UNIVERSIDADE FEDERAL DO RECÔNCAVO DA BAHIA - UFRB

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLÓGICAS

MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA - PROFMAT

DIVISIBILIDADE NOS NÚMEROS NATURAIS - UMA EXPERIÊNCIA COM UMA TURMA DO ENSINO MÉDIO

ANTONIO CONCEIÇÃO SANTOS

CRUZ DAS ALMAS - BAHIA

2014

DIVISIBILIDADE NOS NÚMEROS NATURAIS - UMA EXPERIÊNCIA COM UMA TURMA DO ENSINO MÉDIO

ANTONIO CONCEIÇÃO SANTOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre, pelo PROFMAT.

Orientador: Prof Dr. Eleazar Lozada Madriz

CRUZ DAS ALMAS - BAHIA
2014

FICHA CATALOGRÁFICA

S237d

Santos, Antonio Conceição.
Divisibilidade nos números naturais: uma experiência com uma Turma do Ensino Médio / Antonio Conceição Santos._ Cruz das Almas, BA, 2014.
350f.; il.

Orientador: Eleazar Lozada Madriz.

Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas.

1.Matemática – Estudo e ensino. 2.Matemática – Divisibilidade. 3.Ensino Médio – Análise. I.Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas. II.Título.

CDD: 510.7

Ficha elaborada pela Biblioteca Universitária de Cruz das Almas - UFRB.

DIVISIBILIDADE NOS NÚMEROS NATURAIS - UMA EXPERIÊNCIA COM UMA TURMA DO ENSINO MÉDIO

ANTONIO CONCEIÇÃO SANTOS

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, como parte dos requisitos para a obtenção do título de mestre, pelo PROFMAT.

Banca Examinadora:

Orientador: Eleazar

Prof. Dr. Eleazar Lozada Madriz - UFRB.

Membro: Dinelle

Prof Dr. Pedro Di Novella Cordero - UFBA

Membro: Jaqueline Alexsandra de Souza Azevedo

Profª. Ms. Jaqueline Alexandra Azevedo de Souza - UFRB

Cruz das Almas -Ba, 23 de Setembro de 2014.

Aos meus pais Adalgisa e Leopoldo
à minha esposa Valda e meu filho Franklin,
com muito amor.

Aquele que não sabe escrever e ignora a Aritmética depende realmente do homem mais instruído, ao qual é obrigado a recorrer sempre.(...) No entanto, o homem que sabe as regras da Aritmética necessárias ao uso da vida não está na dependência do estudioso que possui, no mais alto grau, o gênio das ciências matemática e cujo talento lhe será de uma utilidade muito real, sem nunca poder atrapalhar o primeiro no gozo de seus direitos.

Nicolas Carita de Condorcet

AGRADECIMENTOS

Agradeço, essencialmente a Deus pelo Seu amor incondicional, pelo Seu amparo ante aos obstáculos que a vida me impôs e por ter permitido o cumprimento desta importante etapa da minha vida.

Agradeço a minha esposa Valda Maria e ao meu filho Franklin, que são meu alicerce, pelo amor, confiança, incentivo, dedicação, e por todo o sacrifício que fizeram para que este momento pudesse se concretizar. Eu os amo muito!

Agradeço a minha família e, de um modo especial, à minha sogra Rosa Maria, minha segunda mãe, e minha cunhada Graça, pelo amor, incentivo e pelo contínuo apoio durante o período de curso, bem como fora dele.

Agradeço aos meus amigos, especialmente a Francelino Álvaro, João de Jesus, Genecilda de Jesus, Itana de Jesus e Luana Silva por toda confiança e atenção, por todas as conversas, conselhos, as orações, por todos os momentos de descontração, por me encorajarem e por acreditarem sempre.

Agradeço àqueles que plantaram em mim, desde muito cedo, o desejo de evoluir, meus estimados professores.

Agradeço aos meus colegas de trabalho, especialmente Olindimar Domingues, que sempre excedendo os seus deveres, contribuíram, de forma direta ou indireta, para a realização deste trabalho.

Agradeço aos meus colegas de curso, particular e especialmente a Luciano Cerqueira, Gabriel Velame, Osnildo Carvalho e Paulo Cézar de Souza Santos, pela atenção, companhia, conselhos, por todos os risos, por me encorajarem nos momentos de intenso cansaço e estresse (que nã foram poucos) e por me ajudarem a enxergar que essa fase é apenas mais uma de tantas outras.

Agradeço ao meu orientador, professor Eleazar Madriz, por ter me acompanhado como seu orientando no desenvolvimento deste e de outros trabalhos acadêmicos, pela paciência, pelas conversas e dicas, por toda a dedicação e disponibilidade.

Agradeço à professora Ms. Jaqueline Alexandra Azevedo de Souza e ao professor Dr. Pedro Di Novella Cordero por assentirem em participar da banca examinadora deste trabalho, bem como pelas suas correções e sugestões.

Agradeço aos professores e servidores do Centro de Ciências Exatas e Tecnológicas da Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, particularmente aos professores do PROFMAT pela inestimável colaboração à minha formação acadêmica e pessoal,sobretudo, ao professor Juarez Azevedo pelo imenso apoio, do qual me faltam palavras que possam expressar tamanha gratidão. Agradeço também aos professores Erikson Alexandre Fonseca, Gilberto Pina e Alex Santana dos Santos, por toda a experiência e conhecimento compartilhados e/ou instigados, pelos "puxões de orelha", tão necessários e tão válidos, e pelas valiosas conversas.

Enfim, a todos os que, de alguma maneira, contribuíram para a conclusão de mais esta fase em minha vida, os meus sinceros agradecimentos.

Antonio Conceição Santos

RESUMO

Esta dissertação de mestrado teve como intuito inicial evidenciar, através da articulação entre os conceitos matemáticos e sugestões práticas, a relevância da divisibilidade para a continuidade dos estudos no Ensino Médio. Entretanto, para compor esse trabalho, foi feito um recorte e elegeu-se o conjunto dos números naturais como córpus da pesquisa. A discussão teórica teve como eixo norteador o algoritmo da divisão euclidiana nos números naturais fazendo-se compreender como ocorre o processo da divisão entre dois números naturais e como construir alguns critérios de divisibilidade. Assim, por meio de leituras, sugestões de atividades escritas e atividades interativas na Internet foi possível compreender a estrutura do algoritmo da divisão euclidiana e entender sua importância para a execução eficiente de cálculos de divisão no nosso cotidiano. O resultado da pesquisa não esgotou o assunto, mas demonstrou que a divisibilidade pode ser apreendida também através de atividades lógicas, lúdicas, contextualizadas e interativas.

Palavras-chaves: Múltiplos, Divisores, Divisão Euclidiana, Números Primos, Divisibilidade.

ABSTRACT

This master's thesis had as initial order to evidence, through the link between the mathematical concepts and practical suggestions, the divisibility's relevance to the continuity of the studies in the High School. However, for compose this work, it has been done a snippet and it as been elected the set of natural numbers as the frame of the research. The theoretic argument had as guide axis the Algorithm of the Euclidean Division of the natural numbers having been understood how occur the procedure of the division between two natural numbers and how to construct some divisibility criteria. Thus, by means of readings, writing and iterative activities suggested on the internet it was possible to understand the structure of the euclidean division's algorithm and to know its importance for the efficient execution of division calculations in our everyday. The result of the research hasn't exhausted the subject, but is has demonstrated that the divisibility can be learned also through logical, playful, contextualized and interactive activities.

Key words: Multiples, Divisors, Euclidean Division , Prime Numbers, Divisibility.

Sumário

Introdução

Desde os tempos antigos os números tem sido objeto de diversas pesquisas. A fim de expor suas ideias, os matemáticos deixaram um legado de registros documentados, que aos poucos foram transmitidos às gerações futuras, chegando até os nossos dias. Parte desse legado é constituído dos algoritmos, que eles mesmos utilizaram para realizar suas demonstrações. Muitos desses algoritmos tornaram-se parte da literatura, vastamente divulgada, e hoje estão presentes nos livros didáticos utilizados diariamente nas unidades escolares.

Um dos algoritmos mais úteis da literatura matemática para teoria dos números é o algoritmo da divisão euclidiana. O algoritmo de Euclides é um dos algoritmos mais antigos, conhecido desde que surgiu nos Livros VII e X da obra Elementos de Euclides por volta de 300 a.c.

Acredita-se que originalmente o algoritmo da divisão euclidiana foi usado para demonstrar o cálculo do **MDC, (máximo divisor comum)**, de dois números diferentes de *zero*. O algoritmo baseia-se no princípio de que o **MDC** não muda se o menor número for subtraído do maior. Por exemplo, 8 é o **MDC** de 40 e 24. Já que $40 - 24 = 16$, o **MDC** de 24 e 16 é também 8. Como o maior dos dois números é reduzido, a repetição deste processo vai gerar sucessivamente números menores, até convergir em *zero*. Nesse momento, o **MDC** é o outro número natural, maior que zero, desse processo de subtração.

Ele é um dos algoritmos numéricos mais antigos ainda em uso corrente. O algoritmo original foi descrito apenas para números naturais e comprimentos geométricos, mas foi generalizado no século XIX para outras classes de números como os inteiros gaussianos e polinômios de uma variável. Ele pode ser usado para resolver as equações de diofantinas, na descoberta de números que sejam safistatórios em múltiplas congruências (teorema chinês do resto), como método para descobrir raízes reais em um polinômio e na fatoração de inteiros. Além disso, constitui-se na ferramenta básica para obtenção de teoremas na teoria dos números, tal como teorema de Fermat, Lagrange e no teorema fundamental da aritmética.

Nessa dissertação analisar-se-á apenas o **Algoritmo da divisão Euclidiana** aplicado à divisibilidade nos naturais.

A motivação de trabalhar com a divisibilidade nos números naturais nasceu da percepção de que ela permeia as áreas da Aritmética, Álgebra e Geometria, nos diversos estágios de aprendizagem dos alunos, em toda a sua vida escolar. O domínio de tais conhecimentos é indispensável para instrumentalizar o aluno aprendiz, desde o Ensino Fundamental, para que ele possa superar os desafios afins no seu dia a dia e, mais especialmente, para que ele esteja preparado para continuar seus estudos no Ensino Médio. Além desses fatores motivadores existe uma grande necessidade de conhecimentos matemáticos no mercado de trabalho atual.

Normalmente o ensino de divisibilidade ocorre nas séries finais do Ensino Fundamental (I) e início do Ensino Fundamental (II). Mas, baseado na experiência de 20 anos de sala aula do escritor dessa monografia com alunos do Ensino Médio, foi observado que uma grande porcentagem dos alunos que conclui o ensino fundamental em Valença - Bahia, chega ao Ensino Médio da escola pública estadual sem os pré requisitos necessários para a continuidade de seus estudos. Na sua maioria, são alunos cujos pais não tiveram recursos financeiros para mantê-los no sistema de ensino particular e/ou alunos que não obtiveram aprovação nas seleções feitas pelos Institutos Federais de Educação. De modo que a parte que sobra desses alunos, por não ter outra opção ingressa no Ensino Médio das escolas estaduais sem motivação, e com enormes déficits em seus estudos de Matemática, muitos sem saber sequer fatorar um número natural. Isto posto, fica evidente a necessidade de mostrar a esses alunos a simplicidade e as justificativas dos critérios da divisibilidade, baseados na compreensão do sistema de numeração decimal e do algoritmo da divisão.

Usualmente, nas escolas públicas municipais, pois o município é a esfera política responsável pelo ensino fundamental, o ensino de divisibilidade ocorre de forma mecânica, desinteressada e muitas vezes desprovida de sentido para os alunos, à partir da mera exposição dos conteúdos na lousa seguido de exercícios do livro didático adotado. Contudo, o alunado de hoje está vivenciando um momento muito diferente do que experimentou a geração passada, pois hoje tudo ocorre muito rápido, um mundo cheio de imagens e de conexões através das redes sociais na internet.

Portanto essa dissertação expõe em quatro capítulos o resultado de uma experiência realizada numa sala de aula do Ensino Médio.

Para iniciar as considerações nos naturais, foi necessário definir bem esse conjunto importante e por isso, no **capítulo um** foi dada atenção aos **Números Naturais**. Foi feita a formalização do conjunto dos naturais através dos **Axiomas de Peano**, considerando o *zero* como um número natural. Foi feito um esforço cuidadoso para formalizar e demonstrar rigorosamente o que já é intuitivamente óbvio desde o Ensino Básico, seguindo a construção consistente que foi desenvolvida no século XIX por **Giuseppe Peano.**

No **capítulo dois**, foi feito uma revisão de alguns dos **Sistemas de Numeração** usados ao longo da história justificando a escolha do Sistema Decimal para fazer todas as exposições e demonstrações nessa dissertação. O **terceiro e capítulo** concentrou-se no assunto principal dessa dissertação, **a divisibilidade** , fazendo uma breve revisão do algoritmo da divisão euclidiana , as definições de múltiplos, divisores e números primos, dando especial atenção a alguns Critérios da Divisibilidade. Finalmente, no quarto, e último capítulo foi mostrado algumas atividades lúdicas aplicadas em uma sala de aula do Centro Estadual de Educação Profissional do Leste Baiano - CEEP, localizado na cidade de Valença-Ba. Nessa parte foram feitas algumas considerações sobre umas atividades escritas aplicadas aos alunos, suas dificuldades e suas reações ao passo que visitavam o portal do professor do MEC para algumas atividades mais interativas por meio do computador e a internet.

Capítulo 1

Elementos Básicos

No período em que a criança passa pela educação básica ela aprende intuitivamente que os números naturais são $0, 1, 2, 3, 4, 5, ...$ sem a necessidade de qualquer rigor na definição desses números. Mas na realidade a definição dos naturais não é algo trivial.

Assim, procuramos reunir alguns elementos básicos que nos ajudam a formalizar o **conjunto dos naturais** destacando suas propriedades, para que posteriormente pudéssemos fazer as necessárias considerações sobre divisibilidade nos naturais.

1.1 Números Naturais

Os números naturais tiveram suas origens na necessidade do homem de realizar contagens de objetos, começando com o número *um*, talvez nos primórdios das civilizações. A introdução do numero 0 (zero) só foi feita pelo matemático indiano **Brahmagupta**, em 628 dc.

Nessa dissetação as considerações foram feitas no conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, que começa no 0 e prossegue de *um* em *um*. Para formalizar as definições dos números naturais, falaremos um pouco sobre os **Axiomas de Peano** e o **Princípio de Indução Matemática**, pois a bem dizer se faz necessário estabelecer um ponto de partida

1.2 Axiomas de Peano

A fim de dar rigor à definição do conjunto dos números naturais, nossas considerações se darão pelo método axiomático, isto é, assumiremos algumas proposições como verdadeiras.

Esta axiomatização foi dada por **Giuseppe Peano**, no final do século XIX, e se apresenta aqui de forma adaptada a atual simbologia matemática. Peano escolheu três conceitos primitivos: **o zero, o número natural, e a relação 'é sucessor de'**, e formulou os seguintes axiomas:

P1. $Zero$ é um número natural.

P2. Se n é um número natural, então n tem um único sucessor, que também é natural.

P3. $Zero$ não é sucessor de nenhum número natural.

P4. Se dois números naturais têm sucessores iguais então são eles próprios iguais.

P5. Se uma coleção S contém o $zero$ e todos os sucessores dos naturais então ela mesma é o próprio conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Essencialmente, P2 esses axiomas constituem uma maneira formal de construção dos números naturais, entendendo-se que todos os números naturais podem ser obtidos a partir do número 0 pela soma sucessiva da unidade, pois todo número natural pode ser escrito na forma

$$n = 0 + 1 + \ldots + 1$$

Assim, o conjunto dos números naturais é dado por

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$$

Um subconjunto de $\mathbb{N}$ muito importante é o conjunto dos naturais não-nulos, isto é, um conjunto que possui todos os números naturais menos o *zero*, e indicamos por $\mathbb{N}^*$.

O conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$ possui uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, chamada **função sucessor**, baseada nos axiomas de Peano, com as seguintes propriedades:

P_1 A função sucessor é injetiva: $n, m \in \mathbb{N}, \quad s(n) = s(m) \Rightarrow n = m.$

P_2 O número natural *zero* não é sucessor de nenhum outro número natural, isto é $0 \notin s(\mathbb{N})$

P_3 Princípio da Indução: se um subconjunto $M \subset \mathbb{N}$ contém o número natural 0 bem como o sucessor de todos os seus elementos então $M = \mathbb{N}$.

A ação da função sucessor $s(n)$ sobre os números naturais é também denotada por:

$$s(n) = n + 1; \forall n \in \mathbb{N}$$

Apesar de sua simplicidade, os axiomas de Peano fundamentam uma teoria satisfatória porque podem ser usados para definir os números naturais e, a partir deles, deduzir todos os conceitos e demais propriedades que se conhecem acerca desses números, dentre os quais destacam-se as operações de adição, multiplicação e a relação de ordem.

1.3 Princípio da Indução Matemática

O quinto axioma de Peano citado acima conduz a uma técnica muito usada para provar as propriedades características dos números naturais e também para definir funções em $\mathbb{N}$, o Princípio da Indução matemática. De fato, este axioma torna-se fundamental na proposição a seguir:

Proposição 1 (Axioma da Indução)**.** *Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$ tal que:*

$$\begin{cases} 0 \in S \\ \forall n \in S \Rightarrow n + 1 \in S. \end{cases}$$

Então $S = \mathbb{N}$.

Teorema 1. *Seja $a \in \mathbb{N}$ e seja $p(n)$ uma sentença aberta em $\mathbb{N}$. Suponha que*

(i) *$p(0)$ é verdade, e que*

(ii) *$\forall n \geq a$, $p(n)$ é verdade e implicar em $p(n+1)$ também verdade, então $p(n)$ é válida para todo $n \geq a$.*

Demonstração: Faremos aqui uma demonstração que se encontra em HEFEZ $(2011, p.8)$ [5]. Seja $V = \{n_1 \in \mathbb{N}; p(n)\}$ um subconjunto de $\mathbb{N}$ para os quais $p(n)$ é verdade. Considere ainda o conjunto

$$J = \{m \in \mathbb{N}; a + m \in V\}$$

Pela condição (i), temos que $a + 0 = a \in V$, segue então que $0 \in J$. Por outro lado, se $m \in J$ então $a + m \in V$ e, por (ii), temos que $a + m + 1 \in V$; Logo $m + 1 \in J$. Assim, pelo Axioma da Indução, temos que $J = \mathbb{N}$. Portanto,

$$\{m \in \mathbb{N}; m \geq a\} = a + \mathbb{N} \subset V$$

o que prova o resultado.

1.4 Adição

A função sucessor, indutivamente, origina uma nova operação: **a operação soma**, que representaremos por $(+)$. A operação soma também é chamada de **adição**. Esta operação fica bem definida nos naturais, isto é, $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + n \in \mathbb{N}$. Mas vamos às definições. Dados os números $m, n, t \in \mathbb{N}$, tem-se que na operação soma:

$$\begin{cases} m + 0 = m \\ m + n = t \\ m + s(n) = s(m+n) = s(t) \end{cases}$$

Isto é, fixado m:

- Se $p = 0$ então $m + p = m$.
- Se $p \neq 0$ façamos $p = s(n)$ para algum $n \in \mathbb{N}$. Daí,

$$m + p = m + s(n) = s(m+n).$$

Em outras palavras, partindo de 0, é possível *contar* as unidades necessárias para se chegar a m e a $\mathbb{N}$. O número expresso por $m + n$ é equivalente a contar essas unidades repetidas, partindo do 0.

1.4.1 Propriedades da adição

Sejam m, n e p números naturais arbitrários, temos que as seguintes propriedades são verdadeiras:

P_1 Propriedade associativa da adição: $m + (n + p) = (m + n) + p$.

P_2 Propriedade comutativa da adição: $n + m = m + n$.

P_3 Lei do cancelamento da adição: $m + p = n + p \Rightarrow m = n$.

Demonstração: (P_1) Para demonstrar a propriedade associativa, fixemos m e n naturais, e tomemos o conjunto $A = \{p \in \mathbb{N}; m + (n + p) = (m + n) + p\}$. Queremos provar que $A = \mathbb{N}$. Por indução sobre p temos que:

(i) Se $p = 0$, então $m + (n + 0) = m + n = (m + n) + 0$, logo, $0 \in A$.

(ii) Suponhamos que seja válido para $p = k \in \mathbb{N}$; isto é, $m + (n + k) = (m + n) + k$.

Resta provar que $s(k) \in A$. De fato,

- $(m+n)+s(k) = s((m+n)+k)$ por hipótese,
- $(m+n)+s(k) = s(m+(n+k)$, daí,
- $(m+n)+s(k) = m+s(n+k) \Rightarrow (m+n)+s(k) = m+(n+s(k))$,

E assim concluimos que $s(k) \in A$. Logo, $A = \mathbb{N}$.

Demonstração: $(P_{2)}$. Consideremos o conjunto $B = \{m \in \mathbb{N}; n+m = m+n\}$ com n fixado arbitrariamente. Provaremos que $B = \mathbb{N}$.

(i) Temos que $n+0 = 0+n$, portanto, $0 \in B$.

(ii) Suponha que exista um natural $k \in B$, tal que $n+k = k+n$, provemos que $s(k) \in B$.

De fato, $n+s(k) = s(n+k) = s(k+n) = (k+n)+1$, daí, por P_1 sabe-se que $n+s(k) = k+(n+1)$. Portanto $n+s(k) = k+(1+n) = (k+1)+n$ e assim, $n+s(k) = s(k)+n$, o que significa que $s(k) \in B$.

E assim provamos que $B = \mathbb{N}$.

Demonstração: (P_3). Fixemos m e n números naturais, e consideremos o conjunto $C = \{p, m, n \in \mathbb{N}; m+p = n+p \Rightarrow m = n\}$. Provemos que $C = \mathbb{N}$.

(i) $0 \in C$, pois $m+0 = n+0 \Rightarrow m = n$;

(ii) Suponhamos um natural $k \in C$, isto é, $m+k = n+k \Rightarrow m = n$

Temos que $m+s(k) = n+s(k) \Rightarrow s(m+k) = s(n+k)$

$$\Rightarrow (m+k)+1 = (n+k)+1 \Rightarrow m+(1+k) = n+(1+k)$$

que pelos itens anteriores

$$(m+1)+k = (n+1)+k$$

$$\Rightarrow s(m)+k = s(n)+k$$
$$\Rightarrow s(m) = s(n)$$
$$\Rightarrow m+1 = n+1$$
$$\Rightarrow m = n$$

e assim, $m+s(k) = n+s(k) \Rightarrow m = n$, ou seja, $s(k) \in C$.
Desta forma, concluímos que o conjunto $C = \mathbb{N}$.

1.5 Multiplicação

Definiremos agora uma operação muito importante nos naturais, a **multiplicação**. Essa definição é baseada nos escritos de HEFEZ (2001p.16) [6].

Definição 1. *Dados* $m, n, t \in \mathbb{N}$, *definimos recursivamente:*

$$m \cdot n = \begin{cases} 0, \ se \ n = 0 \\ m, \ se \ n = 1 \\ m + m + m + \cdots + m \quad (n \quad vezes) \end{cases}$$

Além disso, $\forall m, n \in \mathbb{N}, \quad m \cdot (n+1) = mn + m.$

Ou seja:
Fixado m, se $p = 0$, por definição $m \cdot p = 0$ e se $p \neq 0$, $p = n + 1$, para algum $n \in \mathbb{N}$, daí $\quad m \cdot p = m \cdot (n+1) = m \cdot n + m$.

Proposição 2. *Para todo* $m \in \mathbb{N}$, *temos que* $m \cdot 0 = 0$.

Prova: Seja $m \in \mathbb{N}$. Segue-se que $m \cdot 0 = m \cdot (0+0) = m \cdot 0 + m \cdot 0$. Se $m \cdot 0 \neq 0$ então teríamos que $m \cdot 0 \in \mathbb{N}^*$, daí $m \cdot 0 > m \cdot 0$, o que é absurdo. Logo, $m \cdot 0 = 0$.

Proposição 3. *Sejam* $m, n, p \in \mathbb{N}$, *então são válidos os itens abaixo:*

(i) $m \cdot n \in \mathbb{N}$, isto é, a multiplicação é uma operação em $\mathbb{N}$.

(ii) Existe um elemento neutro multiplicativo: $1 \cdot n = n \cdot 1 = n$.

(iii) Distributividade: $m \cdot (n + p) = m \cdot n + m \cdot p$.

(iv) Associatividade: $m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p$.

(v) Se $m \cdot n = 0$ então $m = 0$ ou $n = 0$.

(vi) Comutatividade: $m \cdot n = n \cdot m$.

Demonstração: (i) Fixemos m e n números naturais, e consideremos o conjunto $A = \{m, n \in \mathbb{N}; m \cdot n = k\}$, para algum $k \in \mathbb{N}$. Seja $p(n)$: $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

- $m \cdot 0 = 0$ está definido em $\mathbb{N}$, logo $0 \in A$. P_0 é verdade.
- Suponhamos que o resultado seja válido para algum $n = k \in \mathbb{N}$, tal que P_k é verdade. Queremos provar a validade també para $k+1$, isto é $k+1 \in A$.

De fato, $m \cdot s(k) = m \cdot (k+1) = m \cdot k + m$. Por hipótese $m \cdot k$ está definido em A e, como visto na seção anterior, a soma de quaisquer dois naturais também é um número natural. Logo, $m \cdot s(k) = (m \cdot k + m) \in A$, e assim provamos por indução que $A = \mathbb{N}$.

Demonstração: (ii) Temos que $n \cdot 1 = n \cdot (0+1)$, e por definição $n \cdot (0+1) = n \cdot 0 + n = n$, logo, $n \cdot 1 = n$. Resta mostrar que $1 \cdot n = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Considerando o conjunto $B = \{n \in \mathbb{N}; 1 \cdot n = n\}$ mostraremos que $B = \mathbb{N}$.
Note que

- $1 \cdot 0 = 0$, logo, $0 \in B$

Suponhamos que $k \in B$, ou seja, $1 \cdot k = k$.
Ora, sabemos que $1 \cdot (k+1) = 1 \cdot k + 1$, daí por indução $1 \cdot (k+1) = k+1$.
Portanto, $k+1 \in B$ provando que $B = \mathbb{N}$ como queríamos.

Demonstração: (iii) Fixemos, m e n naturais e seja o conjunto $C = \{m, n, p \in \mathbb{N}; m \cdot (n+p) = m \cdot n + m \cdot p\}$.

- $0 \in C$, pois $m \cdot (n+0) = m \cdot n \Rightarrow m \cdot n + m \cdot 0 = m \cdot n$.
- Seja $k \in C$ isto é, $m(n+k) = m \cdot n + m \cdot k$.

Resta provar que $(k+1) \in C$.
De fato, $m \cdot (n+(k+1)) = m \cdot ((n+k)+1) = m \cdot (n+k) + m = (m \cdot n + m \cdot k) + m = m \cdot n + (m \cdot k + m) = m \cdot n + (m \cdot (k+1))$. Todas estas igualdades se justificam com base em propriedades estabelecidas anteriormente. Desta forma fica provado que, $(k+1) \in C$.
Assim, concluímos, por indução, que $C = \mathbb{N}$.

Demonstração: (iv) Novamente, consideremos $m, n \in \mathbb{N}$ fixados arbitrariamente e apliquemos indução sobre p.
Seja $D = \{p \in \mathbb{N}; m \cdot (n \cdot p) = (m \cdot n) \cdot p\}$:

- $m \cdot (n \cdot 0) = (m \cdot n \cdot 0) = 0$ Assim, $0 \in D$
- Suponhamos que $k \in D$, isto é, $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

Pode-se notar que

$$m \cdot (n \cdot (k+1)) = m \cdot (n \cdot k + n)$$

$$\Rightarrow m \cdot (n \cdot k) + m \cdot n = (m \cdot n) \cdot k + m \cdot n$$

$$\Rightarrow (m \cdot n) \cdot (k + 1)$$

Logo, $k + 1 \in D$, de modo que $D = \mathbb{N}$.

Demonstração: (v) Sabe-se que $m \cdot 0 = 0$ para $m \in \mathbb{N}$.
Seja a hipótese de que $m \cdot n = 0$ e façamos $n = k + 1$ para algum k em $\mathbb{N}$. Assim, $m \cdot n = 0 \Rightarrow m(k + 1) = 0 \Rightarrow m \cdot k + m = 0$, daí, pela lei do cancelamento da soma, $m \cdot k = m = 0$.

Demonstração: (vi) Suponhanhamos $E = \{n \in \mathbb{N}; m \cdot n = n \cdot m\}$, para um $m \in \mathbb{N}$ fixados arbitrariamente. Queremos mostrar que $E = \mathbb{N}$.

- $m \cdot 0 = 0 \cdot m$ por definição, o que garante que $0 \in E$.
- Tomemos um $k \in E$ tal que $m \cdot k = k \cdot m$. Por hipótese de indução, $m \cdot (k+1) = m \cdot k + m = k \cdot m + m$. Isso implica em $m \cdot (k+1) = (k+1) \cdot m$, de modo que $(k + 1) \in \mathbb{N}$, de modo que $E = \mathbb{N}$.

1.6 Relação de ordem em $\mathbb{N}$

Desde bem cedo na educação infantil a criança é ensinada que existe uma relaçã de ordem inerente aos números naturais, quando a professora lhe diz que 0 é menor que 1, que 1 é menor que 2 e assim sucessivamente. Os conhecimentos dessa relação são muito importantes, pois nos permitem fazer comparações que são fundamentais para compreensão dos números deste conjunto.

Em DOMINGUES (1991p.21) [3], fica estabelecida a relação de ordem, como segue:

Proposição 4. *Seja $a, b \in \mathbb{N}$, diz-se que $a \leq b$ se existir um $u \in \mathbb{N}$ tal que $a + u = b$.*

O número u chama-se **diferença** entre b e a e é indicado por $u = b - a$. Nas condições dadas acima em que $a \leq b$, a relação de ordem nos naturais conduz a uma nova operação, a **subtração**, quando em $u = b - a$, b é o minuendo e a é o subtraendo, e u a diferença.

Definição 2. *Seja A um conjunto não vazio, tal que $A \subset \mathbb{N}$ e a, b, c elementos quaisquer de A. Dizemos que R é uma relação de ordem em A quando satisfaz as seguintes condições:*

1 $a = a$ (Refleexividade).

2 Se $a \leq b$ e $b \leq a$, então $a = b$. (Antissimetria).

3 Se $a \leq a$ e $b \leq c$, então $a \leq c$. (Transitividade).

4 Se $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$.

5 Se $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$.

Dizemos ainda que tal A, diferente de vazio e munido de uma relação R, é chamado de conjunto ordenado.

1.7 Princípio da Boa Ordenação

Definição 3. *Seja S um subconjunto de $\mathbb{N}$. Dizemos que um número natural a é um menor elemento de S se possui as seguintes propriedades:*

(i) $a \in S$

(ii) $\forall n \in S, a \leq n.$

*O menor elemento de S, quando existe, é denotado por **min** S.*

Essa relação de ordem conduz ao Princípio da Boa Ordenação, que como demonstrado em (OLIVEIRA,2010 p. 90)[7] pode ser expresso na forma do seguinte teorema:

Teorema 2. ***Princípio da Boa Ordenação**: Todo subconjunto não vazio de $A \subset \mathbb{N}$ possui um elemento menor que todos os outros elementos deste, ou seja, existe $a \in A$, tal que $a \leqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demonstração: Suponha que S seja subconjunto não vazio de $\mathbb{N}$ e suponha, por absurdo, que ele não possua um menor elemento.

Considere um conjunto T, complementar de S em $\mathbb{N}$. Definido o conjunto

$$I_n = \{k \in \mathbb{N}; k \leqslant n\}$$

analisemos a sentença aberta $p(n) : I_n \subset T$. Note que $I_0 = 0$.

- $0 \in T$, caso contrário 0 seria menor elemento de S, logo $p(0)$ é verdade.

Portanto $I_0 \subset T$.

Supondo que $p(n)$ seja verdade, isto é, $P(n) : I_n \subset T$, se $n \leq k \Rightarrow k \in T$, em particular tome $k = n$, $n \in T$, perceba que $p(n+1)$ também deverá ser verdade, porque de outro modo $(n+1)$ seria o menor elemento de S, o que não é permitido. Logo $(n+1) \in T$. Segue do princípio da Indução que $T = \mathbb{N}$. Como na hipótese o conjunto S tomado deve ser não-vazio e Complementar de T em relação a $\mathbb{N}$, chegamos a um absurso. Logo, S possui um menor elemento.

Exemplo: Se A é o conjunto dos números pares não nulos, o menor elemento de A é o número 2.

Capítulo 2

Sistemas de Numeração

A gênese histórica dos sistemas de numerações concebida por diversos povos e em diversas partes do mundo, durou centenas de anos, em alguns casos milhares de anos, e consistiu em encontrar um mecanismo que permitisse ao homem desenvolver processos de contagens.
O homem foi gradualmente compreendendo os números como quantidade, através de esquemas que lhe permitiam contar, e aos poucos foram surgindo símbolos que depois de ser socialmente aceitos e compreendidos passaram a ser usados nas transações comerciais, e nas discussões matemáticas. A esses símbolos chamamos hoje de numeral, e representam os números.

Na verdade já existiram vários sistemas de numerações diferentes. Os sistemas de escritas numéricos mais antigos que se conhecem são os dos egípcios e dos babilônios, que datam aproximadamente do ano 3500 a.c.

Figura 2.1: FONTE: Portal do professor do MEC

Os **egípcios** usavam um sistema de agrupamento simples, com base 10, e seus símbolos eram representações de elementos do seu dia a dia, como um dedo apontando, um homem, ou uma flor. [figura 2.1]

Quanto aos babilônios, eles conheciam um sistema posicional mas, seu sistema de numeração era sexagesimal, isto é, base 60.

A herança do sistema sexagesimal que ainda fazemos muito uso está na subdivisão das unidades de medidas $Grau = 60', minutos = 60''$ e segundos.

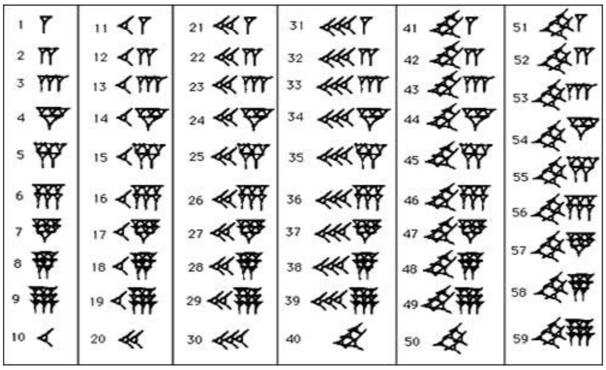

Figura 2.2: FONTE: Portal do professor do MEC

Um sistema de numeração ainda muito presente no nosso dia a dia é o sistema de numeração romano, que se manifesta ora para enumerar os capítulos de um livro ou simplesmente graduando a coroa de algum relógio analógico. O avanço nesse sistema de numeração foi usar o valor posicional para representar praticamente todos os números com apenas sete símbolos como mostra a figura 2.3.

1	I	8	VIII
2	II	9	IX
3	III	10	X
4	IV	50	L
5	V	100	C
6	VI	500	D
7	VII	1000	M

Figura 2.3: www.mundoeducacao.com.br

A depender do momento histórico e da sua localização geográfica, tais registros ficaram estabelecidos em diferentes bases de numeração.

Basta se dirigir ao mercado que facilmente se ouve falar sobre dúzias, isto é agrupamento dos elementos de um conjunto de doze em doze. O programador de computador utiliza-se do sistema binário, no seu trabalho. Portanto, a base numérica varia daqui pra acolá, de acordo com seu usuário.

Há quem diga que os primeiros números tenham sido de base cinco, imaginando que seja o agrupamento com o qual o homem tinha mais contato, ao olhar para suas próprias mãos

Figura 2.4: FONTE: Portal do professor do MEC

Não faz diferença se essa ou aquela é a base de escrita dum sistema de numeração, o que importa é se ela facilita a comunicação entre seus interlocutores, pois foram criadas com esse propósito.

Pode-se dizer que, via de regra, qualquer número natural, maior ou igual a *um*, pode ser utilizado como base para um sistema de numeração. Na programação de computadores os sistemas mais usados tem é o binário (base 2), ou base hexadecimal (base 16). Em algumas partes do mundo ainda é utilizado a base 8, ou octal.

No nosso dia a dia, usualmente escrevemos os números usando o sistema decimal (base10). Por isso a representação adotada para qualquer número que não seja pertencente à base decimal deve ser indicado à direita do número, como nos exemplos abaixo:

- 624_{16} (624 na base 16)

- 101101_2 (101101 na base 2)
- 253_8 (253 na base 8)

A quantidade de símbolos necessários para representar os números em um sistema de numeração é igual ao valor da base deste sistema.

Na base *dez*, por exemplo, dispomos de 10 algarismos : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ e 9. Na base *dois*, são apenas 2 algarismos: 0 e 1. Na base *hexadecimal*, são 16: os 10 algarismos aos quais estamos acostumados, mais os símbolos A, B, C, D, E e F, representando respectivamente $10, 11, 12, 13, 14$ e 15 unidades.

Generalizando então, para escrever um número numa base b qualquer, necessitaremos de b algarismos, variando entre 0 e $(b - 1)$.

Teorema 3. *Seja b um número natural maior que 1 e seja $M = \{0, 1, 2, ..., (b-1)\}$. Então todo número $\mathbb{N}$ pode ser representado univocamente da seguinte maneira:*

$$n = a_0 + a_1 \cdot b^1 + a_2 \cdot b^2 + \ldots + a_r \cdot b^r$$

Onde $r \geq 0$ e $a_i \in M, i = \{0, 1, 2, 3, 4, ..., r\}$ e $a \neq 0$.

Demonstração: A existência será provada por indução sobre $\mathbb{N}$. Se $n < b$, então $n = n$ é a representação pretendida. Tomemos $n \geq b$ e admitamos como hipótese que para todo q, $1 \leq q < n$, essa representação seja possível, digamos que

$$n = b \cdot q + a_0, \quad a_0 \in M$$

Tomando

$$q = a_1 + a_2 \cdot b^1 + \ldots + a_r \cdot b^{r-1}, \quad a_i \in \mathbb{N}, \quad a_r \neq 0$$

Consequentemente,

$$n = b \cdot (a_1 + a_2 \cdot b^1 + \ldots + a_r \cdot b^{r-1} + a_0)$$

$$n = a_0 + a_1 \cdot b^1 + a_2 \cdot b^2 + \ldots + a_r \cdot b^r,$$

conforme enunciado.

Unicidade de $\mathbb{N}$: Para $n < b$ é trivial. Seja $n \geq b$ e suponhamos que a unicidade se verifica para todo q, $1 \leq q < n$. Suponhamos ainda que

$$n = a_0 + a_1 \cdot b^1 + a_2 \cdot b^2 + \ldots + a_r \cdot b^r = a'_0 + a'_1 \cdot b^1 + a'_2 \cdot b^2 + \ldots + a'_s \cdot b^s$$

onde, também $a'_0, a'_1, a'_s \in M$. Então

$n = b \cdot (a_1 + a_2 \cdot b^1 + \ldots + a_r \cdot b^{r-1} + a_0) = b \cdot (a'_1 + a'_2 \cdot b^1 + \ldots + a'_r \cdot b^{r-1} + a'_0)$

Como tanto $a_0 < b$ como $a'_0 < b$, é único, então $a_0 = a'_0$ e

$$a_1 + a_2 \cdot b^1 + \ldots + a_r \cdot b^{r-1} = a'_1 + a'_2 \cdot b^1 + \ldots + a'_r \cdot b^{r-1}$$

e segue que $r = s$.

No caso do sistema decimal, $b = 10$, a representação dos números fica da seguinte forma:

$$n = a_n \cdot 10^n + a_{(n-1)} \cdot 10^{(n-1)} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0,$$

e com apenas nove símbolos, pode-se fazer a completa disposição dos elementos em estágios necessários para se contar os objetos na natureza.

Os estágios mencionados acima são normalmente chamados de **ordem das unidades simples, ordem das dezenas, ordem das centenas**, e assim sucessivamente. O valor de cada algarismo se altera de acordo com a posição ocupada por ele em uma potência de dez, para cada casa imediatamente superior à sua.

Exemplo: Tomemos o número 194. Nesse número o algarismo 1 representa uma centena, ou (1.10^2) e o algarismo 9 representa nove dezenas, ou (9.10^1) e o algarismo 4 representa quatro unidades, ou (4.10^0).
Em notação decimal fica desse jeito:

$$194 = 1 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0.$$

Mas, o sistema de numeração decimal é fruto de um longo processo que veio se aprimorando ao enumerar os mais diferentes objetos e suas coleções, e constituiu-se atualmente num sofisticado sistema de simbolização escrito que nos permite expressar qualquer quantidade na natureza. Além disso é um sistema que facilita a realização das operações matemáticas ligadas à Aritmética, à Algebra e à Geometria.

Esse sistema de numeração será usado para apresentar algumas considerações sobre **divisibilidade** nessa dissertação de mestrado.

Capítulo 3

Divisibilidade

Considerando o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, é possível estudar um importante conceito: a divisibilidade.

Definição 4. *Sejam a e $b \in \mathbb{N}$ $a \neq 0$, diremos que a divide b, se, e somente se existe um natural $c \in \mathbb{N}$, tal que $b = a \cdot c$, e indica-se $a \mid b$. (Lê-se: a divide b).*
*Neste caso, dizemos que a é **divisor** de b e que b é **múltiplo** de a.*

Por outro lado, quando o número a não diviede b negamos a afirmação escrevendo $a \nmid b$. (Lê-se : a não divide b).

Exemplo:

$$1 \mid 7 \quad 2 \mid 0 \quad 2 \mid 6 \quad 5 \mid 10$$

$$2 \nmid 5 \quad 3 \nmid 4 \quad 6 \nmid 11$$

Para a relação $a \mid b$ em $\mathbb{N}$, vale ressaltar a existência de algumas propriedades importantes.

3.1 Propriedades da divisibilidade

Nem sempre é possível a divisibilidade nos números naturais. Reconhecer de forma mais imediata quando ela ocorre é muito importante no processo de aprendizagem da criança. Assim, examinaremos algumas propriedades que caracterizam a divisibilidade nos naturais.
$\forall a, b, c \in \mathbb{N}$, valem as propriedades abaixo:

(d_1) $a \mid a, \forall a \in \mathbb{N}$, pois $a = a \cdot 1$ (reflexiva).

(d_2) $a \mid b$ e $b \mid a \Rightarrow a = b$ (anti- simétrica).

(d_3) $a \mid b$ e $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (transitiva).

A validade das propriedades (d_1) e (d_2) é trivial.

Demonstração: (d_3).
Tome $b = a \cdot r$ e $c = b \cdot s$, então $c = a \cdot (r \cdot s)$, com $r, s \in \mathbb{N}$

Exemplo: Tem-se que 6 é divisor de 12, e 12 é divisor de 48. Logo, 6 é divisor de 48.

Hefez $(2011, p.32)$ [5] ainda propõe as seguintes propriedades adicionais:

Proposição 5. *Sejam a, b e c números naturais, com $a \neq 0$, e x e y também números naturais tais que $a \mid b$ e $a \mid c$, então a divide $(x \cdot b + y \cdot c)$, e se $x \cdot b \geq y \cdot c$, então a divide $(x \cdot b - y \cdot c)$.*

Demonstração : Se $a \mid b$ e $a \mid c$, então existem f e $g \in \mathbb{N}$ tais que $b = f \cdot a$ e $c = g \cdot a$ e $x \cdot b + y \cdot c = x \cdot (f \cdot a) + y \cdot (g \cdot a) = (x \cdot f + y \cdot g) \cdot a$, concluindo assim a demonstração.

Exemplo: Veja que 3 divide 24 e também divide 18. Tomando 42 como soma de duas parcelas, $(24 + 18)$ e já sabendo que $24 = 3 \cdot 8$ e $18 = 3 \cdot 6$ verificamos o resultado da propriedade, pois 42 também é divisível por 3.

Proposição 6. *Se $c \mid a$, e $c \mid b$, e $a \leq b$, então $c \mid (b - a)$.*

Demonstração : Sejam $r, s, u \in \mathbb{N}, r \leq s$, e sejam $a = cr$ e $b = cs$. Fazendo $b = a + u$, então $cs = cr + u$ e daí $u = cs - cr = c(s - r)$. Logo $c \mid u$ e como $u = b - a$, a propriedade está provada.

Proposição 7. *Se $a \mid b$ e $c \mid d$, então $(a \cdot c) \mid (b \cdot d)$.*

Demonstração: Se a divide b, então existe um número natural k, tal que $b = a \cdot k$. Da mesma forma, se c divide d, então existe um número natural q, tal que $d = c \cdot q$. Segue então que $b \cdot d = (a \cdot k) \cdot (c \cdot q) = (a \cdot c) \cdot (k \cdot q)$, ou seja,$(a \cdot c)$ é um fator de $(b \cdot d)$, concluindo assim a demonstração.

Exemplo: Sabendo-se que 3 divide 9, e 4 divide 8. Como, $12 = (3 \cdot 4)$ divide $72 = (8 \cdot 9)$, e substituindo $72 = (2.4) \cdot (3.3)$ obtemos formas fatoradas diferentes do número, tal como ou $72 = 8.9 = (3.4) \cdot (2.3)$, comprovando que $6 = 2 \cdot 3$ é divisor de 72.

Proposição 8. *Sejam a, b e c números naturais, com $b \geq c$ e $a \neq 0$, tais que $a \mid (b \pm c)$, então a divide b se, e somente se, a divide c.*

Demonstração: Supondo-se que $a \mid (b + c)$, então existe $f \in \mathbb{N}$ tal que $b+c = f.a \Rightarrow c = f.a - b$. Agora se a é divisor de b significa que existe algum $g \in \mathbb{N}$, tal que $b = g \cdot a$. Substituindo essa última igualdade na primeira, segue que:

$$b + c = f.a \Rightarrow c = f.a - (g \cdot a)$$

$$\Rightarrow c = a \cdot (f - g)$$

e assim se chega a conclusão de que a também é divisor de c.

Exemplo: Nota-se que o número 18 é divisível por $9 = (3+6)$. Também pode-se ver claramente que $3 \mid 18$ e que $6 \mid 18$. Por outro, lado se tomarmos $9 = (5+4)$ podemos verificar facilmente que o número 18 não é divisível por nenhuma de suas duas parcelas. Perceba também que quando tomamos o número natural 18 como soma de dois outros números naturais a e b, toda vez que o a for divisor de 18, o número b também o será, e o inverso também é verdadeiro.

Proposição 9. *Sejam a e b números naturais, ambos diferentes de zero. Segue-se que, se $a \mid b$, então $a \leq b$.*

Na propriedade acima fica óbvio a necessidade de o divisor ser menor ou igual ao dividendo.

3.2 Múltiplos e Divisores

Os múltiplos e divisores de um número natural se relacionam da seguinte maneira: Se a divide b então:

i) a é um divisor natural de b.
i) b é um múltiplo natural de a.

Exemplo: Se 5 divide 15, então 5 é divisor de 15. Portanto, 15 é múltiplo de 5.
Da mesma forma, verifica-se que 3 divide 12. Assim, 3 é divisor de 12.

Por outro lado,

- 5 nã é um divisor natural de 72. Portanto 72 nã é múltiplo de 8.
- 8 também não é um divisor de 75, pois 8 não é um fator de 75.

Portanto, dado um número natural a, denomina-se conjunto dos múltiplos de a o produto do número a pela sequencia dos números naturais. Assim, os múltiplos de 3 são determinados da seguinte maneira

- $3 \cdot 0 = 0$.
- $3 \cdot 1 = 3$
- $3 \cdot 2 = 6$
- $3 \cdot 3 = 9$
- $3 \cdot n = 3n$
- $3 \cdot (n + 1) = 3n + 3$
- $\vdots = \vdots$

O conjunto formado pelos múltiplos de 3 fica indicado por

$$M(3) = \{0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, ...\}$$

Assim, dado um natural a, o conjunto dos múltiplos de a será dado por $M(a) = \{m \cdot a; m \in \mathbb{N}\}$

- $M(2) = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...\}$.
- $M(4) = \{0, 4, 8, 12, 16, ...\}$
- $M(5) = \{0, 5, 10, 15, ...\}$

Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}^*$, o conjunto dos divisores de a é indicado por:

$$D(a) = \{b, c \in \mathbb{N}; b \cdot c = a\}$$

.

Exemplo: Considere os divisores dos seguintes números :

- $D(12) = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.
- $D(36) = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$.
- $D(20) = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$.

Observações:

- O número 1 é divisor de qualquer outro natural.
- Todo número é divisor de si próprio.

3.3 Algoritmo da Divisão

O algoritmo da divisão nesse capítulo se apresenta como processo prático de representação da divisão entre quaisquer dois números naturais, admitindo-se um resto também natural.

Tome dois números naturais a e b, sendo a menor que b. Dizemos que b é divisível por a se, e só se, existir um natural c tal que $b = a \cdot c$.

Caso não exista um natural c tal que $b = a \cdot c$, o algoritmo de Euclides permite essa operação concebendo um resto $r < a$. Isso é resultado de um importante teorema.

Teorema 4. *Divisão Euclidiana: Sejam a e b dois números naturais com $0 < a < b$. Existem dois únicos números naturais q e r tais que $b = a \cdot q + r$, com $r < a$.*

Os números q e r dizem-se, respectivamente, quociente e resto da divisão de b por a, enquanto que b é o dividendo e a é o divisor.

Demonstrações da existência e unicidade do quociente q e do resto r são encontradas em muitos textos e já eram conhecidas de **Euclides** no terceiro século antes de Cristo. Usaremos uma feita por HEFEZ $(2011, p.35)$ [5].

Demonstração : Provaremos por contradição. Suponha que $b > a$ e considere, enquanto fizer sentido, o conjunto

$$S = \{b, b-a, b-2a, ..., b-n\cdot a\}$$

Pelo Princípio da Boa Ordem, o conjunto S tem **um menor elemento** $r = b - q\cdot a$. Queremos provar que $r < a$.
Se $a \mid b$ então não resta nada a provar. Se por outro lado $a \nmid b$, basta provar que não ocorre $r > a$, pois, se assim ocorresse existiria um número natural $c < r$ tal que $r = c + a$ e consequentemente se $r = c + a \Rightarrow c + a = b - q\cdot a$. e isso por sua vez acarretaria em

$$c = b - q\cdot a - a = b - (q+1)a \in S$$

Mas, esse $c < r$ contradiz a condição de r ser o menor elemento de S. Portanto, $b = a\cdot q + r$ com $r < a$.

Quanto à unicidade, note que a diferença entre um elemento de S e outro menor é sempre um múltiplo de a. Tomando $r = b - a\cdot q$, se existisse um $r^{'} = b - a\cdot q^{'}$ com $r < r^{'} < a$, teríamos $r^{'} - r \geqslant a$ o que acarretaria $r^{'} \geqslant a + r \geqslant a$ o que é um absurdo e portanto $r = r^{'}$, e $b - a\cdot q = b - a\cdot q^{'}$ e portanto $q = q^{'}$.

Exemplo: Suponha que se deseje dividir 53 por 7. Não será possível nos números naturais. Mas podemos admitir um resto natural $r = 53 - 7\cdot 7 = 4$.

De modo que a representação dessa operação na forma do algoritmo da divisão euclidiana fica assim:

$$53 = 7\cdot 7 + 4$$

.

Exemplo: Representar a divisão do número 48 por 5, por exemplo, significa escrever $48 = 5\cdot 9 + 3$. Ou seja, 48 dividido por 5 tem quociente 9 e resto 3.

De certa forma pode-se representar todos os números naturais através do algoritmo da divisão euclidiana:

- $11 = 5\cdot 2 + 1$ onde 2 é quociente e 1 é o resto.
- $7 = 4\cdot 1 + 3$ onde 1 é quociente e 3 é o resto.

3.4 Números Primos

Definição 5. *Um número natural* $\mathbb{N}$ *diferente de* 0 *e de* 1 *e que é divisível apenas por* 1 *e por si próprio é chamado número primo. Um número natural* $\mathbb{N}$ *diferente de* 0 *e de* 1 *que não é primo é chamado de número composto. Quer dizer, deve existir naturais* n_1 *e* n_2 *diferentes de* n *tal que* $n_1 \cdot n_2 = n$.

Exemplos: Os números $2, 3, 5, 11$ são números primos pois não possuem divisores naturais diferentes de 1 e eles próprios.

Exemplos: Os números $10 = 2 \cdot 5$ e $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$ são números compostos porque seus fatores podem ser diferentes de 1 e deles próprios.

Proposição 10. *Sejam* $a, b, p \in \mathbb{N}^*$, *com* p *primo. Se* $p \mid a \cdot b$ *então* $p \mid a$ *ou* $p \mid b$.

Obsservação: Se $p, p_1, p_2, \cdots, p_n$ são números primos e, $p \mid p_1 \cdot p_2 \cdots, p_n$ então $p = p_i$ para algum $i = \{1, 2, 3, ...n\}$

O menor número natural primo é o número 2, pois seus únicos divisores são 1 e 2. O conceito de número primo é fundamental na Teoria dos Números. Alguns teoremas profundos e poderosos dizem respeito aos número primos.

Proposição 11. *Qualquer número natural* $\mathbb{N}$ *maior do que* 1 *ou é primo ou é composto.*

3.4.1 Fatoração de números naturais

Fatorar um número natural significa escrevê-lo na forma de produto de fatores primos. De fato, disso é que trata um importante teorema, conhecido como **Teorema Fundamental da Aritmética**, e é destacado por *Euclides de Alexandria* no livro *Os Elementos*.

Para obtermos a forma fatorada de um número natural procede-se da seguinte maneira: Escreve-se o número natural dado e divide-o pelo seu menor divisor natural primo. O mesmo procedimento é aplicado ao resultado obtido e assim sucessivamente até obter como resultado o número 1. Os divisores primos usados nas diversas etapas da divisão constitui a forma fatorada do número dado.

Vejamos alguns números naturais e as suas respectivas fatorações completas, ou seja, aquelas em que só aparecem fatores primos na sua decomposição.

- (a) $\begin{array}{r} 36 = 2 \cdot 18 \\ 18 = 2 \cdot 9 \\ 9 = 3 \cdot 3 \\ 3 = 3 \cdot 1 \end{array}$

Note que o produto dos fatores primos usados nas divisões é $36 = 2^2 \cdot 3^2$

- (b) $\begin{array}{r} 144 = 2 \cdot 72 \\ 72 = 2 \cdot 36 \\ 36 = 2 \cdot 18 \\ 18 = 2 \cdot 9 \\ 9 = 3 \cdot 3 \\ 3 = 3 \cdot 1 \end{array}$

Novamente a fatoração de 144 fica dessa forma: $144 = 2^4 \cdot 3^2$
Exemplo:

Obtenha a forma fatorada de 90
Aplicando o procedimento acima obtemos:
$$\begin{array}{r} 90 = 2 \cdot 45 \\ 45 = 3 \cdot 15 \\ 15 = 3 \cdot 5 \\ 5 = 5 \cdot 1 \end{array}$$
Deste modo $90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$.

Para perceber como a fatoração é de grande relevância, seguem os exemplos abaixo:

Exemplo: O número $2 \cdot 5^7$ **é divisível por** 10**?**

Solução: Observe que $10 = 2 \cdot 5$, e que o número $2 \cdot 5^7$ apresenta os fatores 2 e 5. Portanto $2 \cdot 5^7$ é divisível por 10.

Exemplo:
É verdade que se um número for divisível por 4 **e por** 5**, então ele tem que ser divisível por** 20**?**
Solução:
(VERDADE). Um número natural que é divisível por 4, deve possuir pelo menos dois fatores iguais a 2. Como o número também é divisível por 5, a sua decomposição deverá ter pelo menos um fator 5. Assim, esse número deverá ser divisível por $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$. Logo, a resposta é **verdadeira**.

3.5 Critérios da divisibilidade

Reconhecer um número como primo ou composto ajuda muito quando se precisa realizar a decomposição de um número natural qualquer em fatores primos. Mas, volte a atenção para a pergunta: **O que fazer para saber de forma mais imediata se um número natural é divisível por outro?**

Uma das possibilidades é aplicar o algoritmo da divisão euclidiana, pois este é um método fácil e prático, como já mencionado. Outra possibilidade é observar certas características peculiares à estrutura dos números naturais no sistema decimal, e lhes aplicar alguns procedimentos de resultados imediatos.

Ao longo da história, os matemáticos organizaram algumas regras básicas que caracterizam os números naturais e que permitem ao aluno investigador, de forma rápida e acertada, determinar se um número natural é ou não divisível por outro. Essas regras ficaram conhecidas como critérios da divisibilidade.

Conhecer esses critérios facilita na resolução de cálculos envolvendo divisões.

Teorema 5. ***Divisibilidade por*** 2*: Um número será divisível por* 2*, quando o algarismo das unidades for* $0, 2, 4, 6$ *ou* 8*.*

Demonstração: Dado um número

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r,$$

observa-se que toda potência $10^r, (r \geqslant 1)$, é um número par, pois:

$a = 10^r$
$a = 10 \cdot 10^{r-1}$
$a = 2 \cdot 5 \cdot 10^{r-1}$

Assim, $2 \mid a \Rightarrow 2 \mid 10^r \quad \forall r \in \mathbb{N}$.

Então $n = a_0 + a_1 \cdot 2q_1 + a_2 \cdot 2q_2 + \ldots + a_r \cdot 2q_r$ com $q \in \mathbb{N}$.
Note que $2q$ é divisível por 2 $\forall q \in \mathbb{N}$. Portanto $\mathbb{N}$ será divisível por 2, se, e somente se, a_0 for divisível por 2, ou seja se $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$.

Um número que é divisível por 2 é denominado par, caso contrário, ímpar.

Exemplo: Observe nos exemplos abaixo a veracidade do afirmado acima:

- $2 \mid 134$, pois $2 \mid a_0 = 4$ que é par.
- $2 \mid 108$, pois $2 \mid a_0 = 8$ que é número par.

Teorema 6. ***Divisibilidade por*** 3*: Um número será divisível por* 3 *quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por* 3*.*

Demonstração: Observe que o resto da divisão de 10^k por três é sempre 1, para todo $k \geq 0$. De fato,

- $10^0 = 1 = 3 \cdot 0 + 1$
- $10^1 = 10 = 3 \cdot 3 + 1$

Suponhamos que $10^k = 3 \cdot s + 1$, para $k \geq 0$
Então por indução

$$10^{k+1} = 10^k \cdot 10 = (3 \cdot s + 1) \cdot (3 \cdot 3 + 1) =$$

$$= (3 \cdot (9 \cdot s) + 3 \cdot s + 3 \cdot 3 + 1) = 3.(10s + 3) + 1$$

Assim para todo $n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r$

$$n = a_0 + a_1 \cdot (3q_1 + 1) + a_2 \cdot (3q_2 + 1) + \ldots + a_r \cdot (3q_r + 1)$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_r) + 3 \cdot (a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_rq_r)$$

Em resumo

$$n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_r + 3q$$

Portanto $\mathbb{N}$ será divisível por 3 se $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ for divisível por 3, isto é, um número é divisível por 3, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por 3.

Exemplo: Note os valores abaixo:

- $156 \div 3 = 52$, pois $1 + 5 + 6 = 12$ e $3 \mid 12$.
- $528 \div 3 = 186$, pois $5 + 2 + 8 = 15$ e $3 \mid 15$.

Teorema 7. ***Divisibilidade por*** 4*: Um número será divisível por* 4*, quando o número formado pelos dois últimos algarismos for* 00 *ou um múltiplo de* 4*.*

Demonstração: Note que

$$n = a_0 + 10a_1 + (100a_2 + ... + ... + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n \cdot a_n)$$

será um múltiplo natural de 4 quando $a_1a_0 = a_0 + 10a_1$ for divisível por 4.

Exemplo: Os casos abaixo ilustram bem isso.

- $5288 \div 4 = 1322$, note que 88 é divisível por 4.
- $124 \div 4 = 31$, perceba também que 24 é divisível por 4.
- $100 \div 4 = 25$, pois possui na última e antepenúltima casa o algarismo 0 (zero) .

Teorema 8. ***Divisibilidade por*** **5***: Um número será divisível por* 5*, quando o algarismo das unidades for* 0 *ou* 5*.*

Demonstração: Dado o número

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r,$$

observe que toda potência $10^r, (r \geqslant 1)$, é um número divisível por 5, pois $5 \mid 10^r = 10 \cdot 10^{r-1} = 2 \cdot 5 \cdot 10^{r-1}$, logo $5 \mid 10^r$. Assim,

$$n = a_0 + a_1 \cdot (5 \cdot 2) + a_2 \cdot (5 \cdot 10^1) + a_3 \cdot (5 \cdot 10^2) \cdots a_r \cdot (5 \cdot 10^{r-1})$$

$$n = a_0 + 5 \cdot (a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 10^1 + a_3 \cdot 10^2 \cdots a_r \cdot 10^{r-1})$$

Então $n = a_0 + 5q$ com $(q \in \mathbb{N})$.

Portanto, um número natural $\mathbb{N}$ será divisível por 5 se, e somente se, a_0 for divisível por 5, e isso só ocorre se $a_0 = 0$ ou $a_0 = 5$.

Note abaixo:

- $35 \div 5 = 7$, observe que o número 35 tem na casa das unidades o algarismo 5.
- $100 \div 5 = 20$, nesse caso o algarismo das unidades é 0.

Teorema 9. ***Divisibilidade por*** 6*: Um número será divisível por* 6*, quando for divisível por* 2 *e por* 3*, simultaneamente.*

Demonstração: Conforme já visto, o fato de $\mathbb{N}$ ser um múltiplo de 2 implica que $2 \mid a_0$ e que $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e o fato de $\mathbb{N}$ ser múltiplo de 3 acarreta ser $a_0 + a_1 + ... + a_n$ múltiplo de 3, isto é, $a_0 + a_1 + ... + a_n = 3 \cdot q$ para algum número natural q. Isto posto, dado

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r,$$

diremos que $\mathbb{N}$ é divisível por 6 se $a_0 \in \{0, 2, 4, 6, 8\}$ e $a_0 + a_1 + ... + a_n = 3 \cdot q$, $q \in \mathbb{N}$.

Exemplo: Verifiquemos abaixo, casos de números divisíveis por 6

- $36 \div 6 = 6$. Veja que 36 é par e a soma dos algarismos $3 + 6 = 9$ e $3 \mid 9$. Assim, 36 é divisível por 2 e por 3, consequentemente é divisível por 6
- $138 \div 6 = 23$, novamente o número 138 é divisível por 2 e por 3.

Um critério da divisibilidade para o número 7 é apresentado em (TABOAS, 2001) [8], mas que é muito dependente da estrutura do sistema de numeração decimal, pois se $n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r$ o que importa, são os restos da divisão de $1, 10, 100, ..., 10^{n-1}, 10^n$ por 7 que são respectivamente $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1, 3, 2, 6, 4, 5, ...$ nessa ordem, então $\mathbb{N}$ pode ser representado por $n = a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + [7 \cdot a_1 + 7 \cdot 14a_2 + 7 \cdot 142a_3 + 7.1428a_4 + 7.14285a_5 + ...]$, que só será múltiplo de 7 se a parte de fora do colchete $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + ...$ for um múltiplo de 7, visto que a parcela dentro dos colchetes é um múltiplo de 7.

Exemplo: Afirmamos que $7 \mid 6909$. Perceba que $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 = 9 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 9 + 6 \cdot 6 = 9 + 0 + 18 + 36 = 63 \Rightarrow 3 + 3 \cdot 6 = 3 + 18 = 21$ que é divisível por 7.

Por outro lado, existe um método mais simple que quando aplicado repetidamente pode ser mais prático para se ferificar o resultado.

Teorema 10. ***Divisibilidade por*** 7*: Um número é divisível por* 7*, quando ao subtrair o dobro do último algarismo do número formado pelos demais algarismos resulta um número divisível por* 7*.*

textbfExemplo: Veja nos exemplos numéricos abaixo:

- $203 \div 7 = 29$. Note que $20 - 2 \cdot 3 = 20 - 6 = 14$ que é divisível por 7
- $84 \div 7 = 12$. Novamente $8 - 2 \cdot 4 = 8 - 8 = 0$ que é divisível por 7

Teorema 11. ***Divisibilidade por*** 9*: Um número é divisível por* 9*, quando a soma dos valores absolutos de seus algarismos for divisível por* 9*.*

O critério para a divisão por 9 é muito parecido com o do número 3.

Demonstração: Observe que o resto da divisão da potência 10^k por nove é sempre 1, para todo $k \geq 0$. De fato,

- $10^0 = 1 = 9 \cdot 0 + 1$
- $10^1 = 10 = 9 \cdot 1 + 1$

Suponhamos que $10^k = 9 \cdot s + 1$, para $k, s \in \mathbb{N}, k \geq 0$
Então, por indução

$$10^{k+1} = 10^k \cdot 10 = (9 \cdot s + 1) \cdot (9 \cdot 1 + 1) =$$

$$= 9 \cdot (9 \cdot s) + 9 \cdot s + 9 \cdot 1 + 1 = 9.(10s) + 9 + 1 = 9 \cdot (10s + 1) + 1$$

Como $n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r$

$$n = a_0 + a_1 \cdot (9q_1 + 1) + a_2 \cdot (9q_2 + 1) + \ldots + a_r \cdot (9q_r + 1)$$

$$(a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_r) + 9 \cdot (a_1q_1 + a_2q_2 + \cdots + a_rq_r)$$

Em resumo,

$$n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_r + 9q$$

De modo que $\mathbb{N}$ será divisível por 9 se $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_r$ for divisível por 9.

Exemplo:

- $81 \div 9 = 9$ pois, $8 + 1 = 9$.
- $1107 \div 9 = 123$, pois $1 + 1 + 0 + 7 = 9$

Teorema 12. ***Divisibilidade por*** 10*: Um número é divisível por* 10*, se o algarismo das unidades é* 0 *(zero).*

Demonstração: Perceba que todo natural escrito na base dez fica assim:

$$n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r,$$

Na verdade é a soma de várias parcelas de múltiplos de potências de dez. Então $\mathbb{N}$ pode ser escrito também como $n = 10q + a_0$ Portanto o critério para divisibilidade por dez só ocorre se $10 \mid a_0$, o que só é possível se $a_0 = 0$.

Exemplo: A divisibilidade por *dez* de certa forma é trivial:

- $10 \mid 50$ pois, o número 50 termina em 0.
- $10 \mid 120$ pois, o número 120 termina em 0

Teorema 13. ***Divisibilidade por*** 11*: Um número será divisível por* 11 *quando a diferença entre os algarismos de ordem ímpar e de ordem par for divisível por* 11*.*

Demonstração: Analisemos o valor posicional dos algarismos:

- na potência 10^0 sobra 1, pois $11 \mid 10^0 - 1$;
- na potência 10^1 falta 1, pois $11 \mid 10^1 + 1$
- na potência 10^2 sobra 1, pois $11 \mid 10^2 - 1$
- na potência 10^3 falta 1, pois $11 \mid 10^3 + 1$
- na potência 10^4 sobra 1, pois $11 \mid 10^4 - 1$.

Tomemos $n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r$. Cada potência de expoente par deixa sobra de uma unidade, que quando multiplicada por seus respectivos dígitos soma $s_1 = a_2 n + a_(2n - 2) + \cdots + a_2 + a_0$ Cada potência de expoente ímpar falta uma unidade, que quando multiplicada por seus respectivos dígitos soma $s_2 = a_2 n - 1 + a_2 n - 3 + \cdots + a_3 + a_1$. Como s_1 e s_2 fora obtidos como resto na divisão $\mathbb{N}$ por 11 e que s_1 representa sobras enquanto s_2 representa falta, $11 \mid n$, se dividir $|s_1 - s_2|$ que chamaremos de $S_n = (-1)^2 n \cdot a_{2n} + (-1)^2 n - 1 \cdot a_{2n-1} + \ldots + (-1)^2 \cdot a_2 + (-1)^1 \cdot a_1 + (-1)^0 \cdot a_0$

Portanto, seja $n = a_0 + a_1 \cdot 10^1 + a_2 \cdot 10^2 + \ldots + a_r \cdot 10^r$ um múltiplo natural de 11 quando a soma alternada dos dígitos dada por $S_n = a_0 - a_1 + a_2 + \ldots + (-1)^n a_n$ é um múltiplo de 11.

Exemplo: Note abaixo, nos exemplos numéricos.

- $1342 \div 11 = 122$, pois $(1+4)-(3+2) = 0-0 = 0$ que é divisível por 11.
- $7161 \div 11 = 651$, pois $(7+6)-(1+1) = 13-2 = 11$ que é divisível por 11.

Nota-se assim que se os critérios de divisibilidade forem bem empregados fica mais simples a tarefa de verificar se dois números naturais são vivisíveis entre si.

Capítulo 4

Sobre a experiência realizada

O trabalho foi desenvolvido na sala de aula com 14 alunos do 1^o ano do Curso Técnico em Segurança no Trabalho do turno matutino, no Centro Estadual de Educação Profissional em Saúde do Leste Baiano – CEEP, em Valença Bahia. Foram realizadas duas etapas previamente definidas de atividades, para chegarmos às conclusões dessa dissertação de mestrado.

O primeiro momento foi realizado em dois passos que fizeram parte da sequência didática:

1^0 Passo - Foi realizada uma coleta de informações através de um teste de sondagem para verificar a existência ou não de domínio das operações de divisão e multiplicação, reconhecimento de múltiplos e divisores, classificação entre números primos e compostos e decomposição de números naturais em fatores primos.

4.1 Procedimentos Metodológicos

Foi proposto que os alunos resolvessem as operações e apresentassem suas dificuldades num quadro sinóptico onde ele podia marcar um "X" nas opções: **Sei Fazer, ou Não sei Fazer, ou Chutei**.

Após um tempo de espera foi recolhido o quadro sinóptico e realizou-se uma atividade de resolução de problemas similares aos propostos inicialmente, a fim de direcionar os alunos. O objetivo dessa atividade era motivar os alunos e apontar possibilidades dentro do que eles recordassem dos seus estudos no Ensino Fundamental.

Verificado o nível de entendimento dos alunos, foi posto em operação o segundo passo:

2^o Passo - O periodo para essa etapa constituiu-se de duas aulas, de 50 minutos cada. Foi apresentado o conteúdo de Noções de Divisibilidade apoiadaS no livro **Iniciação à Aritmética,**(HEFEZ 2001)[6] e de outras fontes a fim de diversificar a abordagem. Nessas aulas foram trabalhados os conceitos de:

- Múltiplos e Divisores
- Números Primos e Compostos
- Decomposição em Fatores Primos
- Critérios de Divisibilidade

Para o segundo momento adotou-se como estratégia consultar páginas da internet previamente selecionadas com conteúdos matemáticos da temática desse trabalho. Foi uma atividade recebida com mais alegria pelos alunos, quando eles foram levados para o laboratório de informática onde tiveram a oportunidade de realizar uma atividade mais interativa, através do computador.

4.2 Resultados

Durante a atividade consultou-se (BRITO, 2011)[1] a página da internet hospedada no sitio do portal do professor do MEC. Posteriormente a autorização para o uso desse site foi confirmada pela autora **Luciana Pereira de Brito**, por meio de e-mail.

O endereço citado acima é uma página com slides interativos onde o aluno foi passo a passo aprendendo, ao LER, e num segundo momento ele pode aprender ao FAZER diversas atividades presentes no site.

Esse é um recurso também presente no sítio do Portal do Professor do MEC, no endereço *http://portaldoprofessor.mec.gov.br*, e todos os alunos foram incentivados a usá-lo.

Foi observado durante a realização desse trabalho, que a cada clic nas possíveis respostas, os alunos se sentiam estimulados a participar mais e mais, a se desafiar e a participar com intervenções orais motivados pela empolgação do acerto e da descoberta. Divertiam-se com o que estavam aprendendo apesar de ainda precisarem aprimorar seus cálculos, desde a noção simples de múltiplos e divisores até os critérios da divisibilidade, que tanto sentiam dificuldades.

Foi-lhes proporcionado entender que quando a divisão não fosse exata, então seria possível fazer a divisão admitindo a existência de um resto. A atividade mostrou uma oportunidade de exercitar e ampliar o conhecimento do aluno quanto ao assunto de divisibilidade.

Além dessa atividade, foi criado um grupo no facebook onde os alunos entravam para trocar idéias e tirar dúvidas pelo bate papo e isso foi importante porque garantiu a continuidade dos estudos, e assim a possibilidade de interesse não se desvanecia após as aulas em sala.

4.3 Considerações Finais

A experiência mostrou que nas aulas de Matemática o professor pode propiciar espaços de aprendizagens criativos e significativos, valorizando a participação do aluno como sujeito da construção do seu conhecimento. De fato, dos 14 alunos da turma onde houve o experimento desse trabalho, 6 deles não conseguiram responder a maioria das questões da atividade inicial de sondagem. Dentre os 8 alunos que responderam, apenas 2 deles conseguiram acerto acima de sessenta por cento.

N^o. de alunos	N^o. de acertos	% de aluno	% de acertos
6	0	43%	0%
2	1	14%	17%
3	2	21%	33%
1	3	7%	50%
2	4	14%	67%
TOTAL= 14	TOTAL =6	100%	

Tabela 4.1: Acertos no Exercício de sondagem

Após as aulas expositivas na lousa, como revisão, fazendo as devidas explicações, e após as atividades no computador consultando-se o site acima e outras fontes, os alunos passaram a apresentar desempenho melhor. Por exemplo, 100% dos alunos responderam a atividade II de conclusão, e 80%

deles tiveram aproveitamento superior a sessenta por cento de acertos.

N^o. de alunos	N^o. de acertos	% de aluno	% de acertos
1	3	8%	33%
2	5	14%	55%
2	7	14%	78%
4	8	29%	90%
5	9	36%	100%
TOTAL= 14	TOTAL = 9	100%	

Tabela 4.2: Acertos no Exercício de conclusão

Esse avanço foi realmente gratificante. A interatividade no grupo de estudos também foi muito importante. Na verdade, pode-se concluir que o trabalho tornou manifesto um vasto campo de possibilidades onde os conteúdos matemáticos podem ser explorados, além da sala de aula, e que um trabalho de base bem feito no assunto de **divisibilidade** pode desobstruir um importante empecilho para que muitos alunos passem a gostar de estudar Matemática.

Apêndice A

Atividade de Sondagem

CENTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL EM SAÚDE DO LESTE BAIANO - CEEP
DISCIPLINA: MATEMÁTICA
TÉCNICO EM SEGURANÇA NO TRABALHO
ALUNO: SÉRIE:

1) Entre os elementos do conjunto A= $\{1, 2, 3, 6, 5, 8, 9, 10, 12, 15, 18, 20\}$ indique:
   a) Os que são múltiplos de 2.
   b) Os que são divisores de 30.
   c) Os que são múltiplos de 3.
   d) Os que são múltiplosde 5.
   e) Os que são divisores de 36.

2) Qual valor devemos atribuir a x, o último dígito do número $38748x$ para que ele se torne divisivel por 6, mas não divisível por2?

3) Indique, justificando, quais dos seguintes números são primos e quais são compostos.
   a) 17
   b) 28
   c) 31
   d) 77
   e) 49
   f) 61

4) Decomponha em fatores primos os seguintes números;
   a) 30
   b) 55
   c) 60
   d) 185
   e) 256
   f) 430

5) O número de divisores naturais de 40 é:

a) 8
b) 6
c) 4
d) 3
e) 10

6) O número de divisores naturais de 360 que não são primos é:

a) 20
b) 21
c) 22
d) 23

Apêndice B

Verificação Final

CENTRO ESTAUAL DE EDUCAÇÃO PROFISSIONAL EM SAÚDE DO LESTE BAIANO NOME: N^0
PROFESSOR: Antonio Conceição Santos PERÍODO: 19 a 30de maio de 2014
CURSO: Técnico em Segurança no Trabalho SÉRIE 1ł

1) Sem efetuar a divisão, assinale com um X os números que são divisíveis por 2 .
   a) 111( )
   b) 128( )
   c) 306( )
   d) 517( )
   e) 250( )
   f) 305( )

2) Sem efetuar a divisão, assinale com um X os números que são divisíveis por 3 .
   a) 129( )
   b) 101( )
   c) 401( )
   d) 902( )
   e) 333( )
   f) 209( )

3) Usando as regras de divisibilidade, faça um texto explicando se o número 3306 é divisível por 6.

4) Identifique fazendo um círculo em torno do número que é divisivel por 4:
a) 136( ) d) 482( )
b) 104( ) e) 218( )
c) 1430( ) f) 800( )

5) Qual é o menor número com dois dígitos que somado a 12345 o tornará um número divisível por nove?

6) Observe a tabela e identifique com X, nos quadradinhos, o número correspondente a cada situação;

Número	3645	621	6120	1357	123480
Divisível por 4					
Divisível por 5					
Divisível por 6					

7) Dados os números naturais $252, 405, 182, 511, 800, 725$ e 1330, identifique os que são divisíveis por 7, usando os critérios estudados.

8) Usando a regra de divisibilidade, assinale com um X o número que é divisível por 11.
a) 627( ) d) 902( )
b) 920( ) e) 888( )
c) 154( ) f) 8041( )

9) Escreva :

a) Todos os divisores de 120:

b) O número de divisores de 72.

c) Os múltiplos de 7 compreendidos entre15 e 115.

Bibliografia

[1] BRITO, Luciana Pereira de. **Livro da Tua Professora de Matemática**; Portal do professor, Governo do Brasil; 2011. Disponível em < http:\ \portaldoprofessor.mec.gov.br > acesso em 23.01.2014.

[2] CARVALHO, João B. Pitombeira de; **Euclides Fibonacci e Lamé**; Revista Professor de Matemática nº 24, Rio de Janeiro, 2001.

[3] DOMINGUES; H. Hygino:**Fundamentos de aritmética**; São Paulo, Atual, 1991.

[4] GONÇALVES, Paulo Sergio A; **Divisores, Múltiplos e Decomposição em Fatores Primos**; Revista Professor de Matemática nº 20, Rio de Janeiro.

[5] HEFEZ, Abramo; **Elementos de Aritmética**; 2ł ed, Rio de Janeiro, SBM, 2011.

[6] ________ **Iniciação a Aritmética** - Programa de Iniciação Científica, OBMEP, Ed. da SBM, Rio de Janeiro-RJ, 2012.

[7] OLIVEIRA, Krerley Irraciel Martins: FERNANDEZ, Adán José Carcho: **Iniciação à Matemática: um curso com com problemas e soluções**, 2ª ed., Rio de Janeiro, SBM, 2010.

[8] TABOAS, Carmem M. G. **Sobre Critérios de Divisibilidade**; Revista Professor de Matemática nº 06, Rio de Janeiro, 2001.