



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

VLADIERE SOUSA TORRES OLIVEIRA

USO DO GEOGEBRA PARA MOTIVAR ESTUDO DE PROBLEMAS DE MÍNIMOS
GEOMÉTRICOS ATRAVÉS DE SIMETRIAS

FORTALEZA

2014

VLADIERE SOUSA TORRES OLIVEIRA

USO DO GEOGEBRA PARA MOTIVAR ESTUDO DE PROBLEMAS DE MÍNIMOS
GEOMÉTRICOS ATRAVÉS DE SIMETRIAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador: Prof. Dr. José Robério Rogério

FORTALEZA

2014

VLADIERE SOUSA TORRES OLIVEIRA

USO DO GEOGEBRA PARA MOTIVAR ESTUDO DE PROBLEMAS DE
MÍNIMOS GEOMÉTRICOS ATRAVÉS DE SIMETRIAS

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 27 / 06 / 2014.

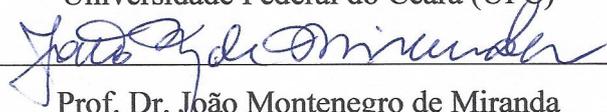
BANCA EXAMINADORA


Prof. Dr. José Robério Rogério (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo

Universidade Federal do Ceará (UFC)


Prof. Dr. João Montenegro de Miranda

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

O52u Oliveira, Vladiere Sousa Torres
Uso do GeoGebra para motivar estudo de problemas de mínimos geométricos através de simetria /
Vladiere Sousa Torres Oliveira. – 2014.
39 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de
Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Fortaleza, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Dr. José Robério Rogério.

1. Software GeoGebra. 2. Problema de Fermat. 3. Problema de Heron. I. Título.

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre incentivaram e valorizam todos os esforços no sentido de obter uma educação de qualidade e que pudesse ser relevante como forma de intervenção no mundo, servindo de exemplos de dedicação, respeito e honra na busca pelos objetivos.

AGRADECIMENTOS

Aos amigos, Thaisa Aluani, Pedro Ernesto Maçaranduba, Ketrine Salvador, Nicolau, Kaio Sales e Lisiane que foram fundamentais para a conclusão de minha graduação, fornecendo apoio e carinho nos momentos de dificuldade.

Aos amigos, Tiago Aduino Melo Noronha Tavares, Francisco Edilberto Menezes Neto, Telma Regilda Maia, Aristóteles Pinheiro e Rafael Oliveira por terem tornado o ambiente de trabalho mais agradável e divertido.

À minha família, Antonio Severino de Oliveira, Marleide Sousa Torres Oliveira, Vladiana Sousa Torres Oliveira e Rayssa Sousa Marques, pelo amor enviado a mim mesmo à distância.

Aos colegas do PROFMAT, por dividirem os anseios e tornarem as aulas e o estudo momentos prazerosos e confortáveis.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFC, em especial aqueles que ministraram as disciplinas do PROFMAT.

Ao Prof. Dr. Marcelo Ferreira de Melo, pela prontidão em atender às solicitações.

Ao Prof. Dr. José Robério Rogério, pela generosidade de dedicar seu tempo à orientação do presente trabalho.

Ao Prof. Dr. João Montenegro de Miranda, pela apreciação e sugestões dadas à esse trabalho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

À meu companheiro Edie Marinho, pela compreensão e pelo incentivo em todos os momentos.

RESUMO

O presente trabalho tem por objetivo motivar os estudantes a se interessarem por problemas de mínimos geométricos, em especial relacionados à simetrias, através do uso do software educacional Geogebra. Fornecendo um guia de atividades que podem ser aplicadas em sala de aula. Trata do Problema de Heron e do Problema de Fermat, apresentando suas respectivas resoluções e algumas variações interessantes.

Palavras-chave: Geogebra. Simetria. Mínimos Geométricos. Heron. Fermat. Steiner.

ABSTRACT

This paper has the objective of motivate the students to interest for problems of geometric minimuns, specially those related to symmetry, using the educational software Geogebra. Providing a guide of activities that can be used in classes. Treats about Heron's Problem and Fermat's Problem, presenting the resolutions and same interesting variations.

Key-words: Geogebra. Symmetry. Geometrical Minimmuns. Heron. Fermat. Steiner.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1 – Problema de Heron	10
Figura 2 – Sinuca	11
Figura 3 – Existência de solução para o problema de Heron	12
Figura 4 – simétricos.....	13
Figura 5 – resolução do Problema de Heron.....	14
Figura 6 – ângulos de incidência e reflexão.....	14
Figura 7 – resolução do exemplo da sinuca.....	15
Figura 8 – outra sinuca.....	16
Figura 9 – problema de Heron com duas retas.....	16
Figura 10– resolução do Problema de Heron com duas retas.....	17
Figura 11– resolução do Problema de Heron com duas retas.....	18
Figura 12– resolução da sinuca.....	18
Figura 13– outra resolução para o Problema de Heron com duas retas.....	19
Figura 14– outra resolução para o Problema de Heron com duas retas.....	19
Figura 15– AO é bissetriz de $\widehat{A}''\widehat{O}A1''$	20
Figura 16– Problema de Fermat com A, B e C colineares.....	22
Figura 17– Problema de Fermat com A, B e C não-colineares.....	22
Figura 18– Problema de Fermat com A, B e C não-colineares.....	22
Figura 19– construção de Torricelli.....	23
Figura 20– ponto de Fermat.....	24
Figura 21– o prolongamento de C'C intersecta PB.....	25
Figura 22– o prolongamento de C'C intersecta PA.....	26
Figura 23– triângulos equiláteros sobre os lados de ABC.....	26
Figura 24– circuncírculos.....	27
Figura 25– A, B e C, pés das perpendiculares de P aos lados de XYZ.....	28
Figura 26– A', B' e C', pés das perpendiculares de P' aos lados de XYZ.....	29
Figura 27– possíveis configurações para o Problema de Steiner.....	30
Figura 28– simetria aplicada na resolução do Problema de Steiner.....	30
Figura 29– possíveis soluções para o Problema de Heron.....	33

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	8
2	O PROBLEMA DE HERON	10
2.1	O problema	10
2.2	Variações do problema de Heron	16
3	O PROBLEMA DE FERMAT	21
3.1	O problema	21
3.2	Variações do problema de Fermat	26
4	GEOGEBRA	32
4.1	Introdução ao software	32
4.2	Projetos	33
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS	39
	REFERÊNCIAS	40

1 INTRODUÇÃO

O seguinte trabalho une dois objetivos distintos e complementares, o de debruçar o olhar sobre a utilização da simetria na resolução de situações-problema, tema muitas vezes pouco explorado durante a educação básica, e o de utilizar um objeto de aprendizagem que possibilita a interação dos educandos com o mundo da informática e com conteúdos matemáticos de forma dinâmica, o software educacional Geogebra.

Muito embora a simetria seja um dos conteúdos cobrados em diversas avaliações externas, como SPAECE e ENEM, sua potencialidade na resolução de problemas diversos é pouco explorada em sala de aula, talvez por seu caráter intuitivo, que possibilita ao professor fazer comentários e muitas vezes responder a uma questão proposta de maneira simplória e pouco rigorosa, mas ao mesmo tempo bem aceita pelos estudantes por conta da autoexplicação visual que na maioria das vezes estas questões apresentam. A proposta deste trabalho não é fugir da beleza e simplicidade que a simetria pode representar num problema, mas sim utilizá-la para motivar respostas gerais e rigorosas a dois problemas clássicos, o Problema de Heron e o Problema de Fermat, além de utilizar os resultados desses problemas para resolver outras situações.

Com a utilização do software educacional Geogebra é possível visualizar diversas propriedades geométricas de forma dinâmica, facilitando a formulação de hipóteses para resolver os problemas propostos. Esta abordagem foi escolhida com base no perfil dos estudantes ingressantes no Ensino Médio quanto ao uso de computadores dentro do ambiente escolar, que mostrou subutilização desse equipamento durante o ensino fundamental. Uma pesquisa feita com cento e trinta e três estudantes ingressantes no primeiro ano do ensino médio em 2012 na Escola Estadual de Educação Profissional José Maria Falcão, em Pacajus, mostrou que 55,9% dos ingressantes não têm acesso a computadores em sua residência, o que não impede que busquem outros meios de acessá-lo – apenas 7,5% dos estudantes não tem acesso de nenhuma forma.

Outra informação relevante é referente aos usos que são feitos do computador: 75,2% dos entrevistados acessa rede sociais, 51,9% usa o computador com fins recreativos (jogos), 70% utiliza editores de texto – provavelmente para edição de trabalhos escolares - e apenas 10% utiliza planilhas eletrônicas.

Essa pesquisa também tinha o intuito de diagnosticar como tinha sido o emprego

do computador e de softwares educativos durante a vida escolar prévia desses estudantes. Os dados coletados são a principal justificativa para a utilização do software, pois quase metade dos estudantes afirmou que nas suas escolas de origem não havia sequer laboratório de informática e, onde havia, o uso do mesmo por professores de matemática com uso de softwares educativos foi ínfimo, apenas 6,7%.

É com essa realidade que esse trabalho inicia e faz-se necessário. O trabalho se organiza em apresentar os problemas supracitados e suas resoluções e propor atividades para serem realizadas no Geogebra a fim de obter pistas para essas respostas e motivar os estudantes a se interessarem pela resolução completa e rigorosa matematicamente, além de apresentar outras situações onde os resultados podem ser utilizados.

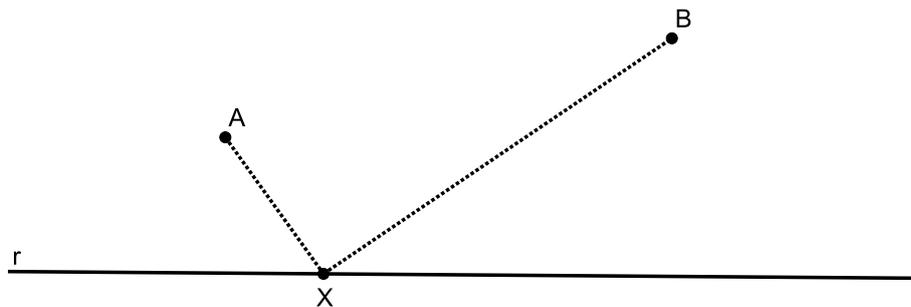
2 O PROBLEMA DE HERON

Nesse capítulo conheceremos o primeiro problema, cuja solução é atribuída a Heron de Alexandria. Heron viveu entre 150 a.C. e 250 d.C. e sua obra principal é *A Métrica*, escrita em três livros e só descoberta em 1896. Nessa obra encontra-se um dos resultados mais famosos creditados a ele que é a fórmula de determinação da área de um triângulo dados seus três lados, mas é um resultado envolvendo reflexão que abordaremos nesse trabalho.

2.1 O problema

Dados uma reta r e dois pontos A e B , com A e B num mesmo semi-plano determinado por r , deseja-se encontrar um ponto X pertencente a r tal que a distância $AX + XB$ seja mínima, ou seja, queremos o menor caminho de A para B passando por um ponto de r . A situação do problema está representada na Figura 1.

Figura 1: Problema de Heron



Este problema pode ser apresentado de diferentes formas aos estudantes, vejamos algumas possibilidades:

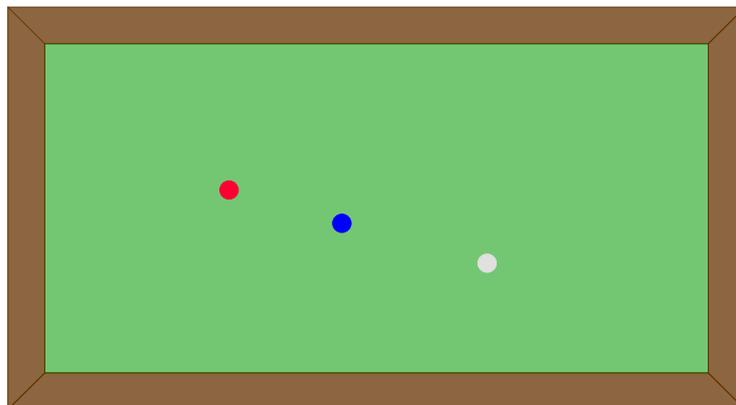
Exemplo 1. *A organização da natureza ocorre de maneira ótima, ou seja, os fenômenos naturais encontram equilíbrio de forma muito econômica, sempre minimizando a quantidade de energia gasta e encontrando os melhores caminhos. Este é um princípio apresentado por Aristóteles e observado em um sem número de fenômenos. Sendo assim não é*

de se estranhar que a luz emitida por uma fonte luminosa e que chega aos nossos olhos após ser refletida por alguma superfície percorra a menor distância possível nesse trajeto. Observando novamente a Figura 1, seja o ponto A esta fonte luminosa, o ponto B o olho do observador e a reta r a superfície refletora, queremos então encontrar o ponto $X \in r$ em que o raio de luz que chega ao olho do observador é refletido.

Exemplo 2. Um caminhão pipa, ponto A , se encontra dentro de um terreno em que passa um rio, reta r , e precisa levar uma carrada d'água a um reservatório, ponto B . Qual o menor caminho que esse caminhão deve percorrer partindo de A , passando pelo rio r e chegando à B ?

Exemplo 3. Num jogo de sinuca encontramos a situação representada pela Figura 2, onde a bola branca deve atingir a bola vermelha sem tocar a bola azul. Nesse caso, como a bola azul está na trajetória que uniria diretamente as bolas branca e vermelha, a solução se dá através de uma tacada que faça a bola branca rebater na borda da mesa e depois tocar a bola vermelha. O problema se encontra então em determinar o ponto da borda em que a bola branca deve rebater. Nesse caso a trajetória mínima não é requisito para resolver a situação, mas a solução que apresentaremos será interessante por sua engenhosidade simples e prática.

Figura 2: Sinuca



Estes três problemas são situações modeladas pelo Problema de Heron supracitado, logo para resolvê-las basta observar a resolução do Problema de Heron.

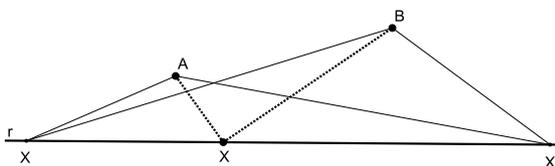
Primeiramente vamos discutir a existência de tal ponto, para tal utilizaremos uma aplicação do Teorema de Weierstrass:

Teorema 1 (Weierstrass). *Seja f uma função contínua definida num intervalo fechado $[a, b]$. Então f é limitada e assume um máximo e um mínimo em $[a, b]$.*

Corolário 2. *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua tal que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. Então f assume um mínimo absoluto para algum x real.*

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ temos que dado $\delta = f(0)$, existem $a < 0 < b$ onde, se $x < a$ ou se $x > b$ então $f(x) > \delta$. Considere então o intervalo $[a, b]$. Como f é contínua temos, pelo Teorema de Weierstrass, que f atinge um mínimo em um ponto $x_0 \in [a, b]$. Então $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. Em particular como $0 \in [a, b]$, $f(x_0) \leq f(0)$. Como $f(0) < f(x)$ se $x \in \mathbb{R} - [a, b]$ segue-se que $f(x_0) \leq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, x_0 é mínimo absoluto de f .

Figura 3: existência de solução para o Problema de Heron



Observando os resultados percebemos que o Problema de Heron admite solução pois, tomando $S(X) = AX + XB$, uma função contínua definida no conjunto dos números reais, caso o ponto X se encontrasse “infinitamente à direita” na reta r então $S(X)$ seria muito grande, ou seja, $\lim_{X \rightarrow +\infty} S(X) = +\infty$. Ao deslocar esse ponto X para a esquerda a soma $AX + XB$ diminui continuamente depois se torna muito grande novamente quando X está “infinitamente à esquerda” na reta r , ou seja $\lim_{X \rightarrow -\infty} S(X) = +\infty$. Portanto $S(X)$ atende às condições do Corolário 2.2 e atinge ponto de mínimo absoluto.

A chave para a resolução do problema é observar a simetria que ele apresenta, pois, resolvê-lo para os pontos A e B é equivalente a resolvê-lo para os pontos A' e B' ,

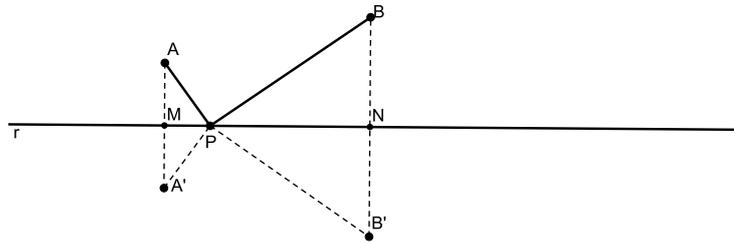
simétricos dos pontos A e B em relação à reta r . Vamos mostrar a equivalência das resoluções incluindo primeiramente um ponto P genérico e depois chegaremos à conclusão de qual deve ser este ponto.

Incluindo na Figura 1 os pontos A' e B', simétricos de A e B respectivamente em relação à reta r e os pontos M e N que são as intersecções da reta r com os segmentos AA' e BB' respectivamente obtemos a Figura 4.

Nesta figura temos que $AM = A'M$, $BN = B'N$, $AP = A'P$ e $BP = B'P$ por conta da propriedade principal da simetria que é a de preservar distâncias. Assim sendo, minimizar o valor de $AP + PB$ é equivalente a minimizar $A'P + PB'$.

A congruência entre os segmentos apresentados mostra que o problema de encontrar o menor caminho entre A e B passando por r é equivalente a encontrar o menor caminho entre A e B', já que $PB = PB'$.

Figura 4: simétricos

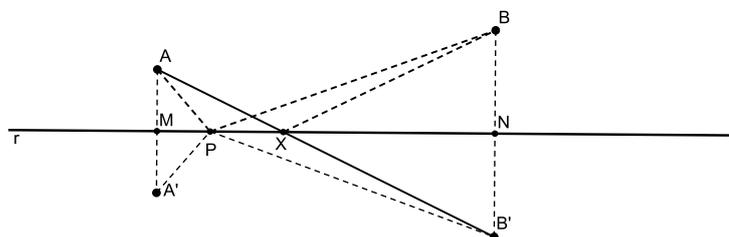


Portanto, $AP + PB = AP + PB'$, o que torna o problema mais simples pois a menor distância entre os pontos A e B' é justamente o comprimento do segmento AB', que cruza a reta r em algum ponto já que A e B' estão em semi-planos opostos em relação à r . Então o ponto que estávamos procurando será justamente o ponto de intersecção do segmento AB' com a reta r . Seja X este ponto.

O fato de que o ponto X é o ponto procurado se dá por conta da desigualdade triangular. Para qualquer ponto genérico P sobre r , aplicando a desigualdade triangular no triângulo AB'P da Figura 5, temos que $AB' < AP + PB' = AP + PB$, mas $AB' = AX + XB' = AX + XB$, então $AX + XB < AP + PB$ para qualquer $P \neq X$.

Pois bem, com o problema de Heron solucionado voltemos aos exemplos para nos concentrarmos em outros aspectos da solução. No Exemplo 1 observaremos o que ocorre

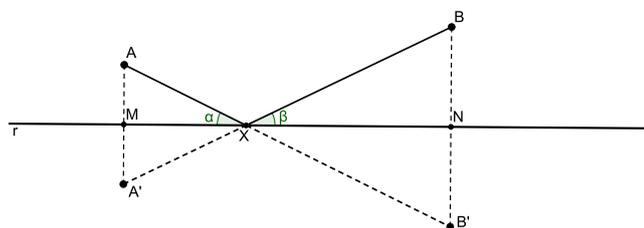
Figura 5: resolução do Problema de Heron



com os ângulos de incidência e reflexão da luz; no Exemplo 2 vamos determinar a posição do ponto X em função das distâncias entre os pontos A e B e a reta r ; no Exemplo 3, além de uma solução prática interessante também apresentaremos uma extensão do problema de Heron.

Na Figura 6, α é o ângulo de incidência da luz e β é o ângulo de reflexão. Note que

Figura 6: ângulos de incidência e reflexão



α e $\widehat{B'XN}$ são ângulos opostos pelo vértice, logo tem mesma medida, e que os triângulos BXN e $B'XN$ são congruentes pois $BN = B'N$ e $BX = B'X$ por conta da simetria e XN é comum. Daí $\alpha = \widehat{AXM} = \widehat{B'XN} = \widehat{BXN} = \beta$, então os ângulos de incidência e reflexão são da luz são congruentes. O interessante deste resultado é que a solução do problema de Heron pode agora ser abordado de outra forma, procurando-se o ponto X que deixa os ângulos de incidência e reflexão com a mesma medida.

Voltando ao Exemplo 2, para localizar o ponto no rio onde devemos pegar água, basta observarmos a semelhança entre os triângulos AXM e BXN , a semelhança decorre

de $\widehat{MX} = \widehat{NX}$, ambos retos, e de $\widehat{XM} = \widehat{XN}$. Daí temos

$$\frac{NX}{MX} = \frac{BN}{AM} \quad (1)$$

adicionando 1 em cada um dos lados da equação (1), temos

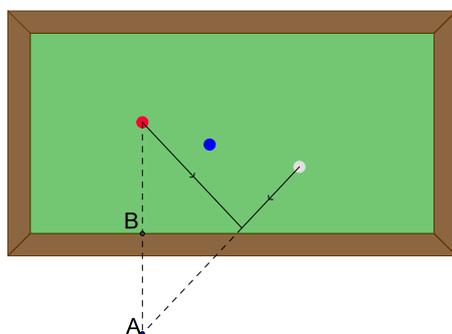
$$\begin{aligned} \frac{NX}{MX} + 1 &= \frac{BN}{AM} + 1 \Rightarrow \frac{MX + NX}{MX} = \frac{AM + BN}{AM} \Rightarrow \frac{MN}{MX} = \frac{AM + BN}{AM} \\ \frac{MX}{MN} &= \frac{AM}{AM + BN} \end{aligned} \quad (2)$$

que permite encontrar o ponto X.

O Exemplo 3 foi apresentada por *Magossi*[?]. Nessa edição da revista, o artigo apresenta a seguinte solução:

(...)o jogador precisava acertar a bola vermelha, mas não podia bater na bola azul. Para ajudar, um amigo do jogador adotou a estratégia: mediu, com um outro taco, colocado apoiado na direção perpendicular à borda da mesa, como na Figura 7, a distância d da bola vermelha até o ponto B, na borda da mesa. Marcou nesse taco o ponto A tal que a distância BA vale d. Disse ao jogador para mirar no ponto A e bater na bola branca.

Figura 7: resolução do exemplo da sinuca

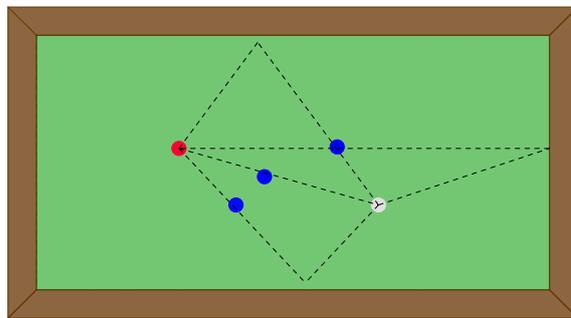


Este é um belo exemplo de como um conhecimento matemático se aplica no cotidiano, agora vejamos o que ocorre quando deixamos o problema um pouco mais complexo.

2.2 Variações do Problema de Heron

Exemplo 4. *Analizando agora a situação representada na Figura 8, temos uma bola vermelha e três bolas azuis. Nesse caso, tanto a tacada direta como as possíveis trajetórias desviando em uma das paredes estão bloqueadas, mas um bom jogador de sinuca logo observa que é possível fazer uma tacada rebatendo em duas das paredes da mesa.*

Figura 8: outra sinuca

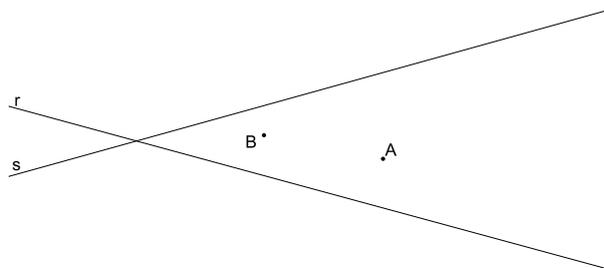


Nosso problema agora está um pouco mais complexo, vamos enuncia-lo de forma genérica e depois voltar para a situação da mesa de sinuca.

Sejam duas retas r e s e dois pontos A e B como na Figura 9. O problema agora consiste em encontrar o menor caminho de A para B passando pelas duas retas.

Para resolvê-lo vamos aplicar a ideia do Problema de Heron, refletindo o ponto

Figura 9: problema de Heron com duas retas



A em relação à reta r e refletindo o ponto B em relação à reta s encontramos os pontos

A' e B' respectivamente simétricos. Sejam P em r e Q em s pontos genéricos, queremos então os pontos $X \in r$ e $Y \in s$ tal que $AX + XY + YB \leq AP + PQ + QB$. Vamos tomar os pontos X e Y como os pontos de intersecção do segmento $A'B'$ com as retas r e s respectivamente.

Ora, seja R o ponto de intersecção dos segmentos PQ e XY . No triângulo $A'PR$ temos que $A'R < A'P + PR$, já no triângulo $B'QR$ temos que $B'R < B'Q + QR$, então

$$A'R + B'R < A'P + PR + B'Q + QR, \quad (3)$$

mas $A'R = A'X + XR = AX + XR$ e $B'R = B'Y + YR = BY + YR$, daí temos a equação (3) como segue

$$AX + XR + BY + YR < A'P + PR + B'Q + QR$$

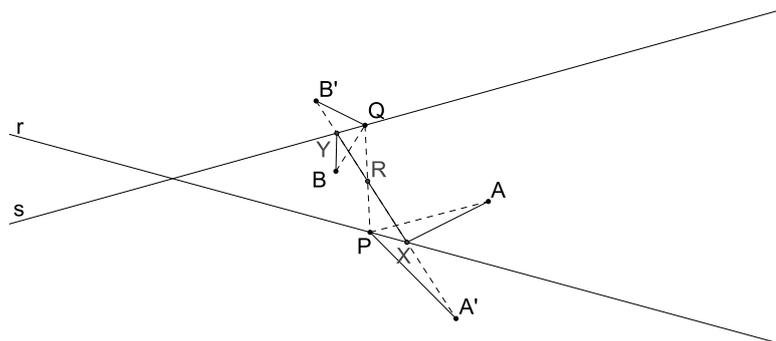
↓

$$AX + XY + YB < AP + PQ + QB \quad (4)$$

Como podemos observar na Figura 10.

Caso os segmentos XY e QP não se intersectem o resultado ocorre diretamente pela

Figura 10: resolução do Problema de Heron com duas retas



desigualdade triangular no triângulo $A'QB'$ (Figura 11).

$$A'B' = AX + XY + YB < A'Q + QB' \leq AP + PQ + QB$$

Voltando para a situação da mesa de sinuca a saída encontrada pelo jogador seria como a da Figura 12. Note que na resolução do problema poderíamos ter encontrado um

Figura 11: resolução do Problema de Heron com duas retas

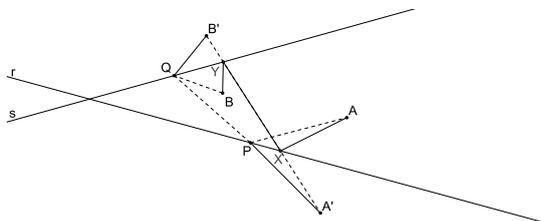
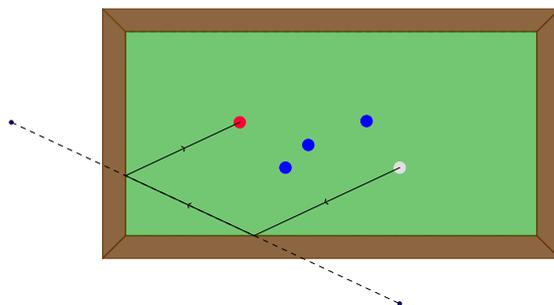


Figura 12: resolução da sinuca



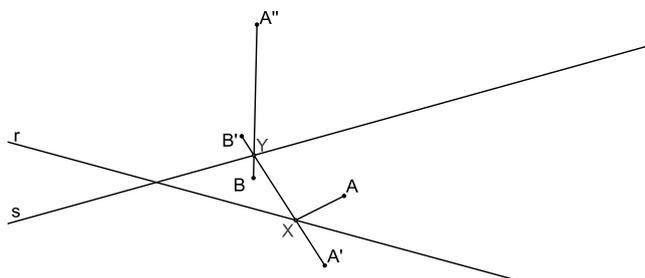
segundo caminho, saindo de A, tocando primeiramente a reta s , depois a reta r e chegando a B. Vamos agora discutir qual é realmente o menor caminho. Mas antes analisaremos o seguinte problema:

Exemplo 5. *Seja A' a reflexão de A em relação à reta r e seja A'' a reflexão de A' em relação à reta s . Mostre que Y pode ainda ser determinado como o ponto de intersecção do segmento $A''B$ com a reta s e, em seguida, X obtém-se como o ponto de intersecção de $A'Y$ com r .*

Conseguindo os pontos X e Y como descrito no exemplo 5 temos que $A''Y = A'Y$, $BY = B'Y$ e $A'X = AX$. Daí temos que $A''B = A''Y + YB = A'Y + YB' = A'B'$ então os pontos X e Y encontrados dessa forma são os mesmos encontrados anteriormente.

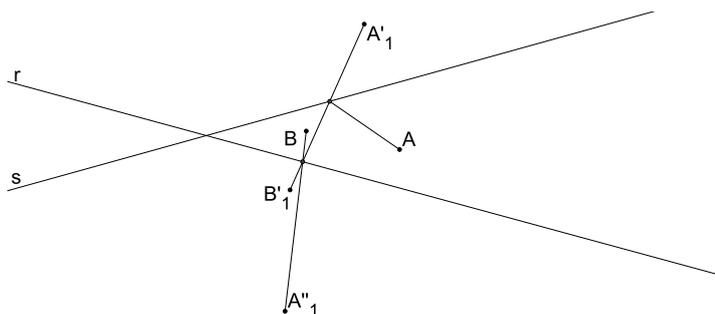
Agora utilizaremos a solução do Exemplo 5 para discutir qual é realmente o menor caminho que soluciona o problema com duas retas, pois poderíamos ter utilizado a mesma ideia para encontrar o ponto X em s e o ponto Y em r . Nosso problema agora então é saber qual dos segmentos $A''B$ ou $A_1''B$ é menor.

Figura 13: outra resolução para o Problema de Heron com duas retas



Sendo as retas r e s concorrentes, vamos chamar o ponto de intersecção das retas

Figura 14: outra resolução para o Problema de Heron com duas retas



de O . Pela simetria entre o ponto A e suas reflexões temos que a reta r é bissetriz de $A\hat{O}A'$ e de $A_1\hat{O}A_1''$, daí $A'\hat{O}A_1'' = A\hat{O}A_1'$; e que a reta s é bissetriz de $A\hat{O}A_1'$ e de $A'\hat{O}A''$, daí $A'\hat{O}A = A_1'\hat{O}A''$. Logo

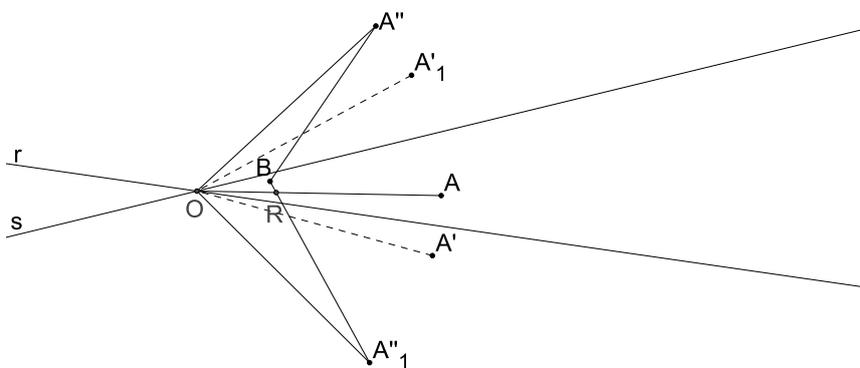
$$A\hat{O}A_1'' = A\hat{O}A' + A'\hat{O}A_1'' = A_1'\hat{O}A'' + A\hat{O}A_1' = A\hat{O}A''$$

ou seja, AO é bissetriz de $A''\hat{O}A_1''$ (Figura 15).

Se o ponto B estiver entre AO e s , então BA_1'' cruza AO em algum ponto, seja R este ponto, note que $RA'' = RA_1''$ pois R pertence à bissetriz de $A''\hat{O}A_1''$. Observe que $BA_1'' = BR + RA_1'' = BR + RA'' > BA''$ pela desigualdade triangular no triângulo BRA'' , daí o menor caminho será BA'' (Figura 15).

Analogamente, se B estiver entre AO e r , então o menor caminho será BA_1'' e se B estiver na reta AO então teremos duas soluções para o problema.

Figura 15: AO é bissetriz de $A''\hat{O}A'_1$



3 O PROBLEMA DE FERMAT

Outro problema interessante e com muitas ramificações é um problema proposto por Fermat a Torricelli, que consiste também em minimizar distâncias, como o Problema de Heron, só que agora envolvendo pontos no plano. O Problema de Fermat é assim conhecido para o caso com três pontos, o caso geral também é conhecido como Problema de Steiner onde é generalizado para um conjunto arbitrário de pontos.

3.1 O problema

Dados três pontos, A, B e C, encontrar um ponto P para o qual $PA + PB + PC$ seja mínimo.

Para mostrar que tal ponto existe vamos usar uma generalização do Teorema de Weierstrass:

Teorema 3. *Seja $f:D \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, onde $D \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado limitado. Então f atinge um máximo e um mínimo em D*

Podemos supor P pertencente ao círculo com centro em A e raio $AB + BC$. Daí a função $S(P) = PA + PB + PC$ é uma função contínua com domínio sendo um conjunto fechado limitado, o que, pelo teorema acima, implica a existência de máximo e mínimo dessa função.

Se A, B e C são colineares, como na Figura 16, com B entre A e C por exemplo, é simples concluir que P coincide com o ponto B pois, para qualquer P' fora da reta que contém A, B e C, temos $AB + BC = AC < AP' + P'C < P'A + P'B + P'C$ pela desigualdade triangular.

Se A, B e C forem não-colineares, eles formam um triângulo. Vamos agora discutir as possíveis posições do ponto P para concluir que este deve ser um ponto do triângulo, ou seja, um ponto de sua borda ou de seu interior.

Fazendo o prolongamento dos lados do triângulo ABC temos três retas que dividem o exterior do triângulo em seis regiões. Seja o ponto P' em uma dessas regiões, como na Figura 17.

Seja D o ponto de intersecção do segmento AP' com a reta BC. Vamos mostrar que P'

Figura 16: Problema de Fermat com A, B e C colineares

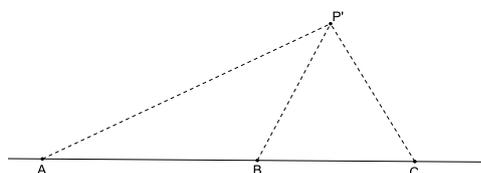
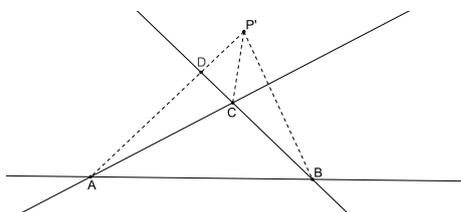


Figura 17: Problema de Fermat com A, B e C não-colineares



não é o ponto que minimiza a função S , de fato

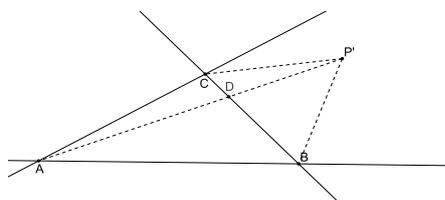
$$\begin{aligned} S(P') &= P'A + P'B + P'C > P'A + P'B = AD + DP' + P'B \\ &\geq AD + DB \geq AC + CB = S(C). \end{aligned}$$

Logo o mínimo de S não é atingido em P' . Vamos observar outra possível configuração do problema para concluir que o ponto P não pertence ao exterior do triângulo ABC .

Observe a Figura 18. Seja D a intersecção do segmento $P'A$ com o lado BC .

Neste caso temos

Figura 18: Problema de Fermat com A, B e C não-colineares



$$S(P) = P'A + P'B + P'C > P'A + BC > DA + DB + DC = S(D).$$

Mais uma vez encontramos um ponto do triângulo ABC cuja somatória das distâncias aos pontos A, B e C é menor que a do ponto P'. Para P' em alguma das outras quatro regiões as demonstrações são análogas aos dois casos apresentados acima. Logo o ponto P procurado não pertence ao exterior do triângulo ABC.

Agora sabemos que o ponto P pertence ao triângulo ABC, ou seja, está em seu interior ou em sua fronteira. Vamos apresentar uma construção atribuída à Torricelli que permite encontrar tal ponto.

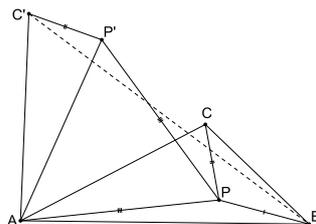
Seja P um ponto do triângulo ABC. Tome-se os pontos P' e C' obtidos por uma rotação de ângulo $\pi/3$ com centro em A. Como $AP = AP'$ e $\widehat{PAP'} = \pi/3$ temos que o triângulo APP' é equilátero, com $AP = PP'$. Analogamente o triângulo ACC' também é equilátero. Além disso, $PC = P'C'$ já que P'C' é imagem de PC por uma rotação.

Daí,

$$S(P) = PB + PA + PC = BP + PP' + P'C' \geq BC' \quad (5)$$

Temos então um candidato a valor mínimo para S(P): o comprimento BC'. Resta agora encontrar um ponto P tal que $S(P) = BC'$. Para que BC' intersecte o lado AC do

Figura 19: construção de Torricelli



triângulo ABC deve-se ter $\widehat{BAC'}$ e $\widehat{BC'C'}$ menores que π , daí

$$\widehat{BAC'} = \widehat{BAC} + \widehat{CAC'} < \pi \Rightarrow \widehat{BAC} + \pi/3 < \pi \Rightarrow \widehat{BAC} < 2\pi/3.$$

e, analogamente, $\widehat{BC'C'} < 2\pi/3$. Feita esta observação, faremos nosso estudo em dois casos, primeiramente onde todos os ângulos internos do triângulo ABC são menores que $2\pi/3$ e posteriormente onde algum desses ângulos é igual ou maior que $2\pi/3$

Pois bem, buscamos um ponto P para o qual $S(P) = BC'$, para tal é necessário e suficiente termos P e P' pertencentes ao segmento BC'. Para que isso ocorra devemos ter

$$\begin{cases} C'\hat{P}'A + A\hat{P}'P = \pi & (6) \\ P'\hat{P}A + A\hat{P}B = \pi & (7) \end{cases}$$

Lembrando que o triângulo APP' é equilátero e que $C'\hat{P}'A = C\hat{P}A$, (6) e (7) ficam como segue

$$\begin{cases} C'\hat{P}'A + A\hat{P}'P = C\hat{P}A + \pi/3 = \pi \Rightarrow C\hat{P}A = 2\pi/3 & (8) \\ P'\hat{P}A + A\hat{P}B = \pi/3 + A\hat{P}B = \pi \rightarrow A\hat{P}B = 2\pi/3 & (9) \end{cases}$$

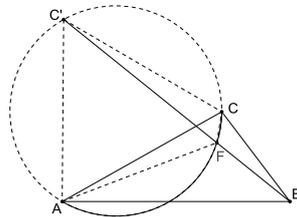
De (7) e (8), temos que $B\hat{P}C = 2\pi/3$. Neste caso o ponto $P = A, B$ ou C não pode ocorrer, pois algum dos ângulos internos do triângulo ABC teria de ser igual a $2\pi/3$, o que contradiz a hipótese.

Podemos então concluir que $S(P) = BC'$ é obtido quando o ponto P é tal que $A\hat{P}B = B\hat{P}C = C\hat{P}A = 2\pi/3$. Queremos agora encontrar tal ponto.

Vamos retomar a construção de Torricelli. Tomemos o circuncírculo do triângulo ACC', em especial o arco menor \widehat{AC} , entre A e C. Como o triângulo ACC' é equilátero, o segmento AC determina um ângulo de $2\pi/3$ com vértice em qualquer dos pontos de \widehat{AC} . Observe a Figura 20.

Como $A\hat{B}C$ é menor que $2\pi/3$, B é exterior à região limitada por \widehat{AC} e pelo

Figura 20: ponto de Fermat



segmento AC, dessa forma BC' intersecta \widehat{AC} em algum ponto seja F este ponto.

Por construção, $C\hat{F}A = 2\pi/3$ e, como $C'\hat{F}A$ e $C'\hat{C}A$ estão inscritos na mesma circunferência e delimitam o mesmo arco \widehat{AC}' então $C'\hat{F}A = C'\hat{C}A = \pi/3$. Daí $A\hat{F}B =$

$$\pi - \hat{CFA} = 2\pi/3 \text{ e}$$

$$\hat{CFA} = \hat{AFB} = 2\pi/3 \Rightarrow \hat{BFC} = 2\pi/3.$$

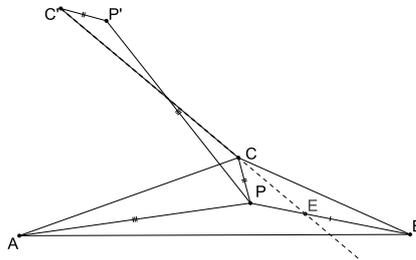
Ou seja, o ponto F atende ao requisito para ser solução do problema de Fermat e ele recebe então o nome de ponto de Fermat.

Analisaremos agora o segundo caso, em que um dos ângulos do triângulo ABC é igual ou maior a $2\pi/3$. Vamos supor que \hat{ACB} seja este ângulo. Mostraremos que o ponto C é a solução do Problema de Fermat.

Retomando mais uma vez a construção de Torricelli, mas desta vez com as condições do segundo caso. Seja P um ponto do triângulo ABC, sendo $P \neq C$. Vamos observar o prolongamento do segmento C'C e observar que o mesmo pode ou não intersectar o segmento PB.

Supondo que o prolongamento de C'C intersecte PB num ponto E, como na Figura 21, temos:

Figura 21: o prolongamento de C'C intersecta PB



$$\begin{aligned} S(P) &= CP + AP + PB = C'P' + P'P + PE + EB \\ &> C'E + EB \quad (P \neq C) \\ &= C'C + CE + EB \geq C'C + CB \\ &= AC + CB = S(C) \end{aligned}$$

Logo $S(C)$ é o mínimo procurado.

Quando o prolongamento de C'C não intersecta PB, ele intersecta PA, seja E novamente este ponto de intersecção. Note que, por construção, $\hat{ACE} = 2\pi/3$ e que

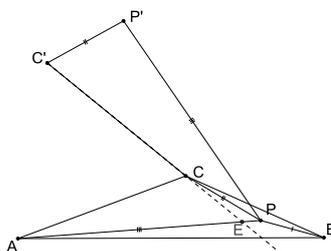
$\hat{A}PC < \pi/3$, daí $\hat{A}CE = 2\pi/3 \Rightarrow \hat{A}CP > 2\pi/3 \Rightarrow \hat{A}CP > \hat{A}PC \Rightarrow AP > AC$, então

$$S(P) = AP + PB + PC > AC + CB = S(C)$$

como queríamos demonstrar.

Vejamos agora alguns exemplos de problemas relacionados ao Problema de Fermat-

Figura 22: o prolongamento de $C'C$ intersecta PA

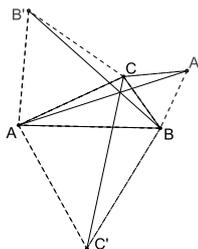


mat.

3.2 Variações do Problema de Fermat

Exemplo 6. *Seja ABC um triângulo cujos ângulos são todos menores que $2\pi/3$. Construa-se sobre cada lado desse triângulo um triângulo equilátero, como na Figura 23. Mostre que podemos determinar o ponto de Fermat através da intersecção dos segmentos AA' , BB' e CC' .*

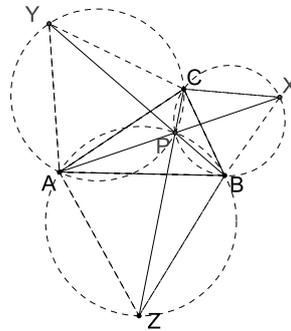
Figura 23: triângulos equiláteros sobre os lados de ABC



Seja P o ponto de Fermat do triângulo ABC. Temos os circuncírculos referentes aos triângulos equiláteros construídos a partir dos lados do triângulo ABC. Sejam \widehat{CB} , \widehat{AC} e \widehat{AB} os arcos maiores desses circuncírculos. Tomemos X, Y e Z como os pontos de intersecção dos arcos \widehat{CB} , \widehat{AC} e \widehat{AB} com os prolongamentos de AP, BP e CP, respectivamente. Vamos mostrar que cada um dos triângulos XCB, YAC e ZAB são equiláteros, ou seja, X, Y e Z coincidem com A', B' e C'.

Temos que $\widehat{APZ} = \widehat{CPX}$, pois são opostos pelo vértice, e $\widehat{APZ} + \widehat{ZPB} = \widehat{APB} =$

Figura 24: circuncírculos



$2\pi/3 = \widehat{BPC} = \widehat{BPX} + \widehat{XPC}$, daí

$$\widehat{CPX} + \widehat{ZPB} = 2\pi/3 \quad (10)$$

$$\widehat{APZ} + \widehat{BPX} = 2\pi/3 \quad (11)$$

Como $\widehat{ZPB} + \widehat{BPX} + \widehat{XPC} = \pi$, de (10) temos

$$\widehat{BPX} = \pi/3 \Rightarrow \widehat{BCX} = \pi/3$$

então o triângulo BCX é equilátero e X coincide com A'.

Como $\widehat{APZ} + \widehat{ZPB} + \widehat{BPX} = \pi$, de (11) temos

$$\widehat{ZPB} = \pi/3 \Rightarrow \widehat{ZAB} = \pi/3$$

então o triângulo ZAB é equilátero e Z coincide com C'.

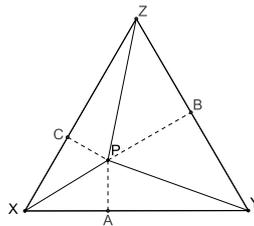
Analogamente, podemos concluir que o triângulo ACY é equilátero com Y coincidindo

com B' , como queríamos demonstrar.

Exemplo 7. *Seja XYZ um triângulo equilátero. Dado um ponto P no seu interior ou na sua fronteira, sejam A , B e C os pés das perpendiculares de P a cada um dos lados de XYZ .*

1. *Mostre que $PA+PB+PC$ é igual à altura de XYZ ; em particular, este comprimento é independente da escolha de P .*
2. *Supondo que P está no interior de XYZ , mostre que P é o ponto de Fermat do triângulo ABC .*

Figura 25: A , B e C , pés das perpendiculares de P aos lados de XYZ



O primeiro item pode ser resolvido observando um teorema desenvolvido por Vincenzo Viviani, aluno de Torricelli.

Teorema 4 (Viviani). *A soma das distâncias de um ponto pertencente a um triângulo equilátero até os seus lados é constante e igual à medida da altura do triângulo.*

Para demonstrar tal teorema vamos partir da situação proposta no exemplo com h sendo a altura do triângulo XYZ e observar que

$$\begin{aligned} \text{Área}(XYZ) &= \text{Área}(XPY) + \text{Área}(YPZ) + \text{Área}(ZPX) \\ \frac{XY \cdot h}{2} &= \frac{XY \cdot AP}{2} + \frac{YZ \cdot BP}{2} + \frac{ZX \cdot CP}{2} \end{aligned}$$

Como XYZ é equilátero, $XY = YZ = ZX$, então

$$XY \cdot h = XY \cdot (AP + BP + CP)$$

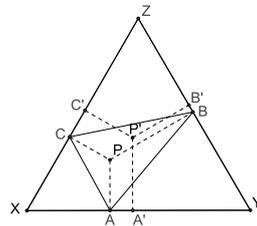
$$h = AP + BP + CP$$

Agora vamos demonstrar que o ponto P , interior a XYZ , é o ponto de Fermat do triângulo ABC . Dado P' um ponto do triângulo ABC diferente de P e sejam A' , B' e C' os pés das perpendiculares de P' a cada um dos lados de XYZ . Temos que $P'A + P'B + P'C > P'A' + P'B' + P'C'$, mas, pelo Teorema de Viviani, $P'A' + P'B' + P'C' = PA + PB + PC$, daí

$$P'A + P'B + P'C > PA + PB + PC$$

logo P é o ponto de Fermat do triângulo ABC .

Figura 26: A' , B' e C' , pés das perpendiculares de P' aos lados de XYZ



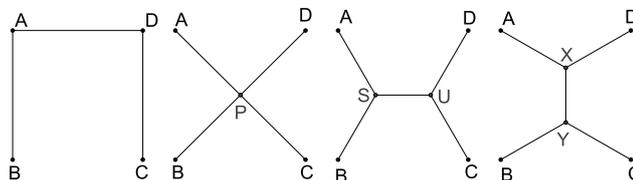
Exemplo 8 (O Problema de Steiner). *Dados pontos A_1, A_2, \dots, A_n no plano ($n \geq 3$), determinar um sistema de segmentos de reta de comprimento total mínimo de tal forma que dois quaisquer dos pontos dados sejam ligados por uma linha poligonal formada por segmentos do sistema.*

O Problema de Steiner é uma generalização do Problema de Fermat de grande interesse por conta de suas aplicações. Vamos analisar o caso em que se quer ligar os quatro vértices de um quadrado $ABCD$. Observe a Figura 27.

Note que podemos ter configurações onde estão presentes somente os quatro vértices, como na primeira configuração, ou onde aparecem pontos de apoio, chamados pontos de Steiner, como nas demais configurações. É fácil perceber que a primeira das configurações é a menos eficiente. Vamos agora demonstrar a resolução do problema.

Seja AC uma poligonal com extremidades em A e C . A partir dos pontos B e D devem sair segmentos que se conectem a essa poligonal em pontos X e Y , respectivamente. Note que X e Y podem ser vértices do quadrado, pontos coincidentes ou pontos distintos. Através de uma análise experimental simples, percebe-se que as duas primeiras configurações apresentadas, em que X e Y são vértices do quadrado ou são coincidentes

Figura 27: possíveis configurações para o Problema de Steiner

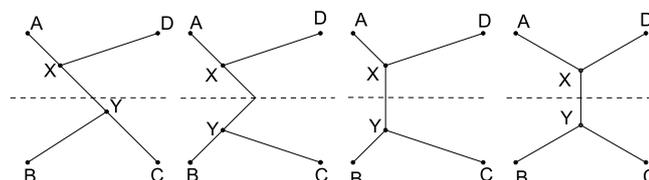


tem comprimento maior do que as duas últimas configurações, onde X e Y são pontos distintos. Basta agora encontrar quais devem ser estes pontos para que o sistema de segmentos tenha comprimento mínimo.

Dado um sistema de segmentos ligando os quatro vértices de um quadrado, com dois pontos de Steiner, trace o eixo de simetria horizontal ou vertical do quadrado, escolha um dos lados do eixo de simetria e o reflita em relação a este eixo. Na Figura 28, tomamos o eixo de simetria horizontal e refletimos a parte superior sobre a inferior. Assim, $AX = BY$ e $DX = CY$. Depois notamos que um segmento unindo diretamente os pontos X e Y tem comprimento menor do que qualquer poligonal com extremidades nestes pontos.

Agora, observada a simetria, para resolver o problema de Steiner, basta mini-

Figura 28: simetria aplicada na resolução do Problema de Steiner



mizar o valor de $XA + XD + XP$, onde P é o ponto de intersecção do segmento XY com o eixo de simetria horizontal do quadrado. Primeiramente aplicamos a resolução do Problema de Heron para minimizar o comprimento de $XA + XD$, com isso X deve

ser tal que $\hat{A}\hat{X}P = \hat{P}\hat{X}D$, ou seja, X pertence à bissetriz do segmento AD. Por fim, aplicando a resolução do Problema de Fermat para minimizar $XA + XD + XP$, X deve ser tal que $\hat{A}\hat{X}P = \hat{P}\hat{X}D = \hat{D}\hat{X}A = 2\pi/3$. E assim encontramos o ponto X desejado e, conseqüentemente o ponto Y.

4 GEOGEBRA

A escolha do software educacional Geogebra se dá pela qualidade do software e por ele apresentar um conjunto extremamente satisfatório de ferramentas, além de um design muito agradável de suas construções.

O programa é composto de cinco partes principais: a Janela de Visualização, que permite a construção de figuras geométricas, gráficos, pontos, vetores, etc., sendo onde efetivamente visualizamos tudo que é construído; a Janela de Álgebra, onde aparecem de forma algébrica as informações sobre o que se está construindo na área de trabalho (coordenadas de pontos, equações de retas, comprimentos de segmentos, etc.); Planilha, que permite a realização de cálculos e organização de dados através de tabelas, bem como construção de fórmulas; Campo Entrada, onde se pode construir elementos na Janela de Visualização através da digitação de sua informação algébrica, sem utilização do mouse; e a Barra de Ferramentas, que apresenta ao usuário as diversas opções de ferramentas que podem ser utilizadas para construir ou comparar elementos na Janela de Visualização.

4.1 Introdução ao software

Aconselha-se que, caso os estudantes nunca tenham tido contato com o software, seja feito um momento inicial onde eles possam explorar livremente as ferramentas e opções que o software oferece. Esse primeiro momento é justificado por dois motivos, primeiro porque muitos estudantes serão capazes de, sozinhos, descobrirem como utilizar diversas ferramentas, o que facilitará o trabalho posterior do professor, segundo porque esse momento acalmará um pouco a curiosidade dos estudantes, que muitas vezes ficam tão fascinados ao se deparar com uma ferramenta como esta que acabam não prestando a atenção necessária às atividades propostas pelo professor.

Passado este primeiro momento é hora de apresentar sistematicamente as ferramentas que serão utilizadas durante as atividades. Apresentaremos agora essas ferramentas e a instrução referente ao uso de cada uma delas.

Ponto: clique na Janela de Visualização ou sobre um objeto.

Interseção de dois objetos: selecione dois objetos ou clique diretamente na interseção.

Mover: arraste ou selecione um ou mais objetos.

Reta: selecione dois pontos.

Segmento: selecione dois pontos.

Caminho poligonal: selecione todos os vértices e, então, clique novamente no vértice inicial.

Elipse: selecione dois focos e depois um ponto da elipse.

Ângulo: selecione três pontos ou duas retas.

Reflexão em relação a uma reta: selecione primeiro o objeto e, depois, a reta de reflexão.

Conhecidas essas ferramentas, estamos aptos para realizar alguns projetos para serem aplicados em sala de aula. Os seguintes projetos são propostos por Lopes (Samuel Antonio, Treze Viagens pelo Mundo da Matemática) e são aqui apresentados com algumas contribuições e modificações.

4.2 Projetos

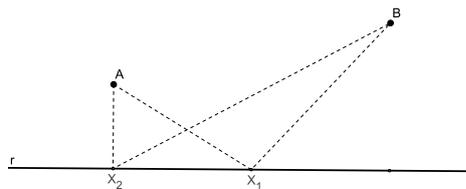
Atividade 1. Problema de Heron

(a) Apresente o Problema de Heron

Dados uma reta r e dois pontos A e B , com A e B num mesmo semi-plano determinado por r , deseja-se encontrar um ponto X pertencente a r tal que a distância $AX + XB$ seja mínima, ou seja, queremos o menor caminho de A para B passando por um ponto de r .

(b) Peça para que os estudantes proponham algumas soluções para o problema, baseados em alguma lógica própria, por exemplo o ponto X_1 no “meio”, entre os pontos A e B , ou o ponto X_2 “descendo reto” do ponto mais próximo da reta r .

Figura 29: possíveis soluções para o Problema de Heron



(c) Construa uma reta.

- (d) Construa dois pontos no mesmo semi-plano definido pela reta.
- Obs.: o Geogebra nomeia automaticamente os objetos construídos, caso queira nomeá-los conforme foi apresentado no problema basta clicar em cima do objeto com o botão direito e escolher a opção Renomear.*
- (e) Marque um ponto X na reta r , na posição de X_1 por exemplo, construa os segmentos AX e XB , note que os nomes dados aos segmentos, bem como seus respectivos comprimentos, aparecem na Janela de Álgebra. Suponhamos que esses nomes sejam b e c .
- (f) Como nosso objetivo é encontrar o menor valor de $AX + XB$, você pode pedir para que os estudantes façam a soma dos comprimentos manualmente ou então pode orientá-los a ir no menu Exibir → Planilha e, em alguma das células da planilha, digitar $= b + c$. Nessa célula então aparecerá a soma $AX + XB$.
- Obs.: outra opção seria, ao invés de construir os segmentos AX e XB , construir o caminho poligonal AXB , daí a Janela de Álgebra já mostraria o comprimento desejado.*
- (g) Registre o valor encontrado.
- (h) Utilizando a ferramenta Mover, mova o ponto X até a posição de X_2 por exemplo, observe e registre mais uma vez o valor de $AX + XB$. Compare os valores encontrados.
- (i) Agora mova calmamente o ponto X pela reta r e observe os valores de $AX + XB$, posicionando o ponto X onde o esta soma for mínima.
- Obs.: Note que a precisão do programa é de duas casas decimais então você poderá encontrar diferentes posições para X tal que $AX + XB$ permaneça constante, o que não deve ser problema, já que o objetivo da atividade é dar um embasamento experimental para uma demonstração posterior.*
- (j) Construa os ângulos entre os segmentos AX e XB e a reta r . Mova novamente o ponto X e observe o que ocorre com os ângulos quando $AX + XB$ é mínimo.
- (k) Relembre as suposições feitas quando o problema foi apresentado e compare com o resultado encontrado utilizando o Geogebra. Conclua que, pela observação feita, o ponto X deve ser tal que os ângulos entre os segmentos AX e XB e a reta r sejam iguais. Altere as posições dos pontos A e B e observe que a conclusão acima continua

válida.

A atividade acima tem por objetivo, além de utilizar um software educacional, chamar a atenção dos estudantes de como a experimentação pode dar pistas para a resolução de um problema. Note que o problema ainda não foi totalmente resolvido, já que temos uma boa suposição de uma característica importante do ponto X (deve ser tal que os ângulos entre AX e BX e reta r sejam iguais) mas ainda não foi feita a demonstração de que isso é verdade, nem mesmo foi apresentada uma forma de encontrar tal ponto.

Este é o momento em que o professor deve se valer do interesse despertado nos estudantes e apresentar a demonstração formal do Problema de Heron, como é feito no texto deste trabalho, chamando atenção para a simetria do problema, propondo a desigualdade triangular, encontrando o ponto X e demonstrando que aqueles ângulos realmente tem de ser iguais.

Atividade 2. Resolução do Problema de Heron

- (a) Construa a reta r e os pontos A e B como no Problema de Heron.
- (b) Construa o ponto A', simétrico de A em relação à reta r .
- (c) Construa o segmento A'B e marque o ponto X, ponto de intersecção entre A'B e r .
- (d) Marque um ponto X' qualquer sobre a reta r e construa os segmentos A'X' e X'B.
- (e) Mova o ponto X', observe os valores de $A'X' + X'B$ e de A'B e conclua que $A'B \leq A'X' + X'B$, ocorrendo a igualdade somente quando X' coincide com X.

Atividade 3. Exemplos e generalização do Problema de Heron.

- (a) Apresente aos estudantes os Exemplos 1, 2 e 3 propostos neste trabalho.
- (b) Peça aos estudantes que os resolvam.
- (c) Utilize a variação do Exemplo 3 para apresentar o Problema de Heron com duas retas.

Sejam duas retas r e s e dois pontos A e B entre estas retas. O problema agora consiste em encontrar o menor caminho de A para B passando pelas duas retas.

- (d) Separe a turma em dois grupos. O primeiro Grupo 1 deve resolver o problema passando primeiro pela reta r e o Grupo 2 passando primeiro pela reta s

Obs.: neste caso é interessante que o professor determine as coordenadas dos pontos

A e B e das retas r e s para que os dois grupos partam realmente da mesma situação. Poderíamos ter por exemplo $A = (9, 5)$, $B = (6, 2)$, $r : -x + 10y = 0$ e $s : -x + y = 0$.

- (e) Compare as soluções encontradas pelos dois grupos e problematize com a turma em quais situações a solução ocorre primeiro passando por r ou por s . Caso necessário, sugira alterações nas posições de A e B para ajudá-los a chegar na conclusão.
- (f) Apresente a solução formal proposta neste trabalho.

Atividade 4. Problema de Fermat

- (a) Apresente o Problema de Fermat.
Dados três pontos, A , B e C , encontrar um ponto P para o qual $PA + PB + PC$ seja mínimo.
- (b) Discuta o caso em que A , B e C são colineares.
- (c) Construa três pontos A , B e C não-colinares.
- (d) Construa as retas AB , BC e CA . Observe que essas retas dividem o plano em sete regiões, sendo seis exteriores ao triângulo ABC e a região desse triângulo.
- (e) Construa um ponto P em uma dessas regiões.
- (f) Construa os segmentos AP , BP e CP e observe o valor da soma de seus comprimentos. Em qual das regiões encontramos os menores valores para essa soma?
- (g) Demonstrar porque o ponto de Fermat não se encontra no exterior do triângulo ABC

Atividade 5. Resolução do Problema de Fermat

- (a) Construir um triângulo ABC com todos os ângulos menores que 120° .
- (b) Marcar um ponto P no interior do triângulo ABC .
- (c) Construir os pontos C' e P' resultantes da rotação dos pontos C e P sob um ângulo de 60° em torno do ponto A .
- (d) Construir os segmentos PA , PB , PC , PP' e $P'C'$.
- (e) Observe os comprimentos de todos os segmentos presentes na Janela de Álgebra, quais são iguais? Por que estes segmentos são iguais?
- (f) Observe que $PC + PA + PB = C'P' + P'P + PB$, que é uma poligonal ligando B a C' .

- (g) Construa o segmento BC' e argumente com os estudantes que este deve ser o valor mínimo de $C'P' + P'P + PB$;
- (h) Construa os ângulos $\hat{A}PB$, $\hat{B}PC$ e $\hat{C}PA$.
- (i) Mova o ponto P até o segmento BC' de forma que $C'P' + P'P + PB$ coincida com BC' e observe o valor dos ângulos construídos.
- (j) Conclua que o ponto procurado deve ser aquele que forma ângulos $\hat{A}PB$, $\hat{B}PC$ e $\hat{C}PA$ iguais.
- (k) Apresente a resolução do Problema de Fermat.

Atividade 6. O Problema de Steiner

Dados pontos A_1, A_2, \dots, A_n no plano ($n \geq 3$), determinar um sistema de segmentos de reta de comprimento total mínimo de tal forma que dois quaisquer dos pontos dados sejam ligados por uma linha poligonal formada por segmentos do sistema.

O Problema de Steiner é uma generalização do Problema de Fermat de grande interesse por conta de suas aplicações.

Obs.: o Problema de Steiner pode ser apresentado através de uma situação-problema, por exemplo: Como construir estradas interligando cidades tal que a soma dos comprimentos das estradas seja mínimo? Como construir corredores ecológicos entre áreas de preservação ambiental de modo que a soma do comprimento desses corredores seja mínima? Note que essas situações são paupáveis e fazem sentido na prática já que obras desse tipo são relativamente caras, o que justifica a procura pelos comprimentos mínimos.

- (a) Apresente os exemplos da Figura 26 de como interligar quatro vértices de um quadrado através de um sistema de segmentos de reta.
Note que para interligar os pontos podemos utilizar somente os pontos dados, como na primeira configuração, ou podemos usar pontos adicionais, como o encontro das diagonais, ponto P , que aparece na segunda configuração, ou os pontos que aparecem na terceira e quarta configurações, que foram conseguidos de forma que os ângulos formados entre os segmentos que tem esses pontos como extremidade sejam iguais, e mais, com $AS = BS$ e $BY = CY$.
- (b) Calcule a soma dos comprimentos dos segmentos de cada uma das configurações apresentadas. Qual é menor?
- (c) Tome as configurações de comprimento mínimo e construa os ângulos formados entre

os segmentos. Relacione essas configurações com o Problema de Fermat.

- (d) Apresente a resolução formal do Problema de Steiner aplicado aos vértices de um quadrado.

Ao fim de cada demonstração de um problema, peça aos estudantes que tentem reproduzir essa resolução no Geogebra, utilizando as ferramentas do software para reproduzir as reflexões e as simetrias de cada demonstração.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi feito num contexto em que há uma demanda por novas metodologias que aliem conceitos teóricos com possibilidades de visualização e experimentação por parte dos educandos, em especial uma experimentação vinculada ao uso de computadores, ferramenta que se faz cada dia mais presente na sociedade contemporânea. Para garantir a possibilidade de aplicação das atividades é necessário que os governos garantam uma infraestrutura mínima que permita aos professores interessados em renovar suas metodologias ter sucesso em suas novas experiências.

Como citado na introdução deste trabalho 55,9% dos estudantes pesquisados não tem acesso a computadores em sua residência, o que torna ainda mais importante o papel da escola na inclusão digital dos mesmos.

Além da infraestrutura, também é necessária uma renovação na formação dos docentes que atuarão nas escolas, nesse sentido o PROFMAT é uma iniciativa fundamental para melhorar a aprendizagem dentro da sala de aula.

As possibilidades de uso de um software de tanta qualidade quanto o Geogebra são enormes. O recorte proposto nesse trabalho, ao propor que os estudantes sejam motivados a se interessar por problemas matemáticos, é somente um início da importante missão de resgatar a curiosidade dentro de cada pessoa. Esta curiosidade é o que garante a motivação e o interesse dos estudantes e nesse sentido mais uma vez o uso do Geogebra é providencial. Ao aplicar as atividades, muitas modificações e ampliações podem ser feitas, em especial outros diversos problemas poderiam ser explorados de maneira semelhante, como o Problema de Fagnano ou o Problema de Regiomontanus, ou ainda explorar outras aplicações derivadas dos problemas de Heron e de Fermat que não foram abordadas neste trabalho.

Outra possibilidade é trabalhar a simetria em outras áreas da Matemática como álgebra, aritmética e análise combinatória, onde a percepção da existência da simetria em um problema pode ser passo fundamental da solução ou ainda pode simplificá-la de maneira muito eficiente.

Enfim, espera-se que esse trabalho possa servir de ponto de partida para iniciativas e experiências exitosas na educação.

REFERÊNCIAS

BOYER, Carl B. *História da matemática*. São Paulo : Blucher, 1974.

GEOGEBRA. www.geogebra.org

LOPES, Samuel Antônio. Espelhos meus. In: SÁ, Carlos Correia de; ROCHA, Jorge (Eds.). *Treze viagens pelo mundo da matemática*. Portugal : Universidade do Porto, 2012. p. 263-280.

MAGOSSI, José Carlos. O jogo de bilhar. *Revista do Professor de Matemática*, v. 69, p. 11-12, 2009.

MELLO, José Luiz Pastore. *Encontrando caminhos mínimos com bolhas de sabão*. Seminários de Ensino de Matemática, 2009.

SANTOS, Reginaldo J. *Introdução ao Látex*. 2012.