Para tanto ele deverá inserir valores nos aplicativos Intensidade e Nível Sonoro de forma a resolver o desafio abaixo.

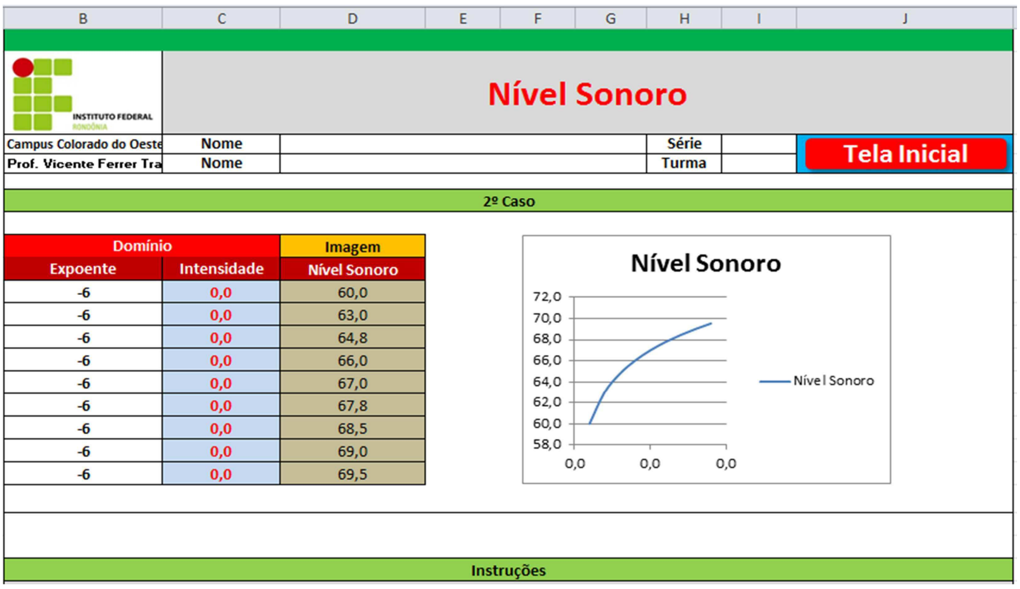
Quando o ouvido humano é submetido continuamente a ruídos de nível sonoro superior a 85 dB, sofre lesões irreversíveis. Por isso, o Ministério do Trabalho estabelece o tempo máximo diário que um trabalhador pode ficar exposto a sons muito intensos.

Considere que em um galpão de uma fábrica, o nível de intensidade sonora produzido por uma máquina é de 80 dB. Mas o gerente deseja instalar mais duas máquinas iguais a já existente, passando a ter três em funcionamento simultâneo. Isso fará triplicar a intensidade do ruído nesse galpão.

Preocupado com o limite de 85 dB, um técnico calcula o novo nível sonoro, em dB. Qual o valor por ele encontrado?

Para resolver a questão a seguir, será necessário usar o aplicativo da Figura 16.

**FIGURA 16: Aplicativo nível sonoro**



**Dica:** Para preencher a tabela corretamente, o primeiro valor a ser adotado para a intensidade deve corresponder à intensidade de uma máquina.

## 4.5. Meia-Vida e Tempo de Decaimento

A meia-vida é o tempo necessário para que uma amostra de uma substância radioativa se reduza à metade. Na Tabela 2 seguem alguns exemplos de isótopos de elementos químicos e suas respectivas meias-vidas.

**TABELA 2: Meia-vida**

| Nucleotídeo | Meia-vida |
|---|---|
| $^{238}U$ | 4.500.000.000 anos |
| $^{234}Th$ | 24,5 dias |
| $^{234}U$ | 270.000 anos |
| $^{218}Po$ | 3 minutos |
| $^{210}Bi$ | 5 dias |
| $^{210}Pb$ | 19,4 anos |
| $^{206}Tl$ | 4,3 minutos |
| $^{14}C$ | 5.730 anos |
| $^{137}Cs$ | 30 anos |

Assim, para uma amostra inicial $m_0$ de certa substância radioativa de meia-vida $M_V$, por meio da Tabela 3 podemos mostrar o que se segue:

**TABELA 3: Relação entre tempo e massa**

| Tempo | Massa |
|---|---|
| $t = 0$ | $m_0 = \frac{m_0}{2^0}$ |
| $t = M_V$ | $\frac{m_0}{2} = \frac{m_0}{2^1}$ |
| $t = 2M_V$ | $\frac{m_0}{2 \cdot 2} = \frac{m_0}{2^2}$ |
| $t = 3M_V$ | $\frac{m_0}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{m_0}{2^3}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ |
| $t = nM_V => n = \frac{t}{M_V}$ | $\frac{m_0}{2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 2} = \frac{m_0}{2^n}$ |

Dessa forma, podemos concluir que a massa final após $n$ meias-vidas será dada por:

$$m(t) = \frac{m_0}{2^n} => m(t) = m_0 \cdot 2^{-n} => m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{M_V}}$$

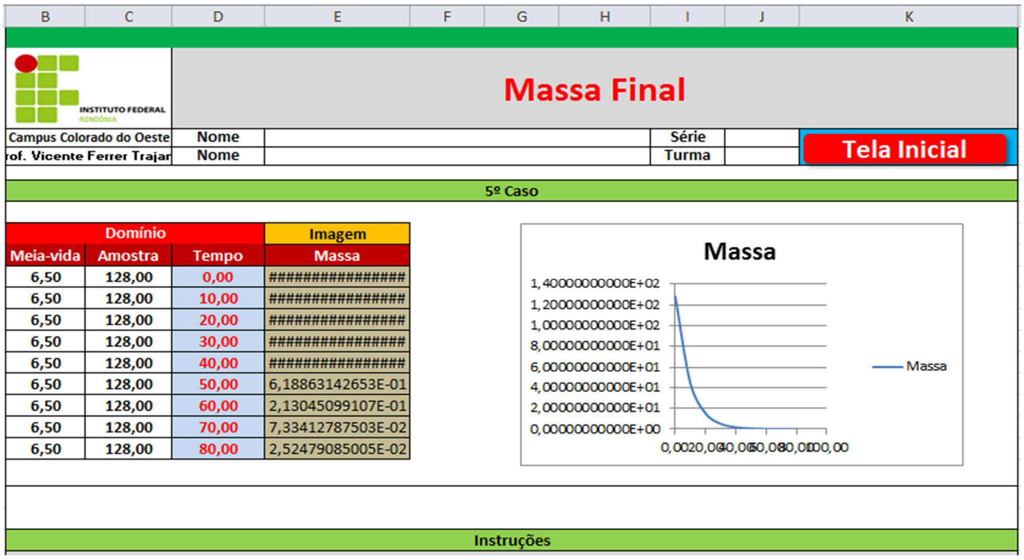
Na Planilha as grandezas foram distribuídas em quatro colunas. E a partir da célula E10 encontra-se a fórmula deduzida na Tabela 3 com a seguinte configuração, $= C10 * 2^\wedge(-D10/B10)$.

**Atividade 7**

Esta atividade tem como foco analisar o comportamento da massa de uma substância radioativa no decorrer do tempo, por meio da tabela e do gráfico. E ainda determinar alguns valores de massa.

Para atingir esses objetivos deverá ser usado o aplicativo da Figura 17.

**FIGURA 17: Aplicativo massa final**




| Domínio | | | Imagem |
|---|---|---|---|
| Meia-vida | Amostra | Tempo | Massa |
| 6,50 | 128,00 | 0,00 | ################ |
| 6,50 | 128,00 | 10,00 | ################ |
| 6,50 | 128,00 | 20,00 | ################ |
| 6,50 | 128,00 | 30,00 | ################ |
| 6,50 | 128,00 | 40,00 | ################ |
| 6,50 | 128,00 | 50,00 | 6,18863142653E-01 |
| 6,50 | 128,00 | 60,00 | 2,13045099107E-01 |
| 6,50 | 128,00 | 70,00 | 7,33412787503E-02 |
| 6,50 | 128,00 | 80,00 | 2,52479085005E-02 |

O acidente com o césio-137 ocorrido em setembro de 1987 na cidade de Goiânia - GO causou a morte de centenas de pessoas e deixou outras tantas com sequelas irreversíveis. O incidente teve início depois que dois jovens catadores de papel encontraram e abriram um aparelho contendo o elemento radioativo. A peça foi achada em um prédio abandonado, onde funcionava uma clínica desativada.

Fonte: http://g1.globo.com/. Acesso em 18 de março de 2014.

Chama-se meia-vida de uma substância radioativa o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade e a meia-vida do Césio-137 é de 30 anos.

Com base nessas informações resolva as questões seguintes:

**A)** Mostre através do aplicativo como varia a massa de uma amostra inicial de 100 g de Césio – 137 em função do tempo em um intervalo de 0 a 80 anos. Desenhe o gráfico.

**B)** Tomando 100 g dessa substância, quanto restará dela daqui a 50 anos? Desenhe o gráfico e indique o valor procurado.

## Atividade 8

Para determinar o tempo necessário para que a amostra de uma substância radioativa se reduza a certo valor, devemos tomar a fórmula abaixo e calcular o logaritmo na base 10 dos dois lados da equação.

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{M_V}} => \log[m(t)] = \log\left[m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{M_V}}\right] =>$$

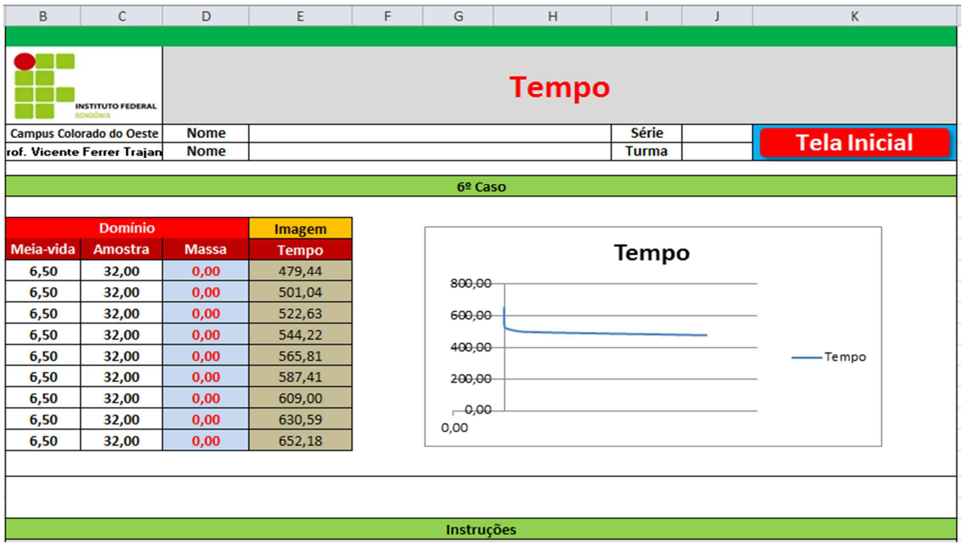
$$\log[m(t)] = \log m_0 + \log 2^{-\frac{t}{M_V}} => \log 2^{-\frac{t}{M_V}} = \log[m(t)] - \log m_0 =>$$

$$-\frac{t}{M_V} \cdot \log 2 = \log \frac{m(t)}{m_0} => t = -\frac{M_V}{log2} \cdot \log \frac{m(t)}{m_0}$$

Na Planilha, essa fórmula tem a seguinte configuração quando escrita na célula E10, $= -(B10/LOG(2;\ 10)) * LOG(D10/C10;\ 10)$.

Nesta atividade o aluno irá relacionar a meia-vida, a massa inicial e a massa final de uma substância radioativa. E ainda irá verificar através do gráfico como se comporta a variação de um grandeza em relação a outra. Deverá ser usado o aplicativo da Figura 18 para resolver esta atividade.

**FIGURA 18: Aplicativo tempo de decaimento**




| Domínio | | | Imagem |
|---|---|---|---|
| Meia-vida | Amostra | Massa | Tempo |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 479,44 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 501,04 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 522,63 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 544,22 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 565,81 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 587,41 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 609,00 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 630,59 |
| 6,50 | 32,00 | 0,00 | 652,18 |

Meia-vida de uma substância radioativa é o tempo necessário para que sua massa se reduza à metade. Daqui a quantos anos determinada massa em gramas de uma substância, cuja meia-vida é de 6,5 anos, será reduzida a $2^{-29}$ gramas?

**Dica:** Escreve-se a potência acima na Planilha da seguinte forma: $=2E-29$. Este deverá ser o valor da última célula da coluna D. Assim, na célula D10, deve-se começar com o valor da amostra inicial escolhida e após 8 (são nove células) desintegrações chega-se ao último valor.

Para preencher as células a partir da última, basta multiplicar cada valor da célula de baixo por 2. Dessa forma, para encontrar o valor da célula D17 tomamos o valor da célula D18 e temos que

$$2 \cdot 2^{-19} = 2^{1+(-19)} = 2^{1-19} = 2^{-18}$$

E assim sucessivamente até a célula D10. Contudo, analisando os resultados dos produtos por 2, é possível preencher as células com mais praticidade.

## 5. METODOLOGIA

A sequência didática foi aplicada em um grupo de oito alunos do 2º ano do curso Técnico em Agropecuária integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Rondônia – Campus Colorado do Oeste. Esse curso tem três anos de duração e é integral, tendo os alunos disciplinas técnicas e da formação básica, mescladas durante esse período, além de atividades de manutenção agrícola. Nesse grupo, três são do sexo feminino e cinco são do sexo masculino, tendo em média quinze anos de idade. Desses alunos, cinco foram nossos alunos no ano anterior.

Uma das alunas se encarregou de convidar os demais e ficou acertado que nos encontraríamos à noite para desenvolver a sequência, já que durante o dia seria inviável, pelos motivos expostos acima. A princípio pareceu-nos mais conveniente que os participantes dessa pesquisa fossem compostos apenas por aqueles que foram nossos alunos no ano anterior, no 1º ano, mas achamos que poderíamos convidar no máximo metade de outras turmas, para ver como conseguiriam se sobressair. Pensamos nisso porque os temas abordados com aqueles que estudaram conosco não foram desenvolvidos da mesma forma pelo professor das outras turmas.

Antes de iniciar a execução das atividades foi solicitado aos participantes que preenchessem um questionário, que teve como objetivo principal saber como eles têm contato com computadores e ainda descobrir em que nível estava o domínio da Planilha. E onde se deu a aquisição desse conhecimento; se em casa, em cursos pagos ou na escola.

Foi possível perceber que todos os alunos tinham conhecimentos básicos em relação à Planilha e tal conhecimento fora adquirido nas aulas de informática da grade curricular do curso do ano anterior. Isso permitiu inferir em relação a esse aspecto que não teríamos problema em aplicar essa sequência a qualquer um dos alunos do 2º ano. Contudo, na falta desse conhecimento, poderia ser feita uma breve explanação sobre como inserir fórmulas e copiar em todas as células da Planilha, e a resolução das atividades seguiria sem maiores problemas ou ainda trabalhar interdisciplinarmente com o professor de informática, agregando mais valor ao tema a ser explorado.

Para a execução da sequência didática os alunos foram divididos em duplas e de posse de um *notebook* receberam um arquivo com a Planilha e as questões por escrito em papel sulfite, com espaço abaixo de cada questão para as devidas anotações e resoluções. Nosso desejo era realizar tal atividade em um dos laboratórios de informática, mas os mesmos estavam passando por manutenção e por isso estavam indisponíveis. Mas isso não causou nenhum empecilho ao bom andamento dos trabalhos, pois tivemos seis *notebooks* à disposição, estando todos aptos a executar a Planilha. Isso serviu para reforçar a nossa defesa quanto à possibilidade dessa atividade ser feita em qualquer lugar com e sem a presença do professor.

A duração da prática foi de oito horas, divididas em dois encontros: na noite do dia 26 e na noite do dia 28 de março de 2014, das 18h30min às 22h30min. Durante essas duas seções, fizemos anotações por escrito, gravações em áudio e vídeo e fotografias do que os alunos manifestavam sobre a Planilha e as atividades resolvidas.

# 6. APLICAÇÕES

Apresentamos aqui a descrição da sequência de atividades desenvolvidas e apresentamos também as análises *a priori* e *a posteriori*.

## 6.1. Função Exponencial

Análise *a priori*

Nesta atividade foi pedido aos alunos que construíssem o gráfico de uma função exponencial crescente e de uma decrescente, inserindo a fórmula correta para cada caso. Em seguida, eles deveriam desenhar cada um desses gráficos e reconhecer as diferenças entre os gráficos desses dois tipos de função.

O objetivo era proporcionar aos alunos um contato inicial com o aplicativo, propondo o desafio de conseguir escolher valores adequados para a base $a$ da função $f(x) = a^x$. Ao mesmo tempo, deixar claro para eles as duas formas como a função exponencial pode ser representada.

Era esperado que eles encontrassem dificuldade em escolher o valor adequado para a base ao inserir a fórmula $= a\hat{}B10$ e conseguir expressarem-se adequadamente ao diferenciar as duas funções.

Análise *a posteriori*

Como eles apresentavam conhecimentos básicos da Planilha, não viram nenhuma dificuldade em inserir a fórmula e copiá-la para as outras células. Quanto ao valor da base $a$, na função crescente, usaram valores inteiros e na função decrescente, usaram valores na forma decimal, evitando a forma de fração, apesar de terem sido alertados para essa possibilidade. Uma aluna se surpreendeu com o surgimento do gráfico no espaço, antes em branco, ao lado da tabela que foi preenchida com a fórmula escolhida.

**ILUSTRAÇÃO 1: Gráfico de um aluno – Função Exponencial Decrescente**

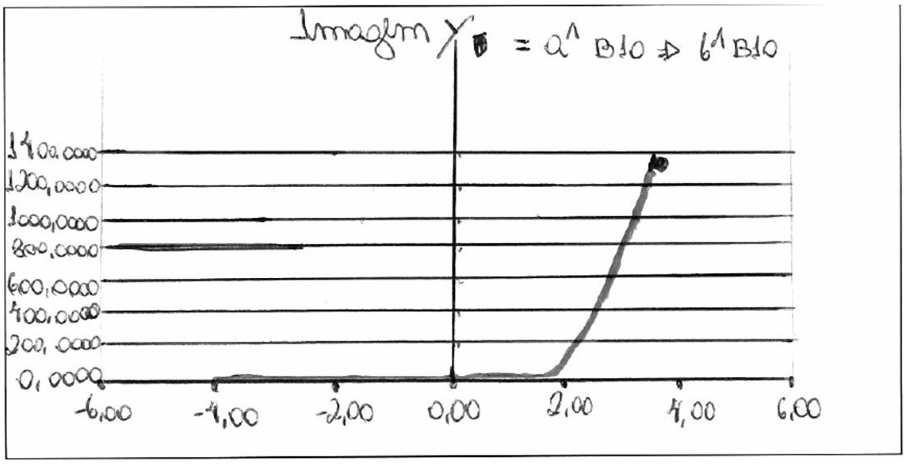
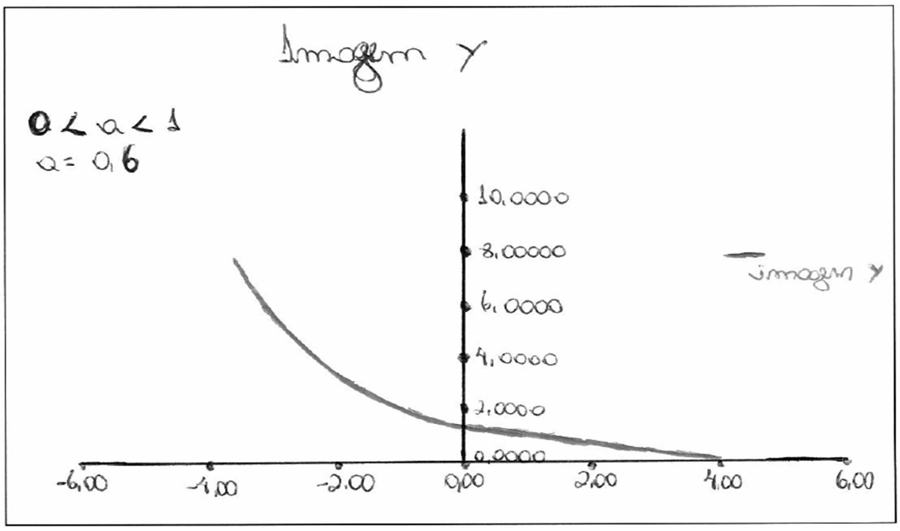
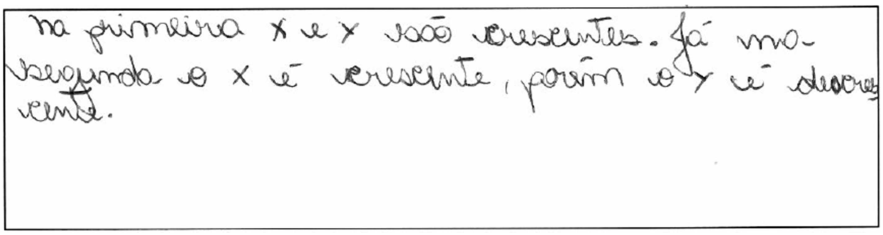



**ILUSTRAÇÃO 2: Gráfico de um aluno – Função Exponencial Decrescente**




Um aluno percebeu imediatamente a diferença entre os gráficos, dizendo que um crescia para um lado e o outro para o lado contrário. Então pedimos que ele tornasse mais claro essa diferença, observando como os valores da imagem variavam, ao responder por escrito.

**ILUSTRAÇÃO 3: Resposta de um aluno – Diferença entre funções**


na primeira x e y são crescentes. Já na segunda o x é crescente, porém o y é decrescente.

## 6.2. Função Logarítmica

<u>Análise *a priori*</u>

Essa atividade tinha a mesma proposta da questão da Atividade 1, tendo os alunos que efetuar os mesmos procedimentos e eram esperadas as mesmas dificuldades e/ou desafios. Era esperado ainda que ao observar o gráfico dos dois tipos de função (crescente e decrescente) eles chegariam a constatações rápidas sobre as suas diferenças. E por último, é importante que eles consigam comparar a função exponencial com a função logarítmica.

<u>Análise *a posteriori*</u>:

Com a inserção dos valores e a construção do gráfico, uma aluna percebeu que na função logarítmica o y assume os valores do x da função exponencial. Outro aluno observou que os gráficos da função exponencial se posicionavam de um lado e os gráficos da função logarítmica do outro lado. E sem que lembrassem, estavam se remetendo ao conceito de função inversa. As representações de uma aluno foram inseridas nas Ilustrações 4 e 5.

**ILUSTRAÇÃO 4: Gráfico de um aluno – Função logarítmica crescente**

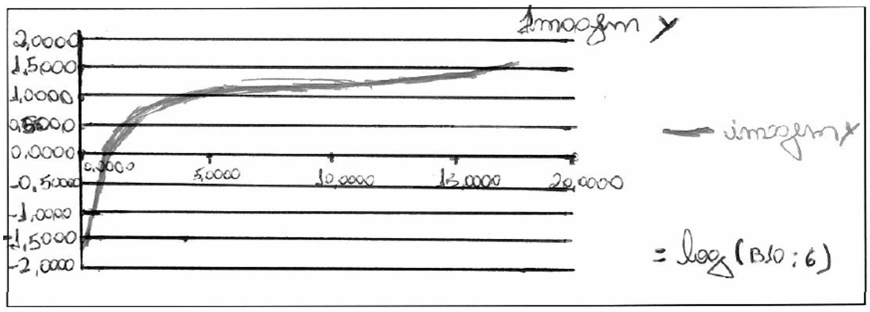



**ILUSTRAÇÃO 5: Gráfico de um aluno – Função logarítmica decrescente**

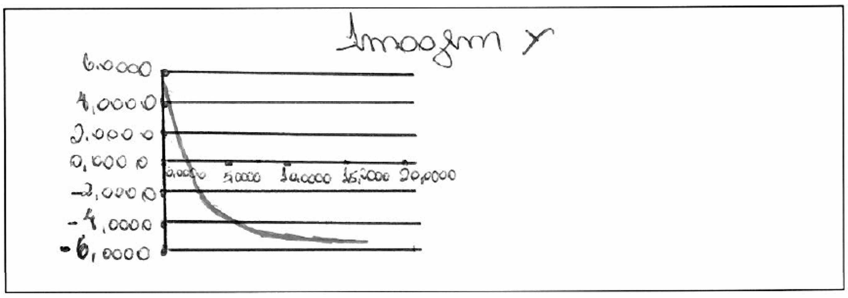
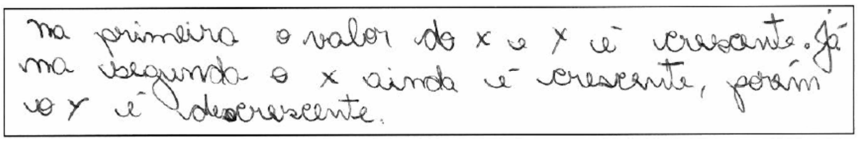



**ILUSTRAÇÃO 6: Resposta de um aluno - Diferença entre funções**




Inicialmente foi possível observar como os alunos encaram o aprendizado com extrema praticidade, evitando assimilar conceitos muito formais ou ter que ler textos longos para se chegar a uma conclusão. Tivemos que insistir para que fizessem uma releitura e tirassem conclusões para em seguida preencher as tabelas. Mas devemos considerar também que o tempo limitado pode ter reduzido a capacidade de pensar com mais cautela e tomar decisões mais embasadas nas leituras dos enunciados.

## 6.3. Montante

Análise *a priori*:

Nesta atividade além de resolver uma situação-problema, os alunos deveriam observar o comportamento dos valores em função do tempo até o valor desejado. Por isso foi sugerido que a coluna do tempo fosse preenchida com valores crescentes a partir de 1, em progressão aritmética, de tal forma que o último valor do montante responda o desafio.

Espera-se que os alunos encontrem dificuldade ou esqueçam que devem transformar $0{,}5\%$ em $0{,}005$, ou seja, dividir o primeiro número por 100. É esperado também que eles percebam que o rendimento na caderneta de poupança, apesar de seguro, apresenta baixa retribuição para prazos curtos e para pequenas aplicações e por isso, será sugerido que mudem a taxa de juros para $10\%$ e verifiquem a diferença entre os montantes para os dois casos. Também é possível, apesar de não ter sido sugerido, que seja alterado o valor do capital investido para verificar como se comporta o montante após o mesmo intervalo de tempo.

Análise *a posteriori*:

Para iniciar essa atividade, os alunos investigaram na *Internet* a taxa de juros da caderneta de poupança, encontrando para determinado dia, o valor $0{,}5\%$. Em seguida inseriram o valor sem a necessária transformação. O aluno D ficou empolgado com o valor encontrado, que seria o montante após três trimestres de investimento de $R\$\,500{,}00$. O valor calculado com o erro foi de $R\$\,19.221{,}68$ e com o valor correto foi de $R\$\,522{,}96$. Ao sermos questionados sobre o porquê de tamanha diferença, alertamos para o fato de terem usado inicialmente o valor correspondente a $50\%$.

Um aluno representou o gráfico desta atividade e percebeu como o gráfico era praticamente uma reta, mas quando aumentou a taxa de juros ficou claro que as duas eram uma hipérbole.

**ILUSTRAÇÃO 7:** **Gráfico de um aluno – Taxa de 0,5%**

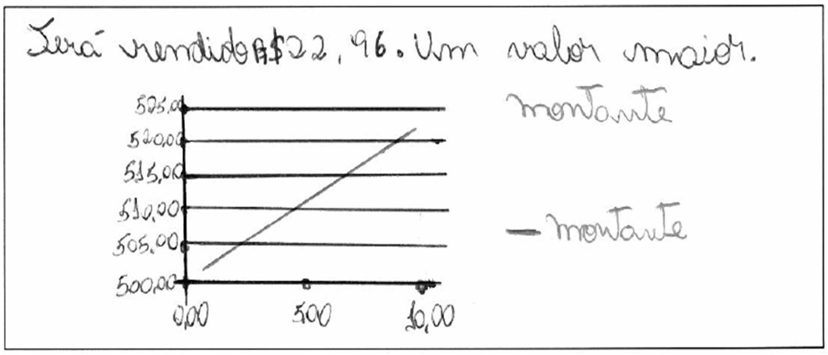
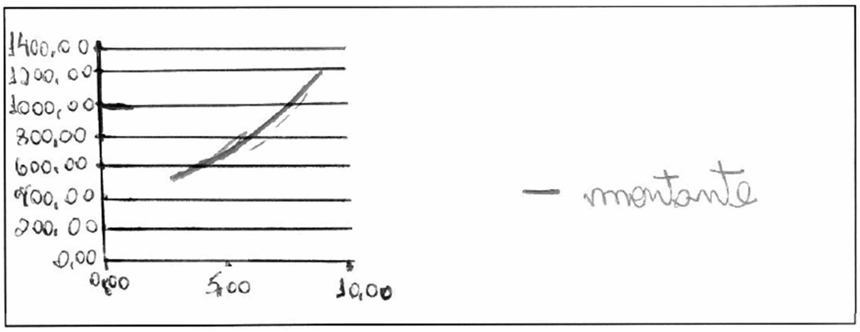



**ILUSTRAÇÃO 8:** **Gráfico de um aluno – Taxa de 10%**




## 6.4. Tempo

<u>Análise *a priori*:</u>

Nesta atividade propomos o processo inverso ao desenvolvido na Atividade 3, ou seja, calcular o tempo a partir do capital investido e do montante obtido. Queremos também que os alunos reflitam sobre a característica da função desta atividade e a da Atividade 3, que são inversas. Isso deverá ser percebido por meio do gráfico.

O desafio inerente a essa atividade diz respeito à necessidade de preencher a coluna do capital desde o valor inicial investido até o dobro deste valor e em progressão aritmética. Espera-se que eles calculem a diferença entre o último e o primeiro termo e divida pelo total de células da coluna para obter a razão, ou incremento.

Será proposto ainda duplicar o capital investido para verificar se o tempo para que o montante duplique sofrerá alteração. E espera-se com isso, que os alunos se surpreendam com o fato de que o tempo continuará sendo o mesmo.

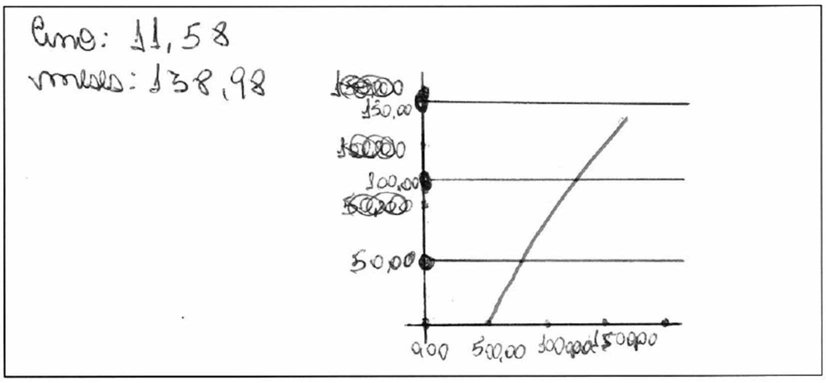
<u>Análise *a posteriori*</u>:

Como esperado, as discussões sobre como obter os valores em progressão aritmética tomou algum tempo das duplas, tendo chegado a soluções diferentes e obtendo o mesmo resultado. O método predominante foi um que incluía o uso de calculadora e por tentativa preencher as células até chegar ao último valor que já era conhecido. Porém, duas das duplas, dividiram o número que preenchia a primeira célula, 500, por 9, obtendo 55,56, que passou a ser o incremento a ser somado ao valor de uma célula para obter a seguinte. Isso só foi possível porque a operação que deveria ser realizada $(1000 - 500)/9$, resultava no mesmo valor.

Dessa forma, faz-se necessário, ao executar essa atividade, propor outros valores como o triplo ou o quádruplo para confrontar os resultados obtidos por esse método. E assim, proporcionar uma reflexão construtiva sobre a validade do uso do senso comum no dia a dia para a resolução de problemas práticos.

Segue a representação de um aluno na Ilustração 9.

ILUSTRAÇÃO 9: Gráfico de um aluno – Tempo de aplicação




## 6.5. Intensidade Sonora

Análise *a priori*:

Essa atividade objetiva não simplesmente obter valores de intensidade associadas a potências e níveis sonoros, mas calcular as distâncias associadas a essas grandezas, para que os alunos possam conscientizar-se dos perigos para audição que a exposição a níveis sonoros elevados podem causar. Assim, conhecida a potência de um aparelho e um determinado nível sonoro como, por exemplo, aquele situado no limiar de dor, é possível determinar a distância associada a esses dois valores, para que se tome a decisão de se situar a uma distância maior para obter níveis sonoros mais seguros. É estimulada também a pesquisa, de potências de equipamentos eletrônicos presentes no cotidiano, com o fim de determinar grandezas associadas a ruídos produzidos.

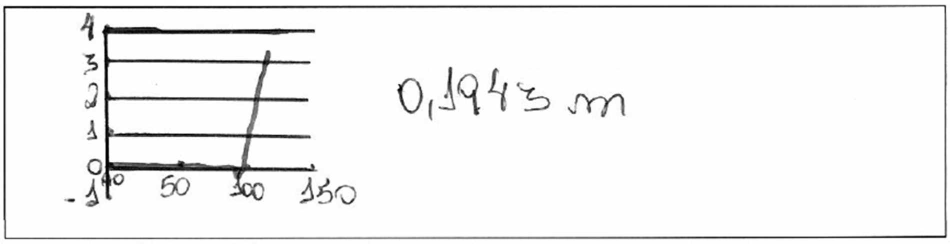
Espera-se que os alunos sintam-se desafiados a escolher valores corretos para responder os desafios propostos e com isso tomem decisões baseadas no bem estar relacionado à níveis sonoros seguros para o ouvido humano.

Análise *a posteriori*:

Uma das atividades propunha que fosse adotada a potência de 1500 mW, para determinar a distância associada ao nível sonoro de 125 dB. Os alunos então cometeram o equívoco e não transformaram a potência para 1,5 W, ou seja, o valor digitado correspondia a 1500 W, o que seria um absurdo para a potência de um fone de ouvido. Um dos alunos ficou preocupado com o fato de sempre usar o fone no volume máximo e por tempo prolongado.

A representação do gráfico dessa atividade foi reproduzida por um dos alunos na Ilustração 10.

**ILUSTRAÇÃO 10:** **Gráfico de um aluno – Intensidade sonora**




## 6.6. Nível Sonoro

Análise *a priori*:

Essa atividade é uma situação-problema presente em vestibulares e livros didáticos. Similar, porém mais contextualizada e pertinente, à seguinte questão:

> Um cachorro ao ladrar emite um som cujo nível de intensidade sonora é 65 dB. Se forem dois cachorros latindo ao mesmo tempo, em uníssono, qual será o nível de intensidade sonora? (use log 2 = 0,30) (UECE-CE).

Antes de resolver, é comum os alunos serem questionados sobre uma possível resposta. E muitos deles não vacilam em afirmar que é 130 dB, pois se para um cachorro é 65, para dois cachorros será o dobro. Então vamos à resolução:

Sabendo que o nível sonoro é dado por:

$$N = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$$

Então, considerando o nível sonoro de um cachorro, temos que:

$$65 = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0} => \log \frac{I}{I_0} = 6{,}5$$

Para dois cães, a intensidade é duplicada e assim o nível sonoro correspondente $N'$ será:

$$N' = 10 \cdot \log \frac{2I}{I_0} = 10 \cdot \left(\log 2 + \log \frac{I}{I_0}\right) = 10 \cdot (0{,}3 + 6{,}5) => N' = 68\ dB$$

Tal resultado contraria as expectativas e mostra que nem tudo se relaciona por meio de um fator de proporção de valor 2.

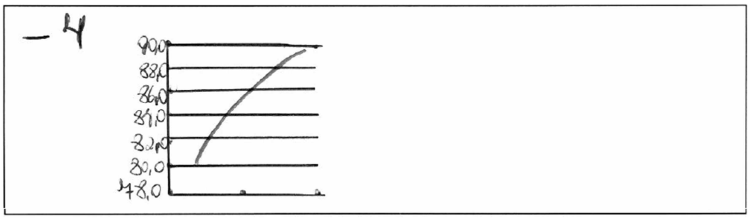
Assim, propomos a obtenção de resultado similar para o problema proposto, porém explorando a Planilha, onde os alunos terão que usar o que foi aprendido na Atividade 5 para completar a tabela dessa atividade. O desafio será usar os expoentes corretos para escolher dentre os resultados obtidos para o nível sonoro, o mais adequado. Espera-se que a dificuldade encontrada resida na correlação que deverá ser feita entre a intensidade de uma máquina e a de três máquinas funcionando ao mesmo tempo e fazer aparecer na tabela essa correlação.

Análise *a posteriori*:

A maior dificuldade encontrada pelos alunos consistiu em interpretar o problema e chegar ao expoente adequado, único valor a ser inserido em todas as células da coluna B. E ao mesmo tempo, não atentaram para objetivo da questão que era calcular o novo nível sonoro. Diante disso, deram como resposta o expoente que tanto procuraram, conforme segue exemplo, e não atentaram para a resposta, que deveria ser um dos valores da coluna D.

Segue na Ilustração 11 a representação de um aluno para esse caso.

**ILUSTRAÇÃO 11: Gráfico de um aluno - Nível sonoro**



No decorrer do desenvolvimento os alunos apresentaram dificuldade em escolher o expoente certo, acreditando que deveriam usar expoentes diferentes. Contudo, apesar do nível de dificuldade inerente ao próprio problema, que fazia uso da propriedade "logaritmo do produto", ao transformar produto em soma, acreditamos que a situação proposta não apresentou os elementos necessários ao bom entendimento. Já que nesse tipo de abordagem devem-se permitir operações rápidas compatíveis com o caráter ágil do manuseio de um computador.

## 6.7. Meia-Vida

<u>Análise *a priori*:</u>

Essa aplicação objetiva mostrar por meio do gráfico como se comporta a massa restante de uma amostra radioativa em função do tempo e obter valores de massa para um tempo específico. Espera-se que a única dificuldade seja reconhecer a forma como os números serão representados. Assim na Planilha, $nE \pm x = n \cdot 10^{\pm x}$.

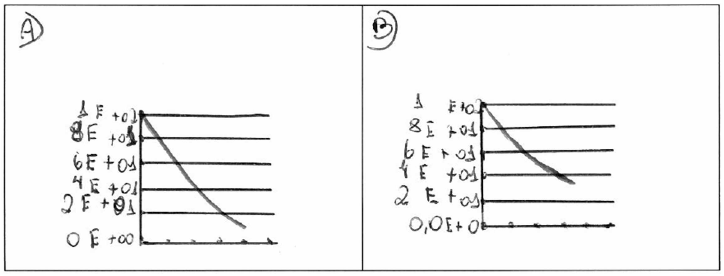
Outras atividades poderão ser propostas para explorar de outras formas essa aplicação.

Análise *a posteriori*:

A inserção dos dados pelos alunos transcorreu sem dificuldades até mesmo porque já estavam totalmente integrados à interface da Planilha. Mas procuraram a nossa ajuda ou dos colegas para saber como deveriam representar os números em notação científica no aplicativo. Acreditamos que essa foi mais uma competência interdisciplinar somada aos temas estudados.

Os gráficos dessa atividade seguem na Ilustração 12 pelas representações de um aluno.

**ILUSTRAÇÃO 12:** gráficos de um aluno – massa restante



## 6.8. Tempo

Análise *a priori*:

Essa atividade pretende fazer o contrário do que foi feito na Atividade 7, a partir da meia-vida, da massa da amostra e da massa final encontrar valores para o tempo. Também pretende mostrar que o tempo gasto para que certa amostra de determinado material radioativo se reduza a algum percentual independe da massa da amostra, pois é esperado que em conclusões prévias alguns alunos acreditem que ela interfira. Por isso, pretendemos tornar clara essa propriedade do decaimento radioativo.

Espera-se que a dificuldade se reduza à necessidade de converter a potência $2^{-29}$ para a notação da Planilha. E se constituirá em um desafio preencher a coluna a partir da última célula até a primeira. Isso se faz necessário, pois sabemos pelo enunciado do problema que a massa final corresponde à potência destacada acima e assim temos que determinar as anteriores a partir dela. É sugerida na sequência didática uma forma de conhecer esse valor, mas o aluno pode perfeitamente, no estágio em que se encontra e tendo estudado potenciação, tirar suas próprias conclusões e desenvolver outros meios de se chegar ao mesmo resultado.

Análise *a posteriori*:

De fato, as dificuldades, porém motivadoras, residiram na conversão da notação de potência usada correntemente para a notação da Planilha. Mas os alunos na discussão em dupla e até mesmo interagindo com colegas de outras duplas, conseguiram preencher de forma correta as células e assim chegar ao resultado esperado.

A reprodução do gráfico dessa atividade feita por um aluno está na Ilustração 13.

**ILUSTRAÇÃO 13: Gráfico de um aluno – Tempo de decaimento**


Foi possível concluir que quando os alunos são motivados e desafiados a obter uma resposta, passam a agir com afinco e determinação, interagindo com os colegas e valorizando as conquistas ao chegar à resposta de um modo inusitado ou no menor tempo possível.

Assim, são comuns e aceitáveis alguns erros, pois fazem parte dessa gana de desvendar o desconhecido.

# CONSIDERAÇÕES FINAIS

Elaboramos essa sequência didática pensando na necessidade de mudar o modelo de aula muitas vezes centrada no professor e assim permitir ao aluno construir e reconstruir seus próprios conhecimentos e competências. Ao mesmo tempo proporcionar ao professor a possibilidade de está permanentemente desenvolvendo aplicativos com base na Planilha para diversas áreas da Matemática. Ou seja, este trabalho com o tema funções exponenciais e logarítmicas não pretende ser um fim em si, mas possibilitar a sua abrangência a outras áreas além da Matemática.

Esperamos ter proporcionado ao menos uma reflexão sobre outros meios para se atingir o aprendizado, usando computadores e *notebooks*, cada vez mais presentes nas escolas e até mesmo nos lares dos nossos estudantes. Assim, que outros trabalhos tragam mais luz a essa área rica em possibilidades, abrangendo outros *softwares* similares à Planilha utilizada neste trabalho.

No que tange à nossa prática, tem sido extremamente gratificante, como educador, poder acrescentar um elemento novo à ação didática em sala de aula e fora dela. E é assim que deve se sentir todo educador e não apenas como um reprodutor dos conteúdos e exercícios presentes nos livros didáticos, apesar da ação intelectual e educadora ser inerente ao mestre que os usa. Poder ver no aluno, com surpresa, que fomos nós que construímos aquele aplicativo, é dá respaldo à nossa profissão e mostrar que as fontes de saber, exploração e domínio das leis da natureza partem também do desenvolvimento de pesquisas até mesmo na sala de aula.

Os usos dessa sequência didática devem ser feitos e adaptados de acordo com as necessidades e disponibilidade de aulas, por exemplo, e com base no planejamento pedagógico de cada escola, podendo o professor aplicar aquele aplicativo ou tema que ele julgar ser mais relevante. Deve-se levar em consideração o caráter interdisciplinar, proporcionando discussões que levem a mudanças de posturas diante de problemas ambientais e de saúde pública; preceitos presentes nos PCN's:

> A compreensão das questões ambientais pressupõe um trabalho interdisciplinar em que a Matemática está inserida. A quantificação de aspectos envolvidos em problemas ambientais favorece uma visão mais clara deles, ajudando na tomada de decisões e permitindo intervenções necessárias (reciclagem e reaproveitamento de materiais, por exemplo) (BRASIL, 1998).

A sequência sofreu pequenas alterações após a sua aplicação, em virtude da análise das dificuldades apresentadas pelos alunos ao tentar resolver uma ou outra situação-problema. Percebemos que em alguns casos a dificuldade para interpretar e resolver um problema não se devia necessariamente ao nível de complexidade do texto ou da Planilha, mas da carência de clareza, precisando assim de correções.

A realização dessa prática trouxe não apenas aos alunos outra maneira de vislumbrar o aprendizado de logaritmos, mas também nos possibilitou refletir sobre nossa prática e o quanto podemos aprender ao permitir que nossos alunos discutam e problematizem o saber enquanto aprendem. E nos faz pensar sobre quais são os propósitos do estudo da Matemática: se apenas aprender uma amontoado de fórmulas e a resolução de uma infinidade de questões prontas ou proporcionar o acesso a meios mais claros e objetivos de aprendizagem, adotando equipamentos de uso cada vez mais crescente na atualidade.

# REFERÊNCIAS


BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. Parâme-tros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamen-tal). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) + Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Oroentações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, vol. 2. Brasília: MEC, 2006.

BUCCHI, Paulo. Curso Prático de Matemática, vol.1. 1ª Edição. São Paulo: Moderna, 1998.

BUCCHI, Paulo. Curso Prático de Matemática, vol.2. 1ª Edição. São Paulo: Moderna, 1998.

CAETANO, J. L. Mário. Níveis Sonoros. Disponível em: http://www.ctb.com.pt/?page_id=1668. Acesso em 22 de mar. de 2014.

CARDOSO, Eliezer de Moura. Apostila Educativa Radioatividade. Comissão Nacional de Energia Nuclear.

EICHLER, Maecelo L.; CALVETE, Marcos Henrique; SALGADO, Tânia D. Miskinis (Coordenação). Módulos para o ensino de Radioatividade. Instituto de Química – UFRGS.

FEIJÓ, Adriano Brandão. O Ensino de Matemática na Graduação com a Utilzação da Planilha e da Calculadora: Uma Investigação Comparativa. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática), 2007. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul - PUC/SP.

FERREIRA, Ronize Lampert. Uma sequência de ensino para o estudo de Logaritmos usando A engenharia Didática. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática), 2006. Centro Universitario Franciscano de Santa Maria – UNIFRA.

FLORES, Maria Lucia Pozzati. O Uso do Excel para Resolver Problemas de Operações Financeiras. Disponível em:

<http://seer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/13678/16034>. Acesso em: 08 de jan. de 2014.

FLORES, Maria Lucia Pozzati. O Uso do Excel para Resolver Problemas de Operações Financeiras. Disponível em: <http://sbeer.ufrgs.br/renote/article/viewFile/13678/16034>. Acesso em: 08 de jan. de 2014.

LIMA, Elon Lages. Logaritmos. 2ª ed - Rio de Janeiro. Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

MACHADO, Anaxágora Alves. Poluição sonora como crime ambiental. Disponível em: http://jus2.uol.com.br/doutrina/texto.asp?id=5261. Acesso 20 de mar. de 2014.

MEYER, João Frederico da Costa Azevedo; CALDEIRA, Ademir donizeti; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos. Modelagem em Educação Matemática (Coleção Tendências em Educação Matemática). Belo horizonte: Autêntica Editora, 2011.

MEYER, J. F. C. A.; CALDEIRA, A. D.; MALHEIROS A. P. S. Modelagem em Educação Matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

MIORIN, Maria Angela. Introdução à História da Educação Matemática/Maria Ângela Miorin, São Paulo: Atual, 1998.

*Noise exposure computation*. Disponível em: https://www.osha.gov/pls/oshaweb/owadisp.show_document?p_table=STANDARDS&p_id=9736. Acesso em 20 de mar. de 2014.

ROCHA, Elisabeth Matos. Tecnologias Digitais e Ensino de Matemática: Compreender Para Realizar. Tese (Doutorado em Educação), 2008. Universidade Federal do Ceará - UFC/CE.

ROONEY, Ane. A História da Matemática – Desde a Criação das Pirâmides até a Exploração do Infinito. São Paulo: M.Books, 2012.

ROSSI, Patrícia Rodrigues da Silva. Logaritmos no ensino médio: construindo uma aprendizagem signficativa através de uma sequência didática. São Carlos: UFSCar, 2010.

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. O Estudo da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra. Mestrado em Educação Matemática, 2011. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUC.

SANTOS, Adriana Tiago Castro dos. Funções Exponenciais e Logarítmicas: Um Estudo por Meio de uma Sequência Didática. Disponível em: http://sbem.esquiro.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3190_1368_ID.pdf>. Acesso em 09 de jan. de 2014.

SOARES, Evanildo Costa. Uma investigação histórica sobre logaritmos com sugestões didáticas para a sala de aula. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), 2007. Universidade Federal do Rio Grande do Norte – UFRN.

SOUSA, Robson Pequeno; MOITA, Filomena M. C. da S. C.; CARVALHO, Ana Beatriz Gomes (Organizadores). Tecnologia Digitais na Educação. Campina Grande: EDUEPB, 2011.

STIELER, Eugênio Carlos; FERREIRA, Marcio Violante. Um Estudo da Aplicação da Planilha do Excel no Ensino de Matemática Financeira. Disponível em: http://limc.ufrj.br/htem4/papers/71.pdf. Acesso em 20 de mar. de 2014.