Universidade Federal Rural de Pernambuco
Departamento de Matemática
Dissertação em Matemática

PERMUTAÇÕES

Walfrido Siqueira Campos Júnior

Orientador: Rodrigo Gondim

Junho de 2014

Dedicatória

Dedico esta obra primeiramente a Deus, pela saúde, pela vida e pela oportunidade de fazer este mestrado. Ao meu pai (in memoriam) e a minha mãe que são, foram e sempre serão a minha maior inspiração de vida. Vocês são meus melhores exemplos. A minha família, esposa; Élidy; e meus filhos; Arthur e Bernardo (o meu fundamento). Aos meus professores, que somaram muito a minha experiência docente e, em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Rodrigo Gondim, que sempre foi muito solícito e atencioso, mostrando mais uma vez o quanto faz a diferença na educação e na matemática. Aos meus colegas de turma, obrigado por serem verdadeiros motivadores, em destaque os meus amigos Camila, Diogo e Fabiano, que sempre foram muito dispostos a me ajudar. E a CAPES, por promover e financiar esta brilhante ideia de aperfeiçoamento dos professores de Matemática.

Agradecimentos

Eu não poderia começar sem agradecer a a todos os professores que contribuíram para a minha formação e o meu caráter e, em especial, a 3 professores que ajudaram muito na minha caminhada: Prof. Arnaldo Mendonça, Prof. Eduardo Barbosa (João Grandão) e ao Prof. Marcello Menezes, obrigado por todas as oportunidades e todos os ensinamentos. Dedico também aos meus amigos, os quais souberam entender as vezes que não pude comparecer a alguns aniversários e algumas festas devido ao curso. Obrigado pela compreensão, em especial, aos amigos José Ricardo, Hugo Vilela, Kenji Chung, Marízia Menezes e Marcus Kummer. Vocês fizeram, fazem e farão sempre parte da minha trajetória de vida. Quero dedicar também aos meus parentes e familiares, que sempre foram presentes nos momentos mais difíceis e, em especial, às minhas irmãs Ana Carolina e Ana Maria, as quais souberam suprir a ausência do meu pai e cuidaram do seu irmão caçula. E, por fim, quero dedicar aos meus filhos, Arthur e Bernardo, e a minha esposa Élidy, pois tudo que faço, fiz e farei é por e para vocês. Obrigado pela base que nós construímos, pois ela é que me dá forças para seguir em frente, na luta para dar uma melhor qualidade de vida para todos nós. Amo muito vocês.

Resumo

Este trabalho consta da apresentação de uma permutação simples, vista na forma de função. Essa função é bijetora, portanto admite inversa (permutação inversa). A composição dessa função com ele mesma, também é bijetora (permutação composta). Veremos também as permutações com repetição, circulares sem repetição e com repetição, além das permutações caóticas, que são aquelas em que nenhum elemento ocupa sua posição inicial. O trabalho consta também da definição e apresentação de um Grupo das permutações que consiste em 3 propriedades na qual a composição das funções satisfazem todas elas. Esse é o nosso maior objetivo. Mostraremos ainda a paridade da permutação, bem como suas aplicações em casos de determinantes.
Palavras-chaves: Permutação, Grupos, Grupos de Permutações

Abstract

This work consists of the presentation of a simple permutation, seen as function. This function is bijective, hence admits inverse (inverse permutation). The composition of this function with the same it is also bijective (composed permutation). We will also see the permutations with repetition, circular without repetition and repetition, beyond chaotic permutations, which are those in which no element occupies its original position. The work is also part of the definition and presentation of a group of permutations consisting of 3 properties in which the composition of functions satisfy all of them. This is our highest goal. Still show the parity of the permutation, as well as their applications in cases of determinants.
Keywords: Permutation, Groups, Groups of Permutations

Sumário

Capítulo 1

Grupos de Permutação

1.1 Introdução Histórica

O estudo das permutações se iniciou com **Joseph Louis Lagrange** ($1736-1813$), com as equações algébricas, em 1770, e foi logo seguido pelas contribuições de **Paolo Ruffini** ($1765-1822$) e **Niels Henrik Abel** ($1802-1829$).
O primeiro a considerar explicitamente o termo GRUPOS DE PERMUTAÇÃO foi **Evariste Galois** ($1811-1832$), que utilizou o termo GRUPO, com seu sentido atual, em seu trabalho, de 1830.
O nascimento da teoria de Galois foi originalmente motivado pela seguinte questão, que é conhecida como o problema de Abel-Ruffini:
Por que não existe uma fórmula para as raízes de uma equação polinomial de quinta ordem (ou maior) em termos de coeficiente de polinômios, usando somente as operações algébricas usuais (adição, subtração, multiplicação, divisão) e a aplicação de radicais (raiz quadrada, raiz cúbica, etc.)?
Foi justamente estudando um certo subconjunto do Grupo das Permutações das raízes da equação que Galois deu uma resposta geral ao problema. Para maiores informações ver [19].

1.2 Permutação

Chamamos de permutação simples, cada um dos agrupamentos ordenados que podemos formar com os elementos de um dado conjunto X, tal que um agrupamento e outro sejam diferenciados apenas pela mudança de posição entre seus elementos. Nesse caso, o agrupamento de países (Brasil, China, Rússia, Japão), difere do agrupamento (Japão, Rússia, Brasil, China), pois, embora os elementos de ambos sejam os mesmos, há mudança no posicionamento de, pelo menos um dos seus elementos.
Pois bem, essa é a maneira convencional de se apresentar uma permutação. Veremos agora uma definição mais formal e mais elegante.

Definição 1.2.1 Dado um conjunto não vazio X, chamamos de permutação dos elementos de X toda função bijetora $\psi : X \longrightarrow X$.

No caso em que X é um conjunto finito, digamos com n elementos, essa permutação pode ser indicada pelo diagrama de Venn, ou de modo mais simples, com a notação de matrizes do tipo 2 linhas e n colunas, em que n é a quantidade de elementos do conjunto X. Na primeira linha dessa matriz, indicaremos os elementos do conjunto X que chamaremos de domínio e na segunda linha dessa matriz, indicaremos a imagem ordenada dos elementos da primeira linha pela função ψ.

Exemplo 1.2.2 Seja X um conjunto com 3 elementos $X = \{1, 2, 3\}$, montaremos uma matriz do tipo (2x3). Vejamos:
Com os elementos de $X = \{1, 2, 3\}$, podemos obter:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\psi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Perceba que as diferentes formas de escrevermos essa função nos dão justamente todas as permutações dos elementos de X. Seja X um conjunto com n elementos, chamaremos de S_n, o conjunto de todas as permutações formadas pelos elementos n elementos de X. Sendo assim, o exemplo anterior, em que X possui apenas 3 elementos, teremos S_3 como o conjunto de todas as permutações desses 3 elementos. Ainda poderíamos, para ser mais resumido e ficar mais claro ao leitor, escrever apenas as imagens ordenadas dessas funções $\psi's$, colocando-as entre colchetes [ ], ou seja, resumiríamos o nosso trabalho a apenas $\{[123][132][213][231][312][321]\} = S_3$, cuja interpretação, caso a caso, seria:
[123] significa que $\psi_1(1) = 1$, $\psi_1(2) = 2$ e $\psi_1(3) = 3$
[132] é o mesmo que $\psi_2(1) = 1$, $\psi_2(2) = 3$ e $\psi_2(3) = 2$ e assim por diante.
Se tivermos $\psi(j) = j$, chamaremos j de ponto fixo de ψ.
De um modo geral, teremos:

Definição 1.2.3 Se $\psi \in S_n$ e $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $\psi(j)$ denota o valor da função bijetiva ψ no ponto j. Desta forma podemos escrever a permutação ψ pelo seguinte diagrama:

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ..... & n \\ \psi(1) & \psi(2) & ..... & \psi(n) \end{pmatrix}$$

Dessa forma, mostramos visualmente de modo mais claro o domínio e a imagem da bijeção considerada. Ficando a sua imagem ordenada expressa por $[\psi(1)\psi(2)\ldots\psi(n)]$.

Exemplo 1.2.4

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$$

Observe que, após aplicada essa permutação (função), os números 1 e 5 permanecem fixos e isso pode ser visto através deste esquema : $\psi(1) = 1$, $\psi(2) = 3$, $\psi(3) = 6$, $\psi(4) = 2$, $\psi(5) = 5$ e $\psi(6) = 4$.

Observação 1.2.5 A permutação ψ do conjunto X tal que $\psi(j) = j$, para todo $1 \leqslant j \leqslant n$, será chamada de permutação identidade.

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots n \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \ldots n \end{pmatrix} \in S_n$$

Observação 1.2.6 Para abreviarmos nossa escrita, temos que dado o conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, chamaremos de S_n o conjunto de todas as permutações do conjunto X.

Proposição 1.2.7 *Seja S_n o conjunto de todas as permutações do conjunto $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, então o número de elementos de S_n, será dado por $n!$*

Prova: Consideremos, primeiramente, os seguintes casos especiais:
Para $n = 1$, teremos $S_1 = \psi$

$$\psi = e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1$$

Para $n = 2$, teremos $S_2 = \{\psi_1, \psi_2\}$

$$\psi_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_2$$

Para $n = 3$, teremos $S_3 = \{\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4, \psi_5, \psi_6\}$

$$\psi_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

Percebemos que S_1 tem apenas um elemento $(1! = 1)$, chamado de identidade(e), S_2 têm dois elementos $(2! = 2)$, S_3 têm seis elementos $(3! = 6)$, assim, S_n tem $n!$ elementos conforme mostraremos a seguir:
Considere $X = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Como a permutação é uma função bijetora, para o primeiro elemento do grupo (primeiro termo) teremos n possibilidades, para o segundo elemento do grupo (segundo termo) teremos $(n-1)$ possibilidades, e assim sucessivamente, até termos duas possibilidades para o $(n-1)$-ésimo elemento e apenas uma para o n-ésimo elemento. Assim, de acordo com a tabela, teremos:

n	$n-1$	......	2	1

Portanto, pelo princípio multiplicativo da contagem, temos $n!$ permutações em $S(X)$, isto é, a cardinalidade de $S(X) = n!$. Representaremos a cardinalidade de $S(X)$ pelo símbolo $\sharp S(X)$.

1.3 Permutação Composta

Sejam $f : X \longrightarrow X$ e $g : X \longrightarrow X$ duas permutações de X. Claramente as composições (fog) e (gof) são bijetoras e, por isso, também são permutações.

Exemplo 1.3.1 Sejam:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \end{pmatrix} \in S_6$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_6$$

Então a permutação composta (fog) é:
$(fog)(1) = f(g(1)) = f(6) = 1$
$(fog)(2) = f(g(2)) = f(4) = 2$
$(fog)(3) = f(g(3)) = f(5) = 6$
$(fog)(4) = f(g(4)) = f(1) = 3$
$(fog)(5) = f(g(5)) = f(3) = 4$
$(fog)(6) = f(g(6)) = f(2) = 5$

Portanto a permutação composta (fog) será :

$$fog = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$

Que eliminando a linha do meio, chegaremos a:

$$fog = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$

Já a permutação composta (gof), será dada por:
$(gof)(1) = g(f(1)) = g(3) = 5$
$(gof)(2) = g(f(2)) = g(5) = 3$
$(gof)(3) = g(f(3)) = g(4) = 1$
$(gof)(4) = g(f(4)) = g(2) = 4$
$(gof)(5) = g(f(5)) = g(6) = 2$
$(gof)(6) = g(f(6)) = g(1) = 6$

Portanto a permutação composta (fog) será :

$$gof = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 6 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$$

Que eliminando a linha do meio, chegaremos a:

$$gof = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 3 & 1 & 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$$

1.4 Permutação Inversa

Definição 1.4.1 Uma função $f : A \longrightarrow B$ é inversível, se existir $f^{-1} : B \longrightarrow A$, tal que:

$$\begin{aligned} fof^{-1} \quad &: \quad B \longrightarrow B & (1.1) \\ & \quad\;\; b \longrightarrow b & (1.2) \end{aligned}$$

é a identidade e

$$\begin{aligned} f^{-1}of \quad &: \quad A \longrightarrow A & (1.3) \\ & \quad\;\; a \longrightarrow a & (1.4) \end{aligned}$$

também é a identidade.

Definição 1.4.2 Consideremos uma função $f : A \longrightarrow B$. Segue que:
(i) f é sobrejetiva se para todo $b \in B$, existe $a \in A$, tal que $f(a) = b$;
(ii) f é injetiva se $\forall a_1; a_2 \in A$, em que $a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$;
(iii) f é bijetiva se é sobrejetiva e injetiva.

Proposição 1.4.3 *Uma função $f : A \longrightarrow B$ é inversível se, e somente se, f é bijetiva.*

Prova: $\Rightarrow$ Por hipótese, existe $g : A \longrightarrow B$, tal que:
$(i) fog = I_B$ e $(ii) gof = I_A$.
Tomemos $b \in B$ qualquer. Seja $a = g(b)$. Da condição (i) acima, segue que $f(a) = f(g(b)) = fog(b) = I_B(b) = b$.
Então, f é sobrejetiva. Tomemos $a_1, a_2 \in X$, tais que $f(a_1) = f(a_2)$. Logo, $gof(a_1) = gof(a_2)$.
Da condição (ii), segue que $I_A(a_1) = I_a(a_2)$, logo, $a_1 = a_2$. Então, f é injetiva.
$\Leftarrow$ Por hipótese, f é bijetiva. Desejamos construir uma função $g : B \longrightarrow A$, satisfazendo as condições (i) e (ii), da definição de função invertível.
Dado $b \in B$, qualquer, como f é sobrejetiva, existe $a \in A$, tal que $f(a) = b$ e, como f é injetiva, o elemento a com essa propriedade é único.
Assim, definimos $g(b)$, como o único $a \in A$ tal que $f(a) = b$. As duas condições desejadas decorrem imediatamente da construção de g.
Assim, podemos escrever que $b = f(a) \Leftrightarrow a = f^{-1}(b)$

Definição 1.4.4 Seja ψ uma permutação em A.
Sendo $\psi : A \longrightarrow A$ bijetora, então existe $\delta : A \longrightarrow A$ tal que $y = \psi(x) \Leftrightarrow x = \delta(y)$
Sendo assim, chamamos a função δ de permutação inversa de ψ e a representamos por $\delta = \psi^{-1}$.
Matricialmente, teremos:
Seja ψ a função bijetora, dada por:

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \psi(1) & \psi(2) & \dots & \psi(n) \end{pmatrix}$$

Então a função inversa $\delta = \psi^{-1}$ será dada por:

$$\delta = \psi^{-1} = \begin{pmatrix} \psi(1) & \psi(2) & \dots & \psi(n) \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}$$

Que, após o reordenamento, ficaremos com:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \psi^{-1}(1) & \psi^{-1}(2) & \dots & \psi^{-1}(n) \end{pmatrix}$$

Chamamos esse procedimento de dispositivo prático para a obtenção da permutação inversa.

Exemplo 1.4.5 Seja

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \in S_5$$

Dessa forma, sua função inversa ψ^{-1}, será:

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

Perceba que o domínio de ψ passou a ser imagem ordenada de ψ^{-1} e a imagem ordenada de ψ passou a ser o domínio de ψ^{-1}. Agora basta reordenarmos os valores e chegaremos definitivamente a função inversa de ψ dada por:

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

Exemplo 1.4.6 Seja

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$

Dessa forma, sua função inversa ψ^{-1}, será:

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in S_6$$

Reordenando seus elementos, teremos:

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 5 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_6$$

1.5 Permutação com Repetição

Definição 1.5.1 Chamamos de permutação com elementos repetidos a todos os agrupamentos que podemos formar com certo número de elementos, onde ao menos um deles ocorre mais de uma vez, tal que um agrupamento e outro sejam diferenciados apenas pela mudança de posição entre os seus elementos.
Consideramos um multiconjunto X, quando tivermos um elemento a_1 que é repetido n_1 vezes, outro elemento a_2 que é repetido n_2 vezes e assim sucessivamente, até o elemento a_m, que será repetido n_m vezes.

Exemplo 1.5.2 Dispondo de 4 bolas pretas, 3 bolas brancas e 2 bolas verdes, de quantos modos distintos podemos organizá-las numa prateleira?
Perceba que temos 10 bolas num total, das quais 5 são pretas, portanto, temos $C_{9,4}$ formas de escolher o local onde as bolas pretas ficarão. Feito isso, ou seja, colocando as pretas nos seus devidos lugares, sobraram 5 vagas, as quais iremos ocupar com as 3 bolas brancas, dessa maneira, temos $C_{5,3}$ formas de escolher o local das bolas brancas. E, por fim, sobraram 2 bolas verdes para dois lugares, ou seja, teremos $C_{2,2}$ formas de escolher onde as bolas verdes ficarão.
Portanto, as diferentes maneiras de arrumarmos as 10 bolas na prateleira são:
$C_{9,4}.C_{5,3}.C_{2,2} = \frac{9!}{4!.5!} \cdot \frac{5!}{3!.2!} \cdot \frac{2!}{2!.0!} = \frac{9!}{4!.3!.2!}$
Por se tratar de reordenação das bolas, estamos diante de uma permutação e, portanto, simbolizamos essa combinação como sendo $P_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4!.3!.2!}$

Dado um multiconjunto X com n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2, n_k elementos iguais a a_k, de modo que $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$.

Teorema 1.5.3 O número de permutações com repetição do multiconjunto X é:

$$P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{(n_1)!.(n_2)!\ldots(n_k)!} \tag{1.5}$$

Prova: De fato, teremos:
C_{n,n_1} maneiras de colocar os elementos a_1, depois disso, teremos C_{n-n_1,n_2} lugares para colocar os elementos a_2, e assim por diante até sobrar apenas C_{n_k,n_k} lugares para os elementos a_n. Dessa forma, ficaremos com o seguinte resultado para a permutação desses elementos:
$C_{n,n_1}.C_{n-n_1,n_2}.\ldots.C_{n_k,n_k} = \frac{n!}{n_1!.[n-n_1]!} \cdot \frac{[n-n_1]!}{n_2!.[n-n_1-n_2]!} \cdot \ldots \cdot \frac{n_k!}{n_k!.0!} = \frac{n!}{n_1!.n_2!.\ldots.n_k!} = P_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k}$

A seguir, abordaremos uma definição mais formal para a permutação com repetição.

Definição 1.5.4 Dado um conjunto não vazio finito $X = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n_1}, a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n_2}, \ldots, a_{m1}, a_{m2}, \ldots, a_{mn_m}\}$, vamos definir uma relação de equivalência em X, tal que:
$a_{ij} \equiv a_{i'j'} \Leftrightarrow i = i'$
$\overline{a_{ij}} = \{a_{ij'} | j' = 1, 2, 3, \ldots, n_i\}$

$\overline{a_{ij}} = \{a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in_i}\}$
$\overline{a_{ij}} := a_{ik}$

Definição 1.5.5 Chamaremos de permutação com repetição dos elementos de um conjunto $X = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1n_1}, a_{21}, a_{22}, \ldots$ toda função sobrejetiva f, tal que: $f : X \longrightarrow \overline{X}$

Perceba que todos os elementos do conjunto $\overline{X}$ são os elementos do conjunto X, que possuem o mesmo i, ou seja, se por exemplo, tivermos $X = \{a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}\}$, um conjunto com 5 elementos, então teremos o conjunto $\overline{X} = \{\overline{a_1}, \overline{a_2}\}$ com apenas 2 elementos.

Exemplo 1.5.6 Seja $X = \{a, x_1, x_2\}$ e consequentemente $\overline{X} = \{\overline{a}, \overline{x}\}$, temos que as diferentes formas de permutação serão dadas por $\frac{3!}{2!} = 3$. São elas:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ \overline{a} & \overline{x} & \overline{x} \end{pmatrix}$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ \overline{x} & \overline{a} & \overline{x} \end{pmatrix}$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} a & x_1 & x_2 \\ \overline{x} & \overline{x} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

Exemplo 1.5.7 Se $X = \{a_1, a_2\}$, e consequentemente $\overline{X} = \overline{a}$, teremos apenas uma permutação que é

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ \overline{a} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

Agora, se tivermos $X = \{a_1, a_2, b_1, b_2\}$, $\overline{X} = \{\overline{a}, \overline{b}\}$, daí teremos $\frac{4!}{2!.2!} = 6$ permutações distintas. São elas:

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ \overline{a} & \overline{a} & \overline{b} & \overline{b} \end{pmatrix}$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{a} & \overline{b} \end{pmatrix}$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ \overline{a} & \overline{b} & \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ \overline{b} & \overline{b} & \overline{a} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{a} & \overline{b} \end{pmatrix}$$

$$\psi_6 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ \overline{b} & \overline{a} & \overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix}$$

Capítulo 2

Grupos de Permutação

2.1 Grupos

Definição 2.1.1 Seja G um conjunto não vazio munido de uma operação *. Dizemos que G é um grupo com essa operação, se satisfaz as seguintes condições:

$$\begin{aligned} * \quad : \quad & G \times G \longrightarrow G \\ & (x, y) \longrightarrow (x * y) \end{aligned}$$

$G1)$ $a * (b * c) = (a * b) * c$ para todo $a, b, c \in G$

$G2)$ $\exists\ e \in G$, tal que $a * e = e * a = a$ para todo $a \in G$

$G3)$ $\forall a \in G$, $\exists b \in G$, tal que $a * b = b * a = e$

A propriedade $G1)$ é a associativa da operação $*$, enquanto a propriedade $G2)$, nos garante a existência do elemento e, que é o elemento neutro (único), recebendo o nome de identidade de G. Já em $G3)$, temos para cada elemento do grupo a, o elemento b, o qual é chamado de inverso de a com relação a operação $*$.
Sem perda de generalidade, utilizamos a notação multiplicativa para a operação $*$. Sendo assim, tomamos que $e = 1$ para o elemento neutro, e o simétrico de um elemento $x \in G$ é denotado por x^{-1}.
Um grupo G será comutativo ou abeliano, se a operação em G for comutativa, isto é, para quaisquer $x, y \in G$, $x * y = y * x$.
Dizemos que G é um grupo finito, se o conjunto G for finito. Nesse caso, o número de seus elementos será chamado de ordem ou cardinal de G, e representaremos por $\sharp G$.

Observação 2.1.2 A palavra simétrico pode receber nomes especiais como oposto ou inverso, dependendo da operação utilizada. Se usamos a adição usual, o simétrico aditivo de $m \in S$ é denotado por $-m$ e conhecido na literatura como oposto, mas se usamos a multiplicação usual, o simétrico multiplicativo de $m \in S$ é denotado por m^{-1}, conhecido na literatura como inverso.

Exemplo 2.1.3 Considere o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$ munidos da operação $*$ definida por:
$x * y = x + y$

$a)$Associatividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$, temos que:
$(x + y) + z = x + (y + z)$
$(x * y) * z = x * (y * z)$

$b)$Existência do elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{Z}$, temos que:
$e = 0$
$x + e - x = x + e - x = x - x$
$x + e = e + x = x$
$(x * e) = e * x = x$

c)Existência do Simétrico: $\forall x \in \mathbb{Z}$, temos que:
$x^{'} = -x$
$x + x^{'} - x = x^{'} + x - x = 0 - x$
$x + x^{'} = x^{'} + x = 0$
$(x * x^{'}) = x^{'} * x = e$

Como $x \in \mathbb{Z}$, o elemento $(-x) \in \mathbb{Z}$, portanto, o conjunto $(\mathbb{Z}, +)$ é um exemplo de grupo.

Exemplo 2.1.4 Considere o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$ munidos da operação $*$ definida por:
$x * y = x + y - 3$. Mostraremos que $(\mathbb{R}, *)$ é comutativo.

$a)$Associatividade: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, temos que:
$x + y + z - 6 = x + y + z - 6$
$x + y - 3 + z - 3 = x + y + z - 3 - 3$
$(x + y - 3) * z = x * (y + z - 3)$
$(x * y) * z = x * (y * z)$

$b)$Existência do elemento Neutro: $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que:
$e = 3$
$e - 3 = e - 3 = 0$
$x + e - 3 - x = x + e - 3 - x = x - x$
$x + e - 3 = e + x - 3 = x$
$x * e = e * x = x$

c)Existência do Simétrico: $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que:
$x^{'} = 6 - x$
$x^{'} - 3 = 3 - x$
$x^{'} - 3 = x^{'} - 3 = 3 - x$

$x + x' - 3 - x = x + x' - 3 - x = 3 - x$
$x + x' - 3 = x' + x - 3 = 3$
$(x * x') = x' * x = e$

d) Comutatividade: $\forall x \in \mathbb{R}$, temos que:
$x + y - 3 = x + y - 3$
$x + y - 3 = y + x - 3$
$(x * y) = y * x = e$

2.2 Grupo das Permutações

Seja X um conjunto não vazio e $S(X) = \{\psi\colon\ X \longrightarrow X | \psi$ é bijetora$\}$. Há em $S(x)$ uma operação natural; composição de funções. De fato, sejam $f, g \in S(X)$, tal que $X \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} X$, a composta $gof : X \longrightarrow X$ é também bijetora, logo $gof \in S(x)$.
A pergunta é:
Será que $(S(x), o)$ é um grupo? Em outras palavras, o conjunto $S(X)$ com a operação de composição satisfaz as propriedades de grupo?
A resposta é sim, e agora verificaremos que esse conjunto satisfaz as propriedades $G1, G2, G3$.
$G1$)Dadas as funções (f, g, h), temos que $fo(goh) = (fog)oh$.
$G2$)$\exists\ g \in G$, tal que $fog = gof\ , \forall f \in G$.
$G3$)$\forall f \in G$, $\exists g \in G$, tal que $(fog)(x) = (gof)(x) = x, \forall X$.

Lema 2.2.1 *O conjunto $S(X)$ é fechado por composição de permutações, isto é, $f, g \in S(X) \Rightarrow (fog) \in S(X)$*

Prova: Dadas $f; g \in S(X)$, mostraremos que fog, ou simplesmente fg, é também uma bijeção de X em X, e portanto pertence a $S(X)$. fog é injetiva. De fato, se tomarmos $x_1; x_2 \in X$ com $x_1 \neq x_2$, como g é injetiva segue que $g(x_1) \neq g(x_2)$. Assim, como f é injetiva também, segue que $fog(x_1) \neq fog(x_2)$ e portanto fog é também injetiva. Mostraremos agora que fog é sobrejetiva e para isso seja $k \in X$. Como f e g são sobrejetivas, $\exists y \in X$ com $f(y) = k$, $\exists x \in X$ com $g(x) = y$. Isto é, existe $x \in X$ tal que $f(g(x)) = k$ e portanto fog é sobrejetiva. Assim concluímos que $(fog) \in S(X)$, e o conjunto é fechado por composição de permutações.

Lema 2.2.2 *A função $e : X \to X$ definida por $e(x) = x$ para todo $x \in X$ é uma bijeção e funciona como a identidade de $S(X)$, isto é $\forall f \in S(X)$, temos $foe = eof = f$*
Além disso, dada qualquer permutação $f \in S(X)$, existe uma permutação inversa $f^{-1} \in S(X)$ tal que $(fof^{-1}) = f^{-1}of = e$

Prova: É imediato verificar que a função $e(x)$ identidade é uma permutação e que funciona como elemento neutro de $S(X)$. Como toda função bijetiva possui inversa, e esta inversa também é bijetiva, segue a existência dos inversos em $S(X)$.
Sabemos que a composição de funções é associativa o que nos permite concluir diretamente, pela definição de operação que temos em $S(X)$, que

Lema 2.2.3 *Dadas as permutações f, g, h em $S(X)$, temos $fo(goh) = (fog)oh$*

Esses três lemas acima mostram que $S(X)$ é um grupo com a operação de composição de funções.

Proposição 2.2.4 *Se $\sharp S(X) \geq 3$, então o grupo $(S(X), o)$ não é comutativo, ou seja, não é Abeliano.*

Prova: Suponhamos que $\{a, b, c, \ldots, n\} \in X$, distintos. Considere agora $\pi, \delta \in S(X)$ definidas por:
$\pi(a) = b, \pi(b) = a, \pi(x) = x$ para todo $x \in X$ - $\{a, b\}$.
$\delta(a) = c, \delta(c) = a, \delta(x) = x$ para todo $x \in X$ - $\{a, b\}$.
Temos que:
$(\delta o\pi)(a) = \delta(\pi(a)) = \delta(b) = b$
$(\pi o\delta)(a) = \pi(\delta(a)) = \pi(c) = c$.
Portanto, como
$\delta o\pi(a) \neq \pi o\delta(a)$ temos $\delta o\pi \neq \pi o\delta$.
Mostrando de outra forma:

$$\pi = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & n \\ b & a & c & d & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\delta = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & n \\ c & b & a & d & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\pi o\delta = \pi(\delta(x)) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & n \\ c & b & a & d & \ldots & n \\ c & a & b & d & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & n \\ c & a & b & d & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

$$\delta o\pi = \delta(\pi(x)) = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & n \\ b & a & c & d & \ldots & n \\ b & c & a & d & \ldots & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d & \ldots & n \\ b & c & a & d & \ldots & n \end{pmatrix} \in S_n$$

Logo,$\delta o\pi \neq \pi o\delta$.

Definiremos a seguir o conceito de potência que utilizaremos no teorema 2.2.7.

Definição 2.2.5 Seja G um grupo e $x \in G$ e $n \geq 0$, e sendo e o elemento neutro (identidade) de G, então:

$$x^n = \begin{cases} e, & \text{se} \quad n = 0 \\ x.x^{n-1}, & \text{se} \quad n \geq 1 \end{cases}$$

Além disso, utilizaremos algumas propriedades de potências, a saber, válidas para a e $b \geq 0$:

1) $x^a.x^b = x^{a+b}$
2) $\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$
3) $(x^a)^b = x^{a.b}$
4) $(x^a)^{-1} = x^{-a}$

Observação 2.2.6 Um fato importante de ser notado é que, considerando X um conjunto finito, existe um número natural k tal que $f^k = Id$, em que f^k são as composições sobre a própria função anterior. É possível demonstrar esse fato de que em um dado momento teremos a função identidade, mas primeiramente ilustraremos observando atentamente a tabela abaixo:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
f^1	3	6	8	4	9	7	5	1	2
f^2	8	7	1	4	2	5	9	3	6
f^3	1	5	3	4	6	9	2	8	7
f^4	3	9	8	4	7	2	6	1	5
f^5	8	2	1	4	5	6	7	3	9
f^6	1	6	3	4	9	7	5	8	2
f^7	3	7	8	4	2	5	9	1	6
f^8	8	5	1	4	6	9	2	3	7
f^9	1	9	3	4	7	2	6	8	5
f^{10}	3	2	8	4	5	6	7	1	9
f^{11}	8	6	1	4	9	7	5	3	2
f^{12}	1	7	3	4	2	5	9	8	6
f^{13}	3	5	8	4	6	9	2	1	7
f^{14}	8	9	1	4	7	2	6	3	5
f^{15}	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cada linha da tabela é composição da função anterior, e nada mais é, que uma permutação do conjunto original. E como um conjunto de n elementos tem no máximo $n!$ permutações, após $n!$ linhas, devemos necessariamente ter linhas repetidas. Não estamos dizendo ainda que alguma das linhas será igual à primeira linha $(1, 2, 3, \ldots, n-1, n)$, mas esse é o ponto de partida para demonstrar esse fato.
Se existir um número natural k, tal que $f^k = Id$, deve existir um menor natural com essa propriedade, que chamamos de ordem da permutação de f. Se k é a ordem de uma permutação f, então $f^m = Id$ se, e somente se, m for um múltiplo de k.

Teorema 2.2.7 Seja $n \geq 1$. Para toda a permutação $f \in S_n$, existe um $k \in \mathbb{N}$, tal que $f^k = id$.

Prova: Consideramos o subconjunto $P := \{f^k | k \geq 1\} \subseteq S_n$. Como S_n é um conjunto finito (possui $n!$ elementos), o subconjunto P é um conjunto finito também. Portanto, nem todas as potências f^k são distintas. Logo, existem números $n > m$, tal que $f^n = f^m$ e
$f^n = f^m \Leftrightarrow f^n o f^{-m} = f^m o f^{-m} \Leftrightarrow f^{n-m} = id.$
Assim, existe um $k \geq 1$ (aqui $k = n - m$), tal que $f^k = id$.

Definição 2.2.8 A ordem de $f \in S_n$ é o menor inteiro positivo $k \geq 1$, tal que $f^k = id$. A ordem da identidade é igual 1.

Exemplo 2.2.9 Seja $n = 3$, e f uma função, tal que:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

Então:

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$

Logo, f tem ordem 2.

Agora, seja f, tal que:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

Então

$$f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

E finalmente:

$$f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$

Logo, f tem ordem 3.

Observação 2.2.10 Seja $n \geq 1$ e $f \in Sn$. Seja k a ordem de f.
1) Tem-se $f^{-1} = f^{k-1}$, pois $f_k = id$ implica $f^{k-1} = f^k o f^{-1} = f^{-1}$.
2) Suponha que $f^l = id$ para um inteiro $l \geq 1$. Então $k|l$, pois $f^l = id$, implica $l \geq k$, como k é o menor inteiro positivo, tal que $f^k = id$. Pelo algoritmo da divisão existem inteiros q e r, tais que $l = qk + r$ e $0 \leq r < k$. Tem-se $id = f^l = f^{qk} o f^r = (f^k)^q o f^r = (id)^q o f^r = f^r$.
Como k é o menor inteiro positivo com a propriedade $f^k = id$ e como $r < k$, tem-se $r = 0$. Portanto, $l = qk$, ou seja, $k|l$.

Observação 2.2.11 Grupos são estruturas algébricas abstratas, presentes em inúmeras áreas da matemática e extremamente úteis. Os grupos de permutação são, em certo sentido, objetos universais, no sentido de que todo grupo pode ser visto como um subgrupo do grupo de permutações de um conjunto (não necessariamente finito), e por isso, o estudo dos grupos de permutação tem um papel importante na matemática. Para maiores informações a respeito da teoria de grupos ver [20].

2.3 Estrutura de Ciclos

De quantos modos diferentes podemos organizar 4 crianças {André, Bianca, Carlos e Diana} ao redor de uma mesa?
Essa pergunta nos dá uma ideia do que seja permutação circular, visto que algumas formas de dispor essas 4 pessoas são iguais. Perceba que as duas disposições abaixo são iguais, ou seja, foram obtidas apenas pela rotação do círculo e não pela mudança de posição das crianças em relação às outras.

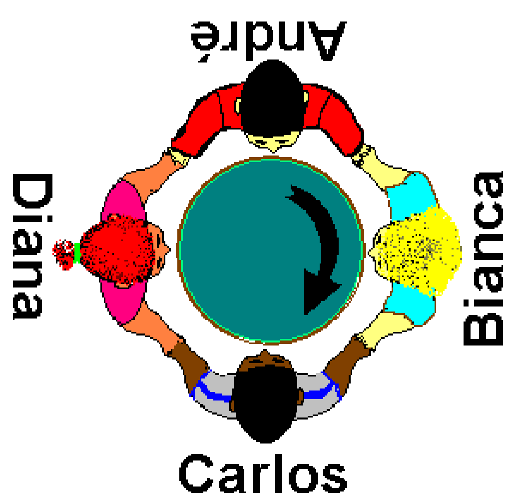


Figura 2.1: Figura da esquerda

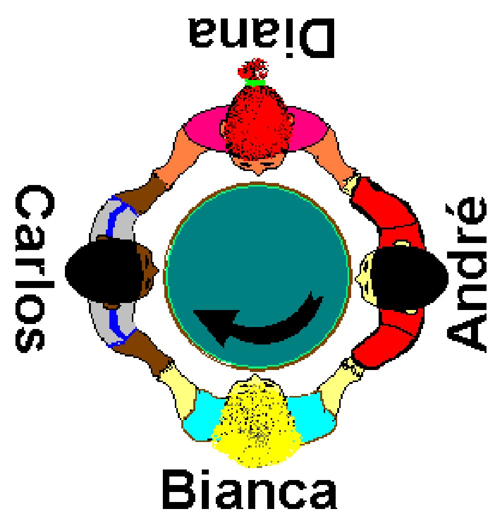


Figura 2.2: Figura da direita

Assim, ao representarmos a disposição da figura 2.1 pelo ciclo $(abcd)$, em que a é André, b é Bianca, c é Carlos e d é Diana, estamos dizendo, com isso, que André está entre Diana e Bianca, que Bianca está entre André e Carlos, podendo então representar a mesma distribuição dos seguintes modos $(bcda)$, ou $(cdab)$, ou ainda $(dabc)$, entre outras.

Definição 2.3.1 Considere o conjunto $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$. Desejamos permutar esses n elementos em torno de um círculo. As permutações circulares $(a_1, a_2, \ldots, a_2), (a_3, a_4, \ldots, a_1), (a_n, a_1, \ldots, a_{n-1})$ são todas iguais por que uma pode ser obtida da outra a partir de uma rotação.
Então, para cada permutação circular de n elementos, existem n permutações simples desses n elementos. Se denotarmos por PC_n o número de permutações circulares com n elementos, segue que:
$P_n = n.PC_n$

$PC_n = \frac{n!}{n}$
$PC_n = (n-1)!$

Portanto, voltando ao caso inicial, a pergunta foi:
- De quantos modos diferentes podemos organizar 4 crianças {André, Bianca, Carlos e Diana} ao redor de uma mesa?"
Sendo assim, teremos:
$PC_4 = (4-1)! = 3! = 6$, modos distintos de organizá-los.
Agora, definiremos, a permutação circular como função.

Definição 2.3.2 Seja ψ uma permutação de S_n. Chamamos ψ de r-ciclo, se existirem elementos $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tais que:

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots.. & a_{r-1} & a_r & \ldots.. & j \\ a_2 & a_3 & \ldots.. & a_r & a_1 & \ldots.. & j \end{pmatrix}$$

Ou seja $\psi(a_1) = a_2, \psi(a_2) = a_3, \ldots, \psi(a_{r-1}) = a_r, \psi(a_r) = a_1$, que podemos escrever da forma $(a_1 a_2 \ldots a_{r-1} a_r a_1)$ e para todo $j \in \{1, 2, \ldots, n\} - \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}, \psi(j) = j$.
Num r-ciclo, o número r é chamado de comprimento do ciclo. Um 2-ciclo é chamado de transposição, e o 1-ciclo é identidade. O que chamamos de permutação circular é um n-ciclo, ou seja, quando todos os n elementos de A, são movidos (ciclo máximo).

Exemplo 2.3.3 Seja o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e seja $\alpha \in S_5$, tal que:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

Assim α é um 5-ciclo, pois $\alpha(1) = 3, \alpha(3) = 2, \alpha(2) = 5, \alpha(5) = 4, \alpha(4) = 1$. Então denotamos (13254).

Da mesma forma, seja

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

A permutação β é um 2-ciclo, ou uma transposição, visto que $\beta(1) = 3, \beta(3) = 1, \beta(2) = 2, \beta(4) = 4, \beta(5) = 5$. Podemos denotar por (13)(2)(4)(5) ou simplesmente por $\beta = (13)$.

Proposição 2.3.4 *Dados $\psi \in S_n$ e $j \in \{1, 2, 3, \ldots, n\}$, existe $l = l_j$, tal que $\psi^l(j) = j$, para todo $l > 0$*

Prova: Sejam
$\psi^0(j) = j,$
$\psi^1(j) = k_1$
$\psi^2(j) = k_2$
$\vdots$

$\psi^{n-1}(j) = k_{n-1}$
$\psi^{n}(j) = k_{n}$.
Pelo princípio de Dirichlet, das casas dos pombos, existem r, s, tais que:
Tome $\psi^{r}(j) = \psi^{s}(j)$, em que $r \geq s$.
Assim, compondo ambos os lados com $\psi^{-s}(j)$, obtemos:
$\psi^{r-s}(j) = \psi^{0}(j) = j$, ou seja, em algum dado momento, o valor da função volta pro lugar.

Proposição 2.3.5 *Seja $\psi \in S_n$. Então, existem ciclos disjuntos (definiremos logo a seguir) dois a dois, tais que $\psi = (\psi_1 \psi_2 \dots \psi_1)$.*

Exemplo 2.3.6 Tome $\psi \in S_{10}$ do tipo

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 6 & 4 & 2 & 1 & 8 & 7 & 9 & 10 & 5 \end{pmatrix} \in S_{10}$$

Podemos escrever como:
(2 6 8 9 10 5 1 3 4), como $\psi_1^9 = 2$, fechando o ciclo. Então, ψ_1 pode ser escrito como $\psi_1 =$ (2 6 8 9 10 5 1 3 4)(7), que poderia começar de outro modo, sem perda de generalidade, ou seja, ψ_1= (7)(4 2 6 8 9 10 5 1 3). Observe que o ciclo (2 4 8 6 9 10 5 1 3) não é igual ao ciclo (4 2 6 8 9 10 5 1 3)

Generalizando:
Se $|\psi_1| = n$, então $\psi = \psi_1$ é um ciclo máximo.
Se $|\psi_1| < n$, então existe $s \in \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, que fica fixo por ψ_1 e definimos ψ_2 como $(s, \psi(s), \dots, \psi^2(s), \dots, s)$ e assim sucessivamente.

Aplica-se esse procedimento sucessivamente aos elementos que ainda não tenham ocorrido nos ciclos anteriormente construídos, até que todos os n elementos sejam utilizados. Dessa forma, obtemos uma representação da permutação ψ por meio de ciclos chamados de disjuntos, por não possuírem elementos em comum.
Denominamos um ciclo de comprimento r simplesmente de r-ciclos; Se $r = 1$, teremos a Identidade (Id) e se $r = 2$ diremos que o ciclo é uma transposição.

Definição 2.3.7 Seja α um r-ciclo e β um s-ciclo pertencentes a S_n. Os ciclos α e β são chamados de disjuntos, se nenhum elemento for movido ao mesmo tempo por ambos, ou seja, $\forall x \in \{1, 2, 3, ..., n\}$, $\alpha(x) = x$ ou $\beta(x) = x$.
Em outras palavras, dois ciclos $\alpha = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in S_n$ e $\beta = (m_1, m_2, \dots, m_r) \in S_n$ são disjuntos se $\{n_1, n_2, \dots, n_k\} \cap \{m_1, m_2, \dots, m_r\} = \phi$, ou seja, se nenhum elemento do conjunto S_n é movimentado simultaneamente pelos ciclos α e β.

Exemplo 2.3.8 Seja o conjunto $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, e seja $\alpha, \beta \in S_5$, tais que:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in S_5$$

Assim, α é um 2-ciclo ou transposição, pois $\alpha(1) = 1, \alpha(2) = 2, \alpha(3) = 3, \alpha(4) = 5, \alpha(5) = 4$. Então denotamos $\alpha = (45)$.
Considere agora

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_5$$

Assim, β é um 3-ciclo, pois $\beta(1) = 3, \beta(2) = 1, \beta(3) = 2, \beta(4) = 4, \beta(5) = 5$. Então denotamos $\beta = (132)$.
Portanto, como $\alpha = (45)$ e, $\beta = (132)$, então, α, β são ditos disjuntos.

Proposição 2.3.9 *Se α e β são ciclos disjuntos, então $\alpha o \beta = \beta o \alpha$. Em outras palavras, ciclos disjuntos comutam.*

Prova: Sejam α e β ciclos de S_n disjuntos, com comprimentos, não fixos A e B respectivamente. Se x é um elemento qualquer de S_n, há 3 hipóteses possíveis:
1)$x \in A$. Então,
$(\alpha o \beta)(x) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x) = \beta(\alpha(x)) = (\beta o \alpha)(x)$.
2)$x \in B$ cujo raciocínio é análogo.
3)$x \notin A$ e $x \notin B$. Nesse caso,
$(\alpha o \beta) = \alpha(\beta(x)) = \alpha(x) = x = \beta(\alpha(x)) = (\beta o \alpha)(x)$
Portanto, $(\alpha o \beta)$ e $(\beta o \alpha)$ também coincidem fora de A e B. .

Observação 2.3.10 Vimos que

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \in S_6$$

pode ser representada por notação de ciclos disjuntos (12)(3)(465), em que ciclos com dois elementos são chamados de transposição e ciclos com apenas um elemento são chamados de ponto fixo da permutação. Nesse caso, temos que (12) é uma transposição e (3) um ponto fixo.
Observe que, ao permutarmos ciclicamente os elementos de um ciclo qualquer, ou se reordenarmos os ciclos, isso não mudará a permutação representada, portanto, a representação de ciclos disjuntos não é única. Isso quer dizer que (12)(3)(465) significa a mesma permutação de (465)(12)(3),a qual os elementos movem-se exclusivamente para direita. Mas observe que (465) = (546) = (654), porém essas são diferente de (564), por exemplo, pois nesse caso teremos a $\psi(5) = 6$, $\psi(6) = 4$ e $\psi(4) = 6$ e no exemplo anterior tínhamos $\psi(4) = 6$, $\psi(6) = 5$ e $\psi(5) = 4$, sendo portanto, ciclos distintos.

2.4 Permutação circular com repetição

Vimos como uma permutação circular simples, ou seja, sem elementos repetidos, se comporta. Mas eis que surge a curiosidade. E se tivéssemos os elementos repetidos? Por exemplo, se tivermos n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e assim por diante, até termos n_m elementos iguais a a_m, de quantos modos distintos, podemos dispor esses n elementos ($n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$), em um círculo?
Essa ingênua pergunta tem resposta bastante complexa, para atacar o caso geral usa-se uma técnica combinatória desenvolvida por Polya e que utiliza-se de ação de grupos. Tal técnica foge do nosso objetivo, para maiores detalhes ver [18] ou [21] Vamos dar uma resposta parcial ao problema seguindo as ideias de [6].

Aparentemente, teríamos a mesma distribuição circular dividida pelo fatorial das letras repetidas, ou seja, teríamos: $PCR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{(n-1)!}{n_1!.n_2!\ldots n_k!}$, em que PCR significa Permutação Circular com Repetição.

Entretanto, vejamos o que ocorre em alguns casos particulares.

Exemplo 2.4.1 Se tivermos 3 bolas pretas(que chamaremos de P) e 2 bolas brancas(que chamaremos de B), de quantos modos distintos podemos organizá-las num círculo?
Se a nossa suspeita estiver certa, teremos:
$PCR_5^{3,2} = \frac{(5-1)!}{3!2!} = 2$
Sendo assim, vamos mostrar todas as permutações desse caso:
1) BBBPP = PBBBP = PPBBB = BPPBB = BBPPB
2) BPBPB = BBPBP = PBBPB = BPBBP = PBPBB

Verificamos que realmente, para esse caso, a fórmula é eficiente. Porém, vamos analisar mais uma situação:

Exemplo 2.4.2 E se agora tivermos 3 bolas pretas e 3 bolas brancas?
Nesse caso, pela fórmula, teremos:
$PCR_6^{3,3} = \frac{(6-1)!}{3!3!} = \frac{10}{3}$, ou seja, teremos um resultado que nem inteiro é. Portanto, há algo errado ou incompleto com a fórmula proposta.

O caso que trataremos, é aquele em que o $m.d.c$ entre a quantidade dos elementos repetidos é igual a 1, ou seja, m.d.c$(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$, nesse caso a fórmula $PCR_n^{x_1,x_2,\ldots,x_k} = \frac{(n-1)!}{x_1!.x_2!\ldots x_k!}$ é válida.
Perceba que toda vez que o $m.d.c(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 1$, não temos como separar os elementos $x_1, x_2, \ldots, x_k$ em subgrupos com a mesma quantidade de elementos e esse fato será melhor explicado adiante. Devido a isso, a fórmula é eficiente. Por isso que quando analisamos o primeiro exemplo, em que tínhamos 3 bolas pretas e 2 bolas brancas, e $m.d.c(3, 2) = 1$, a fórmula foi válida.

Teorema 2.4.3 Considere um multiconjunto X contendo n_1 elementos iguais a a_1, n_2 elementos iguais a a_2 e assim por diante, até termos n_m elementos iguais a a_m, teremos o número de permutações circulares definido por:
$PCR_n^{n_1,n_2,\ldots,n_m} = \frac{(n-1)!}{n_1!.n_2!\ldots n_m!}$

Prova: Considere a seguinte afirmação:
Se o $m.d.c$ entre a quantidade de elementos repetidos, for igual a 1, então cada configuração circular dá origem a exatamente n configurações lineares distintas.
De fato, considere uma configuração circular $(x_1x_2x_3\ldots x_n)$. Daí temos as seguintes configurações lineares associadas:
$x_1x_2x_3\ldots x_n$
$x_2x_3x_4\ldots x_1$
....
$x_nx_1x_2\ldots x_{n-1}$
Vamos mostrar que essas configurações são todas distintas.
Suponha por absurdo que haja duas iguais, sem perda de generalidade
$x_1x_2x_3\ldots x_kx_{k+1}x_{k+2}\ldots x_n = x_{k+1}x_{k+2}x_{k+3}\ldots x_nx_1x_2x_3\ldots x_k$
Suponhamos ainda que k seja o menor inteiro positivo com essa propriedade.
$x_1 = x_{k+1}$
$x_2 = x_{k+2}$
....
$x_k = x_{2k}$
$x_{k+1} = x_{2k+1}$
Logo,
$x_1 = x_{k+1} = x_{2k+1}$
Perceba, que com esse fato, nossas configurações lineares, se arrumaram da seguinte forma:
$1°grupo : x_1x_2x_3\ldots x_k$, visto que, pela nossa afirmação $x_1 = x_{k+1}$.
$2°grupo : x_1x_2x_3\ldots x_k$
$3°grupo : x_1x_2x_3\ldots x_k$
....
$q°grupo : x_1x_2x_3\ldots x_k$
mas nada garante que formaremos grupos de tal modo que $q.k = n$. Portanto, poderíamos ter $n = q.k + r$ e agora nosso objetivo é mostrar que $r = 0$.
Então, suponha que sobrasse um grupo do tipo:
$x_1x_2x_3\ldots x_r$
Então, ao fazermos os giros de k, na permutação circular, devemos ter:
$(x_1x_2x_3\ldots x_k)(x_1x_2x_3\ldots x_k)\ldots(x_1x_2x_3\ldots x_k)x_1x_2x_3\ldots x_r = (x_1x_2x_3\ldots x_k)(x_1x_2x_3\ldots x_k)\ldots(x_1x_2x_3\ldots x_r)x_1x_2x_3\ldots x_k$
Portanto:
$x_1x_2x_3\ldots x_rx_{r+1}\ldots(x_kx_1x_2\ldots x_r) = (x_1x_2x_3\ldots x_r)x_1x_2x_3\ldots x_r$
Sendo assim, devemos ter $x_{r+1} = x_1$, significando que se $r = 0$, provamos o que queríamos. Por outro lado, se $r > 0$ teremos absurdo, visto que $r < k$ e k foi definido como o menor inteiro positivo satisfazendo tal propriedade.

2.5 Contagem de tipos de Permutações

Como já sabemos, existem $n!$ permutações de n elementos.
Estamos, agora, interessados em fazer essa contagem de um modo mais minucioso, analisando caso a caso de acordo com a estrutura de ciclos. Eis que:

Para $n = 1$, temos apenas uma permutação que é (1)

Para $n = 2$, temos duas permutações, as quais são :$(1)(2)$ e (12), que a partir de então iremos representar por $1+1$, ou 2, ou seja, as diferentes formas de uma soma dar resultado igual a 2, utilizando apenas números naturais diferentes de zero. Perceba que, como $(1)(2) = (2)(1)$, a ordem não é levada em consideração, se tratando portanto de uma combinação. Já no caso de (12), também teremos uma igualdade, ou seja; $(12) = (21)$ por se tratar apenas de dois elementos, de um 2-ciclo. Então, para formarmos $(1)(2)$ devemos escolher $C_{2,1} = 2$ como primeiro elemento e $C_{1,1} = 1$ como segundo elemento e dividirmos por $2!$, visto que a ordem não importa. Já no caso de (12) podemos fazer uma permutação circular de 2 elementos $PC_2 = (2 - 1)! = 1! = 1$, resumindo:
$(1)(2)$, que é o caso $1 + 1$, temos $\frac{C_{2,2}.C_{1,1}}{2!} = (\frac{2.1}{2}) = 1$
(12), que é o caso de ser o 2-ciclo, temos $PC_2 = (2 - 1)! = 1! = 1$
Somando os resultados, teremos $1 + 1 = 2$.

Para $n = 3$, temos $3! = 6$ permutações, que são: $(1)(2)(3); (1)(23); (2)(13); (3)(12)(123)e(132)$. Percebam que formamos grupos de $1 + 1 + 1$ ou $1 + 2$ ou 3, que são os diferentes tipos de uma soma dar 3, utilizando os naturais sem o zero. Então, utilizando o mesmo raciocínio anterior, teremos:
$(1)(2)(3)$, que são os casos de $1 + 1 + 1$, temos $(\frac{C_{3,1}.C_{2,1}.C_{1,1}}{3!}) = 1$
$(1)(23); (2)(13)e(3)(12)$, que são os casos de $1 + 2$, temos $C_{3.1}.PC_2 = 3.(2 - 1) = 3$
$(123)e(132)$, que são os casos de ser o 3-ciclo, temos $PC_3 = (3 - 1)! = 2! = 2$
Somando os resultados, teremos: $1 + 3 + 2 = 6$

Para $n = 4$, teremos $4! = 24$ permutações distintas, que podem ser contadas através das diferentes formas de uma soma dar 4, utilizando números naturais diferentes de zero, que são $1 + 1 + 1 + 1$ ou $1 + 1 + 2$ ou $1 + 3$ ou $2 + 2$ ou 4. Fazendo a contagem, teremos:
$1 + 1 + 1 + 1$, temos $(\frac{C_{4,1}.C_{3,1}.C_{2,1}.C_{1,1}}{4!}) = (\frac{4.3.2.1}{24}) = 1$
$1 + 1 + 2$, temos $(\frac{C_{4,1}.C_{3,1}}{2!}).PC_2 = 6$
$1 + 3$, temos $C_{4,1}.PC_3 = 4.2 = 8$
$2 + 2$, temos $(\frac{C_{4,2}.C_{2,2}}{2!}) = 3$
4, temos $PC_4 = 3! = 6$
Somando os resultados, temos: $1 + 6 + 8 + 3 + 6 = 24$

Para $n = 5$, existem $5! = 120$ permutações distintas, separadas da seguinte forma: $1 + 1 + 1 + 1 + 1$ ou $1 + 1 + 1 + 2$ ou $1 + 2 + 2$ ou $1 + 1 + 3$ ou $1 + 4$ ou $2 + 3$ ou 5, que ficam assim distribuídos:
$1 + 1 + 1 + 1 + 1$, temos $(\frac{C_{5,1}.C_{4,1}.C_{3,1}.C_{2,1}.C_{1,1}}{5!}) = 1$
$1 + 1 + 1 + 2$, temos $(\frac{C_{5,1}.C_{4,1}.C_{3,1}}{3!}).PC_2 = 10$

$1+2+2$, temos $C_{5,1}.\frac{C_{4,2}.PC_2}{2!} = 15$
$1+1+3$, temos $\frac{C_{5,1}.C_{4,1}}{2!}.PC_3 = 20$
$1+4$, temos $C_{5,1}.PC_4 = 30$
$2+3$, temos $C_{5,2}.PC_3 = 20$
5, temos $PC_5 = 4! = 24$
Somando os resultados, teremos: $1+10+15+20+30+20+24 = 120$

A partir de então as contagens se tornam muito trabalhosas e diferentes para cada caso, mas vale a pena citar o princípio da partição de um número inteiro.
Uma partição irrestrita do inteiro n é uma sequência finita de números inteiros positivos, tal que sua soma seja n, não importando a ordem dos elementos; cada somando (parcelas) é denominado parte. O estudo da teoria das partições foi sistematizado por Euler; outros célebres matemáticos estudaram o tema, entre eles: Gauss, Jacobi, Sylvester, Hardy e Ramanujan. As ferramentas usadas no estudo dessa teoria são as mais variadas, sendo as funções geradoras elementos centrais. A teoria das partições une conceitos de teoria dos números e combinatória enumerativa; pode ser considerada como um tópico fundamental na teoria aditiva dos números.
Maiores detalhes ver [5]

Definição 2.5.1 Uma partição irrestrita de um inteiro $n > 0$, usualmente denominada apenas partição, é uma sequência finita não crescente de inteiros positivos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ tal que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} = n$.
A função de partição $p(n)$ fornece o número de partições de n; por convenção $p(n) = 0$ se $n < 0$ e $p(0) = 1$, uma vez que a única partição de 0 é representada pela sequência vazia.
Temos ainda que, o número 1, possui apenas uma partição, ou seja $p(1) = 1$; o número 2 possui duas partições, sendo $p(2) = 2$. Temos ainda $p(3) = 3, p(4) = 4, p(5) = 7$ e assim por diante, como vimos no exemplo acima.

Capítulo 3

Paridade de uma Permutação e Determinantes

3.1 Sinal de uma Permutação

Iniciaremos esta seção com uma situação-problema referente a uma questão, da prova do ITA 2002, que ilustra bem nosso próximo assunto.

Exemplo 3.1.1 O seguinte trecho de artigo de um jornal local relata uma corrida beneficente de bicicletas: Alguns segundos após a largada, Ralf tomou a liderança, seguido de perto por David e Rubinho, nessa ordem. Daí em diante, eles não mais deixaram as primeiras três posições e, em nenhum momento da corrida, estiveram lado a lado mais do que dois competidores. A liderança, no entanto, mudou de mãos nove vezes entre os três, enquanto que em mais oito ocasiões diferentes; aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si. Após o término da corrida, Rubinho reclamou para os nossos repórteres que David havia conduzido sua bicicleta de forma imprudente pouco antes da bandeirada de chegada. Desse modo, logo atrás de David, Rubinho não pôde ultrapassá-lo no final da corrida.
Com base no trecho acima, você conclui que:
a) David ganhou a corrida.
b) Ralf ganhou a corrida.
c) Rubinho chegou em terceiro lugar.
d) Ralf chegou em segundo lugar.
e) não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

Definição 3.1.2 Seja $\psi \in S_n$. Definimos o polinômio:

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \tag{3.1}$$

em que $(x_i, \ldots, xn)$ são variáveis independentes. Definimos para cada $\psi \in S_n$

$$P_\psi = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_{\psi(i)} - x_{\psi(j)}) \tag{3.2}$$

Exemplo 3.1.3 Seja

$$\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \in S_4$$

que é equivalente a [3124]. A pergunta é:
Quantas transposições podemos fazer nessa distribuição para que volte a ser [1234], ou seja, a identidade?
Um modo seria começando com [3124], trocarmos o (1 com o 3) $\longrightarrow$ [3124] e depois trocar o (2 com o 3)$\longrightarrow$ [1234] que é a identidade. Portanto, com duas transposições, conseguimos o nosso objetivo, e como dois é um número par, dizemos que o sinal dessa permutação é par. Se obtivéssemos um número ímpar de transposições, o sinal da permutação seria ímpar. Portanto, ψ será par se $P_\psi = P$ for par e será ímpar se $P_\psi = -P$. Algebricamente, teremos para esse caso:

$$P = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_4) \tag{3.3}$$

$$P_\psi = (x_{\psi(1)} - x_{\psi(2)})(x_{\psi(1)} - x_{\psi(3)})(x_{\psi(1)} - x_{\psi(4)})(x_{\psi(2)} - x_{\psi(3)})(x_{\psi(2)} - x_{\psi(4)})(x_{\psi(3)} - x_{\psi(4)}) \tag{3.4}$$

$$P_\psi = (x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) \tag{3.5}$$

$$P_\psi = [-(x_1 - x_3)][-(x_2 - x_3)](x_3 - x_4)(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) \tag{3.6}$$

$$P_\psi = (x_1 - x_3)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_1 - x_2)(x_1 - x_4)(x_2 - x_4) \tag{3.7}$$

$$P_\psi = P \tag{3.8}$$

Logo, P é par.
Note que P_ψ pode ser igual a $\pm P$

Lema 3.1.4 *Seja $f \in S_n$ e $\tau \in S_n$ uma transposição. Teremos então:*
$sgn(fo\tau) = -sgn(f)$

Prova:
rm Seja $\tau = (kl)$ uma transposição e f definida por:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_k & \ldots & a_l & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in S_n$$

Então:

$$fo\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_l & \ldots & a_k & \ldots & a_n \end{pmatrix} \in S_n$$

Assim sendo, teremos:
Dado P o polinômio característico de f. Então o sinal de f será dado por:

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_i - a_j) \tag{3.9}$$

Então:
$P = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_k - a_{k+1}) \dots (a_k - a_l) \dots (a_{n-1} - a_n)$

Portanto, para encontrarmos o valor do sinal da composição $fo\tau$), utilizaremos o polinômio abaixo:

$sgn(fo\tau) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_{\psi(i)} - a_{\psi(j)})$

$sgn(fo\tau) = (a_{\psi(1)} - a_{\psi(2)})(a_{\psi(1)} - a_{\psi(3)}) \dots (a_{\psi(1)} - a_{\psi(n)})(a_{\psi(2)} - a_{\psi(3)})(a_{\psi(2)} - a_{\psi(4)}) \dots (a_{\psi(2)} - a_{\psi(n)}) \dots (a_{\psi(k)} - a_{\psi(k+1)}) \dots (a_{\psi(k)} - a_{\psi(l)}) \dots (a_{\psi(n-1)} - a_{\psi(n)})$

$sgn(fo\tau) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_k - a_{k+1}) \dots (a_l - a_k) \dots (a_{n-1} - a_n)$

$sgn(fo\tau) = (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \dots (a_1 - a_n)(a_2 - a_3)(a_2 - a_4) \dots (a_k - a_{k+1}) \dots [-(a_k - a_l)] \dots (a_{n-1} - a_n)$

$sgn(fo\tau) = -P = -sgn(f)$

Proposição 3.1.5 *Seja $n \geq 2$, e sejam $f; g \in S_n$. Tem-se:*
$i) sgn(id) = 1$;
$(ii) sgn(fog) = sgn(f) \,.\, sgn(g)$;
$(iii) sgn(f^{-1}) = sgn(f)$;
$(iv) se f = (a_1 \dots a_n)$ é um n-ciclo então $sgn(f) = (-1)^{m-1}$.

Prova: $i) id = (12) = (12)$ é uma permutação par.
$ii)$ Seja $f = t_1 \dots t_k$ e $g = s_1 \dots s_l$ com transposições $t_i; s_j$. Temos $sgn(fog) = (-1)^{k+1} = (-1)^k \,.\, (-1)^1 = sgn(f) \,.\, sgn(g)$.
$iii)$ Seja $f = t_1 \dots t_k$ produto de transposições t_i. Então $t_k \dots t_1 f = id \Rightarrow f^{-1} = t_k \dots t_1 \Rightarrow sign(f^{-1}) = (-1)^k = sgn(f)$.
$iv)$ Um m-ciclo $f = (a_1 \dots a_n)$ é igual $f = (a_1 a_2)(a_2 a_3) \dots (a_{n-1} a_n)$ que é produto de $m - 1$ transposições. Logo, $sgn(f) = (-1)^{m-1}$.

Observação 3.1.6 Como toda permutação é produto de ciclos disjuntos (escrito de maneira única), temos que: Seja $\pi \in S_n$, então $\exists$ ciclos $(\tau_1, \dots, \tau_n)$ disjuntos, tais que $\pi = (\tau_1, \dots, \tau_j)$ o $(\tau_{j+1}, \dots, \tau_n)$, tal que
$Sgn(\pi) = \prod Sgn(\pi_{ciclos})$

Definição 3.1.7 Seja

$$P = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j) \tag{3.10}$$

e seja $\psi \in S_n$. Definimos o sinal de ψ como sendo:
$Sgn(\psi) = \frac{P_\psi}{P} = sgn(\psi) = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases}$

Exemplo 3.1.8 Seja $\tau = (x_1 x_2 \ldots \mathbf{x}_k) = (x_1 x_2)(x_2 x_3) \ldots (x_{k-1} x_k)$
Daí concluímos
$Sgn(x_1 x_2)(x_2 x_3) \ldots (x_{k-1} x_k) = (-1)^{k+1}$, onde k é o comprimento da permutação.
Ciclos de ordem par são ímpares, como as transposições e os ciclos de ordem ímpar são pares.

Voltando ao nosso problema inicial, temos que:
Representemos Ralf por 1, David por 2 e Rubinho por 3. Em cada momento da corrida, a classificação é uma terna ordenada desses três números ou está ocorrendo uma inversão (troca de posições entre dois ciclistas).
Como a liderança mudou de mãos 9 vezes, e em mais 8 ocasiões aqueles que corriam na segunda e terceira posições trocaram de lugar entre si, houve no total 17 inversões.
Temos que, após um número ímpar de inversões, podemos obter somente as classificações $(2;1;3), (1;3;2)$ e $(3;2;1)$.
Rubinho chegou logo atrás de David, portanto, a classificação final é $(1;2;3)$ ou $(2;3;1)$, em que nenhuma das quais poderia ter sido obtida com um número ímpar de inversões.
Consequentemente, não é possível determinar a ordem de chegada, porque o trecho não apresenta uma descrição matematicamente correta.

3.2 Determinantes

A título de informação e de uma aplicação, mostraremos como foram feitos os cálculos iniciais para se obter o determinante de uma matriz. Na verdade, os sistemas lineares foram o grande impulsionador para o surgimento das matrizes, bem como os seus determinantes.
Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz quadrada de ordem n. O determinante da matriz A, denotado por $detA$, é o número real dado por:

$$detA = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi) a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} \ldots a_{n\psi(n)} \tag{3.11}$$

Onde

$$sgn(\psi) = \begin{cases} +1, & \text{se} \quad \psi par \\ -1, & \text{se} \quad \psi impar \end{cases}$$

Vejamos alguns exemplos para matrizes onde $n \leq 3$

Exemplo 3.2.1 Para $n = 1$, temos a matriz $A = (a_{11})$, portanto existe apenas a identidade em S_1

$$\psi = e = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in S_1$$

logo, $detA = sgn(id)a_{aid(1)} = a_{11}$.

Para $n = 2$, temos em S_2 duas permutações que são:

$$\psi_1 = e = id \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_2$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_2$$

Daí o determinante da matriz A de ordem 2 dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

será calculado da seguinte maneira: $detA = sgn(\psi_1)a_{1\psi_1(1)}a_{2\psi_1(2)} + sgn(\psi_2)a_{1\psi_2(1)}a_{2\psi_2(2)} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Para $n = 3$, temos 6 permutações, que são:

$$\psi_1 = e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in S_3$$

$$\psi_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in S_3$$

Logo, o determinante da matriz A de ordem 3 dada por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

será calculado da seguinte maneira:

$detA = sgn(\psi_1)a_{1\psi_1(1)}a_{2\psi_1(2)}a_{3\psi_1(3)} + sgn(\psi_2)a_{1\psi_2(1)}a_{2\psi_2(2)}a_{3\psi_2(3)} + sgn(\psi_3)a_{1\psi_3(1)}a_{2\psi_3(2)}a_{3\psi_3(3)} + sgn(\psi_4)a_{1\psi_4(1)}a_{2\psi_4(2)}a_{3\psi_4(3)} + sgn(\psi_5)a_{1\psi_5(1)}a_{2\psi_5(2)}a_{3\psi_5(3)} + sgn(\psi_6)a_{1\psi_6(1)}a_{2\psi_6(2)}a_{3\psi_6(3)}$

Note que ψ_1, ψ_4 e ψ_5 possuem um número par de inversões, portanto, terá sinal positivo, e ψ_2, ψ_3 e ψ_6 possuem um número ímpar de inversões, tendo, então, sinal negativo. Dessa forma, teremos:
$detA = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$
$detA = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{22}a_{31})$

E assim por diante, pois não nos aprofundaremos nesse tema, além de termos a partir disso, $n!$ parcelas de soma, o que o tornaria muito trabalhoso.

3.3 Propriedades dos Determinantes

Vamos agora mostrar aplicações da paridade das permutações, através de algumas propriedades do determinante de uma matriz.

Proposição 3.3.1 *Se I é a matriz identidade de ordem n, então $detI = 1$.*

Prova: Sabemos que as entradas de $I = (a_{ij})$ são $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ se $i = j$.
Assim, $sgn(\psi)a_{1\psi(1)}a_{2\psi(2)} \ldots a_{n\psi(n)}$ será diferente de zero se, e somente se, $sgn(\psi) = sgn(e)$. Portanto, temos que $detI = sgn(id)a_{11}a_{22} \ldots a_{nn} = 1$, provando o que desejávamos.

Proposição 3.3.2 *O determinante de uma matriz $A = (a_{ij})$ é sempre igual ao determinante de sua matriz transposta $A^t = (b_{ij})$.*

Prova: Para provar que $detA = detA^t$, observemos que, fixada $\delta \in S_n$, para cada $j \in J_n$, existe um único $i \in J_n$, tal que $j = \delta(i)$, em que $i = \delta^{-1}(j)$. Logo, $b_{1\delta(1)}b_{2\delta(2)} \ldots b_{n\delta(n)} = b_{\delta^{-1}(1)1}b_{\delta^{-1}(2)2} \ldots b_{\delta^{-1}(n)n}$, já que a multiplicação em R é comutativa. Portanto, segue que

$$detA^t = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta)b_{1\delta(1)}b_{2\delta(2)} \ldots b_{n\delta(n)} \tag{3.12}$$

$$detA^t = \sum_{\in S_n} sgn(\delta) b_{\delta^{-1}(1)1} b_{\delta^{-1}(2)2} \dots b_{\delta^{-1}(n)n} \tag{3.13}$$

$$detA^t = \sum_{\delta \in S_n} sgn(\delta) a_{1\delta^{-1}(1)} a_{2\delta^{-1}(2)} \dots a_{n\delta^{-1}(n)} \tag{3.14}$$

$$detA^t = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\delta^{-1}) a_{1\delta^{-1}(1)} a_{2\delta^{-1}(2)} \dots a_{n\delta^{-1}(n)} \tag{3.15}$$

$$detA^t = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi) a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} \dots a_{n\psi(n)} = detA \tag{3.16}$$

Proposição 3.3.3 *Se a matriz $B = (b_{ij})$ é obtida da matriz $A = a_{ij}$ pela troca de duas colunas, então $detB = -detA$.*

Prova: Seja δ a transposição que troca, entre si, os dois números correspondentes às duas colunas de A, as quais são trocadas entre si. Assim, $b_{ij} = a_{i\delta(j)}$ para todo $1 \leq i, j \leq n$. Portanto, para qualquer permutação $\psi \in S_n$,
$b_{1\psi(1)} b_{2\psi(2)} \dots b_{n\psi(n)}$.
Assim

$$detB = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi) b_{1\psi(1)} b_{2\psi(2)} \dots b_{n\psi(n)} \tag{3.17}$$

$$detB = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi) a_{1\delta(\psi(1))} a_{2\delta(\psi(2))} \dots a_{n\delta(\psi(n))} \tag{3.18}$$

E como sabemos que $sgn(\delta o \psi) = sgn(\delta) = sgn(\psi) = -sgn(\psi)$, ou seja, $sgn(\psi) = -sgn(\psi o \delta)$.

$$detB = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi o \delta) a_{1\delta(\psi(1))} a_{2\delta(\psi(2))} \dots a_{n\delta(\psi(n))} \tag{3.19}$$

Mas como s percorre todos os elementos de S_n, $\delta o \psi$ também percorre todos os elementos de S_n.
Logo, $detB = -detA$.

Proposição 3.3.4 *Se uma matriz B é obtida pela multiplicação de uma linha ou coluna de uma matriz A por um escalar k, então $det(B) = k.det(A)$.*

Prova: Suponhamos que a r-ésima linha de A seja multiplicada por k para se obter B. Então, $b_{ij} = a_{ij}$, se $i \neq r$ e $b_{rj} = ka_{rj}$. Assim,

$$detB = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi) b_{1\psi(1)} b_{2\psi(2)} \dots b_{r\psi(r)} \dots b_{n\psi(n)} \tag{3.20}$$

$$detB = \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi) a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} \dots (ka_{r\psi(r)}) \dots b_{n\psi(n)} \tag{3.21}$$

$$detB = k \sum_{\psi \in S_n} sgn(\psi) a_{1\psi(1)} a_{2\psi(2)} \dots a_{r\psi(r)} \dots b_{n\psi(n)} \tag{3.22}$$

$$detB = k.detA \tag{3.23}$$

Teorema 3.3.5 Existe uma única função definida por
$det : (\mathbb{M}_{n,n}, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, satisfazendo:
1)$detI = 1$
2)$detA = detA^t$
3)$detB = k.detA$

Capítulo 4

Permutações Caóticas

Este capítulo é um dos mais interessantes do nosso estudo, e abordaremos inicialmente trazendo uma questão do ENEM 2009 (prova cancelada), que trata do nosso assunto a ser estudado.

Exemplo 4.0.6 Em um concurso realizado numa lanchonete, apresentavam-se ao consumidor quatro cartas voltadas para baixo, em ordem aleatória, diferenciadas pelos algarismos 0, 1, 2 e 5.
O consumidor selecionava uma nova ordem ainda com as cartas voltadas para baixo. Ao desvirá-las, verifica-se quais delas continham o algarismo na posição correta dos algarismos do número 12,50, que era o valor em reais do trio-promoção. Para cada algarismo na posição acertada, ganhava-se 1 real de desconto.
Por exemplo, se a segunda carta da sequência escolhida pelo consumidor fosse 2 e a terceira fosse 5, ele ganharia 2 reais de desconto.
Qual a probabilidade de um consumidor não ganhar qualquer desconto?

Definição 4.0.7 Uma permutação de $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ é chamada de permutação caótica quando nenhum dos $a_i's$ se encontra na posição original, isto é, na i-ésima posição. Também pode ser chamada de desarranjo.
Formalmente falando, um desarranjo é uma bijeção $\phi : S \longrightarrow S$, em um conjunto finito S, que não possui pontos fixos. Lembrando que ponto fixo é quando $\phi(a_k) = a_k$

Exemplo 4.0.8 A permutação $[a_2a_1a_5a_3a_4]$ e $[a_5a_4a_1a_2a_3]$ são exemplos de permutações caóticas de $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, enquanto $[a_3a_2a_1a_2a_5]$ não é, visto que existem $a_i's$, que estão em seu lugar original.

Se definirmos D_n como sendo o número de permutações caóticas, ou seja, a quantidade de permutações das n letras $\{a_1 \ldots, a_n\}$, nas quais nenhuma delas fica na posição original.

Quando $n = 1$, temos somente uma letra, portanto, não teremos desarranjos, ou seja $D_1 = 0$.

Quando $n = 2$, podemos desarranjar as letras a e b de uma maneira que é ba. Assim, $D_2 = 1$.

Quando $n = 3$, podemos permutar as letras a, b, c de 6 maneiras que são $abc, acb, bac, bca, cab, cba$, em que bca, cab são os únicos desarranjos, ou seja, $D_3 = 2$.

Continuando esse procedimento, poderemos calcular $D_4 = 9$, $D_5 = 44$, porém as contagens vão ficando cada vez maiores e mais trabalhosas, de tal modo que deduzir uma fórmula seria o mais conveniente.
Euler chegou na seguinte fórmula para D_n

$$D_n = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}) \tag{4.1}$$

Vejamos como ele raciocinou para encontrar esse valor
Considere o conjunto $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Sabemos que a permutação é caótica (ou desarranjo), quando nenhuma aplicação de ψ é ponto fixo, ou seja, para todo $j \in X$, devemos ter $\psi(a_j) \neq a_j$. Então, considere $[a_1 \ldots, a_n]$ uma imagem inicial de ψ. Rearranjando-as de modo que nenhuma imagem retorne a sua posição original, teremos então duas situações, e em cada uma delas, existem $n - 1$ possibilidades para a imagem da primeira letra (a_1), visto que não podemos ter imagem de a_1, sendo o próprio a_1. Então, teremos dois casos:

1° caso: Suponha, inicialmente, que a imagem de a_1 seja o elemento a_2 e a imagem do elemento a_2 seja igual ao a_1. Assim, chamaremos de D_{n-2} o desarranjo das $n - 2$ letras que sobram ao retirarmos a_1 e a_2 do grupo. Portanto, o total de permutações caóticas desse tipo será dado pelo produto das variações dessas demais letras D_{n-2} por $n - 1$, visto que para o lugar da imagem de a_1 temos $n - 1$ opções. Isso fica claro no gráfico abaixo, onde, a partir da imagem do a_2, teremos uma caótica com os $(n - 2)$ elementos restantes.

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \ldots \\ a_2 & a_1 & \ldots \end{pmatrix} \in S_n$$

Assim sendo, o total de desarranjos dessa opção será dado por $(n - 1).D_{n-2}$

2° caso: Suponha agora que a imagem do a_1 é o a_2, e a imagem do a_2 não é o a_1, sendo um outro elemento a_k qualquer. Sobram agora $n - 1$ letras que ficarão à direita da imagem do a_1, não podendo nenhuma ficar na sua posição original, havendo, portanto, um desarranjo de $(n - 1)$ letras que chamaremos de D_{n-1}. Portanto, o total de permutações caóticas desse tipo será dado pelo produto das variações dessas demais letras D_{n-1} por $n - 1$, visto que para o lugar da imagem de a_1 temos $n - 1$ opções. Isso fica claro no gráfico abaixo, onde, a partir da imagem do a_1, teremos uma caótica com os $(n - 1)$ elementos restantes.

$$\psi = \begin{pmatrix} a_1 & \ldots \\ a_2 & \ldots \end{pmatrix} \in S_n$$

Assim sendo, o total de desarranjos dessa opção será dado por $(n - 1).D_{n-1}$.

Como os rearranjos das duas possibilidades pertencem a conjuntos disjuntos, temos que, quando a_2 é a imagem do a_1, existem $D_{n-1} + D_{n-2}$ desarranjos possíveis. Como exitem $n - 1$ opções para a imagem do a_1, temos que pelo Princípio da Contagem:

Lema 4.0.9 $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$

Obtemos assim, uma fórmula de recorrência que resolve o problema, mas tem o inconveniente de não fornecer uma fórmula Geral em função de n. Iremos mostrar um modelo que determine todos os "desarranjos"em função de n.

Substituindo alguns valores de n, teremos:

Para $n = 3$, temos:

$D_3 = 2(D_2 + D_1) = 2D_2 + 2D_1$

Reescrevendo a equação, obtemos:

$D_3 = (-D_2 + 3D_2) + 2D_1 \Rightarrow D_3 - 3D_2 = -(D_2 - 2D_1)$

Analogamente, para $n = 4$ e $n = 5$, temos:

$D_4 - 4D_3 = -(D_3 - 3D_2)$

$D_5 - 5D_4 = -(D_4 - 4D_3)$

Generalizando: $\forall n \geq 3$, tem-se:

$$\begin{array}{ll} D_3 - 3D_2 = -(D_2 - 2D_1) \\ D_4 - 4D_3 = -(D_3 - 3D_2) \\ D_5 - 5D_4 = -(D_4 - 4D_3) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ D_n - nD_{n-1} = -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) \end{array}$$

Multiplicando termo a termo dessas $(n-2)$ igualdades, temos:

$(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3)(D_5 - 5D_4)\ldots(D_n - nD_{n-1}) = [-(D_2 - 2D_1)][-(D_3 - 3D_2)][-(D_4 - 4D_3)]\ldots[-(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})]$

De onde obtemos:

$(D_n - nD_{n-1}) = (-1)^{n-2}[-(D_2 - 2D_1)]$

Ora $(-1)^{n-2} = (-1)^n \forall n \in \mathbb{Z}$ e sabemos que $D_2 - 2D_1 = 1$, substituindo teremos

Lema 4.0.10 $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \forall n \geq 3$

Para resolvermos essa recorrência, usaremos um fator multiplicador F_n, em que :

$$F_n.D_n = n.F_n.D_{n-1} + F_n.(-1)^n \tag{4.2}$$

Definiremos o fator multiplicador como sendo:

$F_1 = 1$ e $n.F_n = F_{n-1}$. Ficaremos com:

$$\begin{array}{l} 2.F_2 = F_1 \\ 3.F_3 = F_2 \\ 4.F_4 = F_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ n.F_n = F_{n-1} \end{array}$$

que multiplicando termo a termo

$n!.F_n = F_{n-1}$
$F_n = \frac{1}{n!}$.
Assim, voltando a nossa recorrência e substituindo $n.F_n$ por F_{n-1}, chegamos a:
$F_n.D_n = F_{n-1}.D_{n-1} + F_n.(-1)^n$
Logo, fazendo $X_n = F_n.D_n$, de onde conclui-se que $X_1 = F_1.D_1 = 0$, teremos
$X_n = X_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$
, ou seja:
$X_2 = X_1 + \frac{(-1)^2}{2!}$
$X_3 = X_2 + \frac{(-1)^3}{3!}$
$X_4 = X_3 + \frac{(-1)^4}{4!}$
$\vdots \qquad \vdots$
$X_n = X_{n-1} + \frac{(-1)^n}{n!}$
Somando termo a termo, teremos:
$X_n = (\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$
$\frac{1}{n!}.D_n = (\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$
$D_n = n!(\frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$
Percebemos assim, ao que tudo indica, que a fórmula $D_n = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$ está certa.
Provaremos por Indução Finita a nossa suspeita.

Teorema 4.0.11 $D_n = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$

Prova: Para $n = 2$, é válido, pois $D_2 = 2!(\frac{1}{2!}) = 1$
Suponha que seja verdadeira para $n - 1$, ou seja:
$D_{n-1} = (n-1)!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1!})$ é verdadeira.
Multiplicando ambos os membros da igualdade por n:
$n.D_{n-1} = n(n-1)!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1!})$ e sabendo que, pelo lema 4.0.10:
$nD_{n-1} = D_n - (-1^n)$, logo:
$D_n - (-1)^n = n(n-1)!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1!})$
$D_n = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n-1!}) + (-1)^n$
$D_n = n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})$, como queríamos demonstrar.

Exemplo 4.0.12 Utilizando esta fórmula, podemos ver que o número de permutações caóticas de 4 objetos (a, b, c, d), ou seja, para $n = 4$ é:

$$D_4 = 4!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + (-1)^4 \frac{1}{4!}) \tag{4.3}$$
$$D_4 = 9 \tag{4.4}$$

Todas as imagens ordenadas de S_4 são:
[1234][1243][1324][1342][1423][1432]
[2134][2143][2314][2341][2413][2431]
[3124][3142][3214][3241][3412][3421]
[4123][4132][4213][4231][4312][4321] e dessas 24 imagens ordenadas, apenas
[2143][2341][2431][3142][3412][3421][4123][4312][4321] são permutações caóticas.

Voltando à questão inicial deste capítulo temos que as diferentes possibilidades do consumidor não ganhar qualquer prêmio é justamente a quantidade de permutações caóticas que ele pode formar com os elementos do conjunto $\{0, 1, 2, 5\}$, ou seja, que não fiquem nenhum na posição $12, 50$.
Como temos um conjunto com 4 elementos, teremos 24 possibilidades de permutar e, dessas, 9 são caóticas, ou seja, a probabilidade será $\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$
Só como observação, a questão não apresentava alternativa correta.
Na verdade, apesar da questão se tratar de um caso de permutação caótica, a quantidade de elementos era pequena, podendo, portanto, ser resolvida sem nenhuma fórmula. Porém, esse detalhe despertou-me o interesse no cálculo das probabilidades de obter uma permutação caótica.
Como sabemos, o conceito de probabilidade de um evento A é dado por $P(A) = \frac{n(A}{n(U}$, que no nosso caso será dado por;
$P_{caoticas} = \frac{n!(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!})}{n!} = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!}$
Euler provou que essa probabilidade praticamente se estabiliza a partir de valores relativamente baixos de n.
Não iremos demonstrar tal fato, iremos apenas ilustrar através de uma tabela.

n	P_n
1	0
2	0,5
3	0,33..
4	0,3750
5	0,36667
$\vdots$	$\vdots$
12	0,36787944
$\vdots$	$\vdots$
24	0,3678794412

Temos que os valores de P_n crescem cada vez menos quando n passa de ímpar para par e diminuem cada vez menos quando n passa de par para ímpar, sugerindo que P_n deva tender a se aproximar de um certo valor entre $0, 36667$ e $0, 36806$, ora por excesso, ora por falta, e este estranho número é surpreendentemente $\frac{1}{e}$.
Das séries de potências, sabemos que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{4.5}$$

Aplicando o teste da razão, verifica-se que a série é convergente $\forall x \in \mathbb{R}$ e como

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}! + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \tag{4.6}$$

Substituindo $x = -1$, teremos:

$$1 + \frac{(-1)^2}{2!} + \frac{(-1)^3}{3!}! + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} \tag{4.7}$$

$$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!}! + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \ldots = 0, 367879441... \tag{4.8}$$

Capítulo 5

Proposta Pedagógica

O estudo de problemas de contagens começa nas primeiras séries do ensino fundamental, de modo bem lúdico. Com o passar do tempo, a criança começa a perder o contato com o estudo da contagem, vendo um conteúdo muito grande de álgebra. Já no ensino médio, esse contato é retomado de modo mais abrangente, mas a partir da segunda série, continuando na terceira série. Porém a forma de se ensinar muda, tratando-se agora a análise de modo mais formal e perdendo a parte interessante do aprender a pensar.

No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) destacam, dentre outras coisas, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio e o cuidado que nós, professores, devemos ter ao procurar desenvolvê-lo. Segundo esse documento:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio... (BRASIL, 1998, p.257).

Diante do exposto, vemos a importância desse conteúdo, não apenas para áreas exatas, mas como forma de permitir a elaboração de situações-problemas que podem ser discutidas através da construção de conjecturas e discussão de ideias, promovendo o desenvolvimento da capacidade de argumentação em diferentes níveis de ensino.

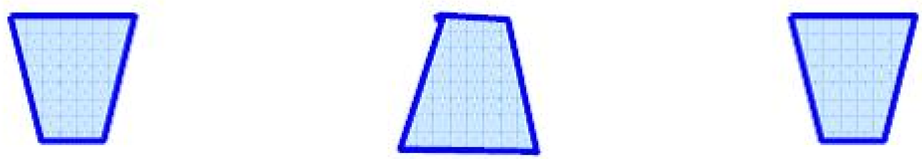
Pois bem, após uma panorâmica sobre a importância da análise combinatória como um todo no aspecto mais global de educação, vamos agora voltar ao nosso tema e propor retomada da forma lúdica de pensar, que pode ser aplicada nos diversos níveis de ensino, dentro de um certo contexto.

Vimos que podemos associar um sinal positivo $(+)$ ou negativo $(-)$ a uma permutação, dependendo do número de transposições (troca de posições de dois elementos) necessárias que podemos obter para chegar à identidade (forma original). Se ela for obtida de um número par de transposições, terá sinal positivo e se for obtida de um número ímpar de transposições, terá sinal negativo.

Para exemplificar as questões que envolvem paridade de uma permutação, veremos alguns exemplos de possibilidades ou impossibilidades da execução de algumas tarefas.

Exemplo 5.0.13 Primeiramente, divida a turma em grupos de, no máximo, 4 alunos. Cada grupo trabalhará com 3 copinhos plásticos. Os alunos deverão ler atentamente o texto, com o acompanhamento do professor. Em seguida, deverão responder às questões propostas. Sugere-se que o professor formule e apresente novos casos para os alunos solucionarem.

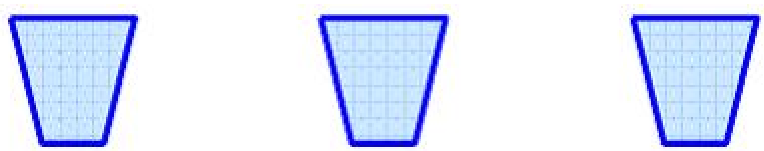
$1^{\circ} caso$: Coloque três copinhos plásticos sobre a mesa, de acordo com a configuração abaixo:



(dois copos para cima e o do centro para baixo)

Virando simultaneamente 2 desses copos, quantas vezes forem necessárias, tente deixar os 3 com a boca para baixo. A solução é muito simples, basta virar o primeiro e o último copo. Tente uma segunda solução (isso pode ser feito virando-se, por exemplo, o primeiro e o segundo copo e, a seguir, o segundo juntamente com o terceiro).

$2^{o} caso$: Coloque os três copos, agora, da seguinte forma:

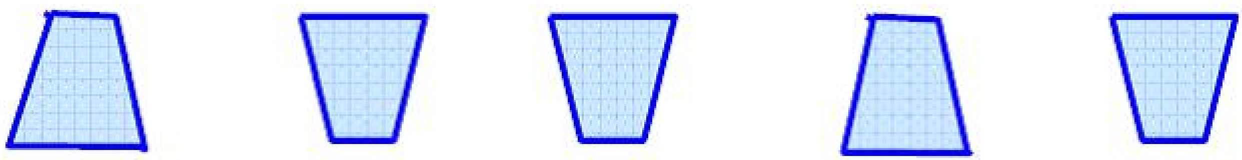


(os três virados para cima)

Virando-se simultaneamente 2 copos, quantas vezes forem necessárias, tente deixar os 3 com a boca para baixo. Depois de algumas tentativas, a tarefa vai se revelar impossível. Como sabemos disso?
Associe ao copo com a boca virada para cima o número $(+1)$ e ao copo virado para baixo o valor (-1). Assim, no primeiro caso apresentado acima, os copinhos tinham a configuração $(+1)(-1)(+1)$.
Para que os três copos fiquem virados para baixo, devemos obter a configuração $(-1)(-1)(-1)$.
Veja o que ocorre com o produto dos três números, antes e depois da virada, respectivamente:
$(+1).(-1).(+1) = -1$
$(-1).(-1).(-1) = -1$
Observe que não temos a alteração do sinal desse produto ao virarmos simultaneamente dois copos. Logo, o primeiro caso tem solução.
No segundo caso, a configuração inicial era $(+1)(+1)(+1)$. O produto desses três números é $(+1)$. Esse produto não se altera quando viramos simultaneamente dois copos (verifique essa afirmação). Dessa forma, o produto nunca será (-1), e o problema não tem solução. Para deixar os três copos virados para baixo, deveríamos ter:

$(-1).(-1).(-1) = -1$

Agora, deixaremos um probleminha para o leitor pensar:
Considere a figura abaixo:



Virando-se simultaneamente dois copos, é possível colocar os 5 com a boca virada para cima?

Resposta: Sim. Observe que a configuração inicial é $(-1)(+1)(+1)(-1)(+1)$, cujo produto é $(+1)$. Se os 5 copinhos estiverem com a boca virada para cima, o produto também é igual a $(+1)$. Logo, o problema tem solução.

Referências Bibliográficas

[1] TAMAROZZI, A. , FERREIRA, L. *Grupos de permutações e Grupos finitos simples*

[2] SANTOS, J. , BOVO, E. *O Teorema de Burnside e Aplicações*, Universidade Estadual de Campinas.

[3] JOSÉ RODRIGUES DE MORAES, W. *O estudo de determinantes sob a ótica do grupo de permutações*, Universidade Federal de Goiás, Goiânia , 2013

[4] HOWARD, E. *Elementary Matrix Theory*, Estados Unidos, 1968.

[5] GUILHERME G., P. *Um estudo de partições de inteiros e o problema de Simon Newcomb*, Ribeirão Preto, São Paulo 2011.

[6] LÚCIA SÁ, F. *Estudos dos Determinantes*, Universidade Federal Fluminense, Rio de Janeiro.

[7] BOLDRINI, J. E OUTROS *Álgebra Linear*, Editora Harbra Ltda, São Paulo, 1986.

[8] LANG, S. *Álgebra Linear*, São Paulo, 1971.

[9] GUSTAVO MARTINS, L. *O problema de Lucas*, Universidade Federal de Minas Gerais, Minas Gerais, 2011.

[10] ALVES DE OLIVEIRA, F. , GOMES CUNHA, G. , DURAN CUNHA, G. , MEDEIROS, T. *Um estudo das permutações caóticas*, Trabalho apresentado como atividade do PIPE na disciplina Matemática Finita do Curso de Matemática no primeiro semestre de 2009.

[11] PUIGNAU *Estruturas Algébricas*, Universidade Federal do Rio de Janeiro, ufrj. Acessado em 23/05/2014 $http://www.im.ufrj.br/\ puignau/EA_2013/EA_grupos.pdf$.

[12] Firer, M. *Embaralhando imagens*, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - Unicamp.

[13] Heidemann Rocha, s. *Sistemas de coordenadas, matrizes, determinantes e sistemas lineares*, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Paraná , 2007

[14] Cordeiro de Morais Filho, d. , Sérgio Alves Ferreira, m. , *O Problema das Cartas mal endereçadas de Nicolaus Bernoulli e Euler: uma nota sobre como Euler resolveu brilhantemente um problema interessante*, Universidade Federal de Campina Grande.

[15] $http://www.rumoaoita.com/site/attachments/126_{P}rova_{I}TA_{2}002.pdf$ Acessado em 23/05/2014

[16] $http://www.infoescola.com/wp-content/uploads/2013/06/enem-2009-2-cancelado.pdf$ Acessado em 23/05/2014

[16] $http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_{m}edio/6_{s}inal_{d}e_{u}ma_{p}ermutacao_{p}.pdf$ Acessado em 23/05/2014

[17] George Andrews, e. *The Theory of Partitions*, Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania.

[18] Shine, c. *Princípio Da Inclusão-Exclusão Contagem de Pólya* , Programa Olímpico de Treinamento Curso de Combinatória ? Nível 3.

[19] Gondim, r., Eulália Moraes Melo, m. , Russo, f. *Equações algébricas e a Teoria de Galois*, IMPA

[20] Gonçalves, a. *Introdução a álgebra Linear*, Introdução à Álgebra - Edição número 5 - Impressão número 10

[21] Nuno Tavares, j. *O Teorema enumerativo de Polya*, Centro de Matemática da Universidade do Porto, acessado em 13/05/2014 http://cmup.fc.up.pt/cmup/matpolya/nodo8.html

[22] Santa Rita,p. https://www.mail-archive.com/obm-l@mat.puc-rio.br/msg07021.html, acessado em 13/05/2014