Universidade Federal do Maranhão

Centro de Ciências Exatas e Tecnológico

Departamento de Matemática

Mestrado Profissional em Matemática

# O USO DAS CONSTRUÇÕES COMO METODOLOGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DAS CÔNICAS

Washington Luis Parga Garrido Jr

2014

**Universidade Federal do Maranhão**

**Centro de Ciências Exatas e Tecnológico**

**Departamento de Matemática**

**Mestrado Profissional em Matemática**

# O USO DAS CONSTRUÇÕES COMO METODOLOGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DAS CÔNICAS

Discente: Washington Luis Parga Garrido Jr

Orientador: Prof. Dr. Felix Silva Costa

Abril de 2014

São Luis - MA

**Universidade Federal do Maranhão**

**Centro de Ciências Exatas e Tecnológico**

**Departamento de Matemática**

**Mestrado Profissional em Matemática**

# O USO DAS CONSTRUÇÕES COMO METODOLOGIA DE ENSINO E APRENDIZAGEM DAS CÔNICAS

por

**Washington Luis Parga Garrido Jr**

Dissertação apresentada ao Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Maranhão como requisito parcial para a obtenção do grau de mestre em Matemática.

Área de concentração: Geometria

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. Felix Silva Costa - UEMA** (Orientador)

---

**Prof. Dr.**

---

**Prof. Dr.**

*Dedico este trabalho aos meus avós Dideus e Esther e ao meu tio Hudson.*

# Agradecimentos

Agradeço a Deus e a minha família e a todos os professores do mestrado que contribuíram com suas experiências e conhecimentos e em especial ao professor Felix pela paciência e dedicação que me permitiu concluir este trabalho. Agradeço também a todos os meus amigos do curso pelo apoio dado e aos idealizadores do programa de mestrado PROFMAT.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar ao professor uma metodologia para o ensino e aprendizagem das cônicas baseada em construções através de Dobraduras, Desenho Geométrico e Geogebra, onde são exploradas após cada construção situações na forma de atividades que permitem ao professor revisar os assuntos estudados sobre as cônicas em sala de aula.



Palavras chave: Cônicas, metodologia, dobraduras, Geogebra, Desenho Geométrico.

# Abstract

This work aims to present to professor a methodology for teaching and learning based on conical structures through Foldings, geometric design and Geogebra, where are explored after each building situations in the form of activities that allow the teacher to review the subjects studied on the conics in the classroom.



Keywords: Bevel, methodology, foldings, Geogebra, geometric design.

# Lista de Figuras

# Sumário

# Introdução

Neste trabalho, será apresentado três metodologias baseadas em construções para o ensino das cônicas  Dobraduras, Desenho Geométrico e GeoGebra  com suas definições, procedimentos, quando e como aplicá-las em sala de aula no ensino médio.

O uso das construções como metodologia de ensino e aprendizagem busca associar os conceitos das cônicas e de seus elementos com a sua parte gráfica, por exemplo, na construção através de dobraduras o professor pode relacionar a equação da Parábola com a distância do ponto até a reta diretriz escolhida pelo aluno durante o processo de construção.

Em relação a importância das construções como metodologia de ensino e aprendizagem nas aulas de matemática, tem-se:

> *Os experimentos e construções são, igualmente, empregados com sucesso no ensino e aprendizagem da Matemática. O emprego de construções, como dobraduras, brinquedos infantis, sólidos geométricos com canudos, massa de modelar e as planificações possibilitam que o aluno veja, explore e sinta, de forma concreta, conceitos e propriedades matemáticas.*(GITIRANA; CARVALHO, 2010, p. 39)

O ensino de geometria no Brasil durante algumas décadas foi praticamente abandonado, consequência da chamada Matemática moderna dos anos 1960 , que priorizava a álgebra, o formalismo exagerado de conceitos e a abstração, os próprios livros didáticos são um bom exemplo desse abandono, onde a geometria era colocada sempre como a última unidade dos livros, por isso, da necessidade de mudanças nas práticas pedagógicas atuais do professor, para tentar diminuir e quem sabe até apagar as mazelas consequentes desses métodos antiquados. (LIMA, 2007).

O estudo das cônicas, parte importante da geometria analítica, ainda tem seu grande foco na álgebra, onde as suas equações e de seus elementos são trabalhadas sem relação com qualquer situação do cotidiano. Atualmente, muitas literaturas, inclusive o próprio livro didático, trazem vários exemplos do uso das cônicas em diversas áreas, um exemplo, é o livro do professor Steven Strogatz - A Matemática do Dia a Dia - que mostra uma série de aplicações e curiosidades sobre Elipses e Parábolas que poderiam ser usadas pelo professor de Matemática em sua sala de aula.

Quando se fala em construção geométrica, uma das primeiras ideias que aparece em mente é o uso de algum *software* computacional que facilite esse processo de construção, no caso deste trabalho, o que foi utilizado foi o Geogebra que possibilita ao professor várias possibilidades de exploração do conteúdo estudado, não só nas cônicas, mas praticamente de toda Matemática que envolva partes gráficas. Assim, como o GeoGebra, as tecnologias no contexto educacional estão cada vez mais inclusas nas escolas, como, por exemplos, a calculadora, o aparelho de DVD, o celular, quadro interativo, Datashow e claro o computador, sendo essas tecnologias, tema de muito debate.

Sobre a aplicação da informática na educação e em especifico dos computadores Borba e Penteado (2012. p.12) relatam:

> *Informática e Educação! Esse tem sido um tema de debate recorrente nas últimas duas décadas no Brasil* [...]. *Talvez ainda seja possível lembrar dos discursos sobre o perigo que a utilização da informática poderia trazer para a aprendizagem dos alunos.*[...] *entre a postura que assume que o computador é ruim para o aluno e aquela que assume que ele melhora o ensino, há espaços para outros posicionamentos. A relação entre a informática e a educação Matemática não deve ser pensada da forma dicotômica esboçada na frase deste parágrafo, mas sim como transformação da própria prática educativa.*

Sobre o uso dos computadores nas escolas, tanto por parte do professor quanto por parte dos alunos, é quase que unânime entre os especialistas em educação a sua importância, porém, dos recursos que podem ser usados, talvez seja a que o professor tenha mais dificuldade de acesso, pois, seu uso na escola depende de alguns fatores que fogem à sua responsabilidade ou a do aluno, por exemplo, se a escola tem esses computadores, se esses computadores são em quantidade suficiente, se os computadores estão funcionando adequadamente, se a escola tem estrutura física adequada para a instalação desses computadores e se a rede elétrica local suporta esses computadores com os ar condicionados ligados, parece pessimismo exagerado, mas a escola onde foi aplicado algumas das atividades apresentadas aqui, passou por todos esses problemas. Pensando, também, nessas variáveis, que infelizmente, são bem comuns no cotidiano de uma escola, serão apresentadas mais duas metodologias para a construção das cônicas, são elas, as Dobraduras e o Desenho Geométrico que não dependem de estruturas mais sofisticadas.

Sobre o uso dos computadores e os possíveis problemas de acesso a eles LIMA (2007, p. 153) explica:

> *Caso fosse verdade que a existência de computadores em cada sala de aula constituísse uma solução definitiva para os problemas de aprendizagem e nos desse o passaporte para o desenvolvimento e a modernidade, caso isso fosse um fato indiscutível, acima de qualquer dúvida, ainda assim teríamos grandes problemas para implementar tal solução, como por exemplo os custos de aquisição, instalação e manutenção, a elaboração de programas (software), o treinamento de professores, as medidas de segurança para evitar que os equipamentos fossem roubados, além da chocante discrepância cultural entre um sonhado ambiente high tec na escola e o nível de vida, não apenas dos alunos como dos malpagos professores..*

Para o processo de Dobraduras os únicos recursos materiais que o professor precisará é de uma folha de papel e um objeto redondo para a construção de uma circunferência, e que os procedimentos para a construção das cônicas podem ser encontrados em livros didáticos e em sites de Matemática.

A opção pelo uso do Desenho Geométrico como metodologia de ensino das cônicas, foi pela oportunidade que esse método oferece ao professor de resgatar assuntos já trabalhados na geometria como as retas paralelas, retas perpendiculares, ponto médio, mediatriz e arcos, além de possibilitar ao professor mostrar para os alunos os instrumentos de Desenho Geométrico e como usá-los, uma vez que, atualmente, nas escolas públicas de São Luis não tem mais aulas dessa disciplina, assim, foi retirado do aluno um meio de produção que melhora a coordenação motora e a concentração, onde ele observava de imediato o resultado do seu aprendizado no fim das atividades.

Sobre as diferenças entre os objetivos do ensino da Geometria Analítica de fazer um estudo algébrico das figuras e do Desenho Geométrico de fazer um estudo gráfico, e da extinção dessa última, tem-se

> *Essas diferenças só justificam uma aproximação cada vez maior dessas áreas, e o nosso maior desafio como professor é encontrar métodos que se adaptem ao tempo e à grade curricular.*
> *Com a extinção do Desenho Geométrico e da Geometria Descritiva como disciplinas do ensino fundamental e médio, respectivamente, vimos na Geometria Analítica um espaço real e necessário para a continuidade das mesmas, de forma que o aluno viesse novamente a integrar número e forma no ensino de Geometria Analítica.*(SCHWERTI, 2012 p.3)

É fundamental refletir sobre os princípios metodológicos específicos de um trabalho com o ensino de Matemática. Alguns deles podem derivar diretamente de princípios metodológicos gerais, mas, para que se concretizem na prática de sala de aula, devem ser detalhados de maneira a se compatibilizar as características do conhecimento matemático, (LUCCHESI, 1994).

# Capítulo 1

# Cônicas - Fundamentação Teórica

Antes de iniciar o trabalho de construção das cônicas é recomendado ao professor que faça o estudo teórico do assunto com seus alunos, pois a ideia básica dessas construções é resgatar essas teorias fazendo o aluno observar a relação entre imagens e conceitos. Assim, neste capítulo, será retratado um estudo teórico das cônicas, mostrando suas origens, propriedades, equações, gráficos e utilizações em outras áreas.

## 1.1 Cônicas - Definições e Elementos

Apolônio de Perga (c.262-190a.C.), geômetra e astrônomo grego, foi um dos primeiros a desenvolver um estudo sobre as cônicas, e por esse trabalho foi denominado pelos matemáticos da época de "O Grande Geômetra"(EVES, 2008).

Antes de Apolônio, cones de formas diferentes foram usados para deduzir cada tipo de curva. Apolônio mostrou que todas poderiam ser derivadas do mesmo cone, para isso, bastava ajustar o ângulo do plano de corte através desse cone (ROONEY, 2012).

As nomenclaturas dadas as cônicas tem origens diferentes segundo os seguintes autores:

De acordo com Paiva (2009) os termos Elipse, Parábola e Hipérbole foram usados por Apolônio por significarem, respectivamente, falta, igualdade e excesso. Essas classificações referem-se a um número, chamado excentricidade da cônica, que é menor que 1 na Elipse (falta), igual a 1 na Parábola (igualdade) e maior que 1 na Hipérbole (excesso).

Já Eves (2008, p.199) relata que Apolônio usou os termos Elipse, Parábola e Hipérbole da terminologia pitagórica antiga e referem-se a aplicação de áreas da seguinte maneira:

> *Os pitagóricos colocavam a base de um retângulo em um segmento de reta, com um dos vértices do retângulo na extremidade do segmento, se a base do retângulo ficasse aquém, do segmento de reta, coincidia com ele ou o excedia, eles diziam que tinha um caso de "ellipsis, "parabole"ou "hyperbole".*

Assim que os alunos tiverem em mãos as definições das cônicas e de seus elementos, eles poderão responder aos questionamentos feitos pelo professor após as atividades de construções que serão exemplificadas nos capítulos seguintes.

As cônicas são lugares geométricos[1] definidas como sendo a interseção de uma superfície cônica com um plano $\pi$ qualquer da seguinte forma:

"Se $\pi$ for paralelo a uma geratriz[2] , a cônica é uma parábola."(NETO et al, 2010, p. 386).

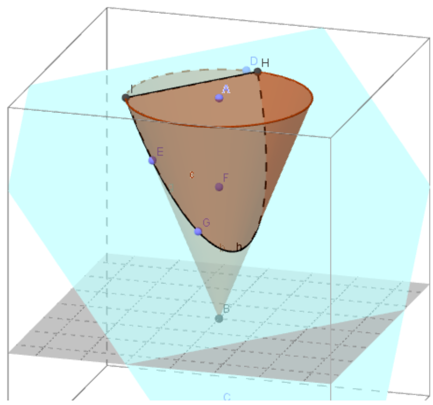


Figura 1.1: Seção representando uma Parábola

"Se $\pi$ cortar apenas uma folha da superfície cônica e não for paralelo a uma geratriz nem perpendicular ao eixo, a cônica é uma elipse."(NETO et al 2010, p. 386).

[1] Lugar Geométrico - uma figura é um lugar geométrico de pontos quando todos os seus pontos, e apenas eles, têm uma certa propriedade comum.(IEZZI, 2010)

[2] Geratriz - em um cone, é um segmento com uma extremidade no vértice e a outra nos pontos da circunferência da base (DOLCE; POMPEO, 2002)

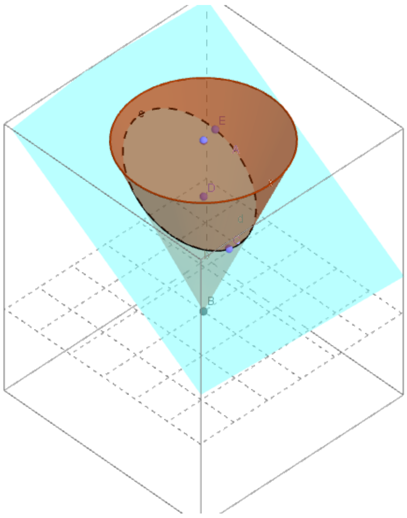


Figura 1.2: Seção representando uma Elipse

"Se $\pi$ cortar as duas folhas paralelo ao eixo da superfície cônica, a cônica será uma hipérbole."(NETO et al 2010, p. 386).

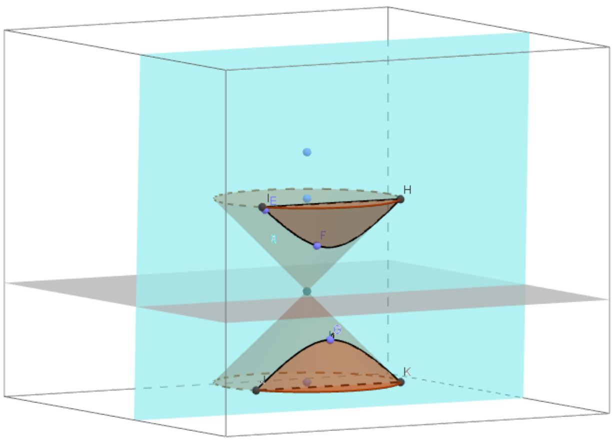


Figura 1.3: Seção representando uma Hipérbole

### 1.1.1 Elipse e seus Elementos

#### Definição da Elipse como lugar geométrico no plano

"Dados dois pontos distintos $F_1$ e $F_2$, pertencentes a um plano $\alpha$, seja $2c$ a distância entre eles. Elipse é o conjunto de pontos de $\alpha$ cuja soma das distâncias a $F_1$ e $F_2$ é a constante $2a$ (sendo $2a > 2c$)"(IEZZI 2005, p.168).

**Elementos de uma Elipse**

A Figura 1.4 ilustra uma Elipse e seus elementos.

- $F_1$ e $F_2$: focos
- $\overline{A_1A_2}$: eixo maior
- $\overline{B_1B_2}$: eixo menor
- $C$: centro
- $\overline{F_1F_2}$: distância focal

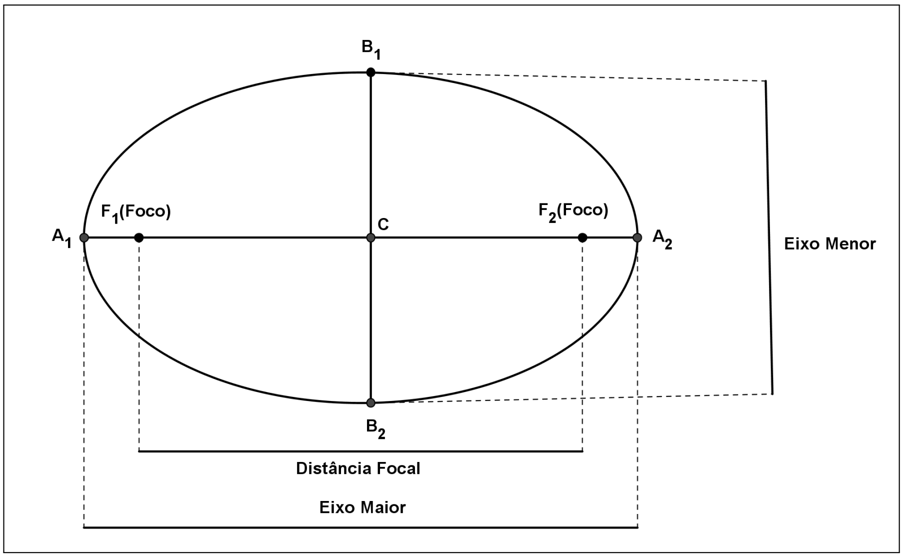



Figura 1.4: Elementos da Elipse

**Equações de uma Elipse**

Considerando-se o centro da Elipse $C(x_0, y_0)$ e $a$ e $b$ os semieixos maior e menor, respectivamente, a sua equação pode ser dada de duas formas:

- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, equação da Elipse de eixo maior horizontal.
- $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$, equação da Elipse de eixo maior vertical.

### 1.1.2 Hipérbole e seus Elementos

#### Definição da Hipérbole como lugar geométrico no plano

"Dados dois pontos distintos $F_1$ e $F_2$, pertencentes a um plano $\alpha$, seja $2c$ a distância entre eles. Hipérbole é o conjunto de pontos de $\alpha$ cuja diferença (em valor absoluto) das distâncias a $F_1$ e $F_2$ é a constante $2a$ (sendo $0 < 2a < 2c$)"(IEZZI 2005, p.174).

#### Elementos de uma Hipérbole

A Figura 1.5 ilustra uma Hipérbole e seus elementos.

- $F_1$ e $F_2$: focos
- $\overline{A_1A_2}$: eixo real ou transverso
- $\overline{B_1B_2}$: eixo imaginário
- $C$: centro
- $\overline{F_1F_2}$: distância focal
- $s_1$ e $s_2$: assíntotas

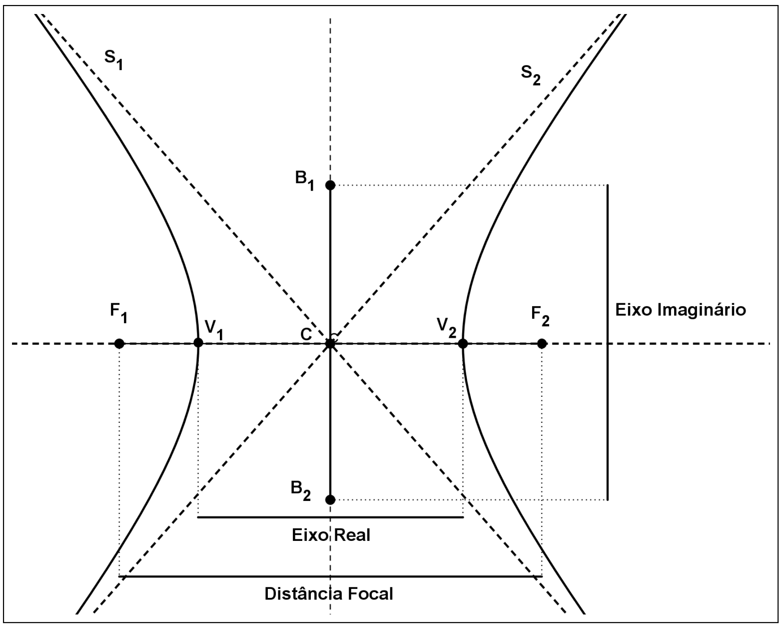



Figura 1.5: Elementos da Hipérbole

**Equações de uma Hipérbole**

Considerando-se o centro da Hipérbole $C(x_0, y_0)$ e $a$ e $b$ os semieixos real e imaginário, respectivamente, a sua equação pode ser dada de duas formas:

- $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, equação da Hipérbole de eixo real horizontal.
- $\frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$, equação da Hipérbole de eixo real vertical.

### 1.1.3 Parábola e seus Elementos

**Definição da Parábola como lugar geométrico no plano**

"Dados um ponto $F$ e uma reta $d$, pertencentes a um plano $\alpha$, com $F \notin d$, seja $p$ a distância entre $F$ e $d$. Parábola é o conjunto dos pontos de $\alpha$ que estão à mesma distância de $F$ e de $d$"(IEZZI 2005, p.178).

**Elementos de uma Parábola**

A Figura 1.6 ilustra uma Parábola e seus elementos.

- $F$: foco
- $d$: diretriz
- $p$: parâmetro
- $V$: vértice
- $\overline{VF}$: eixo de simetria

**Equações de uma Parábola**

Considerando-se o vértice da Parábola $V(x_v, y_v)$ e a reta diretriz paralela a um dos eixos cartesianos, a sua equação pode ser dada de duas formas:

- $(y - y_v)^2 = 2p(x - x_v)$, equação da Parábola com reta diretriz vertical.
- $(x - x_v)^2 = 2p(y - y_v)$, equação da Parábola com reta diretriz horizontal.

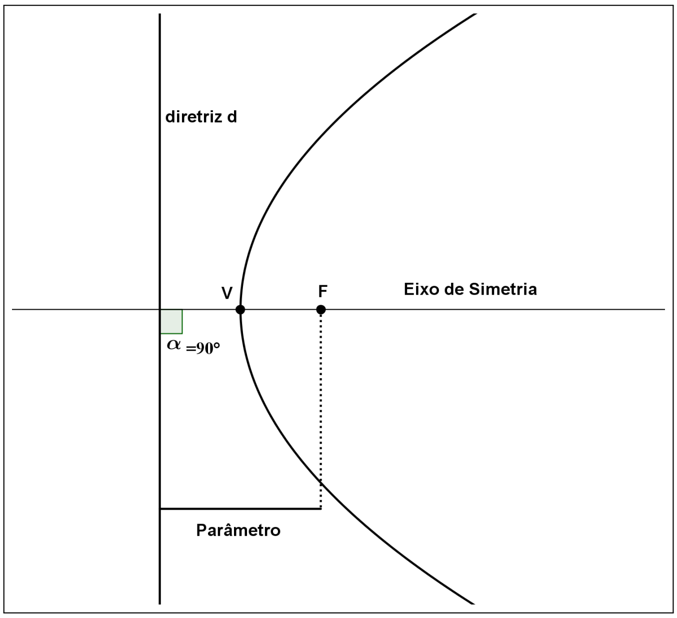



Figura 1.6: Elementos da Parábola

## 1.2 Propriedade da reta tangente às cônicas

O uso dessas propriedades vai ser importante como um dos meios que o professor pode utilizar para demonstrar que as figuras construidas pelos alunos representam as cônicas.

As propriedades da reta tangente às cônicas são explicadas por Putnoki (1989, p. 142, 158 e 173) da seguinte maneira:

**Propriedade da reta tangente à Parábola**

"A reta tangente à Parábola num ponto $P$ qualquer da mesma contém a bissetriz interna do vértice $P$ do triângulo $DPF$, onde $D$ é o simétrico do foco $F$ em relação à tangente."

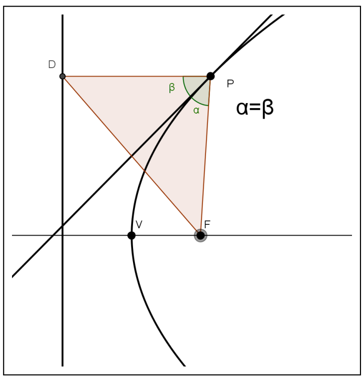



Figura 1.7: Reta tangente à Parábola

### Propriedade da reta tangente à Elipse

"A reta tangente à Elipse num ponto $P$ qualquer da mesma contém a bissetriz externa do vértice $P$ do triângulo $F_1PF_2$."

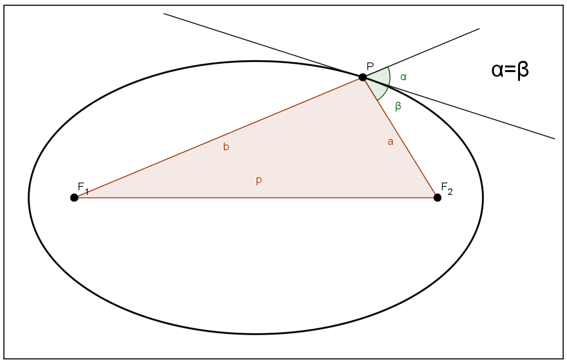



Figura 1.8: Reta tangente à Elipse

### Propriedade da reta tangente à Hipérbole

"A reta tangente à Hipérbole num ponto $P$ qualquer da mesma contém a bissetriz interna do vértice $P$ do triângulo $F_1PF_2$."

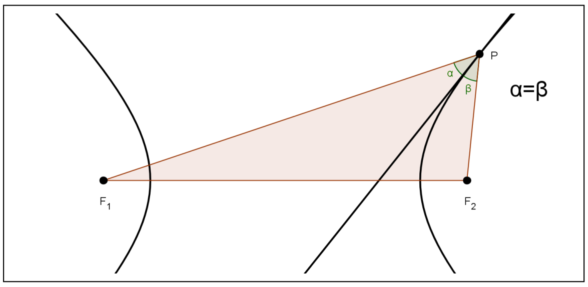



Figura 1.9: Reta tangente à Hipérbole

## 1.3 Propriedade reflexiva das cônicas

Explicar as propriedades reflexivas das cônicas em sala de aula é um passo importante para que os alunos entendam o funcionamento de alguns aparelhos usados no cotidiano como, por exemplo, as antenas de captação de ondas e os holofotes e , também, aparelhos construídos em laboratórios de Matemática como a sinuca elíptica e o golfe parabólico.

"Se F é o foco e P um ponto qualquer da Parábola, os ângulos $\alpha$ e $\beta$, formados por uma tangente em P com os segmentos PF e PQ, são iguais"(SANTOS;FERREIRA, 2010 p. 80).

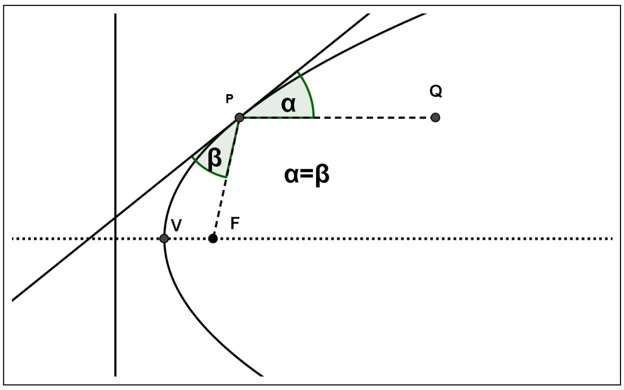



Figura 1.10: Reflexão na Parábola

A consequência dessa propriedade é que todo raio incidente na Parábola e é paralelo ao seu eixo reflete no próprio foco da Parábola.

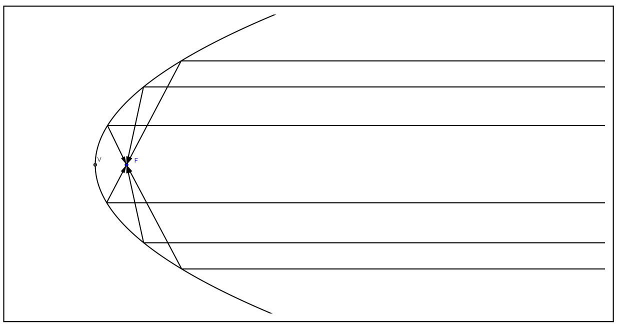


Figura 1.11: Incidência de raios na Parábola

"Na Elipse sendo F1 e F2 seus focos e P um ponto qualquer nela contido, os ângulos $\alpha$ e $\beta$, determinados pela tangente em P com raios focais PF1 e PF2, são iguais."(SANTOS;FERREIRA, 2010 p. 82).

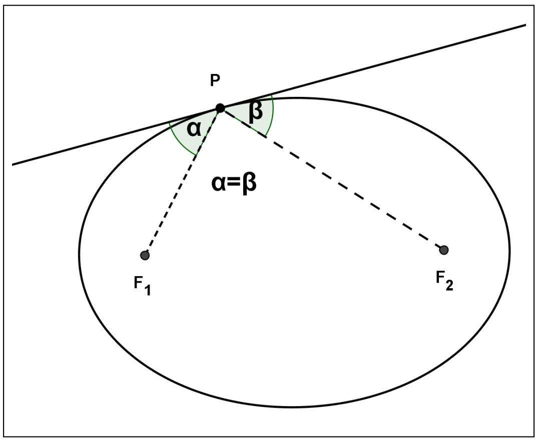



Figura 1.12: Reflexão na Elipse

Assim, na Elipse, todo raio que passa por um dos focos reflete na Elipse e passa pelo outro foco.

"Na Hipérbole, se F1 e F2 são seus focos e P um ponto qualquer contido nela, os ângulos $\alpha$ e $\beta$, determinados pela tangente em P com raios focais PF1 e PF2, são iguais."(SANTOS; FERREIRA, 2010 p.82).

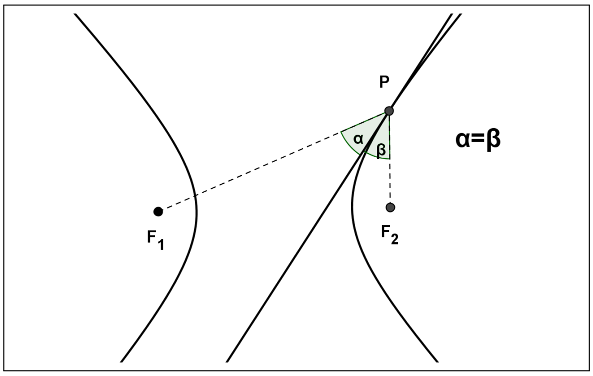



Figura 1.13: Reflexão na Hipérbole

Da mesma forma como ocorre na Elipse, qualquer raio que passa por um dos focos da Hipérbole, reflete nela e retorna para o outro foco.

## 1.4 O uso das cônicas em diversas áreas

Mostrar as aplicações da Matemática para os alunos em sala de aula é uma forma que o professor tem de resolver um problema bem comum que se tem quando se está lecionando a matéria, responder a pertinente pergunta: "para que eu preciso estudar isso?"ou "para que serve isso?".

É uma das competências a ser desenvolvida pelo aluno do ensino médio na área de Matemática de acordo com os PCN+EM[3] (2002, p.113):

> *Reconhecer relações entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, percebendo sua presença nos mais variados campos de estudo e da vida humana, seja nas demais ciências, como a Física, Química e Biologia, seja nas ciências humanas e sociais, como a Geografia ou a Economia, ou ainda nos mais diversos setores da sociedade, como na agricultura, na saúde, nos transportes e na moradia.*

Ainda em relação as aplicações da Matemática, podemos destacar nos PCNEM (2002, apud FAINGUELERNT;NUNES, 2012, p.14) :

> *No Ensino Médio, quando nas ciências se torna essencial uma construção abstrata mais elaborada, os instrumentos matemáticos são especialmente importantes. Mas não é só nesse sentido que a Matematica é fundamental. Possivelmente, não existe nenhuma atividade da vida contemporânea, da música à informática, do comercio à meteorologia, da medicina à cartografia, das engenharias às comunicações, em que a Matemática não compareça de maneira insubstituível para codificar, ordenar, quantificar e interpretar compassos, taxas, dosagens, coordenadas, tensões, frequências. A Matemática ciência, com seus processos de construção e validação de conceitos e argumentações e os procedimentos de generalizar, relacionar e concluir que lhe são característicos, permite estabelecer relações e interpretar fenômenos e informações.*

[3]Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio. Orientações educacionais complementares aos PCN

Atualmente, o trabalho com cônicas tem aplicações em diversas áreas como nos exemplos a seguir:

### 1.4.1 Na Astronomia

O movimento elíptico dos planetas ao redor do Sol descoberto pelo astrônomo e matemático alemão Johannes Kepler (1571-1630) em 1609.

Kepler formulou três leis que mostram as propriedades dos movimentos dos planetas.

> *Na 1ª lei, Kepler refuta as ideias de Nicolau Copérnico (1473-1543) de que as órbitas planetárias seriam circulares, ao afirmar que tais órbitas são na verdade elípticas, com o Sol ocupando um dos focos da Elipse ( e não o centro de um círculo). São Elipses de pequena excentricidade, praticamente circulares, mas ainda assim são Elipses.*(DANTE, 2011).

Segundo Eves (2008, p. 357), "essas leis são marcos fundamentais da história da Astronomia e da Matemática."Pois, num esforço para justificá-las, Isaac Newton[4] foi levado a criar a mecânica celeste moderna.

### 1.4.2 Nas Engenharias

Devido as propriedades refletoras das cônicas foi possível a construção de instrumentos que amplificassem ondas de luz, som ou outros sinais.

Podemos citar os microfones parabólicos que captam com maior qualidades os sinais acústicos e as antenas parabólicas que recebem e amplificam os sinais de rádio e de televisão enviados por satélites ao redor da Terra.

Os holofotes e faróis de carros funcionam de maneira inversa as antenas e microfones parabólicos, eles emitem luzes e usam as propriedades refletoras para direcioná-las e iluminar de maneira mais forte um ponto através do feixe de luz. Colocando-se uma

[4]Isaac Newton (1643-1727), físico e matemático inglês.

lâmpada na posição do foco, ela emitirá luz em todas as direções, essa luz ao tocar na superfície curva da Parábola será direcionada para um ponto que se deseja iluminar (STROGATZ, 2013).

Um outro instrumento importante que usa a propriedade refletora das cônicas é o telescópio reflexivo que usa dois espelhos, um parabólico e um hiperbólico, ambos com os focos coincidindo no mesmo pontos.

Uma outra propriedade importante das cônicas é a refração que permite a construção de óculos de grau, microscópios e lupas.

Os aviões britânicos Spitfire usados na Segunda Guerra Mundial, tinham as asas com formato de arcos elíptico para duas finalidades, obter um maior espaço para guardar munição e ter uma menor resistência do ar, assim, tendo uma melhor estabilidade e precisão (RODRIGUES; PEREIRA; PITAÇA,1999).

Na Catedral de Santa Sofia em Istambul, são usados as propriedades refletoras das Elipses para que o altar pudesse ser iluminado pela luz do sol a qualquer hora do dia (ROONEY, 2012).

A Catedral de São Paulo, em Londres, foi construída de maneira que um sussurro emitido em um lado da galeria pode ser ouvido em um lado oposto como se fossem dois focos de uma elipse (ROONEY, 2012) .

Strogatz (2013, p.77) chama essas locais de galerias sussurrantes e cita como exemplo a Grand Central Station de Nova York:

> *É um lugar divertido para um encontro: vocês dois podem trocar palavras de amor a 15 metros de distância e separados por um movimentado corredor. Vocês ouvirão claramente o que o outro disser, mas os transeuntes, não.*

Esse fato ocorre se as duas pessoas se posicionarem de frente para as paredes da galeria, uma oposta a outra, em dois pontos que seriam os focos de uma Elipse, assim que falarem, o som será refletido na parede e direcionado para a outra pessoa.

### 1.4.3 Na Medicina

Um uso das cônicas na medicina é para a eliminação de cálculos do organismo através de um procedimento chamado Litrotripsia extracorpória.

> *Um tratamento para a destruição de cálculos das vias urinarias e biliares através de choques de ondas ultra-sônicas, em que um refletor de seções transversais elípticas é posicionado de modo que o cálculo (pedra) esteja posicionado exatamente sobre um dos focos do refletor. Ondas sonoras (ultra-sônicas) são geradas no outro foco e refletem exatamente sobre a pedra, fragmentando-a progressivamente, sem causar nenhum dano aos tecidos. Os fragmentos são então eliminados através da urina.* (SANTOS;FERREIRA, 2010 p. 81)

O professor poderá aproveitar o procedimento desse tratamento médico para iniciar os conceitos relacionados as propriedades refletoras das cônicas, em especial a da Elipse, assim, o aluno perceberá o motivo pelo qual onda sonora que é gerada em um foco acerta exatamente sobre a pedra no paciente que está localizado no outro foco.

### 1.4.4 Na Navegação

Na navegação usa-se um sistema de localização chamado LORAN.

> *A navegação hiperbólica utiliza o conceito de Hipérbole para obter as linhas de posição (LDP) que definem a localização, por exemplo de um navio ou avião. Um desses sistemas eletrônicos, denominados LORAN (abreviatura de Long-Range Navigation ou Navegação de Longa Distância), baseia-se na diferença do tempo de recebimento de dois rádios emitidos por emissoras distintas* [localizadas nos focos da Hipérbole]. (SOUZA, 2010 p. 215)

E ainda, de acordo com Rodrigues; Pereira e Pitaça (1999) em relação a navegação utilizando o sistema LORAN:

> *O sistema de localização de barcos denominado por LORAN (LOng RAnge Navegation) faz uso de hipérboles confocais, onde os radares estão nos focos.* [...] *Esta técnica foi usada na II grande Guerra, para detectar barcos japoneses.*

Caso o professor deseje explorar essas situações onde há o uso das cônicas, os livros didáticos trazem situações-problemas para serem trabalhadas com os alunos.

# Capítulo 2

# A construção das cônicas através de dobraduras e Desenho Geométrico.

O processo de construção das cônicas pode ser usado pelo professor como uma metodologia complementar as aulas teóricas. No caso das atividades de construção usando dobraduras e técnicas de Desenho Geométrico apresentadas aqui, o professor, primeiramente, trabalhou a parte teórica das cônicas, aplicando exemplos e exercícios e depois fez o trabalho de construção buscando resgatar o que foi dado nas aulas anteriores.

Para que os conhecimentos matemáticos sejam bem assimilados pelos alunos depois de uma atividade de construção, é importante que o professor faça as devidas intervenções pedagógicas, que são perguntas relacionadas ao conteúdo matemático explorado em sala de aula, no caso as cônicas, isso evita que o trabalho desenvolvido, ao término, fique apenas restrito ao lúdico (GRANDO, 2004).

Sobre a aquisição de conhecimento após as atividades lúdicas:

> [...] *pode haver situações em que a exploração e a sistematização dos conteúdos envolvidos não surjam naturalmente. Professor, nessa situação, você precisará se preparar para discutir e sistematizar tais conhecimentos juntos aos alunos.*(ALMEIDA 2010, p.35).

O trabalho de construção das cônicas através de dobraduras e Desenho Geométrico que serão apresentados nos tópicos a seguir, foi desenvolvido com os alunos do 3º ano do ensino médio, turno vespertino, no Centro de Ensino São Cristóvão - Anexos Jardim São Cristóvão, escola pública estadual.

## 2.1 Construção das cônicas através de dobraduras

### 2.1.1 Construção de uma Elipse

I. **Materiais usados:**

Papel vegetal, compasso, régua graduada e caneta

II. **Duração da atividade:**

Duas aulas de 50 minutos

III. **Procedimentos (Método de Van Schooten[1] ):**

a. Desenhar na folha um ponto interior à uma circunferência;

b. Dobramos a folha em torno de uma corda da circunferência de modo que o arco dobrado passe pelo ponto;

c. Desdobramos a folha e fazemos outra dobra em torno de outra corda, de modo que o arco dobrado passe pelo ponto. Repetimos esse procedimento várias vezes.

IV. **Resultado:**

As marcas (cordas) formadas nas dobraduras são tangentes a uma Elipse, quanto mais dobras forem feitas, mais visível ficará a Elipse.

V. **Intervenções Pedagógicas**

Após os alunos terem construídos as Elipses, o professor pode fazer alguns questionamentos:

a. O ponto determinado por vocês (alunos) representa que elemento da Elipse?

b. O outro foco da Elipse é representado por que ponto?

[1]Franciscus van Schooten (1615-1660) foi um matemático holandês.

c. Porque algumas Elipses ficaram mais "achatadas"e outras mais arredondadas?

d. O que aconteceria com a elipse se o ponto escolhido fosse o centro da circunferência?

e. Quais os comprimentos do eixo maior e menor da Elipse?

f. Calcule a distância focal e compare o resultado obtido algebricamente com o geométrico.

g. Admitindo-se que o centro da Elipse está na origem do plano cartesiano, quais suas possiveis equações?

Ao ser feito esses questionamentos para os alunos observou-se que a maioria conseguia responder corretamente as perguntas. Ao comparar as figuras construídas, concluíam que quanto mais próximo o ponto determinados por eles da circunferência, mais achatada era a Elipse e quanto mais próximo do centro era o ponto mais arredondada era ela.

"As medidas que os focos se aproximam, isto é, a excentricidade diminui, a forma da Elipse vai ficando parecida com a da circunferência."(NETO et al, 2010, p. 346).

Isso ocorre no processo por dobradura porque o centro da circunferência, que é um foco, é fixo. Assim, o ponto determinado pode ser mais próximo ou afastado do outro foco, que está no centro, diminuindo ou aumentando, respectivamente, o valor da distância focal.

Ainda com relação a excentricidade, o professor poderá dar a seguinte explicação:

> *A excentricidade e é determinada por $\frac{c}{a}$, onde a corresponde ao semieixo maior e c a metade da distância focal. Se o valor de e se aproxima do valor de 1 a Elipse vai "alongando", mas se o valor de e se aproxima de 0 a Elipse vai ficando arredondada.*(SANTOS;FERREIRA, 2010, p. 83).

A Figura 2.2 é um exemplo de Elipse construída por aluno da escola.

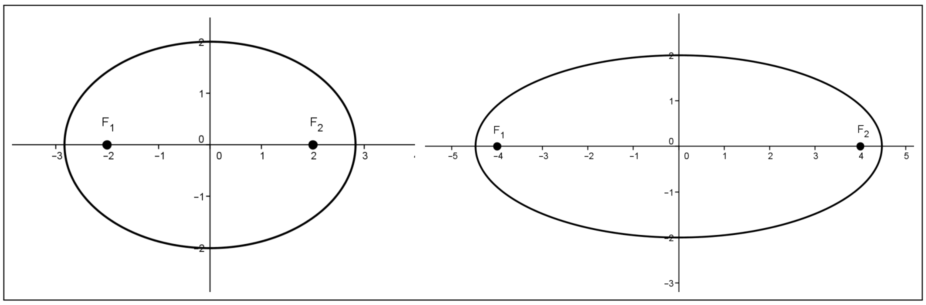



Figura 2.1: Elipses com focos de distâncias diferentes

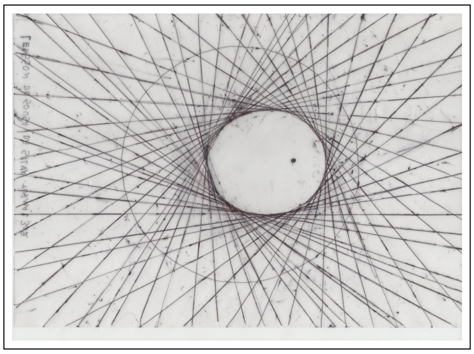


Figura 2.2: Elipse construída por dobradura

Para mostrar aos alunos que as retas determinadas nas dobras são tangentes a Elipse, ou seja, tocam apenas num ponto dela, o professor usando a sua definição como lugar geométrico, poderá pedir aos alunos que através de uma régua graduada verifique que a soma dos comprimentos desse ponto da reta tangente até os focos é constante ou que essa soma é igual ao comprimento do eixo maior, o que definiria a figura como uma Elipse.

Alguns alunos optaram em colocar o ponto no centro da Elipse ou muito próximo dele, gerando uma figura bem redonda, quase uma circunferência, como na Figura 2.3.

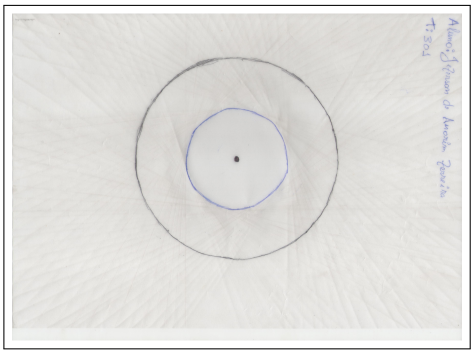


Figura 2.3: Elipse com focos determinados próximos ao centro

Houve situações onde alguns alunos não conseguiram construir a Elipse de forma correta, conforme mostra a Figura 2.4.

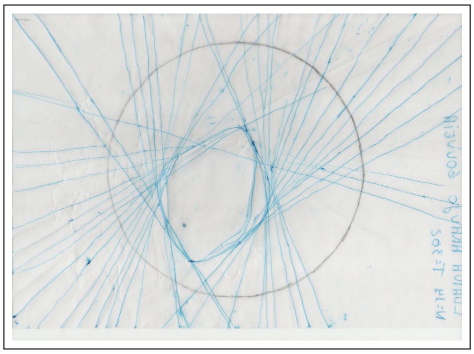


Figura 2.4: Elipse construída errada por dobradura

Neste caso, o erro foi obtido porque o aluno não conseguiu dobrar alguns arcos da circunferência sobre o ponto determinado por ele, assim, algumas retas tangentes que são formadas pelas dobras não apareceram e a figura não foi totalmente completada.

### 2.1.2 Construção de uma Hipérbole

I. **Materiais usados:**

   Papel vegetal, compasso, régua graduada e caneta

II. **Duração da atividade:**

   Duas aulas de 50 minutos

III. **Procedimentos (Método de Van Schooten):**

a. Desenhar na folha um ponto exterior a uma circunferência;

b. Dobrar a folha em torno de uma corda da circunferência de modo que o arco dobrado passe pelo ponto;

c. Desdobrar a folha e fazer outra dobra em torno da corda, de modo que o arco dobrado passe pelo ponto. Repetir esse procedimento várias vezes. As retas que contêm essas cordas são tangentes a uma Hipérbole.

IV. **Resultado:**

As retas que contem as cordas formadas pelas dobraduras na circunferência, formam uma Hipérbole.

V. **Intervenções Pedagógicas**

Da mesma maneira como foi feito após o término da construção da Elipse, o professor deverá fazer alguns questionamentos quando a construção da Hipérbole estiver encerrada:

a. O ponto determinado por vocês (alunos) representa que elemento da Hipérbole?

b. O outro foco da Hipérbole é representado por que ponto?

c. Porque algumas Hipérboles ficaram mais "abertas"e outras mais "fechadas"?

d. Como faria para posicionar corretamente a régua para medir o comprimento do eixo real?

e. Através das médidas do eixo real e da distância focal, observadas na Hipérbole construída, calcule o comprimento do eixo imaginário.

f. Determine as equações da Hipérbole construída, admitindo-se que o seu centro está na origem do plano cartesiano.

Devido as intervenções pedagógicas que foram realizadas nas Elipses e as aulas teóricas revisadas antes da construção, os alunos responderam corretamente as perguntas feitas sobre as Hipérboles. Observaram que os colegas que determinaram o ponto externo mais longe da circunferência e consequentemente do centro dela tiveram as Hipérboles com uma maior "abertura"enquanto que, aqueles que colocaram o ponto mais próximo da circunferência obteve uma Hipérbole mais "fechada".

Com relação a excentricidade da Hipérbole Neto et al (2010, p.366) explica que "a excentricidade da Hipérbole está relacionada com sua abertura [...] com os focos mais afastados um do outro, a excentricidade é maior e a Hipérbole apresenta os seus ramos mais abertos."

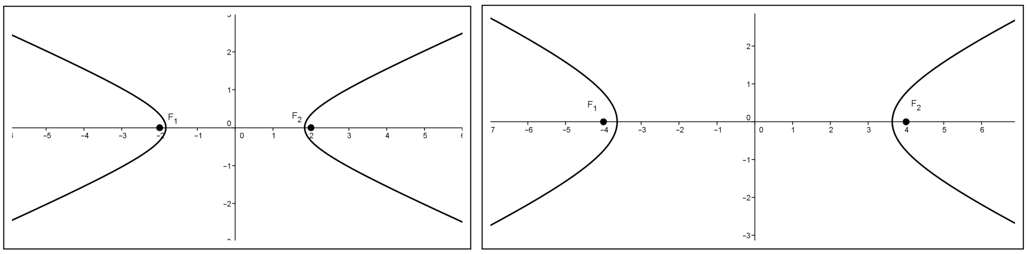



Figura 2.5: Hipérboles com focos de distâncias diferentes

Usando o mesmo artificio feito na Elipse, o professor pode pedir que seus alunos meçam as diferenças dos comprimentos dos focos da Hipérbole com os pontos determinados pelas retas tangentes formadas nas dobraduras, verificando que o resultado é uma constante e que esse resultado corresponde ao comprimento do eixo real caracterizando assim a Hipérbole.

A Figura 2.6 é um exemplo de Hipérbole criada por dobraduras pelo aluno da escola.

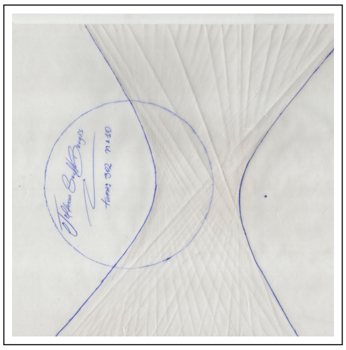


Figura 2.6: Hipérbole construída por dobradura

As Hipérboles construídas erradas foram em menor quantidade comparadas com as Elipses construídas erradas, isso se deve, possivelmente, pelo fato de que o procedimento de construção das duas figuras é muito semelhante e como eles já haviam treinado o processo na construção da Elipse, tiveram maior facilidade na construção da Hipérbole.

A "Hipérbole"da Figura 2.7 foi construída errada devido o aluno não ter conseguido dobrar toda a circunferência pelo ponto externo a ela.

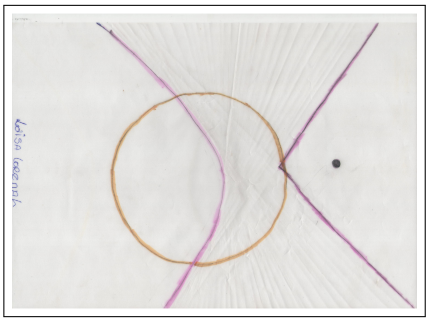


Figura 2.7: Hipérbole construída errada por dobradura

### 2.1.3 Construção de uma Parábola

I. **Materiais usados:**

Papel vegetal, régua e caneta

II. **Duração da atividade:**

Duas aulas de 50 minutos

III. **Procedimentos (Método de Van Schooten):**

a. Desenhar na folha uma reta e um ponto fora dela;

b. Dobrar a folha de modo que o ponto toque na reta construída anteriormente;

c. Repetir esse processo várias vezes em outros pontos da reta.

IV. **Resultado:**

As retas formadas pelo dobramento da folha são tangentes a uma Parábola. Quanto mais dobramentos forem feitos, mais visível ficará a figura.

V. **Intervenções Pedagógicas**

a. Quais elementos da Parábola representam a reta e o ponto exterior determinados antecipadamente?

b. Por que quando o foco é aproximado da reta diretriz a Parábola passa a ter uma abertura menor?

c. Como faço para demonstrar que a figura formada pelas retas tangentes é uma Parábola?

d. Que ponto representa o vértice da Parábola?

e. Qual o valor do parâmetro $p$ dessa Parábola?

f. Considerando-se o vértice da Parábola na origem do plano cartesiano, determine suas equações.

Com relação as perguntas, os alunos não tiveram muitas dificuldades, pois, os elementos de uma Parábola e sua definição como lugar geométrico foram revisadas antes da construção e as questões respondidas anteriormente para as outras cônicas facilitaram as respostas. Já a pergunta do item b teve quase que unanime a seguinte resposta - quanto mais próximo o foco da reta diretriz menor a excentricidade e quanto maior a distância maior a excentricidade - o erro foi causado, provavelmente, pela explicação dada na Hipérbole, uma vez que o assunto de excentricidade da Parábola não foi trabalhado em sala de aula.

Um dos poucos livros didáticos de Matemática analisados onde foi observado as características da excentricidade da Parábola foi o de Paiva (2009, p.104) onde ele explica:

> *A razão entre as distâncias de um ponto $P$ da Parábola ao foco e à reta diretriz é chamada de excentricidade da Parábola. Como essas distâncias são iguais, a excentricidade da Parábola é igual a 1.*

A Figura 2.8 representa uma Parábola feita por aluno usando o processo de dobradura.

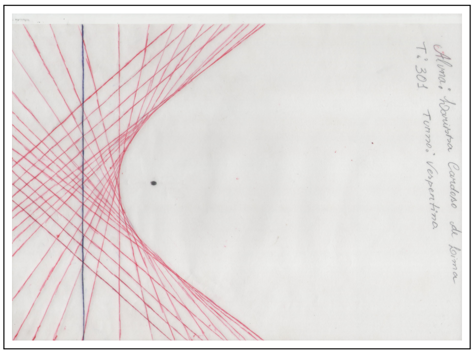


Figura 2.8: Parábola construída por dobradura

Poucas Parábolas foram construídas erradas pelos alunos, eles disseram que era mais fácil fazer as dobraduras passando o ponto por uma reta do que pela circunferência. Mesmo assim, houve algumas construções erradas, como exemplo, temos a Figura 2.9.

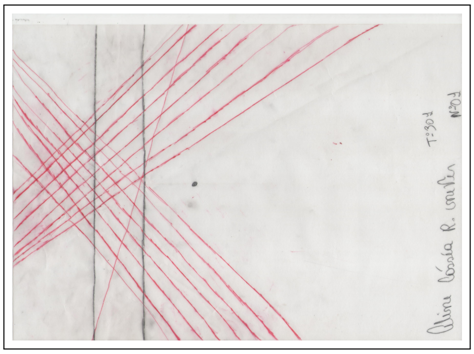


Figura 2.9: Parábola construída errada por dobradura

## 2.2 Construção das cônicas usando Desenho Geométrico

Hoje muitas profissões usam as técnicas de Desenho Geométrico para desenvolver suas atividades, pode-se citar como exemplos principais a Arquitetura e a Engenharia.

Um dos objetivos de se trabalhar com o Desenho Geométrico em sala de aula com os alunos do ensino básico é:

> [...]*explorar o assunto de modo a impelir o estudante a aperfeiçoar seu raciocínio lógico, a desenvolver sua criatividade e a aguçar seu senso de organização. Se isso for conseguido, esta será, sem dúvida, a maior colaboração que estaremos dando aos estudantes, pois deixaremos marcas indeléveis nas suas formações, mesmo que futuramente eles não tenham que servir diretamente do desenho nas suas vidas profissionais.*(PUTNOKI 1989, p.10).

Para iniciar a construção das cônicas usando técnicas de Desenho Geométrico foi, antes, realizado em sala de aula um trabalho para construção de alguns elementos geométricos básicos como, por exemplo, ensinar aos alunos a usar um compasso para construção de circunferências, retas perpendiculares e a determinar um ponto médio num segmento, e com os esquadros a traçar retas paralelas.

As etapas para a construção das cônicas em sala de aula foram adaptadas do site <www.mat.uel.br/geometrica> acessado em 9 de Dezembro de 2013.

### 2.2.1 Construção de uma Parábola dados uma reta e o foco

I. **Materiais usados:**

Papel A4, esquadros, compasso e lápis.

II. **Duração da atividade:**

Duas aulas de 50 minutos

III. **Etapas de construção:**

a. Traçar uma reta $d$ qualquer;

b. Traçar uma reta $e$ perpendicular a reta $d$;

c. Determinar na reta $e$ um ponto qualquer (foco $F$);

d. Determinar o vértice $V$ (ponto médio entre $F$ e a interseção de $d$ com $e$);

e. Usando o compasso com uma abertura qualquer determinar os pontos 1, 2, 3, 4,... na reta $e$ a partir do foco $F$;

f. Usando os esquadros, traçar retas paralelas a $d$ pelos pontos 1, 2, 3, 4,...

g. Com a ponta seca no foco $F$ e aberturas F$d$, 1$d$, 2$d$, 3$d$,... fazer com o compasso as marcações nas retas paralelas;

h. Ligar os pontos determinados pelas marcações nas retas paralelas, construindo a Parábola.

A Figura 2.10 representa a etapa final da construção da Parábola em sala de aula feita pelo professor no quadro negro.

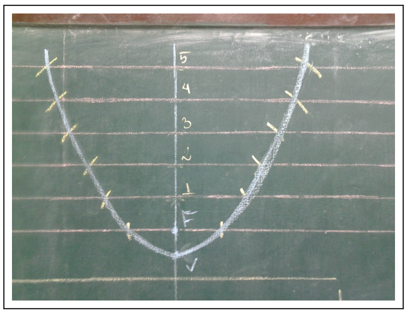


Figura 2.10: Parábola construída no quadro negro

A Parábola foi a primeira figura a ser trabalhada, porque das três cônicas é a que possui procedimento mais simples.

A Figura 2.11 representa uma Parábola construída por aluno em sala de aula.

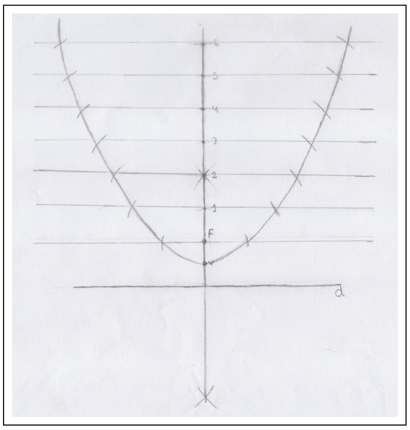


Figura 2.11: Parábola construída usando Desenho Geométrico

Como foi a primeira figura feita pelos alunos com esquadros e compasso, mesmo sendo a mais simples para construir, eles tiveram muitas dificuldades apesar da atividade de construções básicas realizados com eles antes.

A Figura 2.12 representa uma Parábola construída de forma errada pelos alunos.

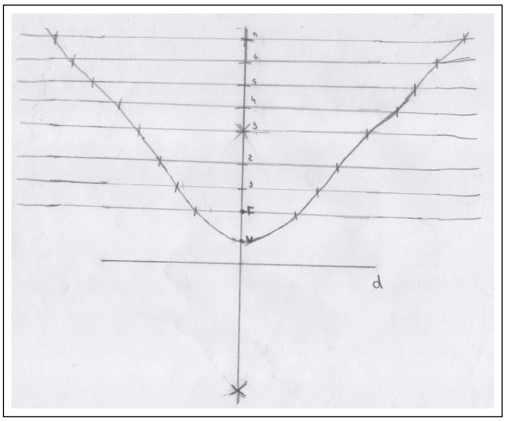



Figura 2.12: Parábola construída errada por Desenho Geométrico

### 2.2.2 Construção de uma Elipse dados os eixos maior e menor

I. **Materiais usados:**

Papel A4, régua graduada, compasso e lápis.

II. **Duração da atividade:**

Duas aulas de 50 minutos

III. **Etapas de construção:**

a. Traçar um segmento $\overline{A_1A_2}$ (eixo maior);

b. Traçar um segmento $\overline{B_1B_2}$ (eixo menor) perpendicular a $\overline{A_1A_2}$;

c. Determinar em $\overline{A_1A_2}$ os focos $F_1$ e $F_2$: compasso com ponta seca em $B$ e abertura $\overline{AO}$ ($O$ é o ponto de interseção entre os eixos maior e menor);

d. Fazer as marcações 1, 2, 3, 4... no eixo maior: compasso com ponta seca em $F$ e abertura qualquer;

e. Determinação dos arcos no eixo maior: compasso com ponta seca em $F_1$ e aberturas $1A_1, 2A_1, 3A_1$,...

f. Marcações nos arcos: compasso com ponta seca em $F_1$ e aberturas $1'A_1, 2'A_1, 3'A_1$,...

g. Ligar os pontos determinados pelas marcações nos arcos, construindo a Elipse.

A Figura 2.13 representa a etapa final da construção da Elipse em sala de aula feita pelo professor no quadro negro.

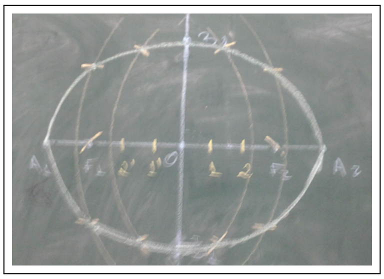


Figura 2.13: Elipse construída no quadro negro

Na Figura 2.14 tem-se uma Elipse construída por aluno.

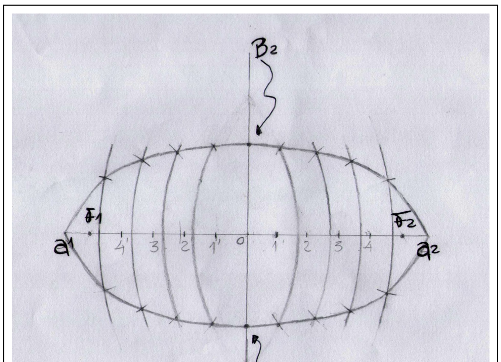



Figura 2.14: Elipse construída usando Desenho Geométrico

A Elipse foi a cônica que teve a maior quantidade de figuras construídas erradas pelos alunos, isso se deve pelo fato de que o seu processo de construção necessita de maior uso do compasso comparando, por exemplo, com a Parábola. A Figura 2.15 representa uma dessas Elipses construídas erradas:

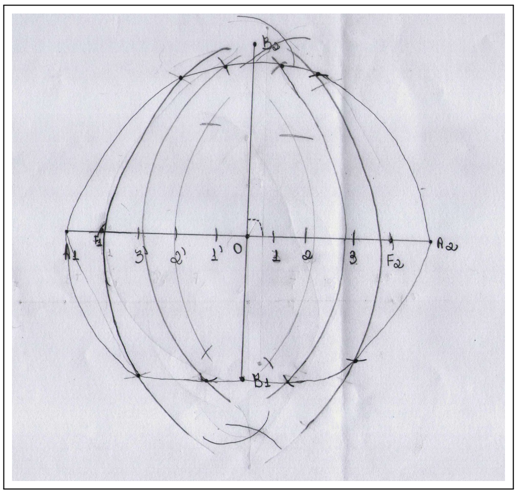



Figura 2.15: Elipse construída errada por Desenho Geométrico

### 2.2.3 Construção de uma Hipérbole dados os eixos real e imaginário

I. **Materiais necessários:**

Papel A4, régua graduada, compasso e lápis.

II. **Duração da atividade:**

Duas aulas de 50 minutos

III. **Etapas de construção:**

a. Determinar numa reta $r$ qualquer $\overline{A_1A_2}$ (eixo real);

b. Traçar um segmento $\overline{B_1B_2}$ (eixo imaginário) perpendicular a $\overline{A_1A_2}$;

c. Determinar na reta $r$ os focos $F_1$ e $F_2$: compasso com ponta seca em $O$ (ponto de interseção entre $r$ e$\overline{B_1B_2}$) e com abertura $\overline{AB}$;

d. Fazer as marcações 1, 2, 3, 4... na reta $r$: compasso com ponta seca em $F$ e abertura qualquer;

e. Determinar os arcos na reta $r$: compasso com ponta seca em $F_2$ e aberturas $F_2A_2, 1A_2, 2A_2$,...

f. Determinar as marcações nos arcos: compasso com ponta seca em $F_1$ e aberturas $F_2A_1, 1A_1, 2A_1$,...

g. Ligar os pontos determinados pelas marcações nos arcos, construindo a Hipérbole.

A Figura 2.16 representa a etapa final da construção da Elipse em sala de aula feita pelo professor no quadro negro.

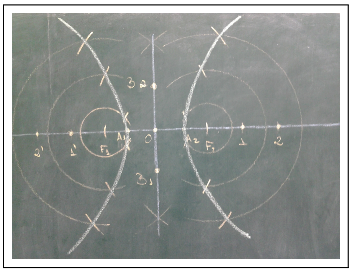


Figura 2.16: Hipérbole construída no quadro negro

Como o procedimento de construção da Hipérbole é semelhante ao da Elipse, os alunos tiveram maior facilidade, uma vez que o processo pôde ser treinado anteriormente.

A Figura 2.17 representa uma Hipérbole construída por aluno.

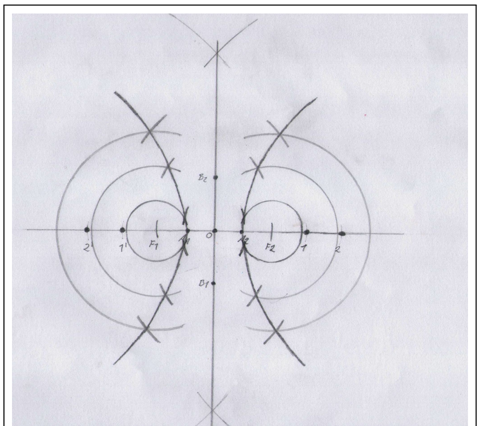


Figura 2.17: Hipérbole construída usando Desenho Geométrico

No caso das Hipérboles construídas erradas, elas foram em quantidade menor do que a Elipse como exemplo, tem-se a Figura 2.18.

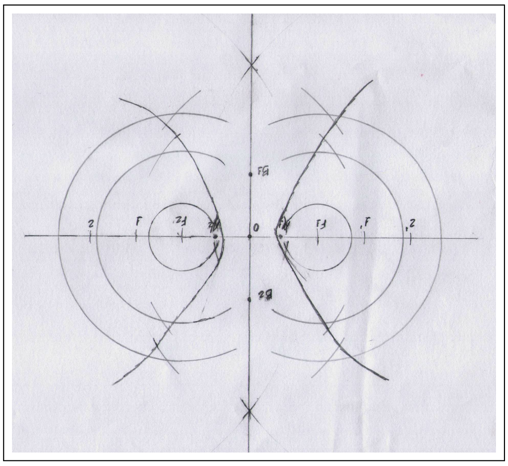


Figura 2.18: Hipérbole construída errada por Desenho Geométrico

Para que haja uma maior exploração do conteúdo, Putnoki (1989) mostra alguns exemplos de atividades complementares que o professor pode aplicar para os alunos sobre a construção das cônicas usando técnicas de Desenho Geométrico:

**Exemplo 2.1.** *Construa a diretriz de uma Parábola da qual são dados o foco, um ponto $M$ e a direção da reta diretriz.*

**Exemplo 2.2.** *Obtenha o foco de uma Parábola da qual são dados a diretriz e dois pontos $M$ e $M'$ simétricos em relação ao eixo.*

**Exemplo 2.3.** *Determine os vértices de uma Elipse, dados os focos e um ponto $M$ a ela pertencente.*

**Exemplo 2.4.** *Construa os diâmetros principal e imaginários de uma Hipérbole, dados os focos e um ponto $M$ a ela pertencente.*

Para que os alunos possam responder as estas questões o professor terá que disponibilizar um tempo maior para revisar as construções básicas com os instrumentos de Desenho Geométrico.

# Capítulo 3

# Construção das cônicas usando o GeoGebra.

A opção pelo uso do GeoGebra é feita por ele ser um *software* gratuíto, com idioma em português e que aceita tanto a plataforma Windows como a Linux que é a utilizada nas escolas públicas de São Luis. Para o trabalho com a Geometria Analítica, ele oferece diversas possibilidades como, por exemplo, a determinação de pontos, retas e circunferências, as posições relativas entre esses elementos e uma análise comparativa entre equações e gráficos. No caso específico do estudo das cônicas tem ferramentas que permitem suas construções baseadas nas suas equações ou nos seus elementos.

A geometria trabalhada com recursos computacionais onde os alunos interagem diretamente nas construções é chamada de "Geometria Dinâmica"citada por Fainguelernt e Nunes (2012. p.121) no processo de ensino e aprendizagem da seguinte forma:

> *Pesquisas em educação matemática têm mostrado que o uso da geometria dinâmica como recurso didático não só favorece a exploração e aquisição de conceitos geométricos, como também apresenta vantagens em relação às construções com lápis, régua e compasso. Permite também construir diferentes figuras e visualizá-las em diferentes posições, oportunizando aos alunos a possibilidade de interagir com as construções realizadas, modificando-as, animando-as, olhando-as sob diferentes perspectivas e analisando elementos, propriedades isoladas ou conjuntamentes.*

Na construção das cônicas foi usado o softaware GeoGebra 3D 5.0 versão beta.

> *GeoGebra é um software de matemática dinâmica que junta geometria, álgebra e cálculo. É desenvolvido para aprendizagem e ensino da matemática nas escolas por Markus Hohenwarter e uma equipe internacional de programadores.*(wiki.geogebra.org/pt/Manual <acesso em 31-01-2014>).

O GeoGebra é dividido em 5 setores: Barra de Menu, Barra de Ferramentas, Janela Algébrica, Janela Gráfica e Campo de Entrada conforme Figura 3.1.

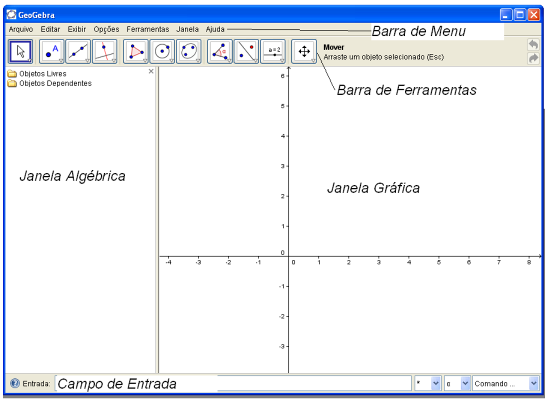



Figura 3.1: Tela do Geogebra

- Barra de Menu

A Barra de Menu do GeoGebra possui as ferramentas tradicionais de um software:

**Arquivo**: salva e abre novos documentos.

**Editar**: desfazer uma ação e copiar ou inserir uma imagem.

**Exibir**: mostra as outra janelas do GeoGebra.

**Opções**: seleciona idioma, tamanho da fonte e casas decimais.

**Ferramentas**: gerencia as outras ferramentas.

**Janela**: abre uma nova janela.

**Ajuda**: tutoriais e sites sobre o GeoGebra.

- Barra de Ferramentas

Na Barra de Ferramentas estão todos os itens geométricos que serão construídos diretamente na Janela Gráfica, como, por exemplo, a construção de pontos, retas, segmentos de reta, retas tangentes, polígonos e circunferências e suas partes, a determinação de áreas, ângulos e ponto médio, distâncias e posições relativas, no caso das cônicas, pode-se construir Elipses, Hipérboles e Parábolas usando seus elementos, como focos, pontos e retas diretrizes.

- Campo de Entrada

No Campo de Entrada são digitadas as características algébricas ou aritméticas dos elementos geométricos que serão visualizados na Janela Gráfica.

- Janela Algébrica

As expressões algébricas, equações ou coordenadas digitadas no Campo de Entrada aparecem na Janela Algébrica, podendo-se, também, nesse setor, alterá-las ou omitir uma figura para destacar outra.

- Janela Gráfica

Através das ferramentas disponíveis na Barra de Ferramentas, pode-se realizar construções geométricas na Janela Gráfica com o mouse, onde cada objeto construído nessa parte tem sua representação na Janela Algébrica. Essas construções geométricas podem ser modificadas diretamente na Janela Gráfica de acordo com o propósito do trabalho do professor ou do aluno. Na Janela Gráfica também é construída os elementos geométricos que tem suas expressões digitadas no Campo de Entrada.

Para uma exploração mais adequada do GeoGebra Araújo e Nóbrega (2010) citam 4 etapas que devem ser desenvolvidas pelo professor no processo de ensino e aprendizagem, são elas:

**I. Referencial Teórico** - procuramos situar o aluno com respeito ao conceito que se quer estudar;

**II. Processo de Construção** - é onde estão as instruções para a construção proposta;

**III. Momento de Reflexão** - nesta seção procuramos fazer algumas perguntas que direcionem o aluno em seu raciocínio;

**IV. Por Quê** - com essa seção, que não aparece em todas as construções, procuramos instigar o aluno a pensar no porquê do resultado encontrado.

A construção das cônicas usando o GeoGebra é mostrada de três formas diferentes neste trabalho, usando a Barra de Ferramentas, o Campo de Entrada e pela Janela Gráfica. O professor poderá escolher aquele que estiver de acordo com o seu planejanamento, buscando atender suas necessidades e a dos seus alunos.

## 3.1 Construção das cônicas usando a Barra de Ferramentas

A construção das cônicas através da Barra de Ferramenta é um processo simples que possibilita ao professor destacar elementos importantes dessas figuras: focos, reta diretriz e seus pontos.

### 3.1.1 Construção da Elipse e da Hipérbole

As construções da Elipse e da Hipérbole, pela Barra de Ferramenta do GeoGebra, são muito semelhantes, pois dependem dos seus dois focos e de um ponto pertencente a elas:

a. na Barra de Ferramentas, dentro da opção que possui as cônicas, escolher **Elipse** ou **Hipérbole**, de acordo com aquilo que se deseja construir;

b. com a seta do mouse na Janela Gráfica, deve-se selecionar dois pontos que serão os focos e depois um outro ponto que pertencerá a cônica escolhida;

c. a cônica será automaticamente formada após esses elementos serem determinados.

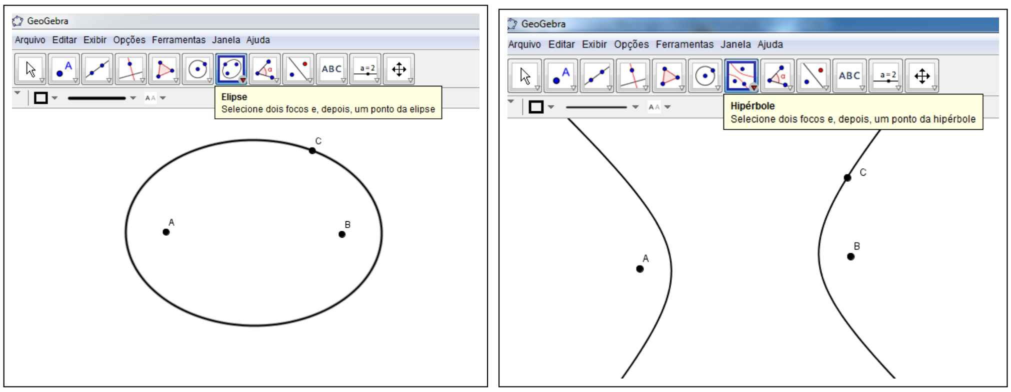



Figura 3.2: Elipse e Hipérbole construídas através da Barra de Ferramentas

### 3.1.2 Construção da Parábola

Para a construção da Parábola são necessários trabalhar dois dos seus elementos - a reta diretriz e o foco:

a. antes da construção da Parábola, deve-se primeiramente construir uma reta e um ponto fora dela, para isso, usa-se as opções construir reta e ponto dentro da Barra de Ferramentas;

b. depois de construída a reta e o ponto, deve-se ir na opção das cônicas e selecionar **Parábola**;

c. com a seta do mouse na Barra Gráfica, clicando no ponto e depois na reta determinados anteriormente, a Parábola aparecerá automaticamente.

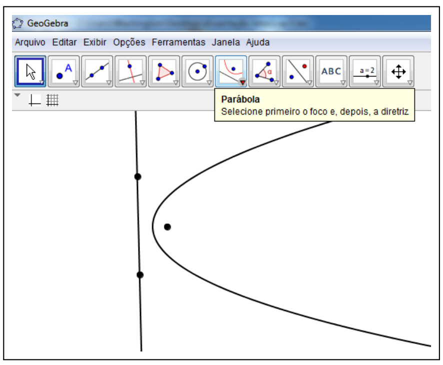



Figura 3.3: Parábola construída através da Barra de Ferramentas

## 3.2 Construção das cônicas usando o Campo de Entrada

Através desse processo, o professor pode aproveitar para fazer uma análise, com os seus alunos, entre as equações e os gráficos de cada cônica, permitindo que eles verifiquem as mudanças na forma ou posição das figuras de acordo com as mudanças feitas em suas equações.

- **Elipse**

Para construir uma Elipse de equação $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, deve-se digitar no Campo de Entrada **x^2/25+y^2/16=1**.

- **Hipérbole**

Para construir uma Hipérbole de equação $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$, deve-se digitar no Campo de Entrada **x^2/9-y^2/4=1**.

- **Parábola**

Para construir uma Parábola de equação $y^2 = 6x$, deve-se digitar no Campo de Entrada **y^2=6x**.

## 3.3 Construção das cônicas através da Janela Gráfica

A construção das cônicas através da Janela Gráfica tem o mesmo princípio da construção por dobradura, ou seja, busca através de pontos determinados por retas tangentes, modelar as figuras. A vantagem do uso do GeoGebra em relação a dobradura, é que ele permite uma visualização mais rápida nas mudanças feitas nessas figuras, possibilitando ao professor, em menos tempo, mostrar uma variadade maior de exemplos.

### 3.3.1 Construção da Elipse

a. Contruir uma circunferência e um ponto F (foco) qualquer no seu interior;

b. Determinar um ponto D na circunferência;

c. Traçar um segmento de F até D e determinar seu ponto médio M;

e. Traçar uma perpendicular ao segmento FD que passa por M;

f. Habilitar o rastro da reta perpendicular e animar o ponto D.

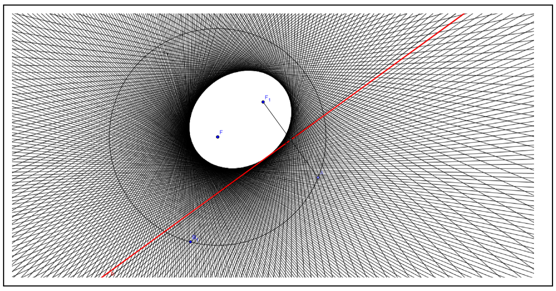


Figura 3.4: Elipse construída na Janela Gráfica do GeoGebra

A demonstração Matemática que comprova que a figura criada por esse processo é uma Elipse, onde $\overline{FB}+\overline{CB}$ é constante, pode ser feita através de semelhança de triângulos, onde, conforme Santos (2004, p. 12), tem-se:

> *Como a reta BM é a mediatriz do segmento de reta FD, os triângulos FMB e DMB são congruentes. De fato, estes triângulos são retângulos em M, têm o lado comum BM e, além disso, FM = MD. Para provar que a curva traçada é de fato é uma elipse, precisamos mostrar que a soma CB + BF é constante. Repare que BF = BD, pois os triângulos FMB e DMB são congruentes. Assim, CB + BF = CB + BD = CD o que prova que B está sobre uma elipse de focos em C e F, pois CD é o raio da circunferência que é constante, qualquer que seja o ponto D da circunferência.*

### 3.3.2 Construção da Hipérbole

a. Contruir uma circunferência e um ponto F (foco) qualquer externa a ela;

b. Determinar um ponto D na circunferência;

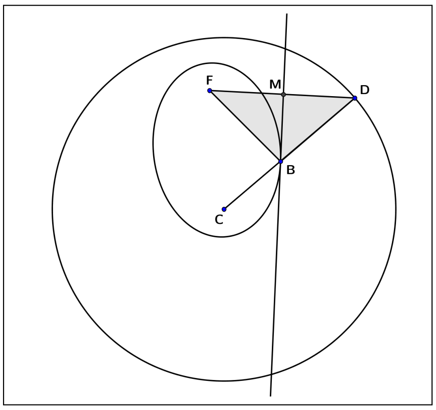



Figura 3.5: Triângulos congruentes na construção da Elipse

c. Traçar um segmento de F até D e determinar seu ponto médio M;

e. Traçar uma perpendicular ao segmento FD que passa por M;

f. Habilitar o rastro da reta perpendicular e animar o ponto D.

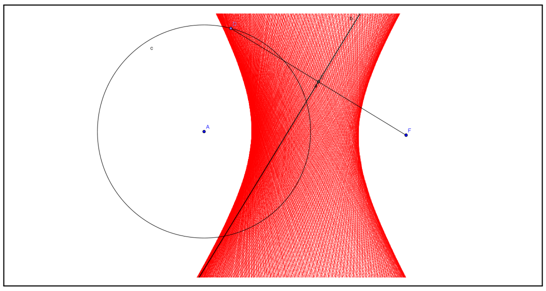


Figura 3.6: Hipérbole construída na Janela Gráfica do GeoGebra

Semelhante ao que foi feito na Elipse, a demonstração Matemática de que a figura construída é uma Hipérbole dependerá da análise feita em dois triângulos congruentes, explicado por Santos (2004, p.20) da seguinte maneira:

*Como a reta BM é a mediatriz do segmento de reta FD, os triângulos FBM e DMB são congruentes. Para provar que a curva traçada é de fato é uma hipérbole, precisamos mostrar que a diferença BF - BC é constante. Repare que BF = BD, pois os triângulos FBM e DMB são congruentes. Assim, BF - BC = BD - BC = CD o que prova que B está sobre uma hipérbole de focos em C e F, pois CD é o raio da circunferência que é constante, qualquer que seja o ponto D da circunferência.*

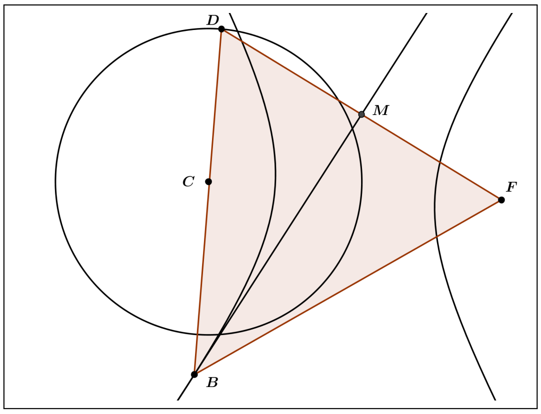



Figura 3.7: Triângulos congruentes na construção da Hipérbole

### 3.3.3 Construção da Parábola

a. Traçar uma reta (diretriz) e determinar um ponto D nela;

b. Determinar um ponto F (foco) qualquer fora dela;

c. Traçar um segmento de F até D e determinar seu ponto médio M;

d. Traçar uma perpendicular ao segmento FD que passa por M;

e. Habilitar o rastro da reta perpendicular e animar o ponto D.

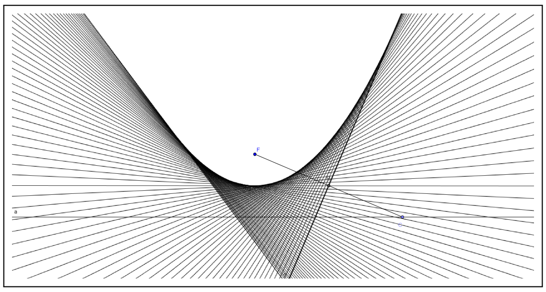


Figura 3.8: Parábola construída na Janela Gráfica do GeoGebra

Usando a definição da Parábola como lugar geométrico, a demonstração Matemática consistirá em provar que $\overline{DP} = \overline{PF}$, qualquer que seja a posição de $P$ na Parábola.

A partir das demonstrações que foram feitas para a Elipse e a Hipérbole, os triângulos $DMP$ e $FMP$ são congruentes pelo caso LAL (lado, ângulo, lado), pois os dois triângulos são retângulos em $M$, possui o lado $PM$ em comum e $\overline{DM} = \overline{MF}$. Assim, pode-se concluir que os lados $\overline{DP}$ e $\overline{PF}$ são congruentes e que o ponto $P$ pertence a uma Parábola.

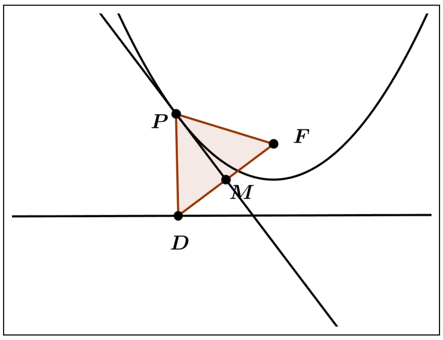



Figura 3.9: Triângulos congruentes na construção da Parábola

Depois de realizar as construções com o GeoGebra o professor poderá fazer as intervenções necessárias, chamadas de "Momento de Reflexão"por Araújo e Nóbrega (2010), para que o conteúdo trabalhado com alunos em sala de aula seja verificado geometricamente:

a. aumentando ou diminuindo os valores dos denominadores das equações da Elipse ou Hipérbole, o que acontecerá com suas excentricidades?

b. aumentando ou diminuindo o valor do parâmetro da Parábola, qual a alteração que ocorrerá nela? E se o segundo membro da equação for negativo, o que mudará na parábola?

c. aproximando ou afastando os pontos correspondentes aos focos da Elipse ou da Hipérbole na Janela Gráfica, o que ocorrerá com os seus formatos?

d. aproximando ou afastando o foco da reta diretriz na Janela Gráfica, o que acontecerá com a "abertura"da Parábola?

e. o que acontece com a Elipse ou a Hipérbole se os denominadores de suas equações tiverem valores iguais?

f. trocando as posições das variáveis $x$ e $y$ nas equações da Elipse ou Hipérbole o que ocorrerá com suas posições no plano cartesiano?

g. trocando as posições das variáveis $x$ e $y$ na equação da Parábola o que ocorrerá com sua posição no plano cartesiano?

### 3.3.4 O uso GeoGebra nos processos de dobraduras e Desenho Geométrico

Uma outra possibilidade do uso do GeoGebra em sala de aula é que o professor poderá usá-lo para mostrar por sobreposição de imagens que as figuras contruídas por dobraduras e Desenho Geometricos são cônicas.

**Na construção da Elipse**

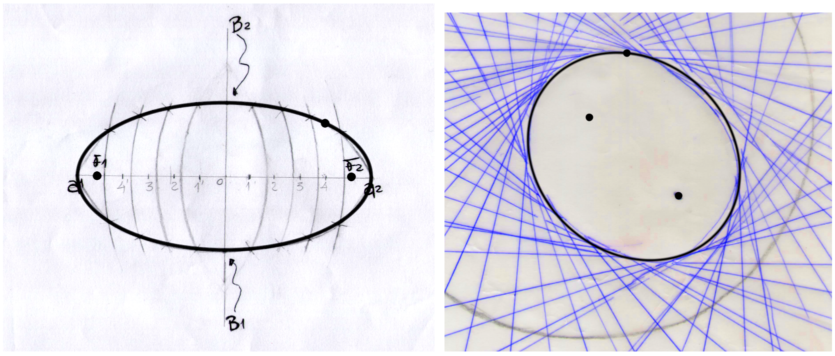
a. escanear a Elipse construída pelo aluno através de dobraduras ou Desenho Geométrico;

b. colar a Elipse escaneada na janela Gráfica usando as opções **Barra de Menu - Editar - inserir imagem**;

c. na Barra de Ferramentas, dentro da opção que possui as cônicas, escolher **Elipse**;

d. dentro da Elipse digitalizada, deve-se selecionar os dois pontos que correspondem aos focos e depois um outro ponto qualquer pertencente a ela;

e. Se o aluno construiu a Elipse de forma correta, a Elipse construída pelo Geogebra ficará exatamente sobreposta a Elipse digitalizada.



(a) (b)

Figura 3.10: Elipse Sobreposta

**Na construção da Hipérbole**

A verificação por sobreposição na Hipérbole segue as mesmas etapas do que foi na Elipse:

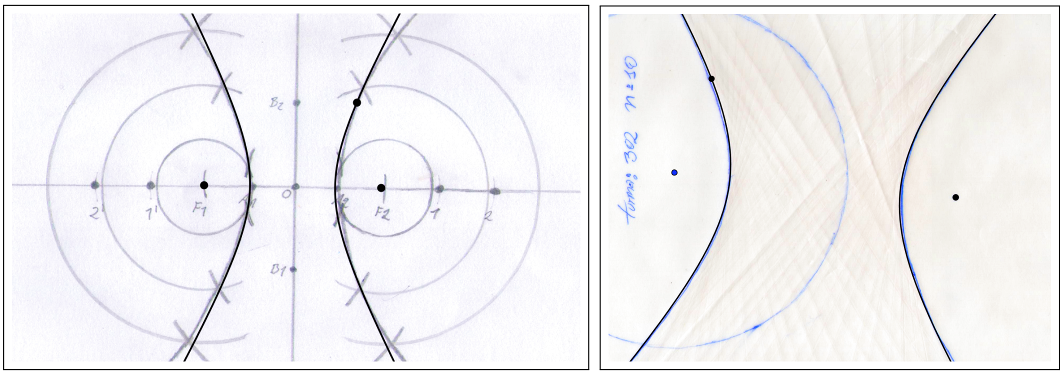
a. escanear a Hipérbole construída pelo aluno através de dobraduras ou Desenho Geométrico;

b. colar a Hipérbole escaneada na janela Gráfica usando as opções **Barra de Menu - Editar - inserir imagem**;

c. na Barra de Ferramentas, dentro da opção que possui as cônicas, escolher **Hipérbole**;

d. dentro da Hipérbole digitalizada, deve-se selecionar os dois pontos que correspondem aos focos e depois um outro ponto qualquer pertencente a ela;

e. Se o aluno construiu a Hipérbole de forma correta, a Hipérbole construída pelo Geogebra ficará exatamente sobreposta a Hipérbole digitalizada.



(a) (b)

Figura 3.11: Hipérbole Sobreposta

**Na construção da Parábola**

a. escanear a Parábola construída pelo aluno através de dobraduras ou Desenho Geométrico;

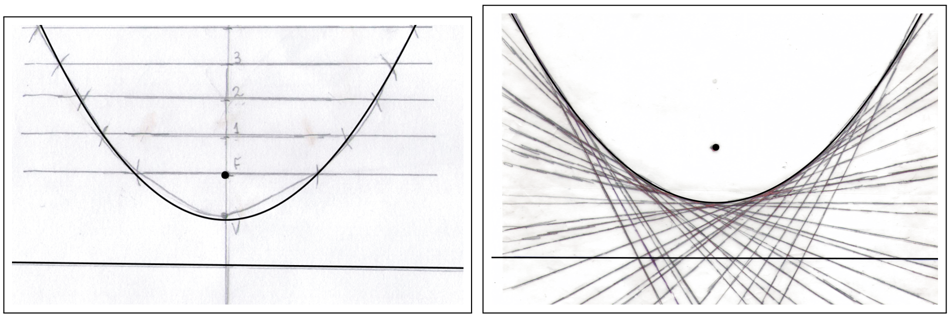
b. colar a Parábola escaneada na janela Gráfica usando as opções **Barra de Menu - Editar - inserir imagem**;

c. na imagem da Parábola deve-se traçar uma reta por cima da reta diretriz (**Barra de Ferramentas - Reta**) e colocar um ponto em cima do foco (**Barra de Ferramentas - Ponto**)

d. na Barra de Ferramentas, dentro da opção que possui as cônicas, escolher **Parábola**;

d. dentro da Parábola digitalizada, deve-se selecionar o ponto construído no foco e a reta traçada sobre a diretriz;

e. Se o aluno construiu a Parábola de forma correta, a Parábola construída pelo Geogebra ficará exatamente sobreposta a Parábola digitalizada.



(a) (b)

Figura 3.12: Parábola Sobreposta

Nas sobreposições, as cônicas feitas por dobraduras tiveram um melhor resultado do que as cônicas feita por Desenho Geométrico, isso já era esperado, uma vez que os alunos tiveram mais dificuldades em fazer as cônicas por esse processo.

# Considerações Finais

O uso de dobraduras e do Desenho Geométrico que foram abordados neste trabalho, trouxe para sala de aula um despertar que o professor não observava a um certo tempo em seus alunos. No desenvolvimento das atividades de construção, houve uma concentração maior desses alunos nas explicações, uma participação mais ativa de alunos que durante o ano letivo se mostraram desinteressados, e em todo o processo de construção um maior número de perguntas feitas oferecendo ao professor maior oportunidade de solucionar as dúvidas geradas durante essas construções.

Com relação ao uso do Desenho Geométrico, o trabalho foi mais difícil, pois os alunos relataram que de todos os materiais apresentados (régua, compasso, esquadros e transferidor), somente a régua teria sido usada por eles, e mesmo assim, de maneira errada por alguns que começavam a medir de 1cm ou da parte não graduada da régua, por isso, se fez importante uma aula mostrando esses materiais e como usá-los antes das construções das cônicas. Apesar das dificuldades, alguns alunos que nunca traçaram uma circunferência com o compasso, se mostraram com bastante habilidade nas construções, porém, a maioria precisou da participação direta do professor para concluir o trabalho.

Infelizmente, para esse trabalho, não foi possível realizar as atividades com o Geogebra, pois como foi já foi citado, para um uso adequado dos computadores nas escolas é necessário que tudo esteja funcionando corretamente e no momento a escola só dispunha de um computador, mas em experiências anteriores, trabalhando outras partes da Geometria, o entusiasmo dos alunos se mostrou bem evidente.

Todas as metodologias usadas no processo de ensino e aprendizagem da Matemática tem suas vantagens e desvantagens, até mesmo o método tradicionalista de ensino, o importante é o professor ter recursos diferenciados para usar em situações onde um método não está dando resultado, e entender que os métodos não são isolados e sim complementares entre si.

# Referências Bibliográficas


1. ALMEIDA, Adriano. P. de. **Coleção Explorando o Ensino; v.17**. Brasília: Ministério da Educação, 2010.

2. ARAUJO, L., NOBREGA, J. **Aprendendo Matemática com o Geogebra**. Brasília: Editora Exato, 2010.

3. BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos PCN**. Brasília: MEC, 2002.

4. DANTE, Luis. R. **Matemática: Contexto e Aplicações**. São Paulo: Editora Ática, 2011.

5. EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora UNICAMP, 2008.

6. FAINGUELERNT, E., NUNES, K. **Matemática: Práticas pedagógicas para o ensino médio**. Porto Alegre: Editora Penso, 2012.

7. GRANDO, Regina. C. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulos, 2004.

8. IEZZI, Gelson. **Fundamentos de matemática elementar: Geometria Analítica**. São Paulo: Editora Atual, 2010.

9. LIMA, Elon L. **Matemática e Ensino**. Rio de Janeiro: SBM, 2007.

10. NETO, Aref A., et al. **Noções de matemática: Geometria Analítica**. Fortaleza: Editora Vestseller, 2010.

11. PAIVA, Manoel. **Matemática - Paiva**. São Paulo: Editora Moderna, 2009.

12. PUTNOKI, José C. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico; v 2**. São Paulo: Editora Scipione, 1989.

13. ROONEY, Anne. **A história da matemática**. São Paulo: M. Books, 2012.

14. RODRIGUES, G., PEREIRA, J., PITAÇA, V. Cônicas. Lisboa, 1999. Seção: Aplicações. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm26/frames.htm, acessado em 22.11.2013.

15. SANTOS, Ângela Rocha dos. **Cônicas: das dobraduras ao computador**. VI Regional da SBM. Universidade Federal de Viçosa, 2004. Disponível em http://www.ufv.br/dma/eventos/virrsbm/resumos/angelarocha.PDF acessado em 21.02.2014.

16. SANTOS, José dos, FERREIRA, Silvimar. **Geometria Analítica**. Porto Alegre: Bookman, 2009.

17. SCHWERTI, Simone L.**Construções Geométricas e Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2012.

18. SOUZA, Joamir.**Coleção Novo Olhar: Matemática**. São Paulo: FTD, 2010.

19. STROGATZ, Steven. **A matemática do dia a dia**. Rio de Janeiro:Elsevier, 2013.

20. http://www.mat.uel.br/geometrica. Desenho, Geometria e Arquitetura On-Line. Universidades Estadual de Londrina, acessado em 09.12.2013.

21. http://wiki.geogebra.org/pt/Manual. GeoGebra. Seção: Manual, acessado em 31.01.2014.