Universidade Federal de Goiás
Instituto de Matemática e Estatística
Programa de Mestrado Profissional em
Matemática em Rede Nacional

Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra

Vitail José Rocha

Goiânia

2014

sistema de bibliotecas ufg

UFG

TERMO DE CIÊNCIA E DE AUTORIZAÇÃO PARA DISPONIBILIZAR AS TESES E DISSERTAÇÕES ELETRÔNICAS (TEDE) NA BIBLIOTECA DIGITAL DA UFG

Na qualidade de titular dos direitos de autor, autorizo a Universidade Federal de Goiás (UFG) a disponibilizar, gratuitamente, por meio da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações (BDTD/UFG), sem ressarcimento dos direitos autorais, de acordo com a Lei nº 9610/98, o documento conforme permissões assinaladas abaixo, para fins de leitura, impressão e/ou *download*, a título de divulgação da produção científica brasileira, a partir desta data.

1. Identificação do material bibliográfico: **[X] Dissertação** **[ ] Tese**

2. Identificação da Tese ou Dissertação

Autor (a):	Vitail José Rocha
E-mail:	vitailrocha@gmail.com
Seu e-mail pode ser disponibilizado na página? [x]Sim [ ] Não	
Vínculo empregatício do autor	Secretaria de Educação do Estado de Goiás
Agência de fomento:	Coordenação de Aperfeiçoamento de pessoal de nível superior — Sigla: CAPES
País: Brasil	UF:Go — CNPJ: 00.889.834/0001-08
Título:	Números complexos e o teorema fundamental da álgebra
Palavras-chave:	Números complexos, teorema fundamental da álgebra
Título em outra língua:	Complex numbers and the fundamental theorem of algebra
Palavras-chave em outra língua:	Complex numbers, fundamental theorem of algebra
Área de concentração:	Matemática do Ensino Básico
Data defesa:	03/07/2014
Programa de Pós-Graduação:	Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional
Orientador (a):	Dr Durval José Tonon
E-mail:	djtonon@gmail.com
Co-orientador (a):*	
E-mail:	

*Necessita do CPF quando não constar no SisPG

3. Informações de acesso ao documento:

Concorda com a liberação total do documento [x] SIM [ ] NÃO[1]

Havendo concordância com a disponibilização eletrônica, torna-se imprescindível o envio do(s) arquivo(s) em formato digital PDF ou DOC da tese ou dissertação.

O sistema da Biblioteca Digital de Teses e Dissertações garante aos autores, que os arquivos contendo eletronicamente as teses e ou dissertações, antes de sua disponibilização, receberão procedimentos de segurança, criptografia (para não permitir cópia e extração de conteúdo, permitindo apenas impressão fraca) usando o padrão do Acrobat.

Vitail José Rocha

Assinatura do autor

Data: 14 / 07 / 2014

[1] Neste caso o documento será embargado por até um ano a partir da data de defesa. A extensão deste prazo suscita justificativa junto à coordenação do curso. Os dados do documento não serão disponibilizados durante o período de embargo.

Vitail José Rocha

Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.
Área de Concentração: Matemática do Ensino Básico
Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon.

Goiânia

2014

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação na (CIP)
GPT/BC/UFG

Rocha, Vitail José.
R672n Números complexos e o teorema fundamental da álgebra [manuscrito] / Vitail José Rocha. - 2014. 86 f. : figs.

Orientador: Prof. Dr. Durval José Tonon
Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Goiás, Instituto de Matemática e Estatística, 2014.
Bibliografia.
Inclui lista de figuras.
1. Teorama 2. Numeros complexos I. Título.

CDU: 517.911

Vitail José Rocha

Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra

Trabalho de Conclusão de Curso defendido no Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT/UFG, do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática, área de concentração Matemática do Ensino Básico, aprovado no dia 03 de julho de 2014, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

Prof. Dr. Durval José Tonon
Instituto de Matemática e Estatística-UFG
Presidente da Banca

Prof. Dr. Flávio Raimundo de Souza
IFG/Goiânia

Prof. Dr. Jesus Carlos da Mota
Instituto de Matemática e Estatística-UFG

Vitail José Rocha graduou-se em Matemática pela UniEVANGÉLICA e especializou-se em Educação Matemática pela UniEVANGÉLICA. É professor há vinte e três anos, sendo que neste período já atuou como professor do Ensino Fundamental, Médio e Superior. Atualmente, leciona no Ensino Médio da Rede Pública de Ensino e Cálculo I nos cursos de Administração, Ciências Econômicas e Contábeis na UEG.

Dedico este trabalho a minha esposa Maria Angela e aos meus filhos Pedro Henrique e Vitor Lucas e para aqueles que acreditam no conhecimento como ferramenta para liberdade.

Agradecimentos

À Deus, o criador do Universo, que nesse período nos deu condições físicas e mentais para continuamente estudar cada uma das disciplinas oferecidas “mesmo com grandes pressões”, e nos possibilitou conhecer pessoas, que influenciamos e fomos influenciados, não deixando de ser nós mesmos.

Ao meu pai “em memória” e minha mãe, mesmo em suas limitações, buscaram com todas as forças no mais profundo, dar a nós, os seus sete filhos, o que há de bom no ser humano: simplicidade, respeito e honestidade.

Aos companheiros de academia que no passar dos dias foram se tornando amigos, onde encontravamos auxílio em nossas dificuldades, e aos amigos mais chegados que compartilhavamos as nossas alegrias, tristezas, frustrações e conquistas no trajeto da sala de aula ao restaurante.

Aos nossos professores que através de cada uma de suas particularidades sempre nos instigavam as reflexões, exaustivamente mostrando que aquela resposta poderia ser melhor, poderiamos ir um pouco mais.

Ao Prof Dr Durval José Tonon, pelo papel desempenhado na condição de orientador, que desde o primeiro contato, acessível, com boas ideias e é claro, a sua simplicidade.

Por última, e não menos importante, àqueles que planejaram e criaram o PROFMAT trazendo esperanças e perspectivas para professores que militam na área do ensino tão bela e má compreendida, e a CAPES pelo suporte financeiro dando a nós, condições de reduzirmos a nossa jornada de trabalho para termos mais dedicação aos estudos.

Resumo

O objetivo deste trabalho é contar um pouco sobre o surgimento e desenvolvimento do Teorema Fundamental da Álgebra, tendo como enredo o contexto histórico e formalização dos Números Complexos, que se mistura com este teorema. Levando em consideração o rigor matemático na construção deste corpo, o qual ofereceu estrutura para a consolidação deste teorema. Este trabalho busca alcançar uma demonstração mais acessível, devido a sua presença necessária no Ensino Médio, mas de forma "axiomática".

Palavras-chave

Números Complexos, Teorema Fundamental da Álgebra

Abstract

The objective of this work is to tell a little bit about the emergence and development of the Fundamental Theorem of Algebra, having as plot the historical context and the formalization of Complex Numbers, which mixes with this theorem. Considering the mathematical rigor in the construction of this subject, which offered structure for the consolidation of this theorem. This work aims to achieve a more accessible demonstration, due to their necessary presence in high school, but in an "axiomatic" form.

Keywords

Complex numbers, Fundamental theorem of Algebra.

Lista de Figuras

Sumário

1 Introdução

Nestes vinte e três anos envolvido com o ensino da matemática, algumas coisas têm nos chamado a atenção: as transformações aceleradas em nossa sociedade, os avanços tecnológicos e as estruturas educacionais. Por esta última, este trabalho tem por objetivo contribuir na formação continuada de docentes, apoiando-se na abordagem histórica da construção dos conteúdos matemáticos, que tem como ação extensiva, envolver e motivar o corpo discente.

(D'AMBRÓSIO, 1996) *"Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. A história da matemática é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época."*

A teoria dos números complexos abordada no ensino médio, dá subsídio para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, evidentimente que sua demonstração requer argumentos que não podem ser feitos de modo preciso no ensino médio. Segundo (LIMA, 2006) *"Mas é interessante que pelo menos o professor tenha uma ideia sobre como demonstrá-lo."*

Então o escopo deste trabalho versa sobre a história do Teorema Fundamental da Álgebra que se funde ao surgimento e aceitação dos números complexos, onde apresentamos na Seção 2 indícios e as primeiras observações significativas dessa nova *espécie* de números. Temos ainda os algebristas italianos do século XVI, desenvolvendo álgebra em meio a ambiente de tramas, segredos revelados e desafios públicos. Na Seção 3 colocamos uma linha do tempo para a consolidação do Teorema Fundamental da Álgebra, para instrumentalizarmos a sua demonstração. Apresentamos na Seção 4 o conjuntos dos números complexos que servirá de estrutura para boa parte da demonstração, estes números são apresentados com rigor teórico, que acreditamos ser necessário para o professor, mesmo não sendo usado com a mesma dosagem em sala de aula do ensino médio, sempre carregado quando possível de sua história, tirando aquela visão de que matemática é algo divinamente inspirada que se achegou a nós de forma mágica, pronta e acabada.

Na Seção 5 apresentamos conceitos de continuidade, completude dos números reais e o teorema de Bolzano-Weierstrass que garante que em toda função contínua definida em um disco compacto em $\mathbb{R}^2$, possuir mínimo nesse disco. Na sequência, fazemos uma análise do comportamento de um polinômio real de grau n no infinito que juntamente com a desigualdade triangular, permite estudarmos o comportamento de um polinômio complexo no infinito, culminando com a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra. Em seguida aplicamos o Teorema Fundamental da Álgebra na demonstração do Teorema da Decomposição e nas relações entre coeficientes e raízes de uma equação, conhecida também por relação de Girard. Na Seção 6 criamos um roteiro de atividades com estratégias e interatividade com um programa de Geometria dinâmica obedecendo a ordem deste trabalho, procurando deixá-lo de tal forma que facilite a sua reprodução em sala de aula. Finalmente na Seção 7, externamos as nossas considerações finais concluindo que o foco deste trabalho é uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra motivada pela sua apresentação axiomática no ensino médio, valorizando a história do Teorema Fundamental da Álgebra que se funde ao dos números complexos, sendo este possuidor de aplicações na Geometria e na Trigonometria que pode ser mais explorado no ensino médio.

2 Equações Algébricas na Antiguidade

Na antiguidade os problemas eram equacionados por meio de formas geométricas, evidentemente suas soluções tinham que existir no mundo real, há registros de situações que não haviam interpretações concretas no mundo da natureza, exemplo disso: Heron de Alexandria (c. 75 d.C.), ao determinar o volume de um tronco de cone, depara com a raiz quadrada de $81 - 144$.

Bhaskara Acharya, matemático hindu (486 d.C.), escreveu: "O quadrado de um número positivo, assim como de um número negativo, é positivo, e a raiz quadrada de um número positivo é bivalente, positiva e negativa; não existe raiz quadrada de um número negativo, pois um número negativo não é um quadrado".

Mahavira Acharya, matemático hindu (850 d.C.), escreveu: "Como na natureza, uma (quantidade negativa) não é uma (quantidade) quadrada".

Com essa exigência da interpretação geométrica "da concretude", as equações do segundo grau não motivaram os matemáticos a aceitação de tal campo numérico, pois na resolução das mesmas, quando surgia uma raiz quadrada de um número negativo, era vista como prova de que o problema não tinha solução, exemplo disso é visto em *Arithmética* de Diofanto [1] (275 d.C.), cujo problema é determinar os lados de um

[1] Matemático grego, nascido entre 201 e 215 a.C. morreu entre 285 e 299, autor de uma série de livros chamado Aritmética, muitos destes perdidos.

triângulo retângulo de área 7 e perímetro 12.

Vejamos uma resolução:
Sejam x e y os comprimentos dos catetos, temos:

$$\frac{xy}{2} = 7 \text{ e } x^2 + y^2 = (12 - x - y)^2.$$

Desenvolvendo a segunda equação temos $12x + 12y = 72 + xy$ e nesta pondo $y = \frac{14}{x}$, obtemos:

$$6x^2 - 43x + 84 = 0 \Longrightarrow x = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

Para Diofanto, nesse caso o problema não possui solução.

Como não foram as equações do segundo grau que motivaram a aceitação dos números complexos, e sim as de terceiro grau, no século XVI, com os algebristas italianos, num ambiente de tramas, segredos revelados e desafios públicos, foram capazes de apresentar fórmulas para resolução da equação cúbica e quártica. Para sermos exatos, em 1545 Cardano [2] publica *"Ars Magna"*, provocando impacto sobre os algebristas. O ano de 1545 é tomado como marco inicial do período moderno na matemática. Esta publicação descreve métodos algébricos para resolver equações cúbicas e quárticas. Sabendo que os babilônios já haviam mostrado como resolver equações quadráticas completando quadrados, esta obra de Cardano foi o principal avanço na Álgebra em mais de 3000 anos.

Desde o século XIII, Leonardo Fibonacci (1170-1250), em seu livro *Liber Abaci*, apresenta discussão de álgebra e aritmética com números indo-arábicos (obra que introduziu os numerais hindu-arábicos na Europa). Não houve progresso real quanto ao problema de resolver equações cúbicas, até surgir Scipione del Ferro (1465-1526), professor de matemática em Bolonha, uma das mais antigas universidades medievais. Como ou quando isso se deu não se sabe, pois ele não publicou a solução. Niccolò Fontana (1500-1557), também descobriu como resolver certas equações cúbicas e fez como seu antecessor, guardando segredo de tal descoberta, pois nessa época, os estudiosos italianos eram na maioria mantidos por patronos ricos e tinham que demonstrar suas habilidades vencendo outros estudiosos em desafios, ou melhor, em competições públicas. Acredita-se que talvez por esse motivo, Scipione e Tartaglia mantiveram segredo de suas descobertas. Tartaglia era o apelido de Niccolò Fontana (cuja tradução é gago, pois quando criança, levou um corte de sabre, por ocasião da tomada de Bréscia pelos franceses em 1512, prejudicando-o em sua fala).

[2] Girolano Cardano, (1501-1576) matemático italiano, filósofo, médico e astrólogo.

Segundo [2] em 1535 ou, segundo [6] em 1541, Tartaglia anuncia que pode resolver equações cúbicas, mas guardaria segredo. Quando esse anúncio chega aos ouvidos de Antonio Maria Fiore, discípulo de Scipione, este resolve desafiar Tartaglia para uma competição, pois Scipione antes de falecer havia transmitido seu segredo a seu discípulo. Foi preparada uma competição entre Tartaglia e Fiore, cada um dos competidores propuseram trinta questões para que o adversário resolvesse num intervalo de tempo fixado. Ao chegar o dia da decisão, Tartaglia havia resolvido todas as trinta questões propostas por Fiore, ao passo que este não tinha conseguido resolver nenhuma proposta pelo seu oponente, Tartaglia vence o desafio com Fiore, história esta que chega aos ouvidos de Cardano que a partir de então procura entrar em contato com Tartaglia, para convencê-lo a compartilhar o segredo, após muitos apelos e promessas de guardar segredo, Cardano finalmente convence ele insinuando que trataria de arranjar um encontro entre ele e um possível patrono, pois Tartaglia não possuia nenhuma fonte financeira substancial, em parte credita-se talvez devido a falha de locução, então Tartaglia vai a Milão para explicar a ele a sua solução. Uma vez conhecedor do método para resolver um par de casos da equação cúbica, Cardano investiu em achar um método para a equação geral da cúbica, após seis anos trabalhando intensamente, consegue para o caso geral. Seu assistente Lodovico Ferrari (1522-1565), consegue determinar a fórmula para a solução da equação quártica, usando ideias da cúbica. A prova que não há fórmula para a resolução da equação de quinto grau, só veio a ser publicada em 1824, demonstrada pelo matemático norueguês Niels Henrik Abel (1802-1829).

Cardano com seu trabalho pronto em mãos, sabia que havia feito uma contribuição real para a matemática, mas não podia publicá-lo, pois havia feito a promessa a Tartaglia. Surge assim a seguinte questão: Como publicá-lo sem quebrar a promessa feita?

Cardano descobre que del Ferro encontrara a solução do caso crítico antes de Tartaglia, diante disso, ele se sente livre e desimpedido para publicar, já que não prometera manter a solução de del Ferro secreta, logo não estaria quebrando a promessa feita a Tartaglia, publicando assim o livro *Ars Magna*. Imagine como passou a ser os sentimentos de Tartaglia em relação a Cardano. Ele tornou pública a traição de Cardano, mas este não preocupou-se com isso. Neste cenário Tartaglia é desafiado por Ferrari para uma competição, a principio não houve interesse de sua parte, pois Tartaglia considerava Ferrari um jovem sem expressão, depois de certo tempo, em 1548 aceita motivado pela oferta de um cargo de professor, caso derrote Ferrari no desafio, mas para sua tristeza, Tartaglia perdeu o desafio, explicação simples, ele não tinha absorvido essa parte do *Ars Magna*, que tratava das resoluções das equações cúbicas e quárticas, o oposto de seu oponente.

A fórmula de Cardano para resolver equações cúbicas do tipo $x^3 = px + q$, posta em notação atual, era:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Aplicando essa fórmula de Cardano a certas equações, deparava-se com expresssões que pareciam não fazer nenhum sentido. Por exemplo: $x^3 = 15x + 4$ nesse método dava:

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

Como era o pensamento desde os gregos, aparecendo raízes de números negativos, concluía-se que a equação não tinha solução. A notação utilizada por Cardano naquela época, tendo como exemplo a equação $x^3 = 15x + 4$, seria mais ou menos assim:

$$cubus.aeq.15.cos.p.4$$

lê-se "um cubo é igual a 15 coisas mais 4".

Nos meados de 1560 entra em cena o discípulo de Cardano, Rafael Bombelli (1526-1572), trazendo luz a esta questão, ele inventou uma estranha linguagem, onde $2 + \sqrt{-121}$ lemos: dois mais a raiz quadrada de menos 121, ele dizia "dois mais de menos a raiz quadrada de 121", introduzindo a sua quantidade *"più de meno*[3]*"*, que corresponde a $\sqrt{-1}$ tornando o código para somar a raiz quadrada de um número negativo. Com isso, ele demonstrou a possibilidade de trabalhar com raízes de números negativos e ainda ter resultados razoáveis! Bombelli usando as regras usuais da Álgebra mostrou que:

$$\begin{aligned}
(2 + \sqrt{-1})^3 &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-1} + 3 \cdot 2 \cdot (\sqrt{-1})^2 + (\sqrt{-1})^3 \\
&= 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} \\
&= 2 + 11\sqrt{-1} \\
&= 2 + \sqrt{-121}.
\end{aligned}$$

Logo, $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1}$, de forma análoga: $\sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1}$. Como:

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4,$$

[3]Em italiano, più de meno significa mais de menos.

concluímos que a equação $x^3 = 15x + 4$ possui solução real para $x = 4$. Mostrando assim, que tais expressões nem sempre é um sinal que o problema não tem solução! Sinalizando que os números complexos, até aqui *"numeri ficti"* poderiam na realidade ser ferramentas matemáticas úteis, o poder desta descoberta pode ser ilustrada nas palavras do matemático francês Hadamard (1865-1963), que disse: *"a menor trajetória entre duas verdades no domínio real passa pelo domínio complexo".*

A $\sqrt{-1}$ não foi introduzida por Bombelli, mas por Albert Girard, em *Invention novelle em L'Algebre de Girard*, em 1629, que só veio a ser representada pela letra "i" a partir de 1777, por Leonard Euler, mas a sua aceitação no meio matemático só ocorre através dos trabalhos de Gauss.

3 Teorema Fundamental da Álgebra na Linha do Tempo

Apresentamos abaixo a linha do tempo do Teorema Fundamental da Álgebra, juntamente com os matemáticos que construíram sua história.

- **(?)** - François Viète (1540-1603). Exibiu várias equações polinomiais com coeficientes reais de grau n com n raízes.

- **1600** - Peter Rothe (? -1617). Em seu livro *Arithmetica Philosophica*, afirma que uma equação tem no máximo tantas raízes quanto seu grau.

- **1629**- Albert Girard (1595-1632). Em seu livro *L'Invention Nouvelle en Algebre*, registra-se que uma equação algébrica completa de grau n, possui n raízes.

- **1637** - René Decartes (1596-1650). Em seu livro *La géométrie*, aceita que uma equação tem tantas raízes quanto seu grau, se admitirmos as raízes imaginárias.

- **1742** - Leonard Euler (1707-1783). Enunciou que um polinômio com coeficientes reais pode ser fatorado como um produto de fatores lineares e fatores quadráticos mas não conseguiu uma prova completa deste fato.

- **1746** - Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783). Investiu no problema de demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, sem contudo conseguir uma prova aceitável.

- **1772** - Joseph Louis Lagrange (1736-1813). Levanta objeções a demonstração de Euler e obteve sucesso em preencher várias lacunas na prova de Euler, mas sua prova também era incompleta.

- **1795** - Pierre Simon Laplace (1749-1827). Apresenta uma demonstração muito elegante do Teorema Fundamental da Álgebra e bem diferente daquela de Lagrange e Euler. Contudo, sua demonstração também era incompleta.

- **1798** - James Wood. Publica em "The Philosophical Transactions of the Royal Society" o artigo *"On the roots of equations"*, onde apresenta uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra para polinômios com coeficientes reais. No entanto, sua prova continha falhas de natureza algébrica.

- **1799** - Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855). Em sua tese de doutorado intitulada: "Nova Demonstração do Teorema que Toda Função Algébrica Racional Inteira em uma Variável pode ser Decomposta em Fatores Reais de Primeiro ou Segundo Grau", apresenta a primeira demonstração correta das quatro provas do Teorema Fundamental da Álgebra, que ele publicou ao longo de sua vida.

- **1806** - Jean Robert Argand (1768-1822). Publica um esboço de uma demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra em um ensaio sobre a representação dos números complexos. Em 1814 ele apresenta a primeira prova correta do Teorema Fundamental da Álgebra enunciado para polinômios com coeficientes complexos. Esta prova de Argand foi usada em vários livros textos no século XIX, gradativamente sendo substituidos no século XX quando o Teorema Fundamental da Álgebra passou a ser apresentado como consequência do Teorema de Liouville [4].

- **1946** - John Edensor Littlewood (1885-1977). Publica uma prova do Teorema Fundamental da Álgebra que elementariza a demonstrada por Argand, sua prova é feita por contradição e por indução.

- **2009** - Theo de Jong. Publica uma versão modernizada da primeira prova de Gauss para o Teorema Fundamental da Álgebra, utilizando o teorema dos multiplicadores de Lagrange.

Esta linha histórica do Teorema Fundamental da Álgebra, mostra o papel das equações nutrindo os pensamentos destes que, aos poucos, foram dando forma a ele. Daí

[4] Joseph Liouville (1809-1822), matemático francês.

entendermos o seu título, pois a álgebra nesse período era compreendida como a teoria dos polinômios com coeficientes reais ou complexos, isto é, como a teoria das equações algébricas, sendo fundamental desta teoria.

4 Conjunto dos Números Complexos

Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por $\mathbb{C}$, o conjunto dos pares ordenados de números reais para os quais estão definidos a igualdade, a adição e a multiplicação. [5]

Seja $\mathbb{R}$ conjunto dos números reais e definimos $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, com isto, estamos dizendo que $\mathbb{R}^2$ é o conjunto dos pares ordenados (x, y) onde x e y são números reais.

Dados dois elementos (a, b) e $(c, d) \in \mathbb{R}^2$, apresentamos as seguintes definições:

$i)$ Igualdade:

$$(a, b) = (c, d) \Longleftrightarrow a = c \quad \text{e} \quad b = d.$$

$ii)$ Adição:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

$iii)$ Multiplicação:

$$(a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

É comum representar cada elemento (x, y) com o símbolo z, portanto

$$z \in \mathbb{C} \Longleftrightarrow z = (x, y), \text{ para } x, y \in \mathbb{R}.$$

Denotamos o números complexos $(0, 0)$ e $(1, 0)$ respectivamente por 0 e 1.

Exemplo 1. *Dado $z_1 = (1, -1)$ e $z_2 = (3, 4)$, calcular z tal que $z_1 \cdot z = z_2$.*

Resolução

Fixando $z = (x, y)$, escrevemos a equação $z_1 \cdot z = z_2$ em coordenadas

$$(1, -1) \cdot (x, y) = (3, 4).$$

Aplicando a definição de multiplicação e depois a igualdade de números complexos, temos:

$$(1 \cdot x - (-1) \cdot y, 1.y + (-1) \cdot x) = (3, 4),$$

[5] Definição proposta por Gauss em 1831 e reforçada por William Rowan Hamilton em 1837.

segue-se que:

$$(x+y, y-x) = (3,4) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ y-x=4 \end{cases}$$

Portanto, $z = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{7}{2}\right)$.

4.1 Propriedades da Adição

Para quaisquer z, v e $w \in \mathbb{C}$, onde $z = (x,y), v = (a,b)$ e $w = (c,d)$, a operação de adição definida em $\mathbb{C}$, atende as seguintes propriedades:

A.1 **Propriedade associativa**

$$z + (v + w) = (z + v) + w.$$

A.2 **Propriedade comutativa**

$$z + v = v + z.$$

A.3 **Propriedade do elemento neutro**

$$z + 0 = z.$$

A.4 **Existência do elemento simétrico**

$$z + (-z) = 0.$$

Demonstração. A.1 **Propriedade associativa.**

$$\begin{aligned} z + (v + w) &= (x,y) + [(a,b) + (c,d)] \\ &= (x,y) + (a+c, b+d) \\ &= (x+a+c, y+b+d). \end{aligned}$$

Usando a associatividade dos números reais, temos que a última expressão é igual a:

$$((x+a)+c, (y+b)+d) = (x+a, y+b) + (c,d) = (z+v) + w.$$

A.2 **Propriedade comutativa.**

$$\begin{aligned} z+v &= (x,y)+(a,b) \\ &= (x+a,y+b). \end{aligned}$$

Usando a comutatividade dos números reais, temos que a última expressão é igual a:

$$(a+x,b+y)=(a,b)+(x,y)=v+z.$$

Conforme descrito acima, utilizamos as propriedades dos números reais, estendendo-as aos números complexos.

A.3 **Propriedade do elemento neutro.**

Para que termos do número complexo v, temos $z+v=z$. Substituindo estes números por coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} (x,y)+(a,b) &= (x,y) \Longrightarrow \\ (x+a,y+b) &= (x,y) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+a=x & \Longrightarrow \quad a=0 \\ y+b=y & \Longrightarrow \quad b=0. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $v=(a,b)=(0,0)=0$, portanto existe $(0,0)$, chamado elemento neutro para a adição, que somado a qualquer número complexo z dá como resultado o próprio z, isto é, $z+0=z$.

A.4 **Propriedade do elemento simétrico.**

Dado o número complexo z, queremos encontrar $v\in\mathbb{C}$ tal que $z+v=0$. Substituindo a equação por coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} (x,y)+(a,b) &= (0,0) \Longrightarrow \\ (x+a,y+b) &= (0,0) \Longleftrightarrow \begin{cases} x+a=0 & \Rightarrow \quad a=-x \\ y+b=0 & \Rightarrow \quad b=-y. \end{cases} \end{aligned}$$

Como $v=(a,b)=(-x,-y)$, portanto existe $(-x,-y)$, chamado $(-z)$ simétrico ou inverso aditivo de z, ou seja, $z+(-z)=0$. $\square$

4.2 Propriedades da Multiplicação

Para quaisquer z, v e $w \in \mathbb{C}$, onde $z = (x, y), v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, a operação de multiplicação verifica as seguintes propriedades:

M.1 **Propriedade associativa**

$$(z \cdot v) \cdot w = z \cdot (v \cdot w).$$

M.2 **Propriedade comutativa**

$$z \cdot v = v \cdot z.$$

M.3 **Existência do elemento neutro**

$$z \cdot 1 = z.$$

M.4 **Existência do elemento inverso**

$$z \cdot z^{-1} = 1.$$

M.5 **Propriedade Distributiva**

$$z \cdot (v + w) = z \cdot v + z \cdot w.$$

Demonstração. M.1 **Propriedade associativa.**
Temos:

$$\begin{aligned}
(z \cdot v) \cdot w &= [(x, y) \cdot (a, b)] \cdot (c, d) \\
&= (xa - yb, xb + ya) \cdot (c, d) \\
&= [(xa - yb)c - (xb + ya)d, (xa - yb)d + (xb + ya)c].
\end{aligned}$$

Usando a distributividade dos números reais, temos que a última expressão é igual a:

$$\begin{aligned}
& (xac - ybc - xbd - yad, xad - ybd + xbc + yac) \\
= & [x(ac - bd) - y(bc + ad), x(ad + bc) + y(ac - bd)] \\
= & (x, y)(ac - bd, ad + bc) \\
= & (x, y)[(a, b)(c, d)] = z \cdot (v \cdot w).
\end{aligned}$$

M.2 **Propriedade comutativa.**
Temos:

$$\begin{aligned} z \cdot v &= (x,y)(a,b) \\ &= (xa - yb, xb + ya). \end{aligned}$$

Usando a comutatividade dos números reais, temos que a última expressão é igual a:

$$(ax - by, ay + bx) = (a,b)(x,y) = v \cdot z.$$

M.3 **Existência do elemento neutro.**

Considere o número complexo $z = (x,y)$. Como encontrar $v = (a,b) \in \mathbb{C}$ tal que $z \cdot v = z$. Segue que:

$$(x,y)(a,b) = (x,y) \Longrightarrow (xa - yb, xb + ya) = (x,y)$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} xa - yb = x \\ xb + ya = y \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 0. \end{cases}$$

Como $v = (a,b) = (1,0) = 1$ (pois denotamos o número complexo $(1,0)$ simplesmente por 1). Portanto $(1,0) = 1$ é o elemento neutro para a multiplicação.

M.4 **Existência do elemento inverso.**

Seja $v = (a,b)$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, provemos que existe o inverso multiplicativo (x,y) que é denotado por v^{-1} ou $\dfrac{1}{v}$ tal que $v \cdot v^{-1} = 1$.
Escrevendo $v \cdot v^{-1} = 1$, em coordenadas:

$$(a,b)(x,y) = (1,0) \Longrightarrow (ax - by, ay + bx) = (1,0).$$

Resolvendo o sistema $\begin{cases} ax - by = 1 \\ ay + bx = 0, \end{cases}$

obtemos

$$x = \frac{a}{a^2 + b^2} \quad \text{e} \quad y = \frac{-b}{a^2 + b^2}.$$

Portanto concluímos que:

$$v^{-1} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right).$$

M.5 **Propriedade Distributiva.**

Sejam os números complexos $z = (x, y), v = (a, b)$ e $w = (c, d)$, temos:

$$\begin{aligned} z \cdot (v + w) &= (x, y) \cdot [(a, b) + (c, d)] = (x, y) \cdot (a + c, b + d) \\ &= [x(a + c) - y(b + d), x(b + d) + y(a + c)]. \end{aligned}$$

Usando a distributividade dos números reais, temos que a última expressão é igual a:

$$[(xa + xc - yb - yd, xb + xd + ya + yc)].$$

Aplicando a associatividade dos números reais, segue:

$$\begin{aligned} &= [(xa - yb) + (xc - yd), (xb + ya) + (xd + yc)] \\ &= (xa - yb, xb + ya) + (xc - yd, xd + yc) \\ &= (x, y) \cdot (a, b) + (x, y) \cdot (c, d) = z \cdot v + z \cdot w. \end{aligned}$$

$\square$

Observação 1. *Todas propriedades acima decorrem diretamente da definição de igualdade e das operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$.*

Após definir as operações de adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, definimos as operações de subtração e divisão de maneira usual.

Dados $z, v \in \mathbb{C}$, podemos escrever:

$$z - v = z + (-v) \quad \text{e} \quad \frac{z}{v} = zv^{-1}, \quad \text{se} \quad v \neq 0.$$

Além disso, a potenciação também é definida de maneira usual:

$$z^0 = (x, y)^0 = 1 = (1, 0),$$

$$z^n = \underbrace{z.z.\cdots.z}_{n\,vezes} \text{ e } z^{-n} = \underbrace{z^{-1}.z^{-1}.\cdots.z^{-1}}_{n\,vezes} \text{ se } z \neq 0 \ (n \geq 1).$$

Decorre das propriedades da adição e multiplicação em $\mathbb{C}$, que diversas propriedades das operações aritméticas de números reais são válidas para números complexos. Por exemplo, a soma e o produto de duas frações $\frac{z}{v}$ e $\frac{w}{t}$ de números complexos podem ser obtidos pelas fórmulas

$$\frac{z}{v} + \frac{w}{t} = \frac{zt + vw}{vt} \qquad \text{e} \qquad \frac{z}{v} \cdot \frac{w}{t} = \frac{zw}{vt},$$

exatamente como ocorre no caso real.

4.3 Forma algébrica

Vamos representar o número complexo $(x, 0)$, simplesmente por x. Note que isso está de acordo com o que já fizemos com o elemento neutro $(0, 0) = 0$ e $(1, 0) = 1$ de adição (A.3) e multiplicação (M.3), respectivamente.

Desta forma, dizemos que em $\mathbb{C}$ existe um subconjunto $A = \{(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ que possuem todas as características de $\mathbb{R}$, ou seja, A é isomorfo a $\mathbb{R}$.
Note que:

$$\begin{aligned} (0,1)^2 &= (0,1)(0,1) \\ &= (0.0 - 1.1, 0.1 + 1.0) \\ &= (-1, 0) \\ &= -1, \end{aligned}$$

ou seja, o número -1 possui uma *"raiz quadrada"* em $\mathbb{C}$. O número complexo $(0, 1)$ é chamado unidade imaginária e denotamos por i.

Assim, temos a propriedade básica do algarismo imaginário:

$$i^2 = -1.$$

Finalmente, dado um número complexo qualquer $z = (x, y)$, temos:

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = \underbrace{(x, 0)}_{x} + \underbrace{(y, 0)}_{y}\underbrace{(0, 1)}_{i}$$

isto é;

$$z = x + yi.$$

A expressão $z = x + yi$ é chamada *forma algébrica* do número complexo z.

Assim um número complexo $z = (x, y)$ pode ser escrito sob a forma $z = x + yi$, com x e $y \in \mathbb{R}$ e $i = \sqrt{-1}$. O número real x é chamado *parte real* de z e y é chamado *parte imaginária* de z. Em símbolos indica-se:

$$x = Re(z) \qquad \text{e} \qquad y = Im(z).$$

É chamado *real puro* todo número complexo na forma $z = x + 0i = x$ e *imaginário puro* todo número complexo na forma $z = 0 + yi = yi$ para $y \neq 0$.

4.4 A origem do termo imaginário

"O Espírito Divino expressou-se sublimemente nesta maravilha da análise, neste portento do mundo das ideias, este anfíbio entre o ser e o não ser, que chamamos, de raiz imaginária da unidade negativa".(Leibniz)[6]

Para entender um pouco sobre a origem do termo "*imaginário*" dos números complexos, conforme [1], verificamos seu surgimento, com os algebristas italianos no século XVI. Cardano (1501-1576) em seu livro Ars Magna (1545), apresenta um método para resolver a equação do terceiro grau. Bombelli (1526-1572) discípulo de Cardano compreendeu melhor a álgebra dos números complexos, embora afirmava que os números complexos eram inúteis e "sofisticados".

Assim neste século os matemáticos começaram a utilizar os números complexos, impondo-lhes as regras usuais de cálculo com números reais embora escandalizados e dando declarações veementes de que eles "não existiam" eram "inúteis", etc. René Decartes (1596-1650) em seu livro "La Geómetric" introduziu a denominação números imaginários, que neste livro dizia: *"nem as raízes verdadeiras nem as falsas são sempre reais; por vezes elas são imaginárias."*

Caminhando um pouco mais na linha do tempo, chegando ao século XVIII, Euler em suas investigações sobre o Teorema Fundamental da Álgebra, os números complexos atingiram outro nível, ele mostrou entre outras coisas que em toda equação de coeficientes reais de grau ímpar tem pelo menos uma raiz real, apesar de seus trabalhos, onde ensina operar com eles, afirma: *"Como todos os números concebíveis são maiores ou menores do que zero ou iguais a zero, fica então claro que as raízes quadradas de números negativos não podem ser incluídos entre os números possíveis. E esta circunstância nos conduz ao conceito de tais números, os quais, por sua própria natureza, são impossíveis, e que são geralmente chamados de números imaginários, pois existem somente na imaginação".*

Observação 2. *É mais prático e intuitivo a forma algébrica $z = x + yi$ que o par ordenado $z = (x, y)$ na representação dos números complexos, pois ela facilita as operações.*

Vejamos como ficam definidas a igualdade, adição e multiplicação na forma algébrica. Dados os números complexos $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$, temos a:

[6] Matemático alemão (1646-1716).

- **Igualdade:**

$$\begin{aligned} z_1 &= z_2 \\ a+bi &= c+di \Longleftrightarrow a=c \text{ e } b=d. \end{aligned}$$

- **Adição:**

$$\begin{aligned} z_1+z_2 &= (a+bi)+(c+di) \\ &= (a+c)+(b+d)i. \end{aligned}$$

- **Multiplicação:**

$$\begin{aligned} z_1.z_2 &= (a+bi)(c+di) \\ &= ac+adi+bci+bdi^2 \\ &= ac+bdi^2+(ad+bc)i \\ &= ac-bd+(ad+bc)i, \text{ onde } i^2=-1. \end{aligned}$$

Exemplo 2. *Calcule:*
a)$(3+2i)-(5-7i) = (3+2i)+(-5+7i) = -2+9i.$
b)$(3+2i)^2 = 9+12i+4i^2 = 5+12i.$

Analisemos como se comporta as potências de i.

$$\begin{array}{ccccccc} i^0 & = & 1 & & & & \\ i^1 & = & i & & & & \\ i^2 & = & \text{-1} & & & & \\ i^3 & = & i^2\cdot i & = & (-1)\cdot i & = & -i \\ i^4 & = & i^2\cdot i^2 & = & (-1)\cdot(-1) & = & 1 \\ i^5 & = & i^4\cdot i & = & 1\cdot i & = & i \\ i^6 & = & i^4\cdot i^2 & = & 1\cdot(-1) & = & \text{-1} \\ i^7 & = & i^4\cdot i^3 & = & 1\cdot(-i) & = & -i. \end{array}$$

Nota-se que estas potências se repetem em ciclos de 4. Segue que podemos estabelecer uma regra para calcular a potência de i. Seja i^n, divida n por 4, se r é o resto dessa divisão, logo $i^n = i^r$, pois se q é o quociente da divisão $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q.i^r = 1^q\cdot i^r = i^r$.

Exemplo 3. *Calcular:* i^{2014}.

Resolução

Vamos encontrar o resto da divisão de 2014 *por* 4*, basta determinar o resto da divisão do número formado pelos dois últimos algarismos, neste caso,* 14*, que nos dá resto* 2*, temos:*

$$i^{2014} = i^2 = -1.$$

4.5 Forma geométrica de um número complexo

Conforme definição da forma algébrica para número complexo, podemos pensar no número $z = a + bi$ como o ponto (a, b) do plano cujas coordenadas são a e b, veja Figura 1.

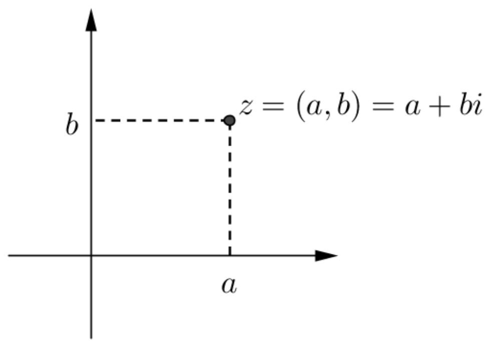

Figura 1: A forma geométrica do número complexo $z = (a, b) = a + bi$.

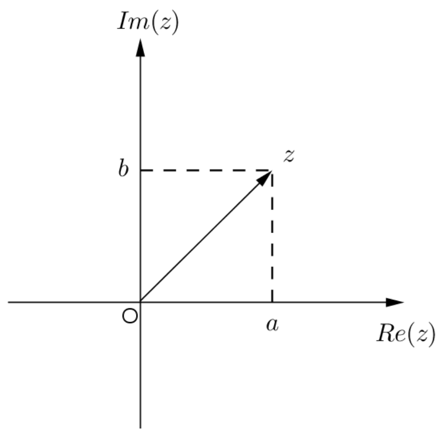

Figura 2: Representação do número complexo z na forma de vetor.

O ponto (a, b) é chamado imagem do complexo z, também por afixo de z, ou ainda como vetor de origem na origem O do sistema de coordenadas e extremidade (a, b), isto é, o número complexo z é representado pelo vetor $\overrightarrow{Oz}$, veja Figura 2.

Hoje esta representação geométrica dos números complexos parece ser tão "simples". Mas nem sempre foi assim, lembremos que os números complexos surgem com os algebristas italianos no século XVI, procurando métodos para resolver equações do terceiro grau, até o século XVIII o que se creditava aos números complexos era: *"inúteis"* e *"sofisticados"* (Bombelli, século XVI), *são números imaginários, pois existem somente* *na imaginação* (Euler, século XVIII), somente no século XIX, conforme [1] *"Gauss com sua autoridade divulgou a interpretação geométrica dos números complexos, a qual lhes deu direito de cidadania".*

O plano em que representamos os complexos é identificado como Plano Argand-Gauss, em homenagem a Jean Robert Argand que primeiro sugeriu em um livreto publicado em Paris no ano de 1806, ignorado até que Gauss propusesse quase a mesma ideia em 1831. Como o número complexo $z = a + bi$ é o par ordenado (a, b), então vejamos as interpretações da adição (Figura 3) e da subtração (Figura 4) de números complexos.

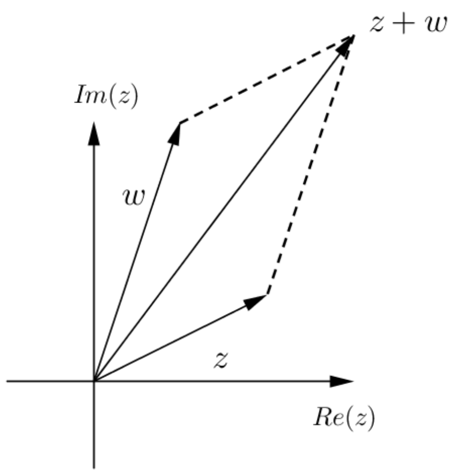

Figura 3: Representação geométrica da soma de dois números complexos.

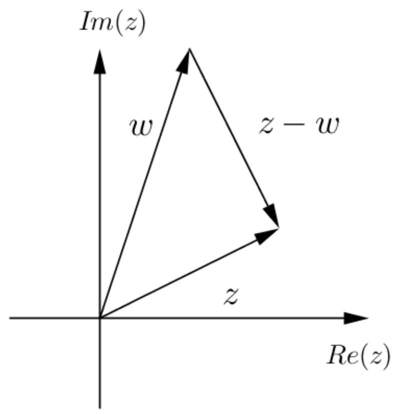

Figura 4: Representação geométrica da diferença de dois números complexos.

4.6 Conjugado

Definimos o *conjugado* de um número complexo $z = (x, y) = x + yi$, como sendo o número complexo $\overline{z} = (x, -y) = x - yi$, isto é:

$$z = x + yi \Longleftrightarrow \overline{z} = x - yi.$$

Exemplo 4. *Resolva a equação* $3z - 2\overline{z} = 1 + 5i$.
Fixando $z = x + yi$, *com* $x, y \in \mathbb{R}$, *obtemos:*

$$3(x + yi) - 2(x - yi) = 1 + 5i \Longrightarrow x + 5yi = 1 + 5i.$$

Da igualdade de números complexos, obtemos: $x = 1$ *e* $y = 1$. *Portanto* $z = 1 + i$.

Geometricamente, $\overline{z}$ é o ponto do plano Argand-Gauss, obtido por meio da reflexão de z em relação ao eixo real (simétrico de z em relação ao eixo real).

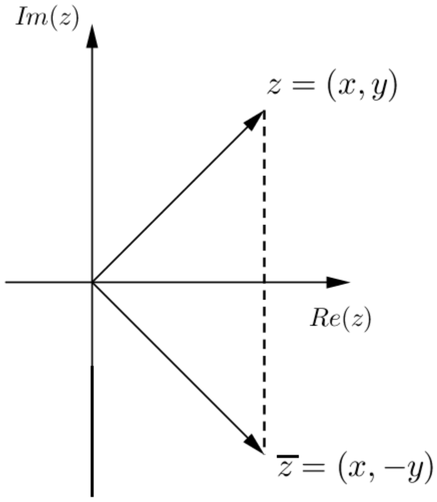

Figura 5: Representação gráfica do conjugado de z.

4.6.1 Propriedades do Conjugado

Teorema 1. *Para todo* $z, w \in \mathbb{C}$, *temos:*

i) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$;

ii)$\overline{z - w} = \overline{z} - \overline{w}$;

iii)$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

iv) $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\overline{z}}{\overline{w}}, \quad se \quad w \neq 0$;

v) $z = \overline{z} \Longleftrightarrow z = Re(z)$;

vi) $z + \overline{z} = 2Re(z)$;

vii) $z - \overline{z} = 2Im(z)$;

viii) $\overline{z}^n = \overline{z^n}$, *se* $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração. Fazendo $z = x + yi$ e $w = a + bi$, temos:

i) $\overline{z+w} = \overline{(x+a)+(y+b)i} = (x+a)-(y+b)i = (x-yi)+(a-yi) = \overline{z}+\overline{w}$.

ii) $\overline{z-w} = \overline{(x-a)+(y-b)i} = (x-a)-(y-b)i = (x-yi)-(a-bi) = \overline{z}-\overline{w}$.

iii) Temos

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= (x+yi)(a+bi) \\
&= xa + xbi + ayi + ybi^2 \\
&= xa - yb + (ay+xb)i, \\
\overline{z.w} &= xa - yb - (ay+xb)i \\
&= (xa - ayi) + (-xbi + ybi^2) \\
&= a(x-yi) - bi(x-yi) \\
&= (x-yi)(a-bi) = \overline{z} \cdot \overline{w}.
\end{aligned}$$

iv) Temos que:

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{a+bi},$$

por outro lado

$$\frac{1}{w} = \frac{1}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{1}{a+bi} \cdot \frac{a-bi}{a-bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}.$$

Além disso,

$$\frac{1}{\overline{w}} = \frac{1}{a-bi} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\overline{w}} = \frac{1}{\overline{w}} \cdot \frac{w}{w} = \frac{a+bi}{a^2+b^2} = \overline{\left(\frac{1}{w}\right)}.$$

De onde concluímos que:

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{z} \cdot \frac{1}{\overline{w}} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}, w \neq 0.$$

De acordo com o exposto acima, podemos calcular o quociente de dois números complexos de maneira mais prática que usar o inverso multiplicativo.

Vejamos:

$$\frac{z}{w} = \frac{x+yi}{a+bi} = \frac{z}{w} \cdot \frac{\overline{w}}{\overline{w}} = \frac{(x+yi)(a-bi)}{(a+bi)(a-bi)} = \frac{xa+yb+(ay-xb)i}{a^2+b^2} = \frac{xa+yb}{a^2+b^2} + \frac{ay-xb}{a^2+b^2} \cdot i.$$

$v)$ $z = \overline{z} \Longleftrightarrow x + yi = x - yi$, logo $y = -y$, portanto $y = 0$.
Segue que $z = x = Re(z)$.
$vi)$ $z + \overline{z} = (x + yi) + (x - yi) = 2x + 0i = 2x = 2 \cdot Re(z)$.
$vii)$ $z - \overline{z} = (x + yi) - (x - yi) = 0x + 2yi = 2yi = 2Im(z)$.
$viii)$ $\overline{z}^n = \underbrace{\overline{z} \cdot \overline{z} \cdot \overline{z} \cdots \overline{z}}_{n\,vezes} = \overline{z \cdot z \cdot z \cdots z} = \overline{z^n}$. □

Exemplo 5. *Encontre* $x(x \in \mathbb{R})$ *de modo que o número* $z = \frac{1-xi}{2+3xi}$ *seja:*
a) Imaginário puro;
b) Real.

Resolução

$$\frac{1 - xi}{2 + 3xi} = \frac{1 - xi}{2 + 3xi} \cdot \frac{2 - 3xi}{2 - 3xi} = \frac{2 - 3x^2 - 5xi}{4 + 9x^2} = \frac{2 - 3x^2}{4 + 9x^2} - \frac{5x}{4 + 9x^2} \cdot i$$

a) Para ser imaginário puro, temos que fazer:

$$Re(z) = 0 \Longrightarrow \frac{2 - 3x^2}{4 - 9x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

b) Para ser real, temos que fazer:

$$Im(z) = 0 \Longrightarrow \frac{5x}{4 + 9x^2} = 0 \Longrightarrow x = 0.$$

4.7 Forma Trigonométrica

Vimos, conforme Figura 2, que o número complexo pode ser representando por um vetor. Então podemos definir o *módulo* de um número complexo $z = x + yi$, como sendo o módulo do vetor que o representa, ou seja, é a medida da distância de sua imagem (ponto que representa z) à origem. Portanto:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Às vezes em lugar de $|z|$ é usado os símbolos ρ ou r.

Sabemos que o número complexo $z = x + yi$ é representado pelo ponto (x, y) identificado como coordenadas cartesianas do ponto z. Agora esse mesmo ponto será representado nas coordenadas polares. Identificamos seus elementos na Figura 6.

1. θ é o ângulo que o eixo real positivo forma com o vetor correspondente a z no sentido anti-horário, chamado *argumento de* z, representado por $arg(z)$;

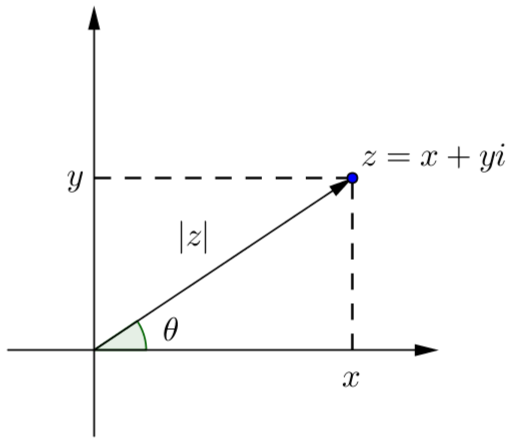

Figura 6: Representação polar do complexo $z = (x, y)$ de raio $|z|$ e ângulo θ.

2. Da trigonometria, temos que $cos(\theta) = \dfrac{x}{|z|}$ e $sen(\theta) = \dfrac{y}{|z|}$;

3. Fixando $z \neq 0$, estão fixados $cos(\theta)$ e $sen(\theta)$, o ângulo θ tem uma infinidade de valores, congruentes dois a dois (congruência módulo 2π). Onde $z \neq 0$ tem argumento $\theta = \theta_0 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, em que θ_0 é chamado *argumento principal* onde $0 \leq \theta_0 < 2\pi$.

Se θ é um argumento de $z = x + yi$, substituindo pelas coordenadas polares

$$x = |z|cos(\theta) \qquad \text{e} \qquad y = |z|sen(\theta),$$

temos:

$$z = |z|cos(\theta) + |z|isen(\theta) \Longrightarrow z = |z|(cos(\theta) + isen(\theta))$$

a qual é chamada *forma trigonométrica ou polar* do complexo z.

Esta forma de representar um número complexo é mais prática que a forma algébrica para as operações de potenciação e radiciação em $\mathbb{C}$. A seguir vamos praticar como se escreve um número complexo na forma trigonométrica.

Exemplo 6. *Represente o número complexo $z = -\sqrt{3} + i$ na forma trigonométrica.*

Resolução

Temos que:

$$z = -\sqrt{3} + i, \;\; logo \;\; x = -\sqrt{3}, \, y = 1 \Longrightarrow |z| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2.$$

De onde segue que

$$cos(\theta) = \frac{x}{|z|} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \quad e \quad sen(\theta) = \frac{y}{|z|} = \frac{1}{2}.$$

Daí obtemos $\theta = 150^o = \frac{5\pi}{6}$.
Portanto, a forma trigonométrica de z é: $2\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$.

4.7.1 Propriedades do Módulo de um Número Complexo

As propriedades seguintes se verificam para quaisquer $z, w \in \mathbb{C}$:
$i) z\overline{z} = |z|^2$;
$ii) |z| = |\overline{z}|$;
$iii) Re(z) \leqslant |Re(z)| \leqslant |z| \, e \, Im(z) \leqslant |Im(z)| \leqslant |z|$;
$iv) |zw| = |z||w|$;
$v) \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$ se $w \neq 0$;
$vi) |z + w| \leqslant |z| + |w|$;
$vii) |z + w| \geqslant ||z| - |w||$.

Demonstração. Sejam $z = x + yi$ e $w = a + bi$, temos:
$i)$

$$z\overline{z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2 \text{ e } |z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

logo

$$|z|^2 = (\sqrt{x^2 + y^2})^2 = x^2 + y^2 = z\overline{z}.$$

Portanto

$$z\overline{z} = |z|^2.$$

$ii)$ $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (-y)^2} = |\overline{z}|$.

$iii)$ Se $x \geq 0, x = |x|$ e se $x < 0, x < |x|$. Assim $x \leq |x|,$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
Por outro lado

$$x^2 \leq x^2 + y^2 \text{ e } |x|^2 = x^2.$$

Assim

$$|x| \leq |z|.$$

De onde concluímos que

$$x \leq |x| \leq |z|,$$

Portanto,

$$Re(z) \leq |Re(z)| \leq |z|.$$

Analogamente provamos para $Im(z)$.

$iv)$ Do item (i), temos que

$$|zw|^2 = zw \cdot \overline{zw} = zw \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z\overline{z} \cdot w\overline{w} = |z|^2|w|^2.$$

De onde concluímos que:

$$|zw| = |z||w|.$$

v) Sabendo que

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \left|\frac{1}{z} \cdot \frac{\overline{z}}{\overline{z}}\right| = \left|\frac{x - yi}{x^2 + y^2}\right| = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{1}{|z|},$$

logo

$$\left|\frac{z}{w}\right| = \left|z \cdot \frac{1}{w}\right| = |z| \cdot \left|\frac{1}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$

$vi)$

$$\begin{aligned}
|z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z + w}) \\
&= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) \\
&= z\overline{z} + z\overline{w} + w\overline{z} + w\overline{w}, \text{ mas } z\overline{w} + w\overline{z} = 2Re(z\overline{w}) \\
&= |z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2.
\end{aligned}$$

Como

$$|z|^2 + 2Re(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2,$$

e sabendo que

$$|z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2,$$

isto é:

$$|z+w|^2 \leq (|z|+|w|)^2.$$

Extraindo as raízes quadradas de ambos lados da desigualdade, temos:

$$|z+w| \leq |z|+|w|.$$

vii) Pela desigualdade triangular,

$$|z| = |(z+w)-w| \leq |z+w| + |-w| = |z+w| + |w|.$$

Logo

$$|z+w| \geq |z| - |w|.$$

Invertendo a ordem de z e w na desigualdade acima, temos:

$$|z+w| \geq |w| - |z|.$$

Como

$$||z|-|w|| = |z|-|w| \qquad \text{se} \qquad |z| \geq |w|$$

e

$$||z|-|w|| = |w|-|z| \qquad \text{se} \qquad |w| \geq |z|,$$

vemos que em qualquer caso

$$|z+w| \geq ||z|-|w||.$$

□

4.7.2 Desigualdades triangulares estendidas

Conforme analisado acima, temos:

$$|z+w| \leq |z|+|w| \qquad \text{e} \qquad |z+w| \geq |z|-|w|.$$

E interpretando $|z+w|, |z|$ e $|w|$ como lados de um triângulo qualquer, temos:

- O comprimento de um lado de um triângulo é menor que a soma dos comprimentos de outros dois lados;
- O comprimento de um lado de um triângulo é maior que a diferença dos comprimentos dos outros dois lados.

Dados $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, onde $z_1 = z$ e $z_2 + z_3 = w$, aplicando a primeira desigualdade, temos:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \quad \leq \quad |z_1| + |z_2 + z_3| \quad \leq \quad |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

Para a segunda desigualdade, temos:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \quad \geq \quad |z_1| - |z_2 + z_3|,$$

como

$$-|z_2 + z_3| \quad \geq -|z_2| - |z_3|,$$

logo:

$$|z_1 + z_2 + z_3| \quad \geq \quad |z_1| - |z_2| - |z_3|.$$

Assim, dados n números complexos $z_1, z_2, \ldots, z_n$ concluímos que:

$$|z_1| - |z_2| - \ldots - |z_n| \quad \leq \quad |z_1 + z_2 + \ldots + z_n| \quad \leq \quad |z_1| + |z_2| + \ldots + |z_n|.$$

Convém ressaltar que sua prova é feita por indução finita.

4.7.3 Potenciação

Teorema 2. *O módulo do produto de dois números complexos é igual ao produto dos módulos dos fatores. Além disso seu argumento é congruente à soma dos argumentos dos fatores.*

Em outras palavras, dados $z = \rho_1(cos\theta + isen\theta)$ *e* $w = \rho_2(cos\theta_1 + isen\theta_1)$, *então*

$$z \cdot w = \rho_1 \cdot \rho_2[cos(\theta + \theta_1) + isen(\theta + \theta_1)]$$

e

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta - \theta_1) + isen(\theta - \theta_1)], \rho_2 \neq 0.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
z \cdot w &= \rho_1(cos\theta + isen\theta) \cdot \rho_2(cos\theta_1 + isen\theta_1) \\
&= \rho_1\rho_2[cos\theta \cdot cos\theta_1 + icos\theta sen\theta_1 + isen\theta cos\theta_1 + i^2 sen\theta sen\theta_1] \\
&= \rho_1\rho_2[(cos\theta \cdot cos\theta_1 - sen\theta sen\theta_1) + i(cos\theta sen\theta_1 + sen\theta cos\theta_1)] \\
&= \rho_1\rho_2[cos(\theta + \theta_1) + isen(\theta + \theta_1)].
\end{aligned}$$

Para provar a segunda parte, vamos mostrar que $\dfrac{z}{w}$ é:

$$\frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta - \theta_1) + isen(\theta - \theta_1)], \text{ para } \rho_2 \neq 0.$$

Sabendo que:

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1(cos\theta + isen\theta)}{\rho_2(cos\theta_1 + isen\theta_1)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{cos\theta + isen\theta}{cos\theta_1 + isen\theta_1} \cdot \frac{cos\theta_1 - isen\theta_1}{cos\theta_1 - isen\theta_1}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos\theta cos\theta_1 - icos\theta sen\theta_1 + isen\theta cos\theta_1 - i^2 sen\theta sen\theta_1]$$

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos\theta cos\theta_1 + sen\theta sen\theta_1 + i(sen\theta cos\theta_1 - cos\theta sen\theta_1)]$$

Daí,

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[cos(\theta - \theta_1) + isen(\theta - \theta_1)].$$

$\square$

Resumidamente, obtemos que:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad \text{e} \qquad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \text{ se } |w| \neq 0;$$

$$arg(z \cdot w) = arg(z) + arg(w) \qquad \text{e} \qquad arg\left(\frac{z}{w}\right) = arg(z) - arg(w).$$

Exemplo 7. *Seja* $z = 3\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ *e* $w = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$. *Calcule* $z \cdot w$.

Resolução

Aplicando o Teorema 2, temos:

$$z \cdot w = 3 \cdot 4\left[cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)\right] = 12\left(cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Calculando as razões trigonométricas da última expressão, temos:

$$12(0 + i \cdot 1) = 12i.$$

Comparemos o mesmo produto $z \cdot w$, *utilizando a forma algébrica. Sejam*

$$z = 3\left(cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2} \cdot i,$$

e

$$w = 4\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} + i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

Daí, temos que

$$z\cdot w = \left(\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\cdot i\right)(2 + 2\sqrt{3}i) = 3\sqrt{3} + 9i + 3i + 3\sqrt{3}i^2 = 12i.$$

Percebemos que há caminhos distintos para encontrar a solução!

Para o cálculo de potências de um número complexo, façamos uso da expressão conhecida por Fórmula de De Moivre.[7] Se n é inteiro e $z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta))$, temos que

$$z^n = [\rho(cos(\theta) + isen(\theta)]^n = \rho^n[cos(n\theta) + isen(n\theta)].$$

Demonstração. 1ª Parte:

Provemos que a propriedade é válida para $n \in \mathbb{N}$, usando o princípio da indução finita.

Se $n = 0$, então $z^0 = 1$, pois, $\rho^0 \cdot (cos(0) + isen(0)) = 1$.

Admitamos a validade da fórmula para $n = k - 1$:

$$z^{k-1} = \rho^{k-1}[cos(k-1)\theta + isen(k-1)\theta],$$

e provemos a validade para $n = k$:

$$z^k = z^{k-1}\cdot z = \rho^{k-1}\cdot[cos(k-1)\theta + isen(k-1)\theta]\cdot\rho\cdot(cos(\theta) + isen(\theta)) =$$

$$(\rho^{k-1}\cdot\rho)\cdot[cos((k-1)\theta+\theta) + isen((k-1)\theta+\theta)] =$$

$$\rho^k(cos(k\theta) + isen(k\theta)).$$

2ª Parte

Vamos estudar a propriedade para n inteiro negativo. Seja $n = -m$, com m inteiro e

[7]Homenagem ao matemático francês Abraham de Moivre (1666-1754).

positivo. Temos:

$$
\begin{aligned}
[\rho(cos(\theta)+isen(\theta)]^n &= [\rho(cos(\theta)+isen(\theta)]^{-m}\\
&= \frac{1}{[\rho(cos(\theta)+isen(\theta)]^m}\\
&= \frac{1}{\rho^m[cos(m\theta)+isen(m\theta)]}\\
&= \frac{1}{\rho^m}[cos(0-m\theta)+isen(0-m\theta)]\\
&= \rho^{-m}[cos(-m\theta)+isen(-m\theta)]\\
&= \rho^n[cos(n\theta)+isen(n\theta)].
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo 8. *Calcule* $(2+2\sqrt{3}i)^{10}$.

Resolução

Denotamos $z = 2+\sqrt{3}i$, *assim* $\rho = \sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2} = \sqrt{16} = 4$.
Temos que:

$$cos(\theta) = \frac{x}{\rho} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad e \qquad sen(\theta) = \frac{y}{\rho} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Daí, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Escrevendo na forma trigonométrica e aplicando o Teorema 2,

$$
\begin{aligned}
(2+2\sqrt{3}i)^{10} &= \left[4\left(cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\right]^{10}\\
&= 4^{10}\left(cos\left(10\cdot\frac{\pi}{3}\right)+isen\left(10\cdot\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= 4^{10}\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
(2+2\sqrt{3}i)^{10} &= 4^{10}\left(-\frac{1}{2}+\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)i\right)\\
&= 2^{19}(-1-\sqrt{3}i).
\end{aligned}
$$

4.7.4 Radiciação

Dado um número complexo z, chama-se *raiz n-ésima de z*, e denota-se $\sqrt[n]{z}$, a um número complexo, w tal que $w^n = z$. Matematicamente, temos

$$\sqrt[n]{z} = w \Longleftrightarrow w^n = z.$$

Como calcular essas raízes?

Faremos uso da expressão conhecida por *Segunda fórmula De Moivre.*

Considere o número complexo $z = \rho(\cos(\theta) + isen(\theta))$ e $n \in \mathbb{N}\,(n \geq 2)$, então existem n raízes enésimas de z que são da forma:

$$w = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right],$$

em que $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}^{+}$ e $k \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Determinemos todos os complexos w tais que:

$$w^n = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)).$$

Fazendo

$$w = r(cos(\alpha) + isen(\alpha)),$$

obtemos:

$$[r(cos(\alpha) + isen(\alpha))]^n = \rho(\cos(\theta) + isen(\theta)).$$

Pela fórmula de De Moivre,

$$[r(cos\alpha + isen\alpha)]^n = r^n[cos(n\alpha) + isen(n\alpha)],$$

segue-se que

$$r^n[cos(n\alpha) + isen(n\alpha)] = \rho(\cos(\theta) + isen(\theta)).$$

Mas complexos iguais têm módulos iguais e argumentos congruentes, isto é;

$$r^n = \rho \Longrightarrow r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \text{e} \qquad n\alpha = \theta.$$

Substituindo θ por $\theta + 2k\pi$, pois as funções seno e cosseno são de período 2π, k é um número inteiro positivo, negativo ou nulo.

Então,

$$n\alpha = \theta + 2k\pi \Longrightarrow \alpha = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \text{ para } k = \{0, 1, 2, \cdots, n-1\}.$$

Até $k = n - 1$, os valores de α não são congruentes por estarem todos no intervalo $[0, 2\pi[$; portanto, dão origem a n valores distintos para w.

Para $k = n, \alpha$ é dispensável por ser congruente ao valor obtido com $k = 0$.

Fato análogo ocorre para $k = n+1, n+2, n+3, \cdots$ e $k = -1, -2, -3, \cdots$

Portanto,

$$\sqrt[n]{\rho(cos(\theta) + isen(\theta))} = \sqrt[n]{\rho}\left[cos\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{\theta + k \cdot 2\pi}{n}\right)\right]$$

em que $\sqrt[n]{\rho} \in \mathbb{R}^{+}$ e $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Exemplo 9. *Calcular as raízes cúbicas de i.*

Resolução

Temos $z = i$, então $\rho = 1$ e $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. De acordo com a segunda fórmula De Moivre, temos:

$$w_k = \sqrt[3]{1}\left[cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)+isen\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi k}{3}\right)\right], com\ k \in \{0,1,2\},$$

ou equivalente a:

$$w_k = 1\left[cos\left(\frac{\pi+4\pi k}{6}\right)+isen\left(\frac{\pi+4\pi k}{6}\right)\right], k \in \{0,1,2\}.$$

$k = 0, obtemos\ w_0 = 1\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i.$
$k = 1, obtemos\ w_1 = 1\left[cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i.$
$k = 2, obtemos\ w_2 = 1\left[cos\left(\frac{9\pi}{6}\right)+isen\left(\frac{9\pi}{6}\right)\right] = cos\frac{3\pi}{2}+isen\frac{3\pi}{2} = -i.$

Portanto as raízes são:

$$w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i;\ w_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\cdot i\ e\ w_2 = -i.$$

Pensando um pouco mais sobre as raízes do número complexo i. Vamos representar as raízes do número complexo i no plano Argand-Gauss.

Sejam $w_0 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$, $w_1 = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ e $w_2 = (0, -1)$, pontos equidistantes da origem.

Como os afixos das três raízes de i, são pontos que estão a mesma distância da origem, isto é, a uma unidade da origem, logo pertencem a circunferência de centro na origem e raio $\rho = 1$.

Os argumentos principais da raiz cúbica de i, estão em progressão aritmética cujo primeiro termo $\dfrac{\pi}{6}$ e razão $\dfrac{2\pi}{3}$, logo as raízes de i dividem a circunferência de centro na origem, em três partes congruentes. Portanto são vértices de um triângulo equilátero inscrito na circunferência, veja Figura 7.

O que foi visto acima, não é coincidência, podemos generalizar aplicando a *Segunda Fórmula de De Moivre*, que garante a $\sqrt[n]{z}$ possui n raízes distintas com o mesmo módulo. Assim todas as raízes são pontos da mesma circunferência no plano Argand-Gauss. Os argumentos principais de $\sqrt[n]{z}$ formam uma progressão aritmética de primeiro termo $\dfrac{\theta}{n}$ e razão $\dfrac{2\pi}{n}$, assim as n raízes de z dividem a circunferência em n partes iguais. Portanto, formando polígono regular de n vértices.

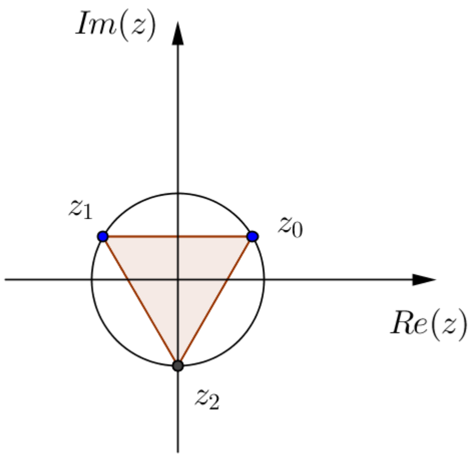

Figura 7: Triângulo equilátero cujos vértices são as raízes cúbicas de i.

Na resolução do exemplo abaixo, iremos utilizar o software de Matemática dinâmica gratuito, chamado Geogebra[10] , que combina Geometria, Álgebra, e Cálculo numa única aplicação.

Exemplo 10. *Dada a equação* $2x^6 + 128 = 0$.

a) Encontre o conjunto solução em $\mathbb{C}$;

b) Represente no plano, os pontos que representam as raízes da equação;

c) Que figura é formada ao interligar no plano, os pontos que representam as raízes da equação?

d) O polígono formado é regular? Justifique utilizando o Geogebra;

e) Determine a medida do ângulo central do polígono utilizando o Geogebra;

f) Mostre que o triângulo AOB é equilátero;

g) Qual a área do polígono regular?

Resolução

a)

$$2x^6 + 128 = 0 \iff x^6 = -\frac{128}{2} \iff x = \sqrt[6]{-64}$$

Fazendo $z = -64$, *temos* $\rho = |z| = 64$ *e* $\theta = \pi$. *De acordo com a segunda fórmula de De Moivre, temos*

$$z_k = \sqrt[6]{64} \cdot \left[cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right], k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$z_k = 2 \cdot \left[cos\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \cdot sen\left(\frac{\pi + 2k\pi}{6}\right)\right], k = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\},$$

$k = 0,$ *obtemos* $z_0 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3} + i,$
$k = 1,$ *obtemos* $z_1 = 2\left[cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = 2i,$
$k = 2,$ *obtemos* $z_2 = 2\left[cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right] = -\sqrt{3} + i,$
$k = 3,$ *obtemos* $z_3 = 2\left[cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right] = -\sqrt{3} - i,$
$k = 4,$ *obtemos* $z_4 = 2\left[cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + isen\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right] = -2i,$
$k = 5,$ *obtemos* $z_5 = 2\left[cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{11\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3} - i.$

Portanto, o conjunto solução da equação $2x^6 + 128 = 0$ *é:*

$$S = \{\sqrt{3} + i, 2i, -\sqrt{3} + i, -\sqrt{3} - i, -2i, \sqrt{3} - i\}.$$

b)Abrindo o programa Geogebra, insira no plano os pontos que representam as raízes da equação, isto é: $(\sqrt{3}, 1), (0, 2), (-\sqrt{3}, 1), (-\sqrt{3}, -1), (0, -2)$ *e* $(\sqrt{3}, -1)$.
Siga os passos:

1. *Digite no campo entrada, inserindo os pontos acima um de cada vez;*

2. *Vejamos como inserir o ponto* $(\sqrt{3}, 1)$. *Coloque o cursor no campo entrada, digite:* $(sqrt(3), 1)$ *utilizando o teclado dê Enter, continue com os demais pontos, o resultado é apresentado conforme Figura 8.*

c)Utilizando os pontos inseridos no plano, vamos agora ligar os pontos por meio de segmentos de retas, vejamos os passos abaixo:

1. *Na barra de ferramentas (aba superior da tela), clique na alça inferior direita do ícone (reta definida por dois pontos) em seguida surgirá uma barra de rolagem, selecione com um clique a ferramenta (segmento definido por dois pontos), veja Figura 9;*

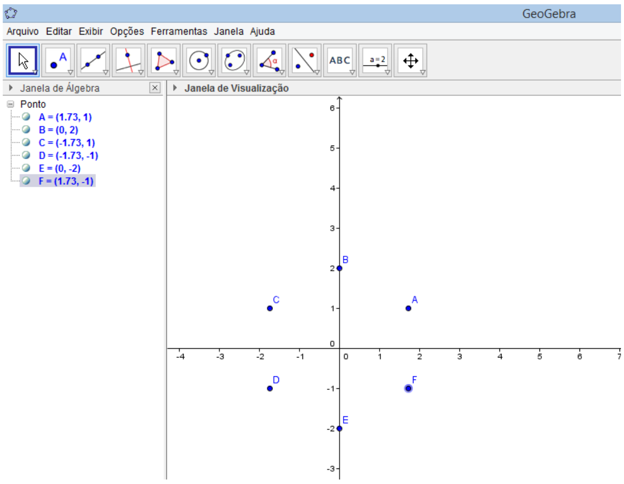

Figura 8: As raízes da equação $2x^6 + 128 = 0$ na janela de visualização do Geogebra.

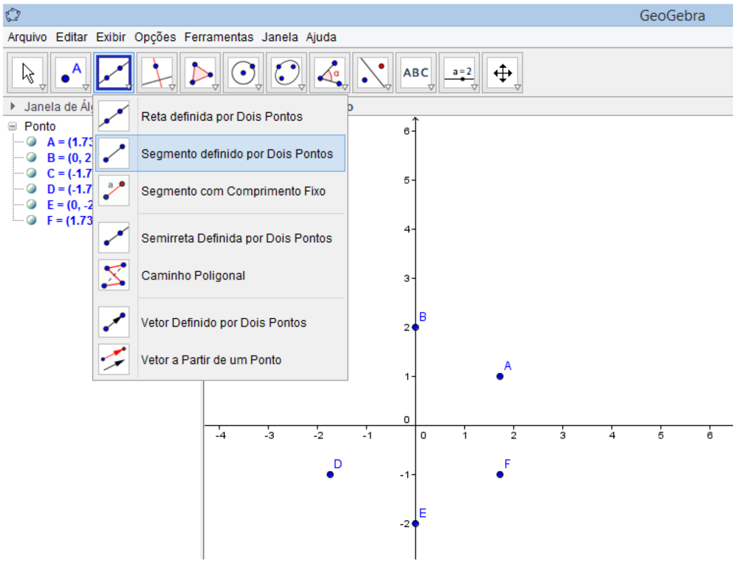

Figura 9: Criando segmentos de retas definidos por dois pontos.

2. *Com a ferramenta segmento definido por dois pontos selecionada, clique no ponto A em seguida no ponto B, clique novamente no ponto B em seguida, no ponto C, e assim sucessivamente, até gerar o hexágono, que é a figura formada pelas raízes da equação dada.*

d) Vamos provar que o polígono é um hexágono regular, sabendo da Geometria que um polígono regular possui lados iguais e ângulos internos congruentes, aproveitando a Figura 9, sigamos os passos:

1. Para medir o ângulo interno $B\widehat{A}F$, localizamos na barra de ferramentas o ícone ângulo, clicamos na alça inferior deste ícone, surgirá uma barra de rolagem, selecione com um clique a ferramenta ângulo, veja Figura 10;

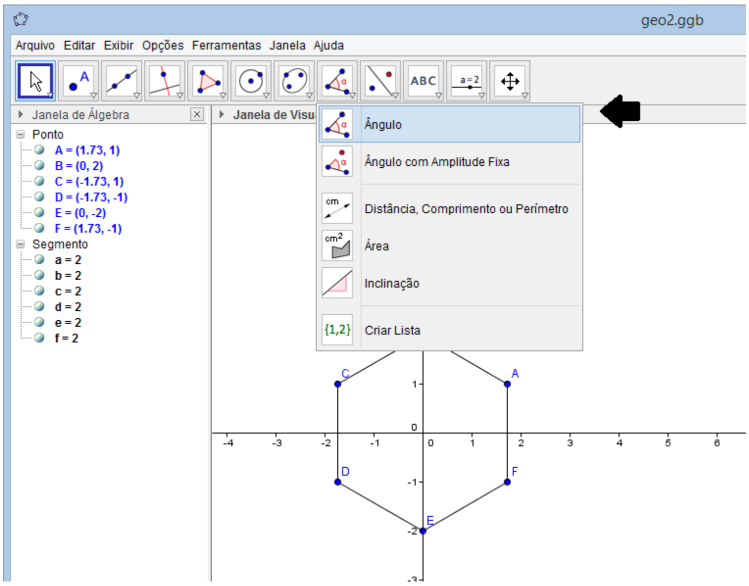

Figura 10: Medindo o ângulo interno do hexágono.

2. Em seguida, no sentido horário, dê um clique no ponto B, em seguida A e F, observe a medida registrada no ângulo medido;

3. Repita o processo para os outros cinco ângulos internos, o resultado deve ser igual a Figura 11, logo todos os ângulos internos são congruentes e iguais a $120°$.

Agora precisamos medir os lados do hexágono, sigamos os passos abaixo.
Na verdade essas medidas já foram determinadas ao contruir cada um dos lados do hexágono, veja a janela de Álgebra separada em: pontos e segmentos, veja Figura 10 . Na seção segmentos, temos $a = b = c = d = e = f = 2$, que se referem aos segmentos $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DE}, \overline{EF}$ e $\overline{FA}$, respectivamente.
Aproveitando a oportunidade, vamos aprender a medir segmentos no Geogebra:

1. Na barra de ferramentas clique na alça inferior direita (que ficará vermelha ao passar o cursor sobre ela), do ícone ângulo, surgirá uma barra de rolagem, em seguida clique em Distância, Comprimento ou Perímetro, veja Figura 12;

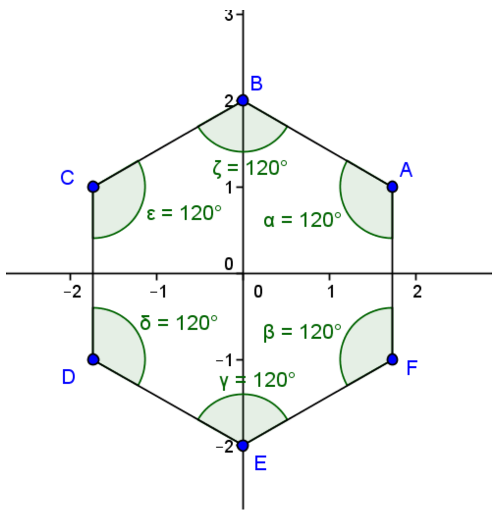

Figura 11: Medida de cada ângulo interno do hexágono ABCDEF.

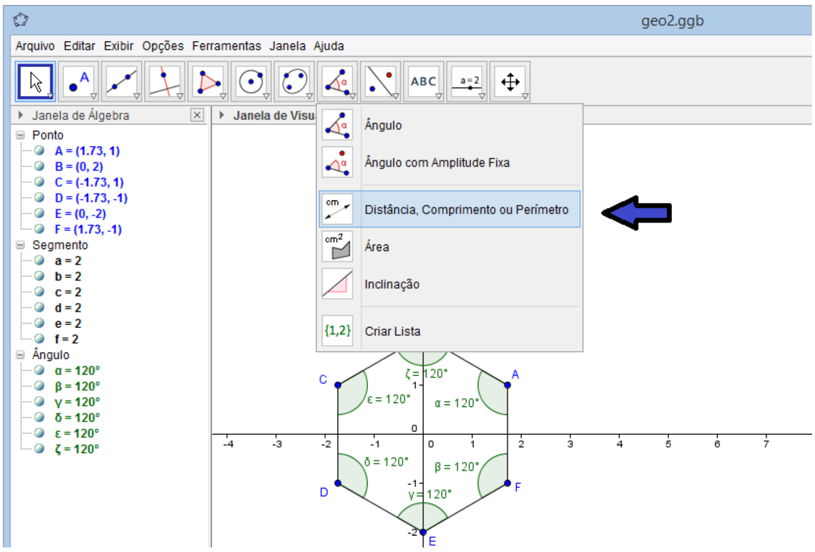

Figura 12: Ativando o Geogebra para medir lados do hexágono ABCDEF.

2. *Em seguida, clique no ponto A e no ponto B, irá surgir entre esses dois pontos a sua medida, normalmente o local onde surge a medida não fica legal na figura, podemos melhorá-la da seguinte forma, dê um clique no primeiro ícone na barra de ferramentas (simbolizado por uma seta), em seguida dê um duplo clique sobre a medida apresentada, transformando o cursor numa mãozinha, então arraste-a para um lugar apropriado. Para prosseguir nas medições é necessário novamente ativar a ferramenta Distância, Comprimento ou Perímetro. Concluido assim*

que todos os lados apresentam medidas iguais a 2. *Como os ângulos internos são congruentes e seus lados apresentam medidas iguais, portanto o polígono é regular, ou seja, um hexágono regular.*

e) Na janela de Álgebra no Geogebra, vamos apagar os elementos da seção ângulo para que a figura não torne muito carregada de informações, atrapalhando a visualização, como fazer isso? Vamos lá! Leve o cursor sobre o elemento contido na seção ângulo e selecione-o dando um clique sobre ele, em seguida, exclua usando a tecla delete de seu computador. Agora vamos medir o ângulo central do hexágono regular, sabendo que da Geometria o ângulo central é igual a razão $\frac{360°}{n}$, *onde* n *representa o número de lados do polígono regular, sigamos os passos abaixo:*

1. *Insira um ponto em seu centro, da seguinte forma: ative a ferramenta (Novo Ponto) que se encontra na barra de ferramentas e dê um clique na origem dos eixos, como temos o hábito de nomear a origem por* O, *vamos aprender a renomear um ponto no Geogebra, damos um duplo clique sobre a legenda do ponto, em seguida surge uma caixa de diálogo, clique em Propriedades, na sequência substitua no espaço destinado ao nome, o nome existente pela letra* O, *finalizamos ao fechar a caixa de diálogo;*

2. *Conforme aprendido anteriormente sobre traçar segmento de reta (veja resolução letra c). Vamos criar os segmentos* $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$;

3. *Para ativar a ferramenta ângulo (veja resolução letra d), em seguida no sentido hórario, clicando nos pontos* A, O *e* B, *respectivamente.*

Portanto, o ângulo central é igual a $60°$.
f) Como o ângulo $A\widehat{O}B = 60°$, *e o comprimento do segmento* $\overline{OA} = \overline{OB} = 2$, *pois* 2 *é o módulo de cada raíz da equação, da Geometria sabemos que um triângulo isósceles que possui um ângulo de* $60°$ *é equilátero, façamos as medidas no Geogebra para conferir o resultado.*
g) Como a distância do centro a cada vértice é exatamente o módulo da raiz representada pelo afixo (vértice), logo são iguais, isto é:

$$|\sqrt{3} + i| = |2i| = |-\sqrt{3} + i| = |-\sqrt{3} - i| = |-2i| = |\sqrt{3} - i| = 2.$$

Conforme letra d, temos

$$\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA} = 2.$$

Então o hexágono regular é composto de seis triângulos equiláteros, como a área do triângulo equilátero é dada pela fórmula $\dfrac{l^2 \cdot \sqrt{3}}{4}$, *logo a fórmula da área* A *do hexágono regular é:* $A = 6 \cdot \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$ *temos:*

$$A = 6 \cdot \frac{2^2 \cdot \sqrt{3}}{4} \quad \textit{que é aproximadamente } 10,39.$$

Façamos a resolução no Geogebra

1. *Abra uma nova tela no Geogebra;*

2. *Insira os seis pontos que representam as raízes da equação;*

3. *Ative a ferramenta Polígono Regular que se encontra no ícone Polígono, em seguida clique nos pontos* A *e* B*, surgindo a caixa de diálogo, substitua o número que aparece por* 6*, pois trata-se do número de vértices do polígono a ser formado; surgirá na janela Álgebra a seção polígono com sua área, aprendamos mais um caminho para esta solução;*

4. *Ative a ferramenta Área que está no ícone Ângulo na barra de ferramentas, e clique em qualquer lugar do hexágono, na sequência surgirá sua área, veja abaixo.*

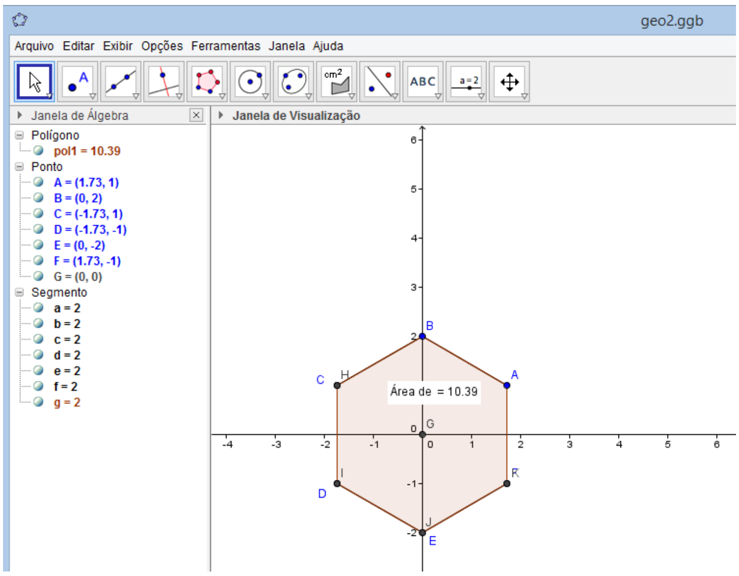

Figura 13: Calculando a área do hexágono regular através do Geogebra.

4.7.5 Interpretação Geométrica da Multiplicação de Complexos

Quando multiplicamos um complexo z por um complexo $cos(\theta)+isen(\theta)$ de módulo 1, o vetor que representa z sofre uma rotação de um ângulo θ em torno da origem.

Sabendo que $cos(\theta) + isen(\theta)$ tem módulo 1, segue que $z \cdot (cos(\theta) + isen(\theta))$ tem o mesmo módulo que z e o argumento de $z \cdot (cos(\theta) + isen(\theta))$ é o argumento de z somado de θ. Portanto, o vetor que representa $z \cdot (cos(\theta) + isen(\theta))$ é o resultado da rotação do vetor que representa z de um ângulo θ em torno da origem, Figura 14.

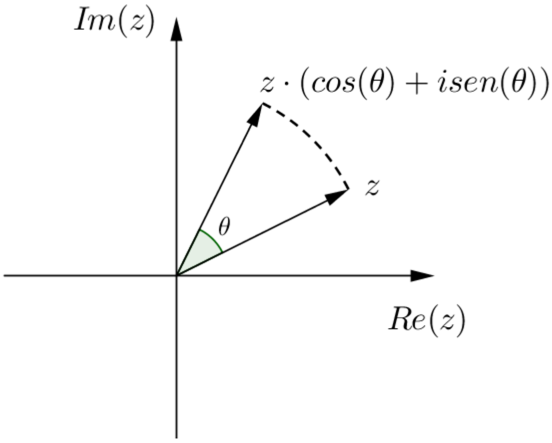

Figura 14: Rotação no sentido anti-horário do vetor z de ângulo θ em torno da origem.

Consequência disso, os números complexos podem ser usados em Geometria onde envolva rotação (veja Exemplo 11). Na trigonometria, usando a fórmula de De Moivre para calcular $cos(nx)$ e $sen(nx)$, sem uso de fórmulas de adição (veja Exemplo 12).

Exemplo 11. *Calcular o terceiro vértice do triângulo equilátero ABC, onde são dados os vértices $A = (2, 3)$ e $B = (5, 7)$.*

Resolução

Há duas soluções, C_1 e C_2, (veja Figura 15).

O vetor $\overrightarrow{AC_1}$ é encontrado ao girarmos o vetor $\overrightarrow{AB}$ de 60^o em torno do ponto A, ou seja,

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AB}(cos(60^o) + isen(60^o)).$$

Fixando O como origem em nosso sistema de coordenadas, temos:

$$\overrightarrow{OC_1} - \overrightarrow{OA} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right),$$

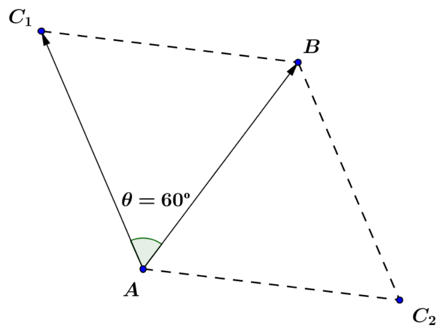

Figura 15: As duas soluções possíveis C_1 e C_2.

escrevendo os vetores $\overrightarrow{OA}$ *e* $\overrightarrow{OB}$ *na forma complexa, temos:*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OC_1} - (2+3i) &= [(5+7i)-(2+3i)]\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Rightarrow \\ \overrightarrow{OC_1} &= \left(\frac{7-4\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\frac{10+3\sqrt{3}}{2}\right)i. \end{aligned}$$

Logo,

$$C_1 = \left(\frac{7-4\sqrt{3}}{2}, \frac{10+3\sqrt{3}}{2}\right).$$

A solução C_2 *é obtido girando* $\overrightarrow{AB}$ *de* -60^o *em torno do ponto* A*, isto é,*

$$\overrightarrow{AC_2} = \overrightarrow{AB}(cos(-60^o) + isen(-60^o)).$$

Logo,

$$C_2 = \left(\frac{7+4\sqrt{3}}{2}, \frac{10-3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Exemplo 12. *Escreva* $cos(3x)$ *e* $sen(3x)$ *em função de cos(x) e sen(x).*

Resolução

Considere o número complexo unitário

$$cos(3x) + isen(3x).$$

Usando a fórmula de De Moivre, podemos reescrevê-lo por

$$(cos(x) + isen(x))^3.$$

Logo,

$$cos(3x) + isen(3x) = (cos(x) + isen(x))^3.$$

De onde temos que

$$\begin{aligned}
(cos(x) + isen(x))^3 &= cos^3(x) + 3cos(x)i^2sen^2(x) + 3cos^2(x)isen(x) + i^3sen^3(x) \Rightarrow \\
(cos(x) + isen(x))^3 &= cos^3(x) - 3cos(x)sen^2(x) + (3cos^2(x)sen(x) - sen^3(x))i,
\end{aligned}$$

igualando as partes reais e imaginárias, temos as soluções:
$cos(3x) = cos^3(x) - 3cos(x)sen^2(x)$ *e* $sen(3x) = 3cos^2(x)sen(x) - sen^3(x)$.

5 O Teorema Fundamental da Álgebra

Neste capítulo vamos ver os conceitos de continuidade de função, completude dos números reais, bem como o teorema de Bolzano-Weierstrass, em seguida analisamos o comportamento de polinômio real e polinômio complexo no infinito, que serão utilizados na demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra, encerramos este capítulo fazendo algumas aplicações do Teorema Fundamental da Álgebra.

5.1 Conceitos Preliminares

5.1.1 Continuidade

Função contínua em um ponto.

Continuidade é uma característica global das funções, mas a sua definição é dado em um dado ponto de seu domínio.

Definição 1. *Sejam $f : D \to \mathbb{R}$ uma função definida no domínio $D \subset \mathbb{R}$ e $a \in D$, um ponto tal que todo intervalo aberto contendo a intersecta $D \backslash \{a\}$. Dizemos que a função f é contínua em a se*

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definição 2. *A função f é contínua se f for contínua em todos os elementos de D.*

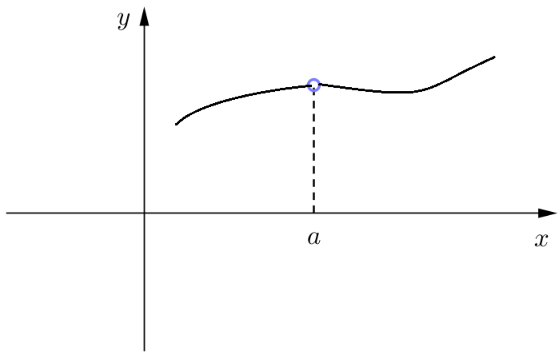

Figura 16: Esboço de gráfico de função que não é contínua em a.

Exemplo 13. *Dada a função polinomial* $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$, *mostre que*

a) $p(x)$ *é contínua para* $x = 1$*;*

b) $p(x)$ *é contínua.*

<u>Resolução</u>
a)Sabendo que

$$p(1) = 1^3 - 1^2 - 2 \cdot 1 = -2,$$

e que, usando regras conhecidas de limite, veja [7].

$$\lim_{x \to 1} (x^3 - x^2 - 2x) = -2$$

Como $\lim_{x \to 1} p(x) = p(1)$, *aplicando a definição de continuidade podemos afirmar que* $p(x)$ *é contínua para* $x = 1$.

b) Como $p(x)$ *não possui nenhuma restrição em* $\mathbb{R}$, *então para qualquer* $a \in \mathbb{R}$, *temos* $\lim_{x \to a} p(x) = p(a)$, *logo* $p(x)$ *é contínua.*

Este não é um caso específico, podemos generalizar para qualquer função polinomial, ou seja;

Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial. Como p é contínua em todos os pontos $a \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que p é uma função contínua.

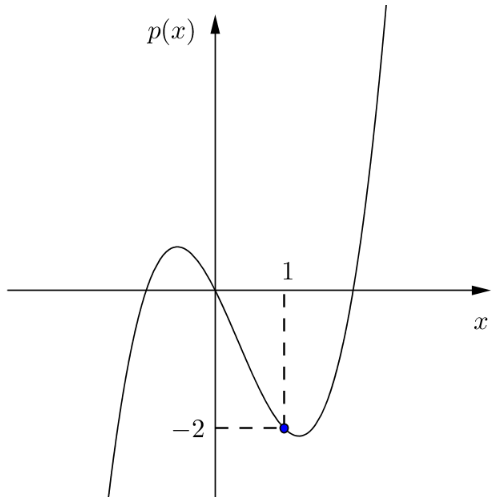

Figura 17: Gráfico da função $p(x) = x^3 - x^2 - 2x$.

5.1.2 Completude dos Números Reais

Dizer que os números reais é completo significa que os números reais não tem "buracos", se o conjunto for quebrado, isto é, particionado em duas partes, de forma que todos elementos de uma parte são maiores que todos elementos da outra parte, então existe um elemento que fica exatamente no meio, e deve pertencer a uma das duas partes.

A completude para os reais, nas palavras de Richard Dedekind (1831-1916)[8]:

"Se todos os pontos da reta são divididos em duas classes, tal que todo ponto da primeira classe está à esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um e apenas um ponto que causa esta divisão de todos os pontos em duas classes, este corta a reta em duas porções."

Conforme [9], uma forma de representar os números reais é por meio de expressões decimais, ao definirmos uma expressão decimal, temos :

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots ,$$

em que a_0 é um número inteiro e $a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$, são dígitos, isto é, números inteiros tais que $0 \leq a_n < 10$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem-se um dígito a_n chamado o n-ésimo dígito da expressão decimal α. O número natural a_0 chama-se a *parte inteira* de α.

[8]Matemático alemão.

A expressão decimal α corresponde a uma forma de representar a soma

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

Trata-se de uma soma com infinitas parcelas. Fazendo o número real α ter por valores aproximados os números racionais

$$a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}, n = 1, 2, \cdots ,$$

ao substituir α por α_n, o erro não é superior a

$$\frac{1}{10^n} = 10^{-n}.$$

Logo, o dígito a_0 é o maior número natural contido em α, a_1 é o maior dígito tal que

$$\alpha_1 = a_0 + \frac{a_1}{10} \leq \alpha,$$

a_2 é o maior dígito tal que

$$\alpha_2 = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} \leq \alpha,$$

$$\vdots$$

Desta maneira, forma-se uma sequência não decrescente de números racionais

$$\alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n \cdots$$

São valores cada vez mais próximos do número real α, o número real α é o limite dessa sequência de números racionais. Isso é uma forma de expressar que os números reais é completo, cujo axioma pode ser escrito da seguinte forma:

Axioma 1 (Completeza)**.** *Toda expressão decimal representa um número real e todo número real pode ser representado por uma expressão decimal.*

Exemplo 14. *Qual é o número real α que representa o limite de $0,999\cdots$.*
Temos

$$\alpha = 0,999\cdots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots .$$

Os valores aproximados de α são

$$\alpha_1 = 0,9 \qquad \alpha_2 = 0,99 \qquad \alpha_3 = 0,999 \qquad \textit{etc.}$$

Vendo que,

$$1 - \alpha_1 = 0,1; \qquad 1 - \alpha_2 = 0,01; \qquad 1 - \alpha_3 = 0,001; \qquad \textit{etc.},$$

e geralmente, $1 - \alpha_n = 10^{-n}$, *logo tomando* n *suficientemente grande a diferença pode tornar-se tão pequena quanto se deseje. Isto é, os números racionais*

$$\alpha_n = 0,999 \cdots 99$$

são valores cada vez mais aproximados de 1, *ou seja, tem* 1 *como limite.*

5.1.3 Existência do Mínimo Global

O teorema que veremos abaixo é de existência, garantindo que toda função contínua $f : D \to \mathbb{R}, D$ um disco compacto em $\mathbb{R}^2$, assume mínimo em D.

Teorema 3 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sequência limitada possui subsequência convergente.*

Para uma demonstração deste Teorema veja [8].

Definição 3. *Dado um ponto* $P = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, *o conjunto dos pontos do plano, cuja distância ao ponto* P *é menor ou igual a* R *é chamado de disco compacto de centro* (a, b) *e raio* R, *ou seja*

$$D[P, R] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq R^2\}.$$

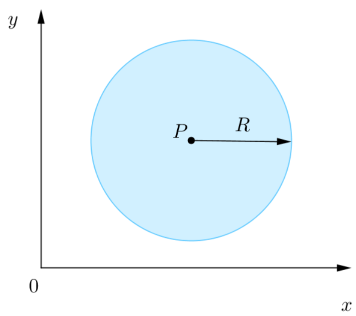

Figura 18: Disco compacto centrado em P de raio R.

5.1.4 Entendendo o Comportamento de um Polinômio Real no Infinito

5.1.5 Polinômio de Primeiro Grau

Dado um polinômio de grau 1, $P(x) = ax + b$, com a e $b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, o gráfico de P é uma reta, crescente para $a > 0$ e decrescente para $a < 0$. Analisemos os dois casos separadamente.

Para $a > 0$, observando o gráfico (Figura 19), à medida que x cresce ($x \to +\infty$), $P(x)$ cresce ($P(x) \to +\infty$), quando x decresce ($x \to -\infty$), $P(x)$ decresce ($P(x) \to -\infty$), resumindo:

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty.$$

Uma demonstração desta fala, necessita de conceito de limite, o qual foge do escopo deste trabalho, pode ser vista em [7].

Para $a < 0$, observando o gráfico (Figura 20), à medida que x cresce ($x \to +\infty$), $P(x)$ decresce ($P(x) \to -\infty$), quando x decresce $x \to -\infty$, $P(x)$ cresce ($P(x) \to +\infty$), resumindo:

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = -\infty.$$

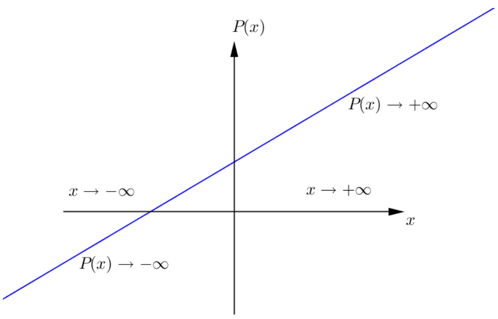

Figura 19: $P(x) = ax + b$ para $a > 0$.

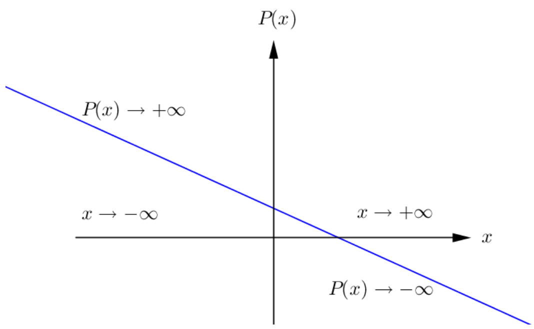

Figura 20: $P(x) = ax + b$ para $a < 0$.

5.1.6 Polinômio de Segundo Grau

Dado $P(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b e $c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, o gráfico de $P(x)$ é uma parábola, com concavidade para cima se $a > 0$ ou concavidade para baixo se $a < 0$. Analisemos os dois casos.

Para $a > 0$, podemos verificar através do gráfico da Figura 21 que se $x \to +\infty$ então $P(x) \to +\infty$ e quando $x \to -\infty$ então $P(x) \to +\infty$, ou seja;

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = +\infty.$$

Uma demonstração deste fato, requer conceito que foge ao escopo deste trabalho, pode ser vista em [7].

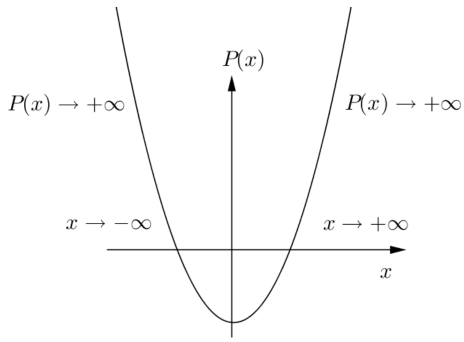

Figura 21: Gráfico da função quadrática para $a > 0$.

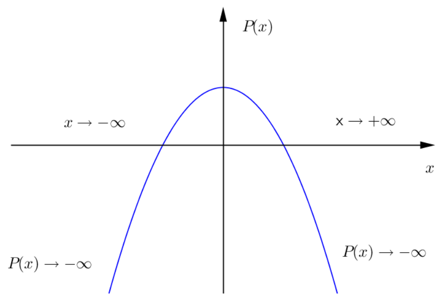

Figura 22: Gráfico da função quadrática para $a < 0$.

Para $a < 0$, podemos verificar através do gráfico da Figura 22 que se $x \to +\infty$ então $P(x) \to -\infty$ e quando $x \to -\infty$ então $P(x) \to -\infty$, ou seja;

$$\lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to +\infty} P(x) = -\infty.$$

5.1.7 Polinômio de Grau n

Agora partindo para o caso geral, seja

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

com

$$a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{R} \;\; \text{e} \;\; a_n \neq 0.$$

Colocando x^n em evidência, temos:

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x_n} \right).$$

Vamos analisar $\dfrac{a_{n-1}}{x}$, quando $x \to +\infty$, nesse ponto um exemplo pode clarear as ideias. Façamos $a_{n-1} = 10$, temos $\dfrac{10}{x}$ onde a variável x vai assumindo valores cada vez maiores, logo o quociente vai assumindo valores mais próximos do zero, veja Tabela 1 com alguns valores para x.

x	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000	$\cdots$	$+\infty$
$\frac{10}{x}$	10	1	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	$\cdots$	0

Tabela 1: Comportamento de $\dfrac{10}{x}$ para x assumindo um número real cada vez maior.

Por outro lado, se $x \to -\infty$, o quociente será negativo e cada vez mais próximo do zero, veja Tabela 2 com alguns valores para x.

x	-1	-10	-100	-1.000	-10.000	-100.000	-1.000.000	$\cdots$	$-\infty$
$\frac{10}{x}$	-10	-1	-0,1	-0,01	-0,001	-0,0001	-0,00001	$\cdots$	0

Tabela 2: Comportamento de $\dfrac{10}{x}$ para x assumindo um número real cada vez menor.

Então podemos afirmar que se $x \to +\infty$ então $P(x) \to 0$ e se $x \to -\infty$ então $P(x) \to 0$, ou seja;

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_{n-1}}{x} = \cdots = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{a_0}{x^n} = 0.$$

Evidentemente que a demonstração deste fato, necessita do conceito de limite, que foge do escopo deste trabalho, pode ser vista em [7]. Logo, basta analisar $P(x) = x^n a_n$, verificamos claramente que para $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$ dependemos do sinal de a_n e se n é par ou ímpar. Desta forma, dado um polinômio real, temos as quatro possibilidades:

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} P(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty.$$

Resumindo as quatro possibilidades acima, escrevemos:

$$\lim_{|x|\to+\infty} |P(x)| = +\infty. \tag{1}$$

Consequentemente, vemos que a função $| P(x) |$ satisfaz:

$$\begin{cases} \text{é contínua e positiva} \\ \textit{tende a } +\infty \textit{ se } x \to -\infty \\ \textit{tende a } +\infty \textit{ se } x \to +\infty. \end{cases}$$

De onde concluímos que existe um ponto x_0 tal que:

$$|P(x_0)| \ \leq \ |P(x)|, \ \ \forall \ x \ \in \mathbb{R}.$$

5.1.8 Entendendo o Comportamento de um Polinômio Complexo no Infinito

Seja um polinômio complexo de grau n

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \text{ onde } a_i \in \mathbb{C}, i = \{0, 1, 2, \cdots, n\} \text{ e } a_n \neq 0.$$

Aplicando o módulo aos dois lados da igualdade

$$|P(z)| \ = \ |a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0|$$

e depois, usando a desigualdade triangular estendida para números complexos, Seção 4.7.2, temos

$$|a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0| \ \geq \ |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - \cdots - |a_1 z| - |a_0|,$$

ou seja,

$$|P(z)| \ \geq \ |a_n z^n| - |a_{n-1}z^{n-1}| - \cdots - |a_1 z| - |a_0|.$$

Utilizando a propriedade do módulo de um número complexo, Secão 4.7.1, temos:

$$|P(z)| \ \geq \ |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_1||z| - |a_0|.$$

Como $|a_n|, |a_{n-1}|, \cdots, |a_0|$ e $|z|$ são reais e positivos e, ainda $|a_n|$ é estritamente positivo, desta forma, pelo caso demonstrado para polinômios reais, concluímos que:

$$\lim_{|z| \to +\infty} \left(|a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \cdots - |a_1||z| - |a_0|\right) = +\infty,$$

isto é;

$$\lim_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty. \tag{2}$$

5.1.9 A Translação de um Polinômio

Seja um polinômio completo de grau $n \geq 0$

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \ \ a_n \neq 0.$$

e z_0 um número fixo qualquer em $\mathbb{C}$.
Considere as seguintes propriedades relativas a $P(z + z_0)$:

- É polinômio na variável z;
- Termo dominante a_n, também de grau n;
- É polinômio com termo independente $P(z_0)$.

De fato expandindo a expressão $P(z + z_0)$, obtemos

$$a_n(z + z_0)^n + a_{n-1}(z + z_0)^{n-1} + \cdots + a_1(z + z_0) + a_0.$$

De onde verificamos que o coeficiente do monômio z^n de maior grau é a_n. Além disso, colocando $z = 0$ em $P(z + z_0)$, obtemos $P(z_0)$. Logo este é o termo independente.

Exemplo 15. *Seja* $P(z) = 4z^3 + 2z^2 + 3z + 5$ *e* $z_0 = 2$.
Então,

$$\begin{aligned} P(z+2) &= 4(z+2)^3 + 2(z+2)^2 + 3(z+2) + 5 \\ &= 4z^3 + 26z^2 + 59z + 51. \end{aligned}$$

Note que:
$P(z+2)$ *é polinômio com termo dominante* $a_n = a_3 = 4$*, de grau* 3 *e o termo independente, para* $z = 0$*, é* $P(0+2) = P(2) = P(z_0) = 51$.

5.1.10 Demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra

Teorema 4 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio complexo de grau maior ou igual a 1 possui pelo menos uma raiz complexa.*

A prova a ser apresentada assume a continuidade dos polinômios complexos e a completude de $\mathbb{R}$ aplicada a função contínua $f : D \to \mathbb{R}, D$ um disco compacto em $\mathbb{R}^2$, assume mínimo em D (Teorema 3).

A prova está dividida em duas partes, provaremos que:

(A) Existe um ponto z_0 no plano complexo tal que $|P(z)| \geq |P(z_0)|$.

(B) Se z_0 é o ponto de mínimo global determinado na primeira parte, então $P(z_0) = 0$.

Seja $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0,\ a_i \in \mathbb{C}$, onde $n \geq 1$ e $a_n \neq 0$.

Demonstração. Parte (A)
Analogamente a polinômios reais, os quais tendem ao infinito se a variável tende a $\pm\infty$ (1), temos $|\ P(z)\ |$ tende a $+\infty$ se $|z|$ tende a $+\infty$ (2).

Assim pela definição de $\lim\limits_{|z| \to +\infty} |P(z)| = +\infty$, existe um raio $R > 0$ tal que $|P(z)| > |P(0)|$ se $|z| > R$ e, como $|P(z)|$ é uma função contínua no disco compacto centrado na origem $D[0, R] = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq R\}$, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass, segue que a função $|P(z)|$ restrita a tal disco $D[0, R]$ assume um valor mínimo em um ponto $z_0 \in D[0, R]$, temos $|P(z)| \geq |P(z_0)|$, para todo $z \in D[0, R]$. Porém, também temos $|P(0)| \geq |P(z_0)|$ já que $0 \in D[0, R]$; onde segue que

$$\begin{cases} |P(z)| \geq |P(z_0)|, \ \forall\ z \in D[0, R] \\ |P(z)| \geq |P(0)|, \ \forall\ z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| > R \\ |P(0)| \geq |P(z_0)|. \end{cases}$$

Portanto $|P(z)| \geq |P(z_0)|$, para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, z_0 é ponto de mínimo global da função $|P(z)|$.

Recordando que $Q(z) = P(z + z_0)$ é um polinômio onde:

- O coeficiente dominante de $Q(z) = P(z + z_0)$ é a_n e de grau n;
- O termo independente de $Q(z) = P(z + z_0)$ é $Q(0) = P(z_0)$.

Assim temos:

$$P(z + z_0) = P(z_0) + b_1 z + \cdots + b_{n-1} z^{n-1} + b_n z^n, \text{com } b_j's \in \mathbb{C} \text{ e } b_n = a_n \neq 0.$$

Supondo, sem perda de generalidade, que o valor $P(z_0)$ é assumido em $z = 0$, podemos assumir que $z_0 = 0$ e assim substituindo em $|P(z)| \geq |P(z_0)|$, temos:

$$|P(z)|^2 \geq |P(0)|^2, \ \forall\ z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Sendo $b_n = a_n \neq 0$ já vimos que existe o menor $k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que o coeficiente do monômio z^k, b_k, é diferente de zero. Então evidenciando z^k obtemos a simplificação para o polinômio $P(z)$:

$$P(z) = P(0) + z^k Q(z), \tag{4}$$

onde Q é um polinômio e $Q(0) = b_k \neq 0$.

Parte (B)

Considere $S^1 = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$, o círculo unitário centrado na origem para todo $r \geq 0$ e $w \in S^1$, de (3), temos que:

$$|P(rw)|^2 \ \geq \ |P(0)|^2 \Longrightarrow |P(rw)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0. \tag{5}$$

Além disso, considerando (4), obtemos $P(rw) = P(0) + r^k w^k Q(rw)$. Substituindo em (5), temos:

$$|P(0) + r^k w^k Q(rw)|^2 - |P(0)|^2 \geq 0.$$

Pelas Propriedades 4.6.1, item $i)$ e 4.7.1, itens $i)$ e $vi)$, obtemos que:

$$|P(0)|^2 + 2Re[\overline{P(0)} r^k w^k Q(rw)] + |r^k w^k Q(rw)|^2 - |P(0)|^2 \ \geq 0 \Rightarrow$$

$$2Re[\overline{P(0)} r^k w^k Q(rw)] + |r^k w^k Q(rw)|^2 \ \geq 0 \Rightarrow$$

$$2r^k Re[\overline{P(0)} Q(rw) w^k] + r^{2k} |w^k Q(rw)|^2 \ \geq 0 \text{ para } \forall\ r \geq 0, \ \ \forall\ w \in S^1.$$

Dividindo por $r^k > 0$ e fixando $w \in S^1$, obtemos:

$$2Re[\overline{P(0)} Q(rw) w^k] + r^k |w^k Q(rw)|^2 \ \geq 0, \ \ \forall\ r > 0.$$

Como a esquerda da desigualdade é contínua em $r \in [0, +\infty)$, substituindo $r = 0$, obtemos

$$2Re[\overline{P(0)} Q(0 \cdot w) w^k] + 0^k |w^k Q(0 \cdot w)|^2 \ \geq 0.$$

Logo,

$$2Re\left[\overline{P(0)} \cdot Q(0) \cdot w^k\right] \ \geq 0, \ w \text{ arbitrário em } S^1. \tag{6}$$

Seja $w = cos(\theta) + isen(\theta) \in S^1$, aplicando a fórmula de De Moivre, temos: $w^k = cos(k\theta) + isen(k\theta)$, e conforme definimos, $|w| = 1$, sabendo que $|w^k| = 1$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, escolhendo alguns representantes de w^k. Para fixar as ideias, digamos

$w^k = \pm 1$ e $\pm i$, cujos afixos são imagens na circunferência definida a cima, escrevendo $\overline{P(0)}Q(0) = a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$, substituindo em (6), temos:

$$2Re[(a + bi)(cos(k\theta) + isen(k\theta))] \geq 0$$

$$2Re[acos(k\theta) - bsen(k\theta) + (asen(k\theta) + bcos(k\theta))i] \geq 0,$$

logo

$$2(acos(k\theta) - bsen(k\theta)) \geq 0. \tag{7}$$

Analisemos cada caso:
Para $w^k = 1$, temos $cos(k\theta) = 1$ e $sen(k\theta) = 0$. Logo $k\theta = 0$, substituindo em (7):

$$2(acos0 - bsen0) \geq 0 \Rightarrow 2acos0 \geq 0.$$

Logo, $a \geq 0$.
Para $w^k = -1$, temos $cosk\theta = -1$ e $senk\theta = 0$. Logo $k\theta = \pi$, substituindo em (7):

$$2(acos(\pi) - bsen(\pi)) \geq 0 \Rightarrow 2acos(\pi) \geq 0.$$

Logo, $a \leq 0$, como $a \geq 0$ e $a \leq 0$. Então $a = 0$
Para $w^k = i$, temos $cos(k\theta) = 0$ e $sen(k\theta) = 1$. Logo $k\theta = \dfrac{\pi}{2}$, substituindo em (7):

$$2\left(acos\left(\frac{\pi}{2}\right) - bsen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) \geq 0 \Rightarrow -2bsen\left(\frac{\pi}{2}\right) \geq 0.$$

Logo, $b \leq 0$.
Para $w^k = -i$, temos $cos(k\theta) = 0$ e $sen(k\theta) = -1$. Logo $k\theta = \dfrac{3}{2}\pi$, substituindo em (7):

$$2\left(acos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - bsen\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right) \geq 0 \Rightarrow -2bsen\left(\frac{3\pi}{2}\right) \geq 0.$$

Logo, $b \geq 0$, como $b \geq 0$ e $b \leq 0$. Então $b = 0$, logo $\overline{P(0)} \cdot Q(0) = a + bi = 0$ lembrando que $Q(0) = b_k \neq 0$, segue que $\overline{P(0)} = 0$, portanto $P(0) = 0$. Concluíndo assim a prova do Teorema Fundamental da Álgebra. $\square$

5.1.11 Aplicação do Teorema Fundamental da Álgebra

Com o Teorema Fundamental da Álgebra (TFA) podemos estabelecer, de modo completo, a relação entre as raízes de um polinômio complexo e a sua forma fatorada, este último requer outros dois Teoremas para sua demonstração, que estão enunciados abaixo.

Teorema 5 (Teorema do Resto)**.** *O resto da divisão de um polinômio $p(x)$ por $x-\alpha$ é igual ao valor númerico de p em α.*

Demonstração. Aplicando a definição de divisão, temos

$$p(x) = q(x) \cdot (x-\alpha) + r,$$

onde q e r são, respectivamente, quociente e resto da divisão. Como $x-\alpha$ tem grau 1, o resto r ou é nulo ou tem grau zero; portanto, r é um polinômio constante. Calculando o valor do polinômio $p(x)$ para $x=\alpha$, temos

$$p(\alpha) = q(\alpha) \cdot (\alpha-\alpha) + r = r.$$

□

Teorema 6 (Teorema de D'Alembert)**.** *Se o número complexo α é raiz de uma função polinomial p, então $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$.*

Demonstração. Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, pelo Teorema 5 $p(\alpha)=0$, temos

$$\begin{array}{rcl} p(x) & = & p(x) - p(\alpha) \\ & = & (a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0) - (a_n \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0) \\ & = & a_n(x^n - \alpha^n) + a_{n-1}(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \cdots a_1(x-\alpha). \end{array}$$

Como $x^n - \alpha^n$ é divisível por $x-\alpha$. Basta verificar que

$$x^n - \alpha^n = (x-\alpha)(x^{n-1} + \alpha x^{n-2} + \alpha^2 x^{n-3} + \cdots + \alpha^{n-2}x + \alpha^{n-1}).$$

Logo $p(x)$ é divisível por $x-\alpha$. □

Teorema 7 (Decomposição)**.** *Todo polinômio complexo $p(x)$ de grau n $(n \geq 1)$ pode ser fatorado em n fatores do primeiro grau na forma $p(x) = c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$, onde c é um número complexo e $x_1, x_2, \cdots, x_n$ são raízes complexas de $p(x)$. Além disso, esta fatoração é única, a menos da ordem dos fatores.*

A demonstração que apresentamos está baseada em [3].

Demonstração. Sendo p um polinômio de grau $n \geq 1$, O TFA garante que p tem ao menos uma raiz x_1. Assim $p(x_1) = 0$ e, de acordo com o Teorema 6, p é divisível por $x - x_1$;

$$p(x) = (x-x_1) \cdot Q_1, \tag{8}$$

em que Q_1 é polinômio de grau $n-1$ e coeficiente dominante a_n. Se $n=1$, então $n-1=0$ e Q_1 é polinômio constante, portanto $Q_1=a_n$ e $p(x)=a_n(x-x_1)$, ficando demonstrado o teorema.

Se $n \geq 2$, então $n-1 \geq 1$ e o TFA é aplicável ao polinômio Q_1, pois Q_1 tem ao menos uma raiz x_2. Assim $Q_1(x_2)=0$ e Q_1 é divisível por $x-x_2$;

$$Q_1(x)=(x-x_2)\cdot Q_2. \tag{9}$$

Substituindo (9) em (8), temos:

$$p(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdot Q_2,$$

onde Q_2 é polinômio de grau $n-2$ e coeficiente dominante a_n. Se $n=2$, isto é, $n-2=0$, logo $Q_2=a_n$ e $p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)$, ficando demonstrado o teorema.

Após n aplicações sucessivas do TFA, concluímos:

$$p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)\cdot Q_n,$$

em que Q_n é uma constante de valor a_n. Portanto, $Q_n=a_n$ e,

$$p(x)=a_n(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n).$$

Para demonstrar a unicidade da decomposição, suponhamos que p possua duas decomposições distintas:

$$p(x)=c(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$$

$$p(x)=c^{'}(x-x_1^{'})(x-x_2^{'})\cdots(x-x_n^{'}).$$

Inicialmente, comparando o termo de mais alto grau em ambas as expressões, e aplicando a definição de igualdade de polinômios, verificamos que $c=c^{'}$. Logo temos

$$(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=(x-x_1^{'})(x-x_2^{'})\cdots(x-x_n^{'}). \tag{10}$$

Calculando o valor dos dois lados da igualdade para $x=x_1$, obtemos

$$0=(x_1-x_1^{'})(x_1-x_2^{'})\cdots(x_1-x_n^{'}).$$

Logo, pelo menos um dos números

$$x_1^{'},\cdots,x_n^{'} \text{ é igual a } x_1.$$

Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$x_1 = x_1'.$$

Substituindo $x_1 = x_1'$ em (10), temos:

$$(x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n) = (x - x_1)(x - x_2')\cdots(x - x_n').$$

Como o fator $(x-x_1)$ é comum aos dois lados da igualdade, ela se verifica se, e somente se, os polinômios obtidos cancelando $(x-x_1)$ em ambos os lados são iguais. Logo, temos

$$(x - x_2)\cdots(x - x_n) = (x - x_2')\cdots(x - x_n').$$

Usando repetidamente o argumento acima, podemos identificar e eliminar em cada passo, um par de termos idênticos em cada lado da igualdade. Desta forma, fica estabelecido uma correspondência entre os termos das duas fatorações, assim provando a unicidade da decomposição. □

Observação 3. *Nada impede que a decomposição de $p(x)$ apresente fatores iguais.*

Exemplo 16. *Fatorar o polinômio $p(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$, sabendo que suas raízes são $-3, -2, 1, 2$ e 3.*

Como o fator dominante $a_n = 1$,
temos:

$$p(x) = (x + 3)(x + 2)(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

O fato da equação de grau n ter n raízes em $\mathbb{C}$, permite estabelecer relações gerais entre seus coeficientes e raízes, vejamos como isso ocorre.

5.1.12 Relações entre Coeficientes e Raízes

Vamor começar com a equação do 2° grau, consideremos a equação:

$$ax^2 + bx + c = 0, \; a \neq 0,$$

cujas raízes são x_1 e x_2, garantidas pelo TFA.

Pelo Teorema 7, essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Temos a identidade

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \forall\, x \in \mathbb{C},$$

isto é;

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2, \forall\, x,$$

portanto

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1x_2 = \frac{c}{a}.$$

Equação do 3° grau:
Consideremos a equação $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ a \neq 0$, cujas raízes são x_1, x_2 e x_3, garantidas pelo TFA.

Pelo Teorema 7, essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0.$$

Temos a identidade

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), \forall\, x,$$

isto é;

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = x^3 - (x_1 + x_2 + x_3)x_2 + (x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)x - x_1x_2x_3, \forall\, x,$$

portanto

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a} \qquad \text{e} \qquad x_1x_2x_3 = -\frac{d}{a}.$$

Equação de grau n :
Dada a equação

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1x + a_0 = 0,\ a_n \neq 0,$$

cujas raízes são $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$, garantidas pelo TFA.

Pelo Teorema 7, essa equação pode ser escrita sob a forma:

$$a_n(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)=$$
$$=a_nx^n-a_n(\underbrace{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n}_{S_1})x^{n-1}+$$
$$+a_n(\underbrace{x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n}_{S_2})x^{n-2}-$$
$$-a_n(\underbrace{x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n}_{S_3})x^{n-3}+\cdots+$$
$$+(-1)^m a_nS_mx^{n-m}+\cdots+(-1)a_n(\underbrace{x_1x_2x_3\cdots x_n}_{S_n}),\forall\ x,$$

portanto

$$\begin{cases} S_1 = x_1+x_2+x_3+\cdots+x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n} \\ S_2 = x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n)x^{n-2} = \dfrac{a_{n-2}}{a_n} \\ S_3 = x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n} \\ S_m = \text{ Soma de todos os } C_{n,m} \text{ produtos de m raízes da equação } = (-1)^m\dfrac{a_{n-m}}{a_n} \\ S_n = x_1x_2x_3\cdots x_n = (-1)^n\dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Estas relações entre coeficientes e raízes, são conhecidas também como Relações de Girard.

Exemplo 17. *Resolva a equação $x^3-9x^2+23x-15=0$, sabendo que suas raízes estão em P.A.*

Resolução

Pelo TFA, a equação possui três raízes, e usando a Relação de Girard, temos:

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_2}{a_3}=9 \tag{11}$$

$$x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{a_1}{a_3}=23$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{a_0}{a_3}=15. \tag{12}$$

Como as raízes x_1, x_2 *e* x_3*, estão em P.A., usando a propriedade de P.A., temos:*

$$x_2 = \frac{x_1 + x_3}{2} \Longrightarrow x_1 + x_3 = 2x_2. \tag{13}$$

Substituindo (13) *em* (11)*, obtemos:*

$$3x_2 = 9 \Longrightarrow x_2 = 3.$$

Substituindo x_2 *em* (11) *e* (12)*, temos:*

$$x_1 + x_3 = 6 \qquad e \qquad x_1 \cdot x_3 = 5,$$

segue que: $x_3^2 - 6x_3 + 5 = 0$,
isto é,

$$x_1 = 1 \text{ } e \text{ } x_3 = 5.$$

Portanto $S=\{1, 3, 5\}$

6 Proposta de atividades envolvendo os Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra

Cada encontro temos duas horas de duração, distribuidos em duas sessões sendo a primeira destinada a apresentação da proposta e a segunda, distribuida entre a resolução de exercícios e uma avaliação formal por meio de exercício a ser entregue ao final da aula.

1ª Aula

Conteúdo:

- História do Teorema Fundamental da Álgebra;
- História dos Números Complexos;
- Definição do Conjunto dos Números Complexos;
- Propriedades da Adição e Multiplicação em $\mathbb{C}$.

Espectativa da Aprendizagem:

- Entender o período histórico da Matemática que desenvolve o Teorema Fundamental da Álgebra;
- Entender e aplicar a definição do Conjunto dos Números Complexos;
- Operar em $\mathbb{C}$, aplicando as propriedades da adição e multiplicação.

Procedimento Didático:

- Aula expositiva;
- Uso de multimídia;
- Aplicativo Power Point;
- Mural
- Quadro-giz.

Estratégia:

- Utilizar o Power Point para exposição da teoria;
- Realizar um desafio acadêmico;
- Transformar o grupo de alunos em quatro equipes;
- Preparar as perguntas em tirinhas de papel para serem sorteadas;
- Cada equipe elaborará (durante a competição) três perguntas que serão dirigidas as outras três equipes;
- Serão atribuidos 10 pontos a cada questão respondida corretamente;
- Duração da atividade 1h;
- Mural a ser exposto na Unidade escolar, mostrando a aplicação dos números complexos na tecnologia atual.

Atividades Aplicadas ao Conteúdo:

1. Determine x e y reais para que a sentença seja verdade em $\mathbb{C}$.

a) $(2,4)=(x-1,2y-5)$

b) $(4x,3)=(x+1,12y)$

2. Sabendo que $A=(2,3)$ e $B=(1,4)$ são números complexos, calcule:

a) $A+B$

b) $A\cdot B$

3. Por que as equações do 2° grau, segundo a história apresentada, não motivaram a aceitação dos números complexos?

4. Qual matemático italiano publicou o livro Ars Magna em 1545?

5. Que feito notável na matemática é atribuido a Scipione del Ferro?

6. Qual fato leveu Niccolò Fontana a receber o apelido de Tartaglia, qual é o significado deste nome?

7. Qual discípulo de Cardano venceu Tartáglia em um desafio público? O que ele descobriu?

8. Qual foi o primeiro matemático a demonstrar a possibilidade de trabalhar com raízes negativas e ainda ter resultados razoáveis (concreto)?

9. Os registros do surgimento do Teorema Fundamental da Álgebra, remonta ao século XVI, mas a sua demonstração correta só veio acontecer em 1799, na apresentação de uma tese de doutorado, quem foi seu autor?

10. Quais informações Tartaglia revelou a Cardano sob juramento deste, que iria guardar segredo?

11. Que feito notável é atribuído ao jovem Niels Henrik Abel, no campo das equações polinomiais?

12. Onde os números complexos estão presentes na tecnologia atual? Faça uma pesquisa sobre este fato.

2ª Aula

Conteúdo:

- Representação algébrica dos Números Complexos.

Espectativa da Aprendizagem:

- Representar Números Complexos na forma algébrica;
- Compreender como ocorreu a aceitação dos Números Complexos à cidadania da Matemática;
- Interpretar geometricamente a soma e subtração em $\mathbb{C}$;
- Realizar as operações de adição e subtração em $\mathbb{C}$;
- Calcular potências de i.

Procedimento Didático:

- Aula expositiva;
- Uso de multimídia;
- Aplicativo Power Point;
- Quadro-giz;
- Programa Geogebra.

Estratégia:

- Utilizar o Power Point para exposição da teoria;
- Apresentar o Geogebra como operador de vetores no formato algébrico e geométrico;
- Para uso deste programa iremos dar exemplo que auxilie a sua prática.

Atividades Aplicadas ao Conteúdo:

1. Qual matemático veio a partir de 1777, substituir a $\sqrt{-1}$ por i? Lembrando que a sua aceitação no meio matemático, só veio acontecer alguns anos depois, através de Gauss ao usá-la em seus trabalhos.

2. Utilizando o programa Geogebra, realize as seguintes operações:

3. $(3 - 4i) + (1 + 7i)$;

4. $(3 + 4i) - (2 - i)$;

5. $2i + (5 + 3i)$;

6. $(3 + 2i) - (10 - 5i)$.

Vejamos o exemplo que ajuda a entender e operar com os recursos deste programa. Vamos determinar o número complexo que representa $(3 - 4i) + (1 + 2i)$, recordemos que um número complexo é representado por um par ordenado (x, y), também por um vetor, diante disso, podemos representar os números $(3 - 4i)$ e $(1 + 2i)$, como vetores no plano, onde $(3, -4)$ e $(1, 2)$ são seus representantes na forma de pontos (afixos). Sigamos os passos:
No campo Entrada, digite: $a = (3, -4)$ e dê Enter!, surgirá na janela de álgebra o vetor coluna de duas linhas e na janela de visualização, o desenho do vetor de origem na origem dos espaços, veja Figura 23. Em seguida, digite $b = (1, 2)$ e dê Enter!, agora

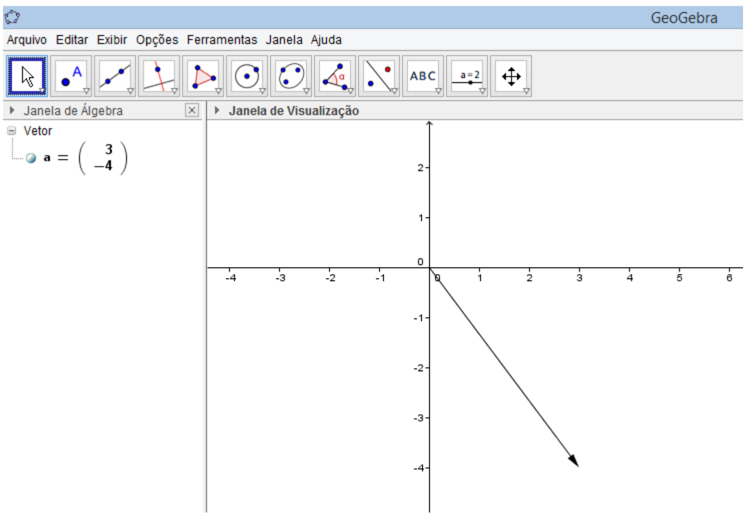

Figura 23: Representação do número complexo $3 - 4i$ no Geogebra.

já temos registrado no Geogebra os dois números complexos, agora podemos operar com eles da seguinte forma:
Digite $a + b$ dando Enter!, cujo resultado apresentado na janela de álgebra é o vetor coluna com primeira linha 4 e segunda linha -2, que são respectivamente a parte real e

imaginária do complexo resultante, na janela de visualização temos sua representação geométrica conforme Figura 24.

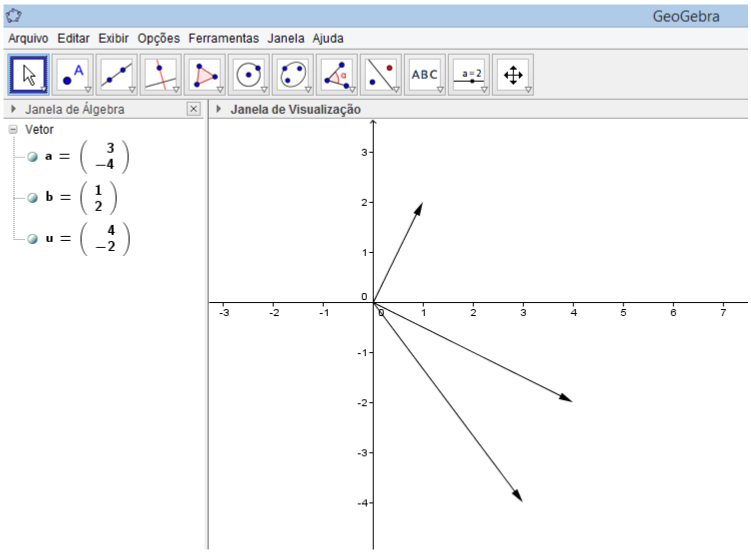

Figura 24: Representação geométrica de $(3 - 4i) + (1 - i)$.

1. Efetue as operações indicadas abaixo:

a) $(5 + 4i)(2 + i)$;

b) $(-2 + 3i)(1 - i) + (7 + i)i$;

c) $(1 + 3i)^2 - (2 + 5i)$.

2. Determine x e $y \in \mathbb{R}$ para que se tenha:

a) $3 - 4yi = 6x + 24i$;

b) $(x + yi)^2 = 4i$.

3. Qual é a condição para que o produto de dois números complexos $a + bi$ e $c + di$ dê um número real?

4. Determine o valor de $x \in \mathbb{R}$, para que o número complexo $x + (x^2 - 5x + 6)i$, seja um número imaginário puro.

5. Se $f(z) = z^2 - z + 1$, calcule $f(2 - i)$.

6. Prove que $(1+i)^2 = 2i$.

7. Coloque na forma algébrica o número $z = \dfrac{(1+i)^{60} - (1+i)^{40}}{i^{135}}$.

8. Determine as raízes quadradas de $3 - 4i$.

3ª Aula

Conteúdo:

- Conjugado de um Número Complexo e suas Propriedades;
- Representação Trigonométrica ou Polar dos Números Complexos.

Espectativa da Aprendizagem:

- Definir o Conjugado de um Número Complexo;
- Conhecer e aplicar as propriedades do Conjugado em situações-problemas;
- Representar os Números Complexos na forma Trigonométrica ou Polar.

Procedimento Didático:

- Aula expositiva;
- Uso de multimídia;
- Aplicativo Power Point;
- Quadro-giz.

Estratégia:

- Utilizar o Power Point para exposição da teoria;
- Explorar o cálculo algébrico, lembrando que as operações usadas no campo dos reais é estendida aos complexos.

Atividades Aplicadas ao Conteúdo:

1. Determine o conjugado de $\dfrac{1+i}{i}$.

2. Encontre z tal que $\overline{z} + 2zi - 1 = 2$.

3. Determine $z \in \mathbb{C}$ tal que $z^3 = \overline{z}$.

4. Coloque na forma trigonométrica os números:

a) $3 - 4i$;

b) $-\sqrt{3} + i$;

c) i^5;

d) $5i(2 - i)$.

8. Coloque na forma algébrica os números:

a) $2\left(cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isen\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$;

b) $5\left(cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)$;

c) $3\left(cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + isen\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$;

d) $7\left(cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + isen\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right)$.

5. Efetue as divisões indicadas abaixo:

a) $\frac{3 + 2i}{1 - 2i}$;

b) $\frac{5}{3 + 4i}$.

6. Determine os complexos que têm o quadrado igual ao conjugado.

7. Determine os números complexos z, tais que $z + \overline{z} = 4$ e $z\overline{z} = 13$.

8. Prove que $\overline{z + \overline{z}}$ é um número real.

9. Resolva a equação $iz + 2\overline{z} + 1 - i = 0$.

10. Um imaginário puro é um complexo cuja parte real é nula. Determine a real para que $\frac{2 + ai}{1 - i}$ seja um imaginário puro.

4ª Aula

Conteúdo:

- Propriedades do Módulo de um Número Complexo;
- Potenciação em $\mathbb{C}$.

Espectativa da Aprendizagem:

- Conhecer e aplicar as propriedades do Módulo de um Número Complexo em situações-problemas;
- Calcular potências de Números Complexos na forma Trigonométrica ou Polar.

Procedimento Didático:

- Aula expositiva;
- Uso de multimídia;
- Aplicativo Power Point;
- Régua;
- Quadro-giz.

Estratégia:

- Utilizar o Power Point para exposição da teoria;
- Criar grupos de no máximo três integrantes;
- Sortear dez questões da lista abaixo, para que sejam resolvidas na lousa por estes grupos;

Atividades Aplicadas ao Conteúdo:

1. Determine o módulo de cada um dos números complexos abaixo

a) $(4-3i)(2+2i)$;

b) $\dfrac{3+5i}{2-i}$;

c) $\dfrac{(1+i)(\overline{2+3i})}{1-i}$.

2. Se $z + \dfrac{1}{z} = 1$, calcule $|z|$.

3. Sendo a real, determine $\left|\dfrac{1-ai}{1+ai}\right|$.

4. Localize graficamente os números complexos z tais que:

a) $|z| = 9$;

b) $|z| > 1$;

c) $|z| \leq 25$.

5. Represente no plano de Argand-Gauss, indicando graficamente o módulo ρ e o argumento principal θ_0 para os seguintes números complexos:

a) $-3 + 2i$;

b) $3 + 5i$.

6. Determine o menor número n natural para o qual $(i - \sqrt{3})^n$ é imaginário puro.

7. Determine $(1 - \sqrt{3}i)^5$.

8. Prove que $1 + i\sqrt{3}$ é uma das soluções da equação $x^6 + 9x^3 + 8 = 0$.

9. Determine os valores inteiros de n para os quais $(1+i)^n = (1-i)^n$.

10. Dados os números complexos $\begin{cases} z = \rho(cos(\theta) + isen(\theta)) \\ w = r(cos(\alpha) + isen(\alpha)), \end{cases}$
determine $|z + w|$ e mostre que $|z + w| \leq |z| + |w|$.

5ª Aula

Conteúdo:

- Radiciação em $\mathbb{C}$;
- Interpretação Geométrica da Multiplicação dos Complexos.

Espectativa da Aprendizagem:

- Calcular a raiz n-ésima em $\mathbb{C}$;
- Compreender e aplicar os Números Complexos em situações-problemas em Geometria e na Trigonometria.

Procedimento Didático:

- Aula expositiva;
- Uso de multimídia;
- Aplicativo Power Point;
- Régua;
- Quadro-giz.

Estratégia:

- Utilizar o Power Point para exposição da teoria;
- Aplicar a teoria na resolução de exemplos;
- Incentivar os alunos a resolverem atividades no quadro.

Atividades Aplicadas ao Conteúdo:

1. Calcule:

a) $\sqrt{-7+24i}$;

b) $\sqrt[3]{1+i}$;

c) $\sqrt[6]{-729}$.

2. Calcule $\left|\sqrt[3]{7+i\sqrt{15}}\right|$.

3. Represente graficamente os números $i + \sqrt[3]{-8i}$.

4. Calcule $\sqrt{\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

5. Um quadrado, inscrito numa circunferência de centro na origem, tem como um de seus vértices o afixo de $z_1 = 3i$. Que números complexos são representados pelos outros três vértices?

6. Calcule as raízes quartas de 256. Represente-as no plano e calcule a distância entre dois pontos não adjacentes. Qual o comentário geométrico acerca dessa distância.

7. $ABCD$ é um quadrado. Dados $A = (1, 2)$ e $B = (3, 5)$, determine C e D.

8. Dois vértices consecutivos de um octógono regular convexo são $(1, 2)$ e $(3, -2)$. Determine o centro deste octógono.

9. Demonstrar a identidade: $cos^4(x) - sen^4(x) = cos(2x)$.

10. Resolva a equação trigonométrica $1 + cos(x) + cos(2x) + cos(3x) = 0$.

6ª Aula

Conteúdo:

- Teorema Fundamental da Álgebra;
- Teorema da Decomposição;
- Relação entre coeficientes e raízes (Relação de Girard)

Espectativa da Aprendizagem:

- Conhecer as ferramentas necessárias para a demonstração do Teorema Fundamental da Álgebra;
- Aplicar o Teorema da Decomposição em situações-problemas;

- Aplicar a Relação de Girard em situações-problemas.

Procedimento Didático:

- Aula expositiva;
- Uso de multimídia;
- Aplicativo Power Point;
- Quadro-giz.

Estratégia:

- Utilizar o Power Point para exposição da teoria;
- Aplicar a teoria na resolução de exemplos;
- Incentivar os alunos a resolverem atividades no quadro.

Atividades Aplicadas ao Conteúdo:

1. Dê uma equação do 3° grau cujas raízes são 1, 2 e 3.

2. Determine o polinômio $P(x)$ do 3° grau cujas raízes são 0, 1 e 2, sabendo que $P\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$.

3. Resolver a equação $x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x - 2 = 0$, sabendo que uma de suas raízes é $1 + i$.

4. Calcular a soma e o produto das raízes das seguintes equações definidas em $\mathbb{C}$

a) $x^3 - 2x^2 + 7x - 6 = 0$;

b) $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 2x - 8 = 0$.

5. Resolva a equação $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$, sabendo que uma raiz é igual à soma das outras duas.

6. Resolva a equação $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$, sabendo que as raízes estão em P.A.

7. Mostrar que o número $\sqrt[3]{2 + \sqrt{5}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{5}}$ é inteiro.

7 Considerações Finais

O objetivo principal deste trabalho é demonstrar o Teorema Fundamental da Álgebra, que é apresentado de forma axiomática no Ensino Médio. A demonstração do mesmo é pouco conhecida pelos docentes, que tem por desafio realizá-la com os discentes. Evidentimente que alguns fundamentos utilizados na demonstração requerem algo a mais do que é contemplado nos conteúdos do Ensino Médio.

Algo motivador nessa proposta é o caminho percorrido para a sua demonstração, que passa pelo Conjunto dos Números Complexos com seu contexto histórico belíssimo, mostrando aos alunos que a Matemática não é um ciência "divinamente inspirada" e que alguém (matemático), em um sonho recebe todo o conteúdo pronto e acabado; acreditamos que esta visão da Matemática, entre outros fatores tem somado para o afastamento do nosso aluno da mesma. O caminho construído por esta proposta, visa dirimir essa visão, bem como, enriquecer a abordagem do Conjunto dos Números Complexos e sua aplicação na Geometria e Trigonometria, assuntos pouco explorados e até mesmo omitidos no Ensino Médio por alguns docentes, segundo eles pela falta de aplicação.

Na busca de uma abordagem acessível aos alunos, mas com rigor exigido pela linguagem matemática, buscamos fazer uma experiência em janeiro de 2014, com quatro professores do Colégio Estadual José Ludovico de Almeida, que lecionam no Ensino Médio desta instituição. Tivemos a oportunidade de apresentar um ensaio desta proposta de ensino dos Números Complexos e o Teorema Fundamental da Álgebra. Com o objetivo de sondá-los quanto ao nível destes assuntos para os alunos, durante a ministração, analisamos a reação e como se comportavam as inferências do ministrante, das dúvidas que iam surgindo; daí veio a proposta de não se ater somente aos alunos, mas estendê-la aos professores na forma de uma Formação Continuada.

Encerramos este trabalho propondo as atividades distribuídas em aulas no formato de seis encontros, conforme descritas na Seção 6.

Referências

[1] Carmo, M.P., *Trigonometria Números Complexos*, 3ª ed. Rio de Janeiro. SBM, 2005. pp.91-106, 149-156.

[2] Berlinghoff, W.P., *Math though the ages: a gentle history for teachers and others.* Tradução Elza Gomide, Helena Castro. 1ª ed. São Paulo: Blucher, 2010.

[3] Iezzi, G., *Fundamentos da Matemática Elementar vol.6* 6ª ed. São Paulo: Atual, 1993, pp.1-47, 118-121.

[4] Lima, E. L., *A matemática do ensino médio vol. 3*, 6ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. pp.160-176,198-199,218-233.

[5] D'ambrósio, U., *Educação matemática: Da teoria à prática* 19 ed. Campinas SP: Papirus, 1996. pp.29-30.

[6] Boyer C., *História da matemática*, 2 ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2003. pp 193-198,345.

[7] Guidorizzi, L.H., *Um Curso de Cálculo vol.1*, 5 ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001. pp 513-514.

[8] Neri,C., *Curso de Análise Real*, 2 ed. Rio de Janeiro: UFRJ, 2011. pp 57-58.

[9] Lima, E. L., *Números e Funções Reais*, 1 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

[10] GeoGebra, *Dynamic mathematics e science for learning and teaching*, versão 4.4. Austria: Instituto Internacional Geogebra, 2001. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 01 jul. 2014.