UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

WAGNER DA SILVA MACIEL

CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINÁTORIA E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DE SITUAÇÕES PROBLEMAS

CAMPO GRANDE – MS

FEVEREIRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL

INSTITUTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO

MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

MESTRADO PROFISSIONAL

WAGNER DA SILVA MACIEL

CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINÁTORIA E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DE SITUAÇÕES PROBLEMAS

ORIENTADOR: Prof. Dra. LILIAN MILENA RAMOS CARVALHO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para obtenção do Título de Mestre.

CAMPO GRANDE – MS

FEVEREIRO DE 2015

CONCEITOS DE ANÁLISE COMBINÁTORIA E SUAS APLICAÇÕES POR MEIO DE SITUAÇÕES PROBLEMAS

WAGNER DA SILVA MACIEL

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof. Dr.ª Lilian Milena Ramos Carvalho – UFMS (Orientadora)

Prof. Dr.ª Rubia Mara de Oliveira Santos – UFMS

Prof. Dr.ª Selma Helena Marchiori Hashimoto – UFGD

CAMPO GRANDE – MS

FEVEREIRO DE 2015

AGRADECIMENTOS

A Jesus Cristo, amigo sempre presente, sem o qual nada teria feito.

Aos meus pais, Valdir Maciel e Valderice da Silva, que me apoiaram e me auxiliaram, eu dedico.

A minha esposa Suziane Vasconcelos, minha companheira que sempre me ajudou em todos os momentos difíceis.

Aos amigos, que sempre incentivaram meus sonhos e estiveram sempre ao meu lado.

Aos meus colegas de classe e demais mestrandos pela amizade e companheirismo que recebi.

A Prof.ª Dr.ª Lilian, que me acompanhou, transmitindo-me tranquilidade.

Muito Obrigado

“A simplicidade é o último grau da sofisticação”

(Leonardo da Vinci)

RESUMO

A partir de uma abordagem centrada em explorar os aspectos de base conceitual e atividades aplicáveis no Ensino Básico, este trabalho tem por objetivo introduzir conceitos básicos de Análise Combinatória, Probabilidade e Probabilidade Condicional, visando principalmente atuar em situações problemas nos anos finais do Ensino Médio, mas pode ser trabalhado a partir do 9º ano do Ensino Fundamental deste que tenha um mínimo de condições favoráveis. Tendo com ênfase na resolução de problemas com o mínimo de fórmulas exaustivas. Este tema foi escolhido uma vez que pouco se trabalha no ensino fundamental e no ensino médio, por mais que a contagem e a probabilidade estejam ao nosso redor e em diferentes áreas, como biologia, engenharia, entre outros. Nosso principal enfoque é o estudo de Contagem e Probabilidade Condicional utilizando uma metodologia alternativa que está embasada no Princípio Fundamental da Contagem e a definição de Probabilidade respectivamente, entendemos que no ensino médio, os alunos têm muitas dificuldades de assimilação das fórmulas ou até mesmo não entendem e assim não veem aplicabilidade na solução de vários problemas. Mostraremos que se podem solucionar problemas sem esse excesso de fórmulas e usando a essência de Contagem e Probabilidade, para isso utilizaremos exemplos e exercícios do Exame Nacional do Ensino Médio.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

A matemática tem-se apoiado nas intuições desde os primeiros tempos da sua história. As intuições têm desempenhado, ao longo dos tempos, um lugar de destaque na criação matemática e na própria validação desse conhecimento. Neste contexto destacamos a Análise Combinatória e a Probabilidade como tópicos da matemática que tem muita relevância, pois utiliza-se da intuição para realizar contagens e definir estratégias com maior ou menor chance de um determinado evento acontecer.

Trata-se de conteúdos que possibilita: procurar, selecionar e interpretar informações relativas a situações-problemas; formular hipóteses e prever resultados; distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos; fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades; discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Não é atoa que eles são conteúdos mais cobrados em concursos e vestibulares haja visto que possibilita a interação entre o as diversas áreas com o cotidiano do cidadão comum. Assim todos podem e devem ter o mínimo de conhecimentos de tais conteúdos, pois mais cedo ou mais tarde acaba sendo inserido no dia a dia de qualquer um.

O principal objetivo deste trabalho é desenvolvermos os conteúdos de análise combinatória, probabilidade e probabilidade condicional a partir de exemplos e exercícios de concursos e do Exame Nacional do Ensino Médio para ser trabalhados em sala de aula, pois entendemos que o aluno necessita compreender o máximo possível para ajudar a solucionar situações-problemas do seu próprio meio. Sendo assim, separamos conteúdos em capítulos.

No primeiro capítulo abordaremos a essência da Análise Combinatória que é o Princípio Fundamental da Contagem. Entendemos que a partir dele houve uma evolução e uma fragmentação em agrupamento para que se tornem mais eficientes os métodos de contagem. Além disso, mostraremos exemplos de exercícios contextualizados e de questões do Exame Nacional do Ensino Médio, em todos os capítulos.

A partir do segundo e terceiro capítulo, mostraremos os agrupamentos de maior aplicabilidade dentro da Análise Combinatória que é a Permutação e a Combinação, destacando a diferença entre estes agrupamentos que se constitui em uma das maiores dificuldades dos discentes, quando na Resolução de Problemas.

No quarto capítulo, apresentaremos os conceitos de Probabilidade e as suas aplicações, tratando estes conceitos de modo simples, mas sem perder a veracidade. Nos exemplos, buscamos utilizar menos jogos de azar e mais situações do cotidiano.

Ainda, neste capítulo abordaremos a Probabilidade Condicional com um maior enfoque, por entender que os alunos sentem muitas dificuldades em interpretar e aplicar este tema, ocasionando muitos traumas nos mesmos. A experiência nos diz que devemos mudar e apresentar de modo simples e atraente para os alunos, sem mistério.

Por fim, apresentamos um jogo que pode ser aplicado a partir do 8º ano do ensino fundamental, na qual se utiliza de um conhecimento básico de probabilidade para tornar-se mais atraente os cálculos além de estimular a competição entre si. Tais condições são necessárias, pois não haverá jogabilidade, diversão nas partidas.

2. PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Neste capítulo, faremos uma abordagem teórica a respeito do tema “princípio fundamental da contagem”, como forma de facilitar o entendimento dos assuntos que serão tratados posteriormente. É importante salientar que este tema é a base da Análise Combinatória e está ligado às situações que envolvem as possibilidades de um determinado evento ocorrer e através dele desenvolvemos técnicas de resolução direta de problemas.

Definição: De acordo com [3], o Princípio Fundamental da Contagem diz que se há x modos de tomar uma decisão D_1 e, tomada a decisão D_1, há y modos de tomar a decisão D_2, então o número de modos de tomar sucessivamente as decisões D_1 e D_2 é xy.

Exemplo 1. Com 6 homens e 6 mulheres, de quantos modos se pode formar um casal?

Solução. Formar um casal equivale a tomar as decisões:

D_1: Escolha do homem (6 modos).

D_2: Escolha da mulher (6 modos).

Portanto, de acordo com a definição do princípio fundamental da contagem, há $6 \times 6 = 36$ modos de formar um casal.

Exemplo 2. Quantas senhas de 8 dígitos podem ser formada usando somente as vogais e os algarismos do sistema decimal?

Solução. Quantificar estas senhas significa que devemos entender que cada dígito possui a mesma quantidade de possibilidades e que equivale a uma decisão, ou seja, existem $15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 \times 15 = 15^8$ senhas.

Exemplo 3. Quantos divisores inteiros e positivos possui o número 120?

Solução. Como a fatoração completa de $120 = 2^3 \times 3 \times 5$, os divisores inteiros e positivos de 120 são os números da forma $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma$, com $\alpha \in \{0,1,2,3\}$, $\beta \in \{0,1\}$ e $\gamma \in \{0,1\}$, ou seja, pela definição do princípio fundamental da contagem, há $4 \times 2 \times 2 = 16$ maneiras de escolher os expoentes $\alpha,\ \beta$ e γ . Portanto, existem 16 divisores.

Mostraremos, a seguir, algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio que podem ser resolvidas através do Princípio Fundamental da Contagem e que foram selecionadas para serem aplicadas em sala de aula de modo que o aluno possa verificar os seus conhecimentos e trocar ideias, buscando a melhor estratégia para a solução. Desde já, ressaltamos que foi escolhida somente uma solução, ainda que há outras maneiras de chegar ao mesmo fim.

01. (ENEM 2009) Questão 176 – Caderno Azul

Joana frequenta uma academia de ginástica onde faz exercícios de musculação. O programa de Joana requer que ela faça 3 séries de exercícios em 6 aparelhos diferentes, gastando 30 segundos em cada série. No aquecimento, ela caminha durante 10 minutos na esteira e descansa durante 60 segundos para começar o primeiro exercício no primeiro aparelho. Entre uma série e outra, assim como ao mudar de aparelho, Joana descansa por 60 segundos.

Suponha que, em determinado dia, Joana tenha iniciado seus exercícios às 10h30min e finalizado às 11h17min. Nesse dia e nesse tempo, Joana:

A) não poderia fazer sequer a metade dos exercícios e dispor dos períodos de descanso especificados em seu programa.

B) poderia ter feito todos os exercícios e cumprido rigorosamente os períodos de descanso especificados em seu programa.

C) poderia ter feito todos os exercícios, mas teria de ter deixado de cumprir um dos períodos de descanso especificados em seu programa.

D) conseguiria fazer todos os exercícios e cumpriria todos os períodos de descanso especificados em seu programa, e ainda se permitiria uma pausa de 7 min.

E) não poderia fazer todas as 3 séries dos exercícios especificados em seu programa, em alguma dessas séries deveria ter feito e não deveria ter cumprido um dos períodos de descanso.

Solução: Vamos separar em etapas:

1º Etapa: Pelo enunciado, podemos observar que o programa de Joana requer que ela faça 3 séries de exercícios em 6 aparelhos diferentes, gastando 30 segundos em cada série, ou seja, pelo P.F.C temos que ela levou o tempo de $3 \times 6 \times 30 = 540$ segundos.

2º Etapa: No aquecimento, ela caminha durante 10 minutos o que equivale a 600 segundos na esteira e descansa durante 60 segundos para começar o primeiro exercício no primeiro aparelho. Logo ela gasta 660 segundos nesta etapa.

3º Etapa: Entre uma série e outra, assim como ao mudar de aparelho, ela descansa por 60 segundos. E como ela gasta 60 segundos no primeiro aparelho, resta 17 possibilidades (entre séries e aparelhos) o que resulta em $60 \times 17 = 1020$ segundos.
Somando as três etapas $540 + 660 + 1020 = 2220$ segundos que equivale a 37 minutos, ou seja, ela poderia ter feito e cumprido rigorosamente o programa. Alternativa B.

02. (ENEM 2010) Questão 176 – Caderno Azul

A disparidade de volume entre os planetas é tão grande que seria possível coloca-los uns dentro dos outros. O planeta Mercúrio é o menor de todos. Marte é o segundo menor: dentro dele cabem três Mercúrios. Terra é o único com vida: dentro dele cabem sete Martes. Netuno é o quarto maior: dentro dele cabem 58 Terras. Júpiter é o maior dos planetas: dentro dele cabem 23 Netunos.

Revista Veja: Ano 41 nº 25, 25 jun. 2008(adaptado).

Seguindo o raciocínio proposto, quantas Terras cabem dentro de Júpiter?

A. 406
B. 1334
C. 4002
D. 9338
E. 28014

Solução: Como em Júpiter cabem 23 Netunos e em Netuno cabem 58 Terras, logo utilizando o princípio fundamental da contagem, podemos afirmar que dentro de Júpiter cabem $23 \times 58 = 1334$ Terras. Alternativa B.

03. (ENEM 2012) Questão 177 – Caderno Azul

O designer português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identifiquem as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto e cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam o preto e o branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www.folha.uol.com.br. Acesso: 18.fev.2012(adaptado)

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

A. 14
B. 18
C. 20
D. 21
E. 23

Solução: Pelo enunciando, podemos destacar as três cores primárias como por três símbolos $(S_1, S_2\ e\ S_3)$ e quando combinados teremos mais três cores $(S_1S_2,\ S_1S_3\ e\ S_3S_2)$ ou seja, 6 cores distintas além do preto e do branco.. Porém estas por sua vez podem estar combinados com as outras cores, por exemplo, o azul poderá ter três variações: azul claro (azul+branco), azul normal e o azul escuro (azul+preto). Nessas condições e pelo P. F. C temos que $6 \times 3 = 18$. Ainda falta acrescentar as cores preta e branca, logo $18 + 2 = 20$ cores distintas. Alternativa C.

Comentários e/ou sugestões

Para resolver os problemas que envolvem a Combinatória devemos traçar estratégias que facilite a visualização pelo aluno. Baseado em [4], destacamos três atitudes que podemos tomar para solucionar tais problemas:

1) **Postura**. Devemos sempre nos colocar no papel da pessoa que se deve fazer a ação solicitada pelo problema e ver que decisões devem ser tomadas.
2) **Divisão.** Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples.
3) **Não adiar dificuldades.** Pequenas dificuldades adiadas costumam se transformar em imensas dificuldades. Se uma das decisões a serem tomadas for a mais restrita que as demais, essa é a decisão que deve ser tomada em primeiro lugar.

Nos próximos capítulos abordaremos os conteúdos de contagem a partir de agrupamentos de elementos, ou seja, qualquer conjunto ordenado ou não, formado por esses elementos. E essa ordem é o diferenciador na solução dos problemas. Mostraremos as Permutações e as Combinações, simplesmente como agrupamentos úteis.

3. PERMUTAÇÕES

Neste capítulo, definiremos os conceitos de Permutações baseados em [3], que é uma importante ferramenta para solucionar problemas de Combinatória mais simples ou que aparecem com maior frequência. Para esses problemas, vale a pena adotar este agrupamento, pois aperfeiçoa o tempo nas suas soluções. Mas primeiramente definiremos o conceito de fatorial.

3.1 FATORIAL

Definição: Dado um número natural n, definimos o fatorial de n (indicado por $n!$) através das relações:

I. $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ para $n \geq 2$.
II. Se $n = 1,\ 1! = 1$.
III. Se $n = 0,\ 0! = 1$.

3.2 PERMUTAÇÕES SIMPLES

Definição: O número de permutações simples de n objetos distintos, ou seja, o número de ordens em que podemos colocar n objetos distintos é $P_n = n!$.

Exemplo 1. De quantos modos podemos arrumar em uma fila 5 livros diferentes de Matemática, 3 livros diferentes de Física e 2 livros diferentes de Química, de modo que livros de uma mesma matéria permaneçam juntos? [3]

Solução. Podemos escolher a ordem das matérias de 3! modos. Feito isso, há $5!$ modos de colocar os livros de Matemática nos lugares que lhe foram destinados, 3! modos para os de Física e 2! modos para os de Química. A resposta é $3!\,5!\,3!\,2! = 6 \times 120 \times 6 \times 2 = 8640$.

Exemplo 2. Quantos são os anagramas da palavra "FREQUENTES"? [3]

Solução. Se as letras fossem diferentes a resposta seria $10!$. Como as três letras E são iguais, quando trocadas entre si obtemos o mesmo anagrama e não um anagrama distinto, o que aconteceria se fossem diferentes. Isso faz com que na contagem de $10!$ tenhamos contado o mesmo anagrama várias vezes, 3! precisamente, pois há 3! modos de trocar as letras E entre si. A resposta é

$\frac{10!}{3!} = 604800.$

Como a situação apresentada no exemplo 2 ocorre com maior frequência, podemos definir outro conceito que ataca diretamente este problema.

3.3 PERMUTAÇÕES COM ELEMENTOS REPETIDOS

Consideremos:

n_1 elementos iguais a a_1,

n_2 elementos iguais a a_2,

n_3 elementos iguais a a_3,

$\vdots$

n_k elementos iguais a a_k,

De modo que $n_1 + n_2 + n_3 + \cdots + n_k = n$ e $a_i \neq a_j$, se $i \neq j$, isto é:

$$\overbrace{\underbrace{a_1, a_{1,} \dots a_1}_{n_1}\underbrace{a_2, a_2, \dots a_2}_{n_2}, \underbrace{a_3, a_3, \dots a_3}_{n_3}, \dots, \underbrace{a_k, a_k, \dots a_k}_{n_k},}^{n\ elementos}$$

O número de permutações desses n elementos é indicado por $P_n^{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)}$ e calculado por:

$$P_n^{(n_1, n_2, n_3, \dots, n_k)} = \frac{n!}{n_1!\, n_2!\, n_3! \dots . n_k!}$$

Exemplo 1. Determinar o número de anagramas da palavra GARRAFA. [5]

Solução: A palavra apresenta um total de sete letras, com três letras A, duas letras R, uma letra G e uma letra F. Assim, temos $P_7^{(3,2,1,1)} = \frac{7!}{3!2!1!1!}$.

Para simplificar a notação, indicamos esse número simplesmente por

$P_7^{(3,2)} = \frac{7!}{3!2!} = 420$.

Isto é, não indicamos nos parênteses as letras que comparecem uma única vez na palavra. Portanto, a palavra GARRAFA possui 420 anagramas.

Exemplo 2. Quantas soluções (x, y, z), com $\{x, y, z\} \subset N$, possui a equação $x + y + z = 7$? [4]

Solução: Indicando cada unidade pelo símbolo "I" e a adição de unidades pelo sinal "+", podemos escrever, por exemplo:

II+I+IIII=2+1+4, que corresponde à solução $(2,1,4)$;

III++IIII=3+0+4, que corresponde à solução $(3,0,4)$; etc.

Assim, o número de soluções da equação é igual ao número de permutações de 9 símbolos, ++IIIIIII, ou seja:

$$P_9^{(2,7)} = \frac{9!}{2!7!} = 36.$$

3.4 PERMUTAÇÃO CIRCULAR

De acordo com [5], seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos. O número de permutações circulares desses n elementos é indicado por $P_{c(n)}$ e calculado como apresentamos a seguir.

Consideremos uma determinada permutação circular desses n elementos que representaremos na figura 1.

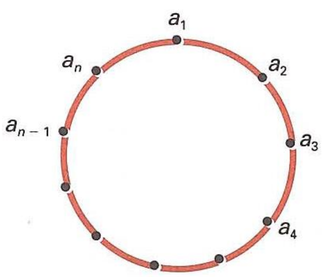


Figura.1

Tal permutação circular corresponde a n permutações em linha, se girarmos no sentido horário. São elas:

- partindo de a_1, temos $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-1}, a_n$;
- partindo de a_2, temos $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n, a_1$;
- partindo de a_3, temos $a_3, a_4, a_5, \dots, a_1, a_2$;

$$\vdots$$

- partindo de a_n, temos $a_n, a_1, a_2, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$;

Vemos então que n permutações simples em linha correspondem a uma única permutação circular. Podemos por isso relacionar o número de permutações em linha com o número de permutações circulares de n elementos distintos a partir da seguinte regra de três:

Número de permutações simples em linha de n elementos distintos		Número de permutações circulares de n elementos distintos
n	$\longleftrightarrow$	1
$n!$	$\longleftrightarrow$	$P_{c(n)}$

$$P_{c(n)} = \frac{n!}{n} = \frac{n(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

$$P_{c(n)} = (n-1)!$$

Exemplo 1. Em quantas disposições seis pessoas podem se sentar em volta de uma mesa redonda? [1]

Solução: Pelo enunciado são seis pessoas, tem-se que $P_{c(6)} = (6-1)! = 5! = 120.$

Exemplo 2. Quatro homens e três mulheres vão se sentar em torno de uma mesa redonda. Em quantas disposições diferentes isso pode ser feito?[1]

Solução: Pelo enunciado são 4 homens e 3 mulheres e não há restrição alguma então são 7 pessoas tem-se que $P_{c(7)} = (7-1)! = 6! = 720.$

Apresentamos a seguir, algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio que envolvem permutações, mas que também podem ser resolvidas utilizando o Princípio Fundamental da Contagem. Elas foram aplicadas em sala de aula e apresentaremos uma solução.

01. (ENEM 2012) – Questão 158 – Prova Cinza

O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam pretos e brancos também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

A. 14

B. 18

C. 20

D. 21

E. 23

Solução. Há três cores primárias. A justaposição de duas delas cria-se uma nova cor, ou seja, permutando estas três cores primárias têm-se $P_3 = 3! = 6$ cores. Assim temos $3 + 6 = 9$ cores, porém para cada cor mencionada há três tonalidades: clara (com o branco), escura (com o preto) e a normal (sem branco ou preto), pelo Princípio Fundamental da Contagem $3 \times 9 = 18$ cores. Há outras duas cores (branco e preto). Portanto, o total de cores será de $18 + 2 = 20$ cores. Alternativa C

02. (ENEM 2011) – Questão 174 – Prova Azul

O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares. Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75 913 é

A) 24.

B) 31.

C) 32.

D) 88.

E) 89.

Solução: Vamos separar o problema em partes, pois precisamos saber quantos números formados pelos algarismos 1,3,5,7 e 9 virão antes do número 75.913.

→ Números que iniciam com 1:

$$\frac{1}{(1)}\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{P_{(4)}} = 1.\ P_{(4)} = 1\ .\ 4! = 4.3.2.1 = 24$$

→ Números que iniciam com 3:

$$\frac{1}{(3)}\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{P_{(4)}} = 1.\ P_{(4)} = 1\ .\ 4! = 4.3.2.1 = 24$$

→ Números que iniciam com 5:

$$\frac{1}{(5)}\underbrace{\_\ \_\ \_\ \_}_{P_{(4)}} = 1.\ P_{(4)} = 1\ .\ 4! = 4.3.2.1 = 24$$

É claro que você poderia ter feito apenas a primeira conta e multiplicado por 3:

$24 \times 3 = 72$ números. Agora precisamos tomar cuidado com os números que iniciam com 7. Vamos trabalhar primeiramente os que iniciam com 71 e depois 73.

$$\frac{1}{(7)}\ \frac{1}{(1)}\underbrace{\_\ \_\ \_}_{P_{(3)}} = 1.\ 1.\ P_{(3)} = 1\ .\ 1\ .\ 3! = 3.2.1 = 6$$

$$\frac{1}{(7)}\ \frac{1}{(3)}\underbrace{\_\ \_\ \_}_{P_{(3)}} = 1.\ 1.\ P_{(3)} = 1\ .\ 1\ .\ 3! = 3.2.1 = 6$$

Ainda teremos os números que Iniciam com 75. Vamos lista-los em ordem crescente: 75139; 75193; 75319; 75391; 75913 Ou seja, mais 5 números e chegamos ao número desejado. Portanto, temos $24 + 24 + 24 + 6 + 6 + 5 = 89$ números.

Comentários e/ou sugestões

Para resolver os problemas que envolvem a Permutações é uma tarefa que exige muito da interpretação, consiste em entender que a ordem importa em cada etapa, não adiar as peculiaridades e terminar de construir a solução.

4. COMBINAÇÕES

Neste capítulo apresentaremos o conceito de Combinação Simples e Repetição de tal forma que possamos diferenciar este agrupamento dos outros modelos de contagem. Em geral, os alunos sentem certa dificuldade em aplicar este conceito, pois supõem que seja outro agrupamento. Para exemplificar isso e com base em [7], vamos supor que numa classe com 10 alunos deseja-se formar uma comissão de três alunos para representação discente na escola. De quantas maneiras poderíamos fazer tal escolha? Para solucionar tal problema o aluno calcularia inicialmente o número de triplas ordenadas destes alunos e, pelo princípio fundamental da contagem, há $10 \times 9 \times 8 = 720$ possibilidades. Porém, vamos supor agora que A, B, e C estejam entre os 10 alunos da classe, que seriam escolhidos do seguinte modo:

(A, B, C), (A, C, B), (B, A, C), (B, C, A), (C, A, B), ou (C, B, A)

Ou seja, em cada um desses casos o que difere é a ordem, mas para a comissão não faz diferença, equivale a uma escolha só, correspondendo a uma única combinação. Logo, o número de possibilidades será de $\frac{720}{6} = 120$ comissões.

4.1 CONCEITUAÇÃO

De acordo com [1], dado o conjunto $I = \{a, b, c, d\}$, formemos todos os subconjuntos de I com três elementos:

$$\{a, b, c\}$$

$$\{a, b, d\}$$

$$\{a, c, d\}$$

$$\{b, c, d\}$$

Tais subconjuntos são chamados de "combinações simples de quatro elementos de I tomados três a três." Ou seja, uma combinação simples de três elementos de I é qualquer subconjunto de I formado por três elementos.

Observe que duas combinações simples quaisquer se diferenciam apenas pela natureza dos elementos e **não** pela apresentação desses elementos.

4.2 DEFINIÇÃO

Seja $I = \{a_1, a_2, a_3, \dots a_n\}$ um conjunto formado por n elementos e seja p, $p \in N$ e $p \leq n$. Chama-se "**Combinação Simples"** de p elementos de I todo subconjunto de I formado por p elementos. O número de combinações simples de n elementos tomados p a p e indicado por $C_{n,p}$ pode ser obtido pela expressão

$$C_{n,p} = \frac{A_{n,p}}{P_p} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!.(n-p)!}$$

Exemplo 1. Na figura 2, quantos triângulos ficam determinados pelos pontos distintos A, B, C, D e E da circunferência abaixo, ? [1]

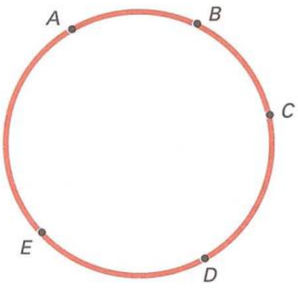


Figura 2

Solução: Um triângulo fica determinado por três pontos (vértices do triângulo) não colineares (não pertencentes a uma mesma reta). Como não existem três pontos colineares dentre os pontos A, B, C, D, E, qualquer agrupamento de três pontos distintos determina um triângulo. Logo, o número de triângulo é dado por

$$C_{5,3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = 10$$

Exemplo 2. Na figura 3, provar que o "o número d de diagonais de um polígono convexo de n vértices é dado por $d = \frac{n.(n-3)}{2}$". [1]

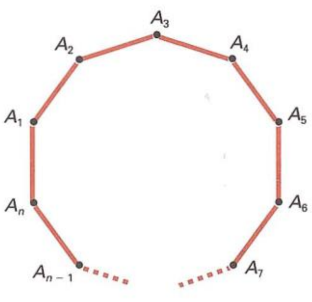


Figura 3

Solução: Se o polígono possui n vértices, então possui também n lados.

Algumas combinações dos n vértices dois a dois determinam diagonais; outras, não. Por exemplo, a combinação A_1A_3 determina um diagonal, enquanto a combinação A_1A_2 não determina diagonal, mas determina um lado do polígono. O número de combinações que não determinam diagonais é exatamente n lados do polígono. Então, para o cálculo do número de diagonais, basta calcularmos o número de combinações dos n vértices dois a dois e, do resultado, subtrair n.

Assim, temos:

$$d = C_{n,2} - n$$

$$d = \frac{n!}{2!\,(n-2)!} - n = \frac{n.(n-1).(n-2)!}{2.1.(n-2)!} - n = \frac{n.(n-1)}{2} - n = \frac{n.(n-1) - 2n}{2}$$

$$d = \frac{n[(n-1)-2]}{2} \qquad \therefore\ d = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Podemos destacar que os problemas que retratam a ausência de ordem, podem ser resolvidos sem a necessidade de fórmula. De fato, basta verificar todas as restrições que o problema apresenta e utilizar o Princípio Fundamental da Contagem. Vamos apresentar os seguintes exemplos:

Exemplo 1. Uma pizzaria oferece 15 diferentes sabores de pizza a seus clientes. De quantas maneiras uma família pode escolher três desses sabores? [7]

Solução. Escolher as pizzas P_1, P_2, P_3 é o mesmo que escolher P_2, P_1, P_3. Podemos observar que a ordem não importa, então vamos determinar a razão entre os produtos $15 \times 14 \times 13 = 2730$ e $3 \times 2 \times 1 = 6$, pois o primeiro produto quantifica todas as possibilidades de escolher as três pizzas e o segundo produto, quantifica todas as ordens em que ela pode aparecer. Assim, temos $\frac{2730}{6} = 455$ maneiras.

Exemplo 2. De uma classe de 15 alunos, sendo 9 meninos e 6 meninas, quantas comissões de dois meninos e duas meninas podem ser formadas? [7]

Solução. Podemos separar em duas etapas:
O número de maneiras de escolher os meninos é de $9 \times 8 = 72$ e como a ordem de escolha não importa, então dividimos por $2 \times 1 = 2$, ou seja $\frac{72}{2} = 36$.
O número de maneiras de escolher as meninas é de modo análogo ao dos meninos, ou seja, basta realizar a divisão $\frac{6\times5}{2\times1} = \frac{30}{2} = 15$.
Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem, o número de comissões será de $36 \times 15 = 540$.

4.3 COMBINAÇÃO COM REPETIÇÃO

Este é um dos agrupamentos que os alunos têm maior dificuldade, pois é pouco difundido pelos professores, ora por desconhecerem ora por não fazer parte do currículo escolar. Mostraremos, a partir de situações problemas, este agrupamento.

De acordo com [3], vamos responder à seguinte pergunta: quantas são as soluções inteiras e não negativas da equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$?

A resposta deste problema é representada por CR_n^p, ou seja, "Combinação com Repetição de n elementos tomados p a p. Para determinar o valor de CR_n^p, vamos representar cada solução da equação por uma fila de sinais $+ eI$. Por exemplo, para equação $x + y + z = 5$, as soluções $(2,2,1)$ e $(5,0,0)$ seriam representadas por $II + II + I$ e $IIIII + +$, respectivamente. Nessa representação, as barras indicam o valor de cada incógnita e os sinais de $+$ são usadas para separar as incógnitas.

Para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n = p$, cada solução seria representada por uma fila de $n - 1$ sinais de $+$ para separar as incógnitas; para separar n incógnitas, usamos $n - 1$ (sinais de $+$) e p barras I. Ora, para formar uma fila com $n - 1$ sinais de $+$ e p barras, basta escolher $n + p - 1$ lugares da fila aos p lugares onde serão colocados as barras I, o que pode ser feito de C_{n+p-1}^p modos. Portanto, $CR_n^p = C_{n+p-1}^p$.

Nos exemplos a seguir, aplicaremos a Combinação com Repetição e ampliar as suas aplicações em situações-problemas do cotidiano que envolve o aluno.

Exemplo 1. Uma pessoa deseja comprar 6 empadas numa lanchonete. Há empadas de camarão, frango, legumes e palmito. Sabendo que podem ser compradas de 1 a 6 empadas de cada tipo, de quantas maneiras diferentes esta compra pode ser feita? [4]

Solução: Chamando de $x_1, x_2, x_3\ \ e\ \ x_4$ aos tipos de empada, sendo camarão, frango, legumes e palmito, respectivamente, devemos determinar quantas são as soluções inteiras positivas para a equação $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$. Mas, sabemos que nenhuma dessas variáveis pode ser igual a zero, pois pelo enunciado deve-se comprar pelo menos uma empada de cada tipo. Para reverter essa situação da equação podemos reescrevê-la do seguinte modo $x_1 = 1 + y_1$, $x_2 = 1 + y_2$, $x_3 = 1 + y_3$ e $x_4 = 1 + y_4$, assim temos uma nova equação $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 2$ e o número de soluções inteiras não negativas desta equação é igual ao número de soluções inteiras positivas da equação inicial. Logo, temos que determinar uma Combinação com Repetição $CR_4^2 = C_5^2 = 10$ modos.

Exemplo 2. Podendo escolher entre 5 tipos de queijo e 4 marcas de vinho, de quantos modos é possível fazer um pedido num restaurante, com duas qualidades de queijo e 3 garrafas de vinho? [4].

Solução: Temos que escolher os dois tipos de queijo, entre os 5 disponíveis (distintos ou não). Isto será igual a $CR_5^2 = C_6^2 = 15$. Em seguida, temos que escolher 3 garrafas de vinho entre 4 vinhos possíveis disponíveis, ou seja, $CR_4^3 = C_6^3 = 20$. Logo, o número de pedidos de vinho, de acordo com a questão e pelo Princípio Fundamental da Contagem, será dado por $15 \times 20 = 300$ modos.

Comentários e/ou sugestões

Ressaltamos que para ter sucesso nos resultados com este agrupamento, temos que interpretar claramente se o problema é ordenado ou não. Depois de feita esta verificação deve-se escolher o agrupamento mais adequado.

Mostraremos a seguir algumas questões Exame Nacional do Ensino Médio que envolve Combinações Simples.

01. (ENEM 2009) Questão 145 – Caderno Azul

Doze times se inscreveram em um torneio de futebol amador. O jogo de abertura do torneio foi escolhido da seguinte forma: primeiro foram sorteados 4 times para compor o Grupo A. Em seguida, entre os times do Grupo A, foram sorteados 2 times para realizar o jogo de abertura do torneio, sendo que o primeiro deles jogaria em seu próprio campo, e o segundo seria o time visitante. A quantidade total de escolhas possíveis para o Grupo A e a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura podem ser calculadas através de:

A. uma combinação e um arranjo, respectivamente.
B. um arranjo e uma combinação, respectivamente.
C. um arranjo e uma permutação, respectivamente.
D. duas combinações.
E. dois arranjos.

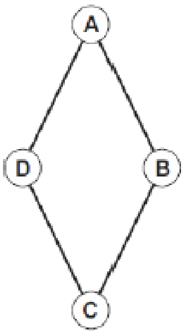
Solução: Para formar o grupo A serão escolhidos 4 times dos 12 que se escreveram e a ordem destas escolhas não importam. Logo, para determinar a quantia de possibilidades para este caso, basta calcularmos uma combinação de 12 elementos tomados 4 a 4. Para determinar a quantidade total de escolhas dos times do jogo de abertura basta utilizarmos um arranjo, pois o primeiro time jogará em seu próprio campo tendo relevância a ordem das escolhas. Portanto, basta determinar uma combinação e um arranjo. Alternativa A.

02 . (ENEM 2013) Questão 161 – Caderno Azul

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes. Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A Figura 4, ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices A, B, C e D correspondem às posições ocupadas pelas pedras.

Figura 4



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

A. 6

B. 12

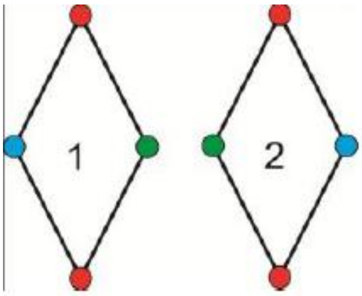
C. 18

D. 24

E. 36

Solução. Tome a posição A como a inicial e podemos colocar 3 pedras de quaisquer cor; em seguida a posição B, podem utilizar 2 pedras pois a que será utilizada na posição A não pode aparecer novamente; na sequência, 2 pedras na posição C, pois resta uma pedra que não foi utilizada e pode-se repetir a pedra da posição A e de modo análogo, na posição D, podemos utilizar 2 pedras.

Figura 5

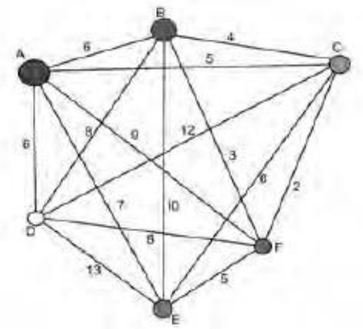


Logo, pelo Princípio Fundamental da Contagem temos $3 \times 2 \times 2 \times 2 = 24$ formatos. Porém, se observamos duas pedras destes formatos, como na figura a baixo, vemos que elas representam a mesma joia. Portando, o número de joias que podem ser obtidas será de $\frac{24}{2} = 12$.

03. (ENEM 2010) Questão 173 – Caderno Azul

João mora na cidade A e precisa visitar cinco clientes, localizados em cidades diferentes da sua. Cada trajeto possível pode ser representado por uma sequência de 7 letras. Por exemplo, o trajeto ABCDEFA, informa que ele sairá da cidade A, visitando as cidades B, C, D, E, e F nesta ordem, voltando para a cidade A. Além disso, o número indicado entre as letras informa o custo do deslocamento entre as cidades. A figura 6, mostra o custo de deslocamento entre cada uma das cidades.

Figura 6



Como João quer economizar, ele precisa determinar qual o trajeto de menor custo para visitar os cincos clientes. Examinando a figura, percebe-se que basta considerar somente parte das sequências, pois os trajetos ABCDEFA e AFEDCBA têm o mesmo custo. Ele gasta 1min 30s para examinar uma sequência e descartar sua simétrica, conforme apresentado. O tempo mínimo necessário para João verificar todas as sequências possíveis no problema é de:

A. 60 min.
B. 90 min.
C. 120 min.
D. 180 min.
E. 360 min.

Solução: Pelo enunciado, devemos quantificar todas as sequências distintas utilizando as letras B, C, D, E , F, ou seja, $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ porém descarta-se a metade pois geram o mesmo custo. Portanto, há 60 sequências. Se cada sequência ele leva 1min30s então o tempo mínimo será de $60 \times 1{,}5min = 90min$. Alternativa B.

04. (ENEM-2011) Questão 168 – Caderno AZUL

Em um jogo disputado em uma mesa de sinuca, há 16 bolas: 1 branca e 15 coloridas, as quais, de acordo com a coloração, valem de 1 a 15 pontos (um valor para cada bola colorida).O jogador acerta o taco na bola branca de forma que esta acerte as outras, com o objetivo de acertar duas das quinze bolas em quaisquer caçapas. Os valores dessas duas bolas são somados e devem resultar em um valor escolhido pelo jogador antes do inicio da jogada. Arthur, Bernardo e Caio escolhem os números 12, 17 e 22 como sendo resultados de suas respectivas somas. Com essa escolha, quem tem a maior probabilidade de ganhar o jogo é:

A. Arthur, pois a soma que escolheu é a menor.
B. Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma por ele, contra 4 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para a escolha de Caio.
C. Bernardo, pois há 7 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para a escolha de Arthur e 4 possibilidades para escolha de Caio.
D. Caio, pois há 10 possibilidades de compor a soma escolhida por ele, contra 5 possibilidades para escolha de Arthur e 8 possibilidades para de Bernardo.
E. Caio, pois a soma que escolheu é a maior.

Solução: Por mais que o enunciado refira-se a probabilidade, podemos resolvê-los a partir dos conceitos de contagem. Pelas regras do jogo, podemos contar todas as possibilidades de realizar duas jogadas para acertar as caçapas com a combinação de 16 bolas tomadas 2 a 2. Ou seja,

$$C_{16,2} = \frac{16!}{2!\,(16-2)!} = 120$$

Logo há, 120 possibilidades de combinar 2 bolas.

Por outro lado, Bernardo escolheu o número 12, logo ele tem as seguintes sequências $(1,11), (2,10), (3,9), (4,8)\ e\ (5,7)$. Arthur escolheu 17 e suas chances são, $(2;15), (3;14), (4;13), (5;12), (6;11), (7;10)\ e\ (8;9)$ e Caio escolheu 22 e suas chances são $(7,15), (8;14), (9;13)\ e\ (10;12)$. Portanto,

Bernardo tem $\frac{7}{120}$ > Arthur tem $\frac{5}{120}$ > Caio tem $\frac{4}{120}$.

Alternativa C.

Comentários e/ou sugestões

Estas questões foram aplicadas para alunos do ensino médio em sala de aula e observamos a maioria utilizou o Princípio Fundamental da Contagem para obter as soluções, porém suas maiores dificuldades foram de identificar as restrições de cada um que estava implícita. Eles chegavam a soluções e coincidiam com uma das alternativas, mas nem sempre é a correta.

Após a maioria tem solucionado as questões nós interferimos e demos uma sugestão que resumia em mostrar as restrições dos problemas, a partir daí que chegaram aos resultados corretos e utilizaram o agrupamento Combinação Simples.

5. PROBABILIDADE

Neste capítulo, abordaremos o conceito de Probabilidade que está presente em diversas áreas do conhecimento, como por exemplo, Biologia, Geografia, Estatística, etc. Apresentaremos alguns problemas, cujas soluções envolvem a probabilidade, utilizando um mínimo de fórmulas possíveis, visando não afligir a maioria dos alunos que estão no ensino médio. A ideia é enfatizar a compreensão dos conceitos que são subjacentes à teoria da probabilidade.

5.1 CONCEITOS BÁSICOS

De acordo com [3], as experiências que retidas sob as mesmas condições produzem geralmente resultados diferentes são chamados de *aleatórios*. Por exemplo, retira-se uma carta de um baralho e verifica-se se ela é ou não um coringa; compra-se uma lâmpada e verifica-se se ela queima ou não antes de 100h de uso; joga-se um dado até se obter um seis e conta-se o número de lançamentos. Neste contexto, podemos afirmar que em cada exemplo há elementos do conjunto especificado, onde se busca a chance de algo acontecer.

Chamaremos de *espaço amostral* o conjunto de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória. Representaremos o espaço amostral por S e só vamos considerar aqui o caso de S ser finito ou infinito enumerável. Os subconjuntos de S serão chamados de *eventos*. Diremos que um evento ocorre quando o resultado da experiência pertence ao evento.

Exemplo 1. Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{\text{cara}, \text{coroa}\}$ e há 4 eventos: $\emptyset$, $A = \{cara\}$, $B = \{coroa\}$ e S. $\emptyset$ é um evento que não ocorre nunca e é chamado de impossível. O evento A ocorre se e somente se o lançamento resulta em cara. S ocorre sempre e é chamando de evento certo.

Exemplo 2. Lança-se um dado e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{1,2,3,4,5,6\}$ e há 64 eventos. Alguns desses eventos são: $\emptyset$ que não ocorre nunca; S, que ocorre sempre; $A = \{1,3,5\}$ que ocorre se, e somente se, o resultado do lançamento for ímpar, etc.

5.2 EVENTOS

Dados A e B são eventos em um mesmo espaço amostral S, $A \cup B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A ou ocorre o evento B, isto é, ocorre pelo menos um dos eventos A e B; $A \cap B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorrem ambos os eventos A e B; $A - B$ é o evento que ocorre se, e somente se, ocorre o evento A, mas não ocorre o evento B; $\bar{A}$, chamado de evento oposto a A, é o evento que ocorre se, e somente se, o evento A não ocorre.

Associaremos a cada evento um número, que chamaremos de probabilidade do evento e que traduzirá nossa confiança na capacidade do evento ocorrer.

5.3 DEFINIÇÃO

Uma probabilidade é uma função que associa a cada evento A um número $P(A)$ de forma que:

I. Para todo evento A, $0 \leq P(A) \leq 1$.

II. $P(S) = 1$.

III. Se A e B são eventos *mutuamente exclusivos*, isto é, eventos que não podem ocorrer simultaneamente $(A \cap B = \emptyset)$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Exemplo 3. Lança-se uma moeda e observa-se a face que cai voltada para cima. O espaço amostral é $S = \{cara, coroa\}$ e há 4 eventos: $\emptyset$, $A = \{cara\}$, $B = \{coroa\}$, S.
As probabilidades destes quatro eventos são:

$$P(\emptyset) = 0,\ P(A) = P\{cara\} = 0{,}5,\ P(B) = P\{coroa\} = 0{,}5 \text{ e } P(S) = 1.$$

Verifique que as três condições da definição de probabilidade são satisfeitas.

Os modelos probabilísticos que são usados com a maior frequência são exatamente os apresentados no exemplo anterior. São chamados de modelos equiprobabilísticos, ou seja, dados n elementos no espaço amostral, queremos que todos os eventos unitários tenham a mesma probabilidade. Para isto, atribuímos a cada evento unitário a probabilidade $\frac{1}{n}$. Assim, se

$S = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ e $P(x_1) = P(x_2) = P(x_3) = \cdots = P(x_n) = k$, temos, por lll.

$1 = P(S) = P\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\} = P(\{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\} \cup \dots \cup \{x_n\}) = P(\{x_1\}) + P(\{x_2\}) + P(\{x_3\}) + \cdots + P(\{x_n\}) = k + k + k + \cdots + k = nk$ e $k = \frac{1}{n}$.

De modo análogo, nesse modelo, se um evento X é formado por j elementos, então $P(X) = \frac{j}{n}$. Ou seja, a probabilidade de um evento é a razão entre o número de casos favoráveis ao evento e o número total de casos possíveis. Foi esse modelo adotado por vários matemáticos como *Cardano*[1], *Pascal*[2] e *Laplace*[3], entre outros, no estudo dos jogos de azar.

Para termos uma melhor convicção da maioria dos conceitos apresentados anteriormente, abriremos uma seção de teoremas importantes que auxiliam nas aplicações em probabilidade, pois, julgamos que com eles ganha-se tempo e justificam-se boa parte dos resultados.

Cardano[1],Jerônimo (1501-1576), matemático italiano.

Pascal[2] , Blaise (1623-1662), matemático francês.

Laplace[3], Pierre Simon (1749-1827), matemático francês.

5.3 TEOREMAS [4]

Teorema 1 . “A probabilidade do evento certo é 1”

Demonstração

De fato, o evento certo é $S = \{a_1 + a_2 + \cdots a_k\}$ e por definição: $P(S) = p_1 + p_2 + \cdots p_k = 1$.

Teorema 2. “Se $A \subset B$ então $P(A) \leq P(B)$”

Demonstração

1) Se $A = B$, por definição de $P(A) = P(B)$ e, portanto $P(A) \leq P(B)$.

2) Se $A \neq B$ e

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3 \ldots a_r\}$ e $B = \left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_r, a_{r+1}, \ldots a_{r+q}\right\}$
então:

$$P(A) = p_1 + p_2 + \cdots + p_r$$

$$P(B) = p_1 + p_2 + \cdots + p_r + p_{r+1} + \cdots + p_{r+q}.$$

Como:

$p_1, p_2, \ldots, p_r, \ldots, p_{r+q}$ são não negativos, segue-se que:

$$P(A) \leq P(B)$$

No caso particular de $A = \emptyset$, temos $P(A) = 0$ e $P(B) \geq 0$, e portanto $P(A) \leq P(B)$

Teorema 3 “Se A é um evento, então $0 \leq P(A) \leq 1$”.

Demonstração

$$\emptyset \subset A \subset S$$

Logo, pelo teorema 2:

$P(\emptyset) \leq P(A) \leq P(S)$ e satisfaz $0 \leq P(A) \leq 1$.

Teorema 4."Se A e B são eventos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$".

Demonstração

$$P(A \cup B) = \sum_{a_j \in A \cup B} p_j.$$

Por outro lado,

$$P(A) = \sum_{a_j \in A} p_j \; e P(B) = \sum_{a_j \in B} p_j.$$

Ora, quando somamos $P(A) + P(B)$ as probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cap B$ são computadas duas vezes (uma, por estarem em A e outra, por estarem em B). Portanto

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ é a soma das probabilidades dos eventos elementares contidos em $A \cup B$, logo

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Em particular, se A e B são eventos mutuamente exclusivos $(A \cap B = \emptyset)$ e $P(\emptyset) = 0$ então $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(\emptyset) = P(A) + P(B)$

Este resultado pode ser generalizado para n eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, mutuamente exclusivos dois a dois, da seguinte forma:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Teorema 5. "Se A é um evento então $P(A^C) = 1 - P(A)$"

Demonstração

Como $A \cap A^C = \emptyset$ e $A \cup A^C = S$ segue-se pelo teorema, que $P(A \cup A^C) = P(A) + P(A^C)$ logo $1 = P(A) + P(A^C)$, ou seja, $P(A^C) = 1 - P(A)$.

5.4 PROBABILIDADE CONDICIONAL

A probabilidade de um evento B ocorrer sabendo que já ocorreu outro evento A *chama-se probabilidade condicional.* Representa-se probabilidade condicional por $P(B/A)$ e lê-se: probabilidade condicional de B ocorrer dado que A já ocorreu [4]. Definimos esta probabilidade condicional da seguinte forma:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Ou seja, a probabilidade de B ocorrer, dado que A já ocorreu é a razão entre $P(A \cap B)$ e $P(A)$. Com base neste conceito apresentamos alguns exemplos:

Exemplo 1. Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Escolhe-se uma delas ao acaso e vê-se que o número nela marcado é maior do que 8. Qual é a probabilidade de esse número ser múltiplo de 5?. [7]

Solução 1

$S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$.

Sejam os eventos:

A: Escolhe-se uma bola e verifica-se que o número nela marcado é maior do que 8, isto é, $A = \{9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$

B: Probabilidade deste número ser múltiplo de 5, isto é, $B = \{10,15,20\}$. Assim,

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{20}}{\frac{12}{20}} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 2. Num prédio residencial há dois blocos: A e B. No bloco A, há 80 apartamentos, dos quais 15% estão em atraso com o condomínio. No bloco B, há 50 apartamentos, 10% dos quais com taxas atrasadas. As fichas de todos os moradores estão reunidas, e uma delas é escolhida ao acaso. Sabe-se que a ficha escolhida é de um condômino em atraso. Qual é a probabilidade de que ele seja do bloco B? [7]

Solução: Sejam os

Evento A: um condômino em atraso.

Evento B: um condômino do bloco B

Para termos uma melhor visualização do problema, sugerimos a construção de uma tabela,

	Bloco A	Bloco B	Total
Atraso	12	5	17
Quite	68	45	113
Total	80	50	130

Assim, podemos determinar a probabilidade com maior facilidade,

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{5}{130}}{\frac{17}{130}} = \frac{5}{17}$$

Exemplo. 3 (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas se verificou que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas. Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita? [7]

Solução: Com base nos dados, construímos a tabela

	Suspeitas	Não suspeitas	Total
Fraudulentas	0,02	0,018	0,038
Não fraudulentas	0,08	0,882	0,962
Total	0,1	0,9	1,0

Estes dados foram obtidos da seguinte forma:

- 20% entre as suspeitas são fraudulentas: $0{,}2 \times 0{,}1 = 0{,}02$.
- 2% entre as não suspeitas são fraudulentas: $0{,}02 \times 0{,}9 = 0{,}018$.

Assim, para determinarmos a probabilidade da declaração ter sido suspeita, sendo ela fraudulenta basta

$$P(Suspeita/Fraudulenta) = \frac{P(Suspeita \cap Fraudulenta)}{P(Fraudulenta)} = \frac{0{,}02}{0{,}038} \cong 52{,}6\%$$

5.5 EVENTOS INDEPENDENTES

Uma consequência importante da definição de probabilidade condicional é a seguinte:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ , e como por definição } P(A) > 0$$

$$P(A \cap B) = P(B/A).P(A)$$

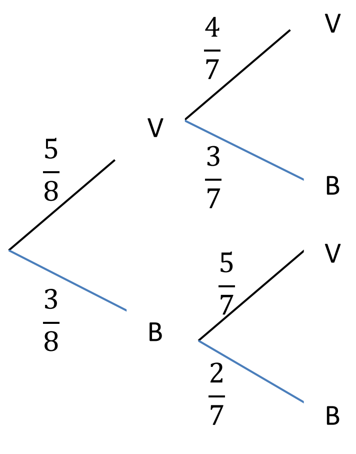
Isto é, a probabilidade da ocorrência simultânea de dois eventos $P(A \cap B)$ é o produto da probabilidade de um deles pela probabilidade do outro, dado o primeiro.[4] Vejam os exemplos a seguir:

Exemplo.1 Uma urna contém 5 bolas vermelhas e 3 brancas. Duas delas são retiradas sucessivamente e sem reposição. Qual é a probabilidade de terem saído 2 bolas brancas? [7]

Solução: Para esta solução definiremos a árvore de probabilidade.

Definição: A árvore de probabilidade ou diagrama da árvore consiste em representar todas as possibilidades de todos os experimentos de uma determinada situação-problema. Tais diagramas são úteis sempre que o experimento aleatório possua diversos estágios. Esse tipo de diagrama provê uma maneira conveniente de organizar as informações de um conjunto de eventos condicionais. [8]

Utilizaremos árvore de probabilidade para exemplificar a situação problema,



Estamos interessados na retirada de duas bolas brancas e como é sem reposição, logo tem-se que

$$P(B \cap B) = \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$$

Exemplo. 2 (Unesp-SP) Um estudo de grupos sanguíneos humanos realizado com 1000 pessoas (sendo 600 homens e 400 mulheres) constatou que 470 pessoas tinham o antígeno A, 230 pessoas tinham o antígeno B e 450 pessoas não tinham nenhum dos dois. Supondo independência entre sexo e grupo sanguíneo, qual a probabilidade de que uma pessoa do grupo, escolhida ao acaso, seja homem e tenha os antígenos A e B simultaneamente? [7]

Solução: Definiremos primeiramente o diagrama de Venn para iniciarmos a solução deste problema.

Definição: O matemático inglês John Venn[3] criou um sistema de representação de diagramas no intuito de determinar uniões e intersecções, facilitando a organização e interpretação de dados pesquisados. A representação através desses diagramas recebeu o nome de Diagrama de Venn em retribuição à sua grande contribuição para matemática. [9]

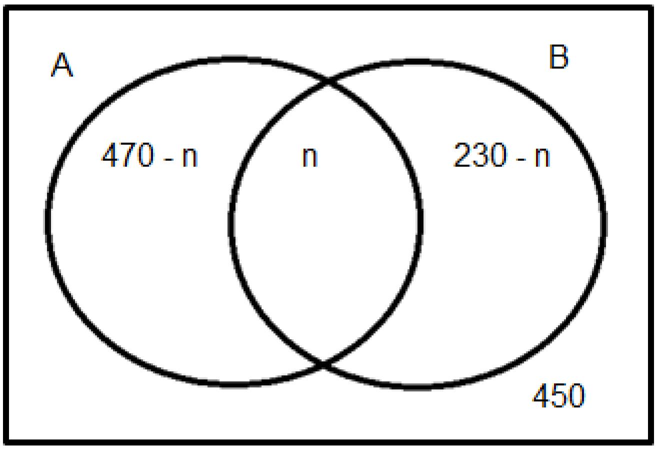


Figura 7

Pelo enunciado, determinamos a interseção dos antígenos A e B.

$$470 - n + n + 230 - n + 450 = 1000$$
$$n = 150$$

Sabendo desta informação temos condições de determinar a probabilidade pedida,

$$P\big(homem \cap (A \cap B)\big) = P(homem) \times P(A \cap B) = \frac{600}{1000} \times \frac{150}{1000} = \frac{9}{100} = 9$$

$Venn^3$, John (1834-1923), matemático inglês.

5.6. LEI BINOMIAL DE PROBABILIDADE

De acordo com [5], apresentamos a lei Binomial de probabilidade, pois é um tema pouco difundido e os alunos tem pouca informação ou ainda desconhece totalmente a sua existência. Consideramos que seja relevante e mostraremos de modo mais claro possível.

Vamos considerar um experimento que se repete **n** vezes. Em cada um desses experimentos temos:

$P(E) = p \rightarrow$ probabilidade de ocorrer o evento E (sucesso)

$P(\bar{E}) = 1 - p \rightarrow$ probabilidade de ocorrer o evento $\bar{E}$ (insucesso)

A probabilidade do evento E ocorrer k vezes, das n que o experimento se repete, é dada por uma lei binomial. Vamos considerar que E ocorra k vezes e que $\bar{E}$ ocorra $(n-k)$ vezes. Então, temos:

$$\overbrace{E \quad E \quad \ldots \quad E \quad \bar{E} \quad \bar{E} \quad \ldots \quad \bar{E}}^{n\ \textbf{vezes}}$$

$$\underbrace{p \quad p \quad p}_{k\ \textbf{vezes}} \quad \underbrace{(1-p) \quad (1-p) \quad (1-p)}_{(n-k)\ \textbf{vezes}}$$

A probabilidade de ocorrer k vezes o evento E e $(n-k)$ vezes o evento $\bar{E}$ é o produto

$$p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

As k vezes do evento E e as $(n-k)$ vezes do evento $\bar{E}$ podem ocupar qualquer ordem. Então, temos que considerar uma permutação com n elementos dos quais há repetição de k elementos e de $(n-k)$ elementos, ou seja:

$$P_n^{[k,(n-k)]} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Portanto, a probabilidade de ocorrer k vezes o evento E nos experimentos é dada por:

$$P_k(E) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

A lei binomial deve ser aplicada nas seguintes condições:

- O experimento deve ser repetido nas mesmas condições as n vezes.
- Em cada experimento devem ocorrer os eventos E e $\bar{E}$.
- A probabilidade do evento E deve ser constante em todas as n vezes.
- Cada experimento é independente dos demais.

Para um melhor entendimento vamos apresentar os seguintes exemplos:

Exemplo 1. Lançando-se uma moeda não viciada quatro vezes, qual é a probabilidade de ocorrerem três caras? [5]

Solução: Está implícito que ao ocorrerem três caras deve ocorrer uma coroa. A figura 8 retrata uma das possíveis situações que satisfazem o problema o de ser:

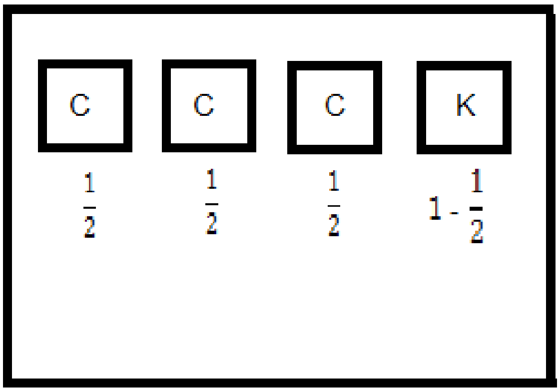


Figura 8

Temos:

$n = 4$

$k = 3$

$P(E) = \frac{1}{2}$, $P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{2}$

A probabilidade de que essa situação é dada por

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1$$

Mas essa não é a única situação em que ocorrem 3 caras e 1 coroa. Para quantificar todas as opções haja vista que a ordem não importa então temos

$$P_4^{3,1} = \frac{4!}{3! \cdot 1!} = \binom{4}{3} = 4$$

Logo, a probabilidade de ocorrerem três caras é:

$$P_3(E) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 2. Qual é a probabilidade de numa família de quatro crianças serem no máximo duas meninas? [5]

Solução. Sejam os eventos:

E: ser menina

$\bar{E}$: não ser menina

Temos que $P(E) = \frac{1}{2}$ e $P(\,\bar{E}) = \frac{1}{2}$

A probabilidade de serem no máximo de duas meninas é igual à probabilidade de ser, nenhuma, ou uma, ou duas meninas.

- Nenhuma menina

$$P_0(E) = \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{16} = \frac{1}{16}$$

- Uma menina

$$P_1(E) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} = \frac{4}{16}$$

- Duas meninas

$$P_2(E) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 6 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{6}{16}$$

Seja $P(X)$ a probabilidade de serem no máximo de duas meninas. Então, temos:

$$P(X) = P_0(E) + P_1(E) + P_2(E) = \frac{1}{16} + \frac{4}{16} + \frac{6}{16} = \frac{11}{16}$$

Exemplo 3. Em um teste de dez questões do tipo V (verdadeiro) ou F(falso), a probabilidade de um candidato acertar oito é: [5]

A. $\frac{45}{4096}$

B. $\frac{90}{1024}$

C. $\frac{45}{1024}$

D. $\frac{90}{4096}$

E. $\frac{1}{1024}$

Solução. Sejam os eventos

E: verdadeiro

$\bar{E}$: falso

Temos que $P(E) = \frac{1}{2}$ e $P(\,\bar{E}) = \frac{1}{2}$

$$P_8(E) = \binom{10}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 45 \cdot \frac{1}{256} \cdot \frac{1}{4} = \frac{45}{1024}$$

Portanto, a probabilidade de acertar o oito é de $\frac{45}{1024}$, ou seja, alternativa C.

Além destes exemplos, podemos destacar a importância desses dos conceitos de Probabilidade em questões do Exame Nacional do Ensino Médio, tais como

01. (Enem 2013) – Questão 146 – caderno azul

Uma loja acompanhou o número de compradores de dois produtos, A e B, durante os meses de janeiro, fevereiro e março de 2012. Com isso, obteve este gráfico na figura 9:

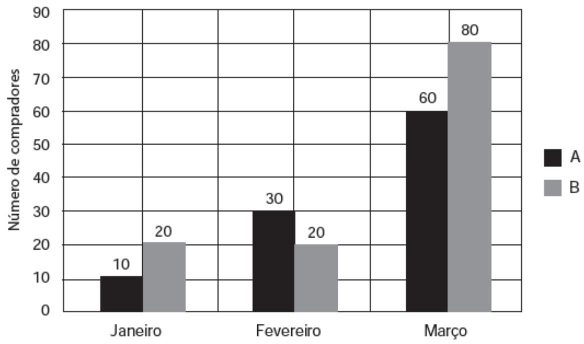


Figura 9

A loja sorteará um brinde entre os compradores do produto A e outro produto B. Qual é a probabilidade de que os dois sorteados tenham feito suas compras em fevereiro de 2012?

A. $\frac{1}{20}$

B. $\frac{3}{243}$

C. $\frac{5}{22}$

D. $\frac{6}{25}$

E. $\frac{7}{15}$

Solução A probabilidade de dois eventos independentes ocorrerem simultaneamente é calculada através do produto das probabilidades de cada um ocorrer separadamente. A probabilidade do ganhador do sorteio dos compradores do produto A ter realizado a compra no mês de fevereiro é de $\frac{30}{100}$, pois 30 fizeram a compra em fevereiro em um total de 10 + 30 + 60 = 100 produtos comprados. Já a probabilidade para o produto B é de $\frac{20}{100}$ pois 20 compraram em fevereiro em um total de 20 + 20 + 80 = 120 produtos comprados. Assim a probabilidade pedida é de $\frac{30}{100} . \frac{20}{120} = \frac{1}{20}$. A alternativa A.

02. (Enem 2013) – Questão 169 – caderno azul

Considere o seguinte jogo de apostas:

Numa cartela com 60 números disponíveis, um apostador escolhe de 6 a 10 números. Dentre os números disponíveis serão sorteados apenas 6. O apostador será premiado caso os 6 números sorteados estejam entre os números escolhidos por ele numa mesma cartela. O quadro apresenta o preço de cada cartela, de acordo com a quantidade de números escolhidos.

Quantidade de números escolhidos em uma cartela	Preço da cartela (R$)
6	2,00
7	12,00
8	40,00
9	125,00
10	250,00

Cinco apostadores, cada um com R$ 500,00 para apostar, fizeram as seguintes opções:

Artur: 250 cartelas com 6 números escolhidos;

Bruno: 41 cartelas com 7 números escolhidos e 4 cartelas com 6 números escolhidos;

Caio: 12 cartelas com 8, números escolhidos e 10 cartelas com 6 números escolhidos;

Douglas: 4 cartelas com 9 números escolhidos;

Eduardo: 2 cartelas com 10 números escolhidos.

Os dois apostadores com maiores probabilidades de serem premiados são

A. Caio e Eduardo
B. Artur e Eduardo
C. Bruno e Caio
D. Artur e Bruno
E. Douglas e Eduardo

Solução: Como serão sorteados 6 números sem importar a ordem:

APOSTADOR	NÚMERO DE SENAS QUE PODEM SER SORTEADAS PELO APOSTADOR
Artur	$250 \times C_{6,6} = 250 \times 1 = 250.$
Bruno	$41 \times C_{7,6} + 4 \times C_{6,6} = 41 \times 7 + 4 = 291.$
Caio	$18 \times C_{8,6} + 10 \times C_{6,6} = 12 \times 28 + 10 = 346.$
Douglas	$4 \times C_{9,6} = 4 \times 84 = 336.$
Eduardo	$2 \times C_{10,6} = 2 \times 210 = 420.$

Logo Caio e Eduardo tem as maiores chances.

03. (Enem 2009) – Questão 145 – caderno azul

O controle de qualidade de uma empresa fabricante de telefones celulares aponta que a probabilidade de um aparelho de determinado modelo apresentar defeito de fabricação é de 0,2%. Se uma loja acaba de vender 4 aparelhos desse modelo para um cliente, qual é a probabilidade de esse cliente sair da loja com exatamente dois aparelhos defeituosos?

A. $2 \times (0{,}2)^4$
B. $4 \times (0{,}2)^2$
C. $6 \times (0{,}2)^2 \times (99{,}8)^2$
D. $4 \times (0{,}2)$
E. $6 \times (0{,}2) \times (99{,}8)$

Solução. Se o cliente comprará 4 aparelhos, sendo exatamente dois aparelhos defeituosos (D), dois não apresentarão defeitos (N). Se a probabilidade de um modelo apresentar defeito é de 0,2%, a probabilidade de não apresentar será de 100% - 0,2% = 99,8%. Os quatro aparelhos podem ser comprados de várias formas, sendo DDNN, DNDN e NDND algumas delas. Para calcular o total de maneiras que eles podem ser comprados, calcula-se o número de permutações de 4 com 2 repetições (D) e mais duas repetições . Multiplica-se este valor pela probabilidade de serem 2 defeituosos (0,2%) com a probabilidade de 2 não apresentarem defeitos (99,8%), resultando em $6.(0{,}2)^2.(99{,}8)^2$, ou seja, alternativa C.

6. PROBABILIDADE CONDICIONAL: UMA METODOLOGIA ALTERNATIVA

Neste capítulo apresentaremos uma metodologia alternativa de solucionar problemas de probabilidade condicional, pois é uma das principais dificuldades que os alunos têm dentro deste conteúdo. Uma das explicações seria o fato da fórmula ser de difícil entendimento e a falta de pré-requisitos mínimos para a sua assimilação.

Assim, entendemos que para suprir essa dificuldade teríamos buscar outra maneira de fazer com que os discentes aprendessem a solucionar os problemas deste nível, então após realizarmos algumas buscas por livros que pudessem auxiliar esta situação, encontramos em um dos livros do IEZZI [7] uma estratégia que se resume em: interpretar o problema, identificar a condição imposta ao espaço amostral e aplicar a definição de Probabilidade. Desta forma, o cálculo se torna mais atraente ao aluno, pois dispensa de mais uma fórmula e facilita o trabalho.

Os resultados são notórios de imediato, até alunos que possuem as maiores dificuldades perceberam que realmente torna-se mais fácil encontrar a solução para os problemas inclusive é um excelente recurso em problemas de outras disciplinas que precisam da Probabilidade para encontrar as soluções, por exemplo, na Genética e que se aplica em questões de concursos e vestibulares.

Vamos mostrar alguns exemplos que pode ser aplicada esta ideia sem prejuízo e algumas questões Exame Nacional do Ensino Médio que envolve Probabilidade Condicional e utilizaremos esta metodologia como uma solução. Lembrando que estamos interessados em utilizar a definição de Probabilidade como principal recurso.

6.1 METODOLOGIA ALTERNATIVA

Nesta seção detalharemos os passos desta metodologia:

1) Ler e interpretar todo o problema de modo a identificar a(s) condição(ões) a serem impostas;

2) Após ter verificado esta condição, reduzir o espaço amostral;

3) Por fim, aplicar a definição de probabilidade.

Para retratar estes passos amos resolveremos os mesmos exemplos da seção 5.4.

Exemplo 1. Uma urna contém 20 bolas numeradas de 1 a 20. Escolhe-se uma delas ao acaso e vê-se que o número nela marcado é maior do que 8. Qual é a probabilidade de esse número ser múltiplo de 5?. [7]

Solução

1) Pelo enunciado, sabe-se que o número visto é maior que 8;
2) O espaço amostral se resume a $S = \{9,10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20\}$;
3) Seja o evento $A = \{10, 15, 20\}$ de casos favoráveis, logo pela definição de Probabilidade.

$$P(A) = \frac{1}{4}$$

Exemplo 2. Num prédio residencial há dois blocos: A e B. No bloco A, há 80 apartamentos, dos quais 15% estão em atraso com o condomínio. No bloco B, há 50 apartamentos, 10% dos quais com taxas atrasadas. As fichas de todos os moradores estão reunidas, e uma delas é escolhida ao acaso. Sabe-se que a ficha escolhida é de um condômino em atraso. Qual é a probabilidade de que ele seja do bloco B? [7]

Solução:

1) Pelo enunciado, sabe-se que a ficha escolhida é de condômino em atraso;
2) Assim o espaço amostral será de $0{,}15 \times 80 + 0{,}10 \times 50 = 17$.
3) Seja o evento $A = 0{,}10 \times 50 = 5$ de casos favoráveis, logo pela definição de Probabilidade,

$$P(A) = \frac{5}{17}$$

Exemplo 3. (FGV-SP) Num certo país, 10% das declarações de imposto de renda são suspeitas e submetidas a uma análise detalhada; entre estas se verificou que 20% são fraudulentas. Entre as não suspeitas, 2% são fraudulentas. Se uma declaração é fraudulenta, qual a probabilidade de ela ter sido suspeita? [7]

Solução:

1) Pelo enunciado, entende-se que a pessoa faz uma declaração fraudulenta;
2) O espaço amostral $0{,}1 \times 0{,}2 + 0{,}02 \times 0{,}9 = 0{,}038$;
3) Seja o evento $A = 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}02$ de casos favoráveis, logo pela definição de Probabilidade, $P(A) = \frac{0{,}02}{0{,}038} \cong 52{,}6\%$

Nestes exemplos a seguir as soluções são apresentadas foram produzidas neste mesmo método.

Exemplo 4. Um apostador da mega sena apostou em seis números pares, dentre os números 01, 02,..., 60. No dia do sorteio, ele soube que seis números pares haviam sido sorteados. Qual é a probabilidade de que esse apostador tenha acertado os seis números? [7]

Solução: Pelo enunciado, dos 60 números disponíveis no volante 30 números são de pares e para quantificar todas as possibilidades de combinar seis números pares temos uma $C_{30,6} = 593775$, haja vista que a ordem não importa. Portanto, pela definição de Probabilidade, tem-se $\frac{1}{593775}$.

Exemplo 5. (Fuvest-SP - adaptada) Uma planta heterozigótica de ervilha com vagens infladas produziu, por autofecundação, descendência constituída por dois tipos de indivíduos, com vagens infladas e com vagens comprimidas (ou achatadas). Tomando ao acaso um descendente com vagens infladas, qual a probabilidade de ele ser homozigoto? [6]

Solução: Analisando o enunciado, utilizando pela 1º Lei de Mendel[3] e com o recurso do quadro de Punnet[4] abaixo,

Gametas Masculinos

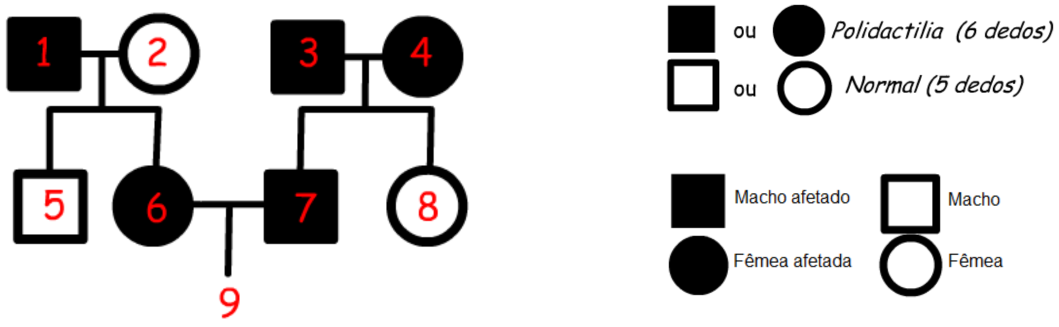
Gametas Femininos	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Iremos supor que Aa heterozigótica masculina e Aa heterozigótica feminina que no quadro acima gerou estes quatro resultados. Assim podemos observar que a vagem escolhida é inflada (dominante A) o que nos permite descartar a opção aa (recessiva a), ou seja, temos um espaço amostral de três possibilidades. Portanto, pela definição de Probabilidade, $\frac{1}{3}$.

Mendel, Gregor[3] (1822-1884), biólogo e botânico austríaco.

Punnett, Reginald[4] (1875-1967), zoólogo britânico.

Exemplo 7. Os Heredogramas, ou árvores genealógicas, ou ainda, pedigree, são representações gráficas de indivíduos dentro de uma família. Através dos heredograma é possível descobrir se uma determinada característica é ou não hereditária. No heredograma abaixo vamos analisar se um indivíduo possui ou não polidactilia (6 dedos). Após esta analise vamos determinar a probabilidade do indivíduo nº 9 nascer normal e do sexo masculino. [6]



Solução: Analisando o heredograma podemos observar que a probabilidade do indivíduo nº 7 ser heterozigoto (Aa); esta é a condição para que nasça a partir dele uma criança normal é de $\frac{2}{3}$. Além disso, como ser normal neste caso é uma característica recessiva a probabilidade do indivíduo nº 9 nascer normal (bb) é de $\frac{1}{4}$ e por fim a probabilidade do indivíduo nascer do sexo masculino é de $\frac{1}{2}$, então a probabilidade do indivíduo nº 9 nascer normal e do sexo masculino será obtida pelo produto das probabilidades $\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{12}$

Neste momento, apresentaremos algumas questões do Exame Nacional do Ensino Médio que para obter uma solução será utilizada esta metodologia.

01. (ENEM 2013) Questão 155 – Caderno Azul

Numa escola com 1200 alunos foi realizada uma pesquisa sobre o conhecimento desses em duas línguas estrangeiras, inglês e espanhol.
Nessa pesquisa constatou-se que 600 alunos falam inglês, 500 falam espanhol e 300 não falam qualquer um desses idiomas.

Escolhendo-se um aluno dessa escola ao acaso e sabendo-se que ele não fala inglês, qual a probabilidade de que esse aluno fale espanhol?

A. $\frac{1}{2}$
B. $\frac{5}{8}$
C. $\frac{1}{4}$
D. $\frac{5}{6}$
E. $\frac{5}{14}$

Solução: Podemos observar que pelo enunciado a diferença entre o total de alunos da escola e os que não falam qualquer um dos idiomas $1200 - 300 = 900$ que falam pelo menos um dos dois idiomas. Para ter uma melhor visualização vamos observar o diagrama de Venn [9], na figura 10:

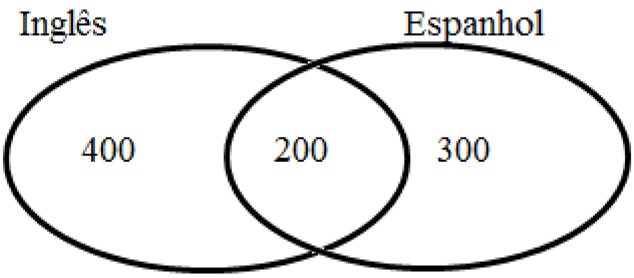


Figura 10

Pelo enunciado temos que 600 falam inglês e 500 falam espanhol, porém sabemos que há 900 alunos que falam pelo menos um desse idiomas, ou seja, temos uma diferença de 200 alunos que falam ambos os idiomas. Sabemos que o aluno escolhido não fala inglês, ou seja, o aluno fala espanhol ou nenhuma dos dois idiomas. Logo, pela definição de Probabilidade temos 300 casos favoráveis em 600 possíveis que representa $\frac{300}{600} = \frac{1}{2}$, alternativa A.

02. (Enem 2009) – Questão 25 – caderno azul

Os planos de controle e erradicação de doenças em animais envolvem ações de profilaxia e dependem em grande medida da correta utilização e interpretação de testes diagnósticos. O quadro mostra um exemplo hipotético de aplicação de um teste diagnóstico.

Resultado do teste	Condição real dos animais		Total
	Infectado	Não infectado	
Positivo	45	38	83
Negativo	5	912	917
Total	50	950	1000

Manual Técnico do Programa Nacional de Controle e Erradicação da Brucelose e da Tuberculose Animal – PNCEBT. Brasília: Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento, 2006 (adaptado).

Considerando que, no teste diagnóstico, a sensibilidade é a probabilidade de um animal infectado ser classificado como positivo e a especificidade é a probabilidade de um animal não infectado ter resultado negativo, a interpretação do quadro permite inferir que

A. a especificidade aponta um número de 5 falsos.

B. o teste, a cada 100 indivíduos infectados, classificaria 90 como positivos.

C. o teste classificaria 96 como positivos em cada 100 indivíduos não infectados.

D. ações de profilaxia são medidas adotadas para o tratamento de falsos positivos.

E. testes de alta sensibilidade resultam em maior número de animais falsos negativos comparado a um teste de baixa sensibilidade.

Solução

Pelo enunciado, podemos observar que há espaços amostrais o que difere uns dos outro. Mas percebemos o que o problema quer é que analisamos as alternativas e julgarmos a única com coerência. Assim temos que, na alternativa B, observa-se claramente uma coerência na sua apresentação, pois se afirma que de cada 100 indivíduos infectados 90 classificaria como positivos, o que reflete a tabela apresentada de cada 50 indivíduos infectados 45 classificaria como positivos, ou seja, há uma proporção em destaque. Alternativa B é a correta.

03. (Enem 2007) – Questão 5 – caderno azul

A queima de cana aumenta a concentração de dióxido de carbono e de material particulado na atmosfera, causa alteração do clima e contribui para o aumento de doenças respiratórias. A tabela abaixo apresenta números relativos a pacientes internados em um hospital no período da queima de cana.

Pacientes	Problemas respiratórios causados pelas queimadas	Problemas respiratórios resultantes de outras causas	Outras doenças	Total
Idosos	50	150	60	260
Crianças	150	210	90	450
Total	200	360	150	710

Escolhendo-se aleatoriamente um paciente internado nesse hospital por problemas respiratórios causados pelas queimadas, a probabilidade de que ele seja uma criança é igual a

A. 0,26, o que sugere a necessidade de implementação de medidas que reforcem a atenção ao idoso internado com problemas respiratórios.
B. 050, o que comprava ser de grau médio a gravidade dos problemas respiratórios que atingem a população nas regiões queimadas.
C. 0,63, o que mostra que nenhum aspecto relativo à saúde infantil pode ser negligenciado.
D. 0,67, o que indica a necessidade de campanhas de conscientização que objetivem a eliminação das queimadas.
E. 0,75. O que sugere a necessidade de que, em áreas atingidas pelos efeitos das queimadas, o atendimento hospitalar no setor de pediatria seja reforçado.

Solução. Pelo enunciando e analisando a tabela podemos observar que o espaço amostral será reduzido pois se escolhe um paciente internado com problemas respiratórios causados pelas queimadas são 200. Sendo 50 crianças os casos favoráveis, logo a probabilidade será de $\frac{150}{200} = 0{,}75$,ou seja, alternativa correta é a alternativa E.

7. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O principal objetivo ao desenvolvermos este trabalho sobre os conteúdos de análise combinatória, probabilidade e probabilidade condicional foi o de inserir exemplos e exercícios de concursos e do Exame Nacional do Ensino Médio para ser trabalhadas em sala de aula, abrindo um leque maior de possibilidades de situações, uma vez que e preciso explorar com mais afinco essas áreas, pois a mesma e rica em aplicações.

Para atingirmos o objetivo proposto, a priori, realizamos uma abordagem pelas definições da análise combinatória e probabilidade nos primeiros capítulos, além de apresentar os teoremas que são referentes à Probabilidade, esses conhecimentos são imprescindíveis para a sequencia do trabalho.

Em seguida, mostramos no conteúdo de Probabilidade Condicional uma metodologia alternativa de aplicação, explanando sobre a utilização da definição de Probabilidade sem a necessidade de outra fórmula para a execução e solução de situações problemas. Para isso, trazemos exemplos que necessite exclusivamente da interpretação dos problemas, de modo à verificação da redução do espaço amostral e por fim aplica-se a definição. Além de mostrar problemas que adentram a Biologia como uma aplicação em outro campo fora da Matemática.

Abordamos esse tema, pois entendemos que, nesse estudo, necessitamos dar maior enfoque nessa área, uma vez que esse tema é pouco tratado pelos livros didáticos do Ensino Médio e acreditamos que deve haver uma efetiva ação para pelo menos amenizar essa situação. Utilizando uma diversificação nas atividades que integrem os alunos e que sejam contextualizadas é um caminho, pois vemos as dificuldades dos mesmos em solucionar problemas nesta magnitude.

Concluímos, ao fim desse texto, que se faz necessário a diversificação de abordagens acerca de um determinado tema, com a utilização de várias atividades que auxiliem de forma significativa o processo de aprendizagem. A Análise Combinatória é o tema que merece uma dedicação, disciplina e vontade de compreender as diversas aplicabilidades nos diversos campos de atuação.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática,** 1º ed. São Paulo, SP: Editora Moderna 2002, v. 2.

[2] LIMA, Elon lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **Temas e Problemas Elementares,** Coleção do Professor de Matemática. 2º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[3] LIMA, Elon lages; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto César. **A Matemática do Ensino Médio,** Coleção do Professor de Matemática. 6º ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. V.2

[4] HAZZAN, Samuel. **Fundamentos de Matemática Elementar,** 3º ed. São Paulo, SP: Atual Editora 1977, v. 5.

[5] BUCCHI, Paulo. **Curso Prático de Matemática,** 2º ed. São Paulo, SP: Editora Moderna 1998, v. 2.

[6] BORIN, Julia. **Jogos e Resolução de Problemas: uma estratégia para as aulas de Matemática.** São Paulo: IME-USP, 1995.

[7] IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David; PÉRIGO, Roberto; ALMEIDA Nilze. **Matemática: Ciência e Aplicações.** 2º ed. São Paulo, SP: Atual Editora 2004, v. 2.

[8] MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; CARVALHO, João Bosco; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade,** Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro, RJ; Sociedade Brasileira de Matemática, 2006

[9] Portal Brasil Escola. Disponível em < http://brasilesco.la/b116651> Acesso em: 12 de out. 2014.

9. APÊNDICE

Neste momento, apresentamos um jogo que possa ser aplicado a partir do 9º ano do ensino fundamental e está embasado nos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997, 2000); e possibilite a união entre ele e a resolução de problemas, auxiliando na construção do conceito matemático. Para tanto há de ter os conhecimentos mínimos, porém se os alunos não os tiverem o professor deve auxilia-los do modo mais eficiente possível e assim o jogo torna-se assim mais divertido.

Acreditamos que para ter uma melhor aplicação deste seja no mínimo 8 aulas, pois em geral há alunos que possuem mais dificuldades e/ou limitações para compreender do jogo.

O jogo Mini-Bozó

O jogo proposto é original, utiliza dois dados, e pode ser disputado por vários jogadores. É uma simplificação de um jogo bastante popular no estado de Mato Grosso do Sul conhecido como Bozó. A simplificação efetuada foi motivada pelo fato de que nosso objetivo é utilizar o jogo para ensinar conceitos básicos (iniciais) de Probabilidade, o que não seria adequado através do jogo Bozó, tendo em vista que este utiliza cinco dados.

Objetivo: preencher todo o tabuleiro, de modo a obter mais pontos que o(s) adversário(s).

Material: dois dados de cores diferentes (verde e branco), um copo não transparente, papel e caneta para registro dos pontos e um tabuleiro para cada jogador.

Regras:

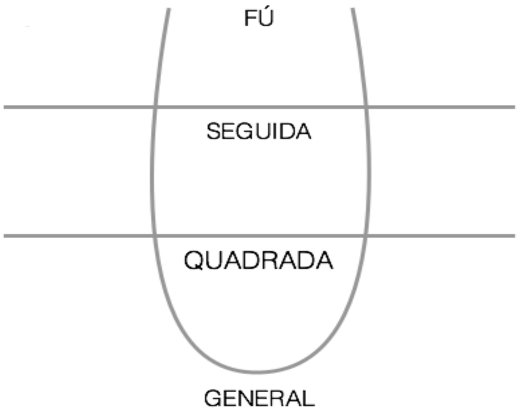
Pode ser disputado por duas pessoas ou mais, não existe limite no número de jogadores, mas um número excessivo de jogadores influencia no tempo do jogo.

Em cada jogada, o jogador poderá efetuar até dois lançamentos. O primeiro é feito sempre com os dois dados. Se o jogador optar pelo segundo lançamento, poderá fazê-lo novamente com os dois dados ou reservar um dos dados, e efetuar o segundo lançamento com apenas um dado.

Em toda jogada, o jogador deve, obrigatoriamente, marcar uma casa do seu tabuleiro. Caso não exista possibilidade de marcação ele deve cancelar uma das casas ainda não marcada, fazendo um X sobre a casa que escolheu. Cada casa só pode ser marcada ou cancelada uma única vez.

O jogo termina quando todos os jogadores preencherem suas casas em seus respectivos tabuleiros. Cada jogador soma seus pontos, e ganha aquele que obteve maior pontuação.

O tabuleiro:



A pontuação:

Fú: duas faces distintas, mas não em sequência, valem a soma das faces.

Seguida: duas faces distintas em sequência valem 20, pontos.

Quadrada: duas faces iguais, mas diferentes de 6, valem 30 pontos

General: duas faces iguais a 6 valem 50 pontos.

Quando se obtém *Seguida*, *Quadrada* ou *General* no primeiro lançamento, é dito – de boca – e adicionam-se 5 pontos ao valor original da casa. Por exemplo, se o jogador conseguir Quadrada no primeiro lançamento, chama-se Quadrada de boca e marca-se 35 pontos ao invés de 30.

Comentários sobre o jogo:

Consideramos o jogo Mini-Bozó como sendo um jogo de estratégia, mas não no sentido definido por Borin[6]. Como o jogo utiliza dado, então, o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Também, impossível a determinação de uma estratégia sempre vitoriosa. Assim, o jogo nunca perde o sentido como jogo, e cada correspondente àquela pontuação já estiver marcada, a pontuação deve ser desconsiderada e deve-se cancelar uma casa fazendo um X sobre a casa escolhida. Como o tabuleiro é composto de 4 casas, então, cada jogador efetua exatamente 4 jogadas, pois cada jogada ele marca ou cancela uma das casas do seu tabuleiro. A estratégia pode variar, dependendo da posição de movimento do jogo. Por exemplo, na primeira jogada, com todas as casas desmarcadas, se o jogador obteve (2,6) no primeiro lançamento, então, a melhor estratégia será reservar o dado com a face 6 e lançar novamente o outro dado. Agora, nesta situação, se o objetivo do jogador for obter a casa *Seguida*, a melhor estratégia será reservar o dado com a face 2, pois neste caso terá duas chances em 6 de obter *Seguida*, ou seja, obter as faces 1 ou 3, enquanto que se reservar o dado com a face 6 terá apenas uma chance em 6 de obter, ou seja, obter a face 5. Quando da necessidade de se cancelar uma casa, a melhor estratégia não pode ser cancelar as casas mais difíceis (com a menor probabilidade de ocorrerem), isto é depende da pontuação já obtida pelo(s) outro(s) jogador(es). Obviamente, na casa cancelada o jogador marcará zero ponto.

No jogo Mini-Bozó, cada jogador, em cada jogada, poderá efetuar até dois lançamentos. Para o primeiro lançamento o jogador sempre utiliza os dois dados, o que corresponde ao experimento aleatório jogar dois dados simultaneamente e observar as faces superiores. Podemos considerar cada resultado possível desse experimento aleatório como sendo um par ordenado de números (a, b) em que a resultado no dado verde e b o resultado do dado branco. Assim, teremos o espaço amostral, que será denotado por S, constituído dos seguintes 36 elementos:

$$S = \{(1;1),(1;2),(1;3),(1;4),(1;5),(1;6),(2;1),(2;2),(2;3),(2;4),(2;5),(2;6),(3;1),$$

$$(3,2),(3;3),(3;4),(3;5),(3;6),(4;1),(4;2),(4;3),(4;4),(4;5),(4;6),(5;1),(5;2),(5;3),$$

$(5;4),(5;5),(5;6),(6;1),(6;2),(6;3),(6;4)(6;5),(6;6)\}$. Agora, para o segundo lançamento, o jogador terá a opção de utilizar os dois dados novamente ou reservar um dos dados e fazer o lançamento de apenas um deles. Neste caso, se utilizar dois dados, teremos para este segundo lançamento o mesmo espaço amostral S_1 do primeiro lançamento e, se utilizar apenas um dado, teremos o espaço amostral $S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$ que corresponde ao experimento aleatório jogar um dado e observar a face superior.

Depois de realizado o jogo, o professor pode fazer os seguintes questionamentos. O jogador deverá sempre aproveitar o segundo lançamento? O jogador terá mais chances em marcar a casa da Quadrada do que a da Seguida? Pode ocorrer empate? Existe uma estratégia vitoriosa?

Elaboramos algumas situações-problemas que poderão ser utilizadas para sistematização do conceito de probabilidade na concepção de Laplace. Vamos supor na sequência a utilização de dois dados com faces equiprováveis. Para cada um dos problemas, fornecemos uma sugestão que pode ser utilizada pelos professores.

Para solução dos problemas, os alunos deverão utilizar-se de sua própria linguagem. Não devemos exigir neste momento nenhum formalismo ou rigor. O importante é que os alunos aprendam e reconstruam o conceito matemático. Apenas no final dos trabalhos de cada seção é que o professor deverá sistematizar o novo conceito estudado. É conveniente privilegiar o trabalho e as discussões das soluções apresentadas entre os grupos. Sugerimos que estes grupos deva ter pelo menos 4 alunos e após os problemas serem solucionados façamos as discussões.

Problema 1: Quais são os pontos para a casa do *Fú*?

Solução: Independentemente do fato do jogador ter utilizado um ou dois lançamentos, são validos para a casa *Fú* os casos onde as duas faces são distintas, mas não em sequência, ou seja,
$(1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;4), (2;5), (2;6), (3;1), (3;5), (3;6), (4;1), (4;2), (4;6), (5;1), (5;2),$

$(5;3), (6;1), (6;2), (6;3) ou (6;4)$. Como para a casa *Fú* vale a soma das faces, podemos obter, neste caso, as seguintes pontuações: 4, 5, 6, 7, 8, 9 ou 10.

Problema 2: Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó, quais são suas chances de marcar a casa *Fú*?

Solução: Temos neste caso os 36 resultados possíveis descritos no espaço amostral S. Da solução do *problema 1*, o jogador marca *Fú* se ocorrer um dos 20 casos: $(1;3), (1;4), (1;5), (1;6), (2;4), (2;5), (2;6), (3;1), (3;5), (3;6), (4;1), (4;2), (4;6), (5;1), (5;2),$

$(5;3), (6;1), (6;2), (6;3) ou (6;4)$. Portanto, o jogador terá 20 chances em 36 de marcar a casa *Fú* se utilizar apenas o primeiro lançamento.

Problema 3: Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento, quais são suas chances de marcar 5 pontos na casa na casa *Fú*?

Solução: De maneira análoga ao problema 2, temos que o jogador marcará 5 pontos 2 seguintes casos: $(1;4) ou (4;1)$. Portanto, o jogador terá 2 chances em 36 de marcar 5 pontos na casa *Fú* se utilizar apenas o primeiro lançamento.

Problema 4: Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento, quais são suas chances de marcar 7 pontos na casa *Fú*?

Solução: Ainda da solução do *problema 2*, temos que o jogador marcará 7 pontos nos seguintes 4 casos: $(1;6),(6;1),(2;5)ou(5;2)$. Portanto, o jogador terá 4 chances em 36 de marcar 7 pontos na casa *Fú* se utilizar apenas o primeiro lançamento.

Das soluções dos *problemas 3 e 4* concluímos que se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento do jogo Mini-Bozó será mais provável marcar 7 do que 5 pontos na casa do Fú. Os alunos deverão perceber que algumas pontuações são da casa *Fú* ocorrem com maior frequência do que as outras. Isto pode ser explorado pelo professor e significa que, intuitivamente, já estamos trabalhando o conceito de probabilidade.

Problema 6: Se o jogador deverá utilizar apenas o primeiro lançamento, ele terá mais chances em marcar na casa *Seguida* do que *Quadrada*?

Solução:

Para marcar a casa *Seguida* o jogador deverá obter um dos seguintes casos: $(1;2),(2;1),(2;3),(3;2),(3;4),(4;3),(4;5),(5;4),(5;6)ou(6;5)$. Assim, terá 10 chances em 36 para marcar na casa *Seguida*, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento.

Para marcar a casa *Quadrada* o jogador deverá obter um dos seguintes casos: $(1;1),(2;2),(3;3),(4;4)ou(5;5)$. Assim, terá 5 chances em 36 de marcar na casa da *Quadrada*, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento.

Portanto, de a) e b) concluímos que terá mais chances de marcar na casa *Seguida*, considerando-se que utilizou apenas o primeiro lançamento.

Para as resoluções dos problemas 2, 3, 4 e 5 podemos observar que, já estamos calculando a probabilidade como:

$$Probabilidade = \frac{númerodepossibilidadesfavoráveis}{númerototaldepossibilidades},$$

ou seja, estamos utilizando a resolução de problemas para que os alunos possam construir e/ou reconstruir o conceito de Probabilidade. O termo probabilidade irá aparecer pela primeira vez no *problema 6* e *7*, além disso, terá como objetivo calcular a probabilidade da união de dois eventos e mostrar que seu cálculo está relacionado à soma de probabilidades.

Problema 7: Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de marcar a casa *Seguida* ou a casa *Quadrada*?

Solução: Vamos considerar os seguintes eventos:

A: O jogador a casa da *Seguida* no seu primeiro lançamento;

B: O jogador marcou a casa *Quadrada* no seu primeiro lançamento.

Desejamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A ou evento B. Utilizando a notação da Teoria de Conjuntos desejamos calcular $P(A \cup B)$.

Agora, $A = \{(1;2), (2;1), (2;3), (3;2), (3;4), (4;3), (4;5), (5;4), (5;6), (6;5)\}$ tem 10 elementos e $P(A) = \frac{10}{36}$;

$B = \{(1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5)\}$ têm 5 elementos e $P(B) = \frac{5}{36}$ e $A \cup B = (1;2), (2;1), (2;3), (3;2), (3;4), (4;3), (4;5), (5;4), (5;6), (6;5), (1;1), (2;2), (3;3),$

$(4;4), (5;5)\}$ tem 15 elementos e $P(A \cup B) = \frac{15}{36}$.

Assim,

$$P(A \cup B) = \frac{15}{36} = \frac{10}{36} + \frac{5}{36} = P(A) + P(B)$$

A propriedade $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ não se verifica apenas para o *problema 6*, esta relação se verifica sempre que os eventos A e B são mutuamente exclusivos, ou seja, $A \cap B = \emptyset$. Na concepção axiomática de Probabilidade, o matemático Kolmogorov estabeleceu esta propriedade como sendo um dos seus axiomas.

Axioma: Se A e B são eventos mutuamente exclusivos, então $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Em linhas gerais, quando podemos satisfazer uma exigência ou outra, então somamos as probabilidades envolvidas.

Problema 8: Se o jogador utilizar apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de marcar na casa *Fú*: um número par ou um número menor do que 7?

Solução: Vamos considerar os dois seguintes eventos:

A: O jogador marcou um número par na casa *Fú* em seu primeiro lançamento;

B: O jogador marcou um número menor do que 7 na casa *Fú* em seu primeiro lançamento.

De modo análogo ao *problema 6* calcularemos $P(A \cup B)$.

Para marcar um número par na casa *Fú* o jogador deverá obter 4, 6, 8 ou 10 pontos. Assim,

$A = \{(1;3),(3;1),(1;5),(5;1),(2;4),(4;2),(4;6),(6;4),(5;3),(3;5),(6;2),(2;6)\}$ que tem 12 elementos e $P(A) = \frac{12}{36}$.

Para marcar um número menor do que 7 na casa *Fú* o jogador deverá obter: 4, 5 ou 6 pontos. Assim, $B = \{(1;3),(3;1),(1;5),(5;1),(2;4),(4;2),(4;1),(1;4)\}$ que tem 8 elementos e $P(B) = \frac{8}{36}$.

Agora, $A \cup B = \{(1;3),(3;1),(1;5),(5;1),(2;4),(4;2),(4;6),(6;4),(5;3),(3;5),(6;2),(2;6),$

$(4;1),(1;4)\}$ que tem 14 elementos e $P(A \cup B) = \frac{14}{36}$ e $A \cap B = \{(1;3),(3;1),(1;5),(5;1),(2;4),(4;2)\}$ que tem 6 elementos e $P(A \cap B) = \frac{6}{36}$. Assim,

$$P(A \cup B) = \frac{14}{36} = \frac{12}{36} + \frac{8}{36} - \frac{6}{36} = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

A propriedade $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ não se verifica apenas no *problema 7* , é uma propriedade geral demostrada no Capitulo de Definições.

Os próximos problemas serão referentes à Probabilidade Condicional de duas formas: num primeira forma não utilizaremos fórmula e na segunda sim.

Problema 9: Considerando-se que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de marcar a casa *Quadrada*, sabendo-se que ele obteve em pelo menos um dos dois dados a face 4?

Solução: No primeiro lançamento, o jogador utiliza os dois dados e temos o espaço amostral S constituído de 36 resultados possíveis. Porém, como foi fornecida a informação de que o jogador obteve em pelo menos um dos dois dados a face 4, então um dos 11 casos possíveis deve ter ocorrido: $\{(1;4),(4;1),(2;4),(4;2),(3;4),(4;3),(4;4),(4;5),(5;4),(4;6),(6;4)\}$. Assim, como dentre os 11 casos possíveis apenas no caso $(4;4)$ o jogador marcará a casa *Quadrada*, então a probabilidade pedida será de $P=\frac{1}{11}$, pois o espaço amostral S era de 36 resultados possíveis e foi reduzido para 11 pela condição imposta no problema.

Problema 10: Considerando-se que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de marcar a casa *Quadrada*, sabendo-se que a soma das faces obtidas foi igual a 6?

Solução: De maneira análoga ao *problema 8*, sabendo-se que a soma da faces é 6, então um dos 5 casos possíveis são: $\{(1;5),(5;1),(2;4),(4;2),(3;3)\}$. Assim, dentre os 5 casos possíveis apenas no caso $(3;3)$ o jogador marcará a casa *Quadrada*, então a probabilidade pedida será de $P=\frac{1}{5}$.

Problema 11: Considerando-se que o jogador utilizou apenas o primeiro lançamento, qual a probabilidade de marcar a casa *Quadrada*, sabendo-se que obteve números ímpares faces obtidas nos dois dados?

Solução: Da mesma forma que o *problema 8*, temos que um dos 9 possíveis casos são: $\{(1;1),(1;3),(1;5),(3;1),(3;3),(3;5),(5;1),(5;3),(5;5)\}$. Assim, o jogador marcará a casa *Quadrada* quando obtém um dos três seguintes casos: $(1;1)$ ou $(3;3)$ ou $(5;5)$. Portanto, a probabilidade pedida será dada por $P=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.

Devemos observar que, nos três problemas anteriores, estamos calculando a probabilidade do jogador, em seu primeiro lançamento, marcar a casa *Quadrada* no jogo Mini-Bozó, o cálculo da probabilidade está condicionado à informação disponível a *priori*.

Esta é a essência do conceito de Probabilidade Condicional, ou seja, a probabilidade de um evento é modificada pela informação de que outro evento já tenha ocorrido.

Vamos apresentar outra solução para o mesmo *problema 10*, utilizando a fórmula.

Outra solução:

No *problema 10*, definimos os eventos:

A: O jogador marcou a casa Quadrada;

B: O jogador obteve números ímpares nas faces dos dois dados.

Devemos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo-se que o evento B já ocorreu. Para tanto, vamos utilizar a notação comumente aplicada $P(A \vee B)$(leia-se probabilidade de A dado B).

Temos que $B = \{(1;1),(1;3),(1;5),(3;1),(3;3),(3;5),(5;1),(5;3),(5;5)\}$ tem 9 elementos. Assim, $P(B) = \frac{9}{36}$.

Agora, $A = \{(1;1),(2;2),(3;3),(4;4),(5;5)\}$ e $A \cap B = \{(1;1),(3;3),(5;5)\}$ tem 3 elementos. Assim, $P(A \cap B) = \frac{3}{36}$. Assim, temos que $P(A|B) = \frac{3}{9} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{9}{36}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)},\ onde\ \ P(B) > 0$.