



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
EM REDE NACIONAL

ANTONIO EDSON PEREIRA DA SILVA FILHO

A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA E O GLOBO TERRESTRE

JUAZEIRO DO NORTE
2014

ANTONIO EDSON PEREIRA DA SILVA FILHO

A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA E O GLOBO TERRESTRE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Orientador:
Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Biblioteca do Curso de Matemática

S58t Silva Filho, Antonio Edson Pereira da
A trigonometria esférica e o globo terrestre / Antonio Edson Pereira da Silva Filho. – 2014.
50 f. : il., enc.; 31 cm

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Departamento de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Juazeiro do Norte, 2014.
Área de Concentração: Ensino de Matemática.
Orientação: Prof. Francisco Valdemiro Braga.

1. Trigonometria esférica. 2. Triângulo esférico. 3. Globos. I. Título.

CDD 516.244

ANTONIO EDSON PEREIRA DA SILVA FILHO

A TRIGONOMETRIA ESFÉRICA E O GLOBO TERRESTRE

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, do Departamento de Matemática da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial para a obtenção do Título de Mestre em Matemática. Área de concentração: Ensino de Matemática.

Aprovada em: 07 / 06 / 2014.

BANCA EXAMINADORA

Francisco Valdemiro Braga

Prof. Ms. Francisco Valdemiro Braga (Orientador)

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Maria Silvana Alcantara Costa

Profª. Dra. Maria Silvana Alcantara Costa

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Francisco Enio do Nascimento Lima

Prof. Dr. Francisco Enio do Nascimento Lima

Universidade Estadual do Ceará (UECE)

*Ao meu querido pai
Antonio Edson Pereira da Silva
(in memoriam).*

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelas bênçãos e sabedoria concedidas a meu ser.

A meu pai, Antonio Edson Pereira da Silva, mesmo não estando mais conosco, por sempre me mostrar o verdadeiro valor da educação e a minha mãe, Antonia Holanda Leite da Silva, símbolo do verdadeiro amor, pelo companheirismo e dedicação ao longo dessa imponente realização.

A Neylyanne Alves Mendonça, minha esposa, e a Alyce Emily Alves da Silva, minha filha, razões do meu viver, por todo carinho, amor, dedicação e, acima de tudo, pelas lições de vida familiar.

Aos meus irmãos, sobrinhos e cunhados pela parceria em todos os momentos, principalmente nos mais obscuros.

À Sociedade Brasileira de Matemática (SBM) pela idealização e coordenação do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), programa que, em médio prazo, causará uma profunda melhoria no ensino de Matemática em todos os níveis.

A todos os professores do PROFMAT - Juazeiro do Norte por suas lições de mestres, sempre dispostos a se doar em favor do meu crescimento intelectual ao longo dessa jornada. Em especial ao professor Mário de Assis Oliveira, exemplo de ser humano, por seu esplêndido empenho ao programa.

A Francisco Valdemiro Braga, meu orientador, por toda contribuição intelectual e pela disposição ao longo da realização dessa pesquisa.

Ao amigo Francisco Dias, por suas contribuições prestadas à realização desse trabalho.

A todos os colegas de curso por todos os momentos de aprendizado ao longo dessa caminhada. Principalmente, aos colegas de viagem Cleiton Melo, Rafael Braz, Wesley Cunha e Amilton Ximenes, fica a saudade de todos os momentos que partilhamos.

Aos Amigos Marcelo Dantas, Dayvid Marques e Nilo César, pelas verdadeiras amizades fruto da presença da Matemática em nossas vidas.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa concedida.

“O céu deve ser necessariamente esférico, pois a esfera, sendo gerada pela rotação do círculo, é, de todos os corpos, o mais perfeito.” (Aristóteles)

RESUMO

A trigonometria esférica surgiu das necessidades da Astronomia, na busca de descrever matematicamente o sistema solar. Mentas brilhantes como Euclides, Aristarco de Samos, Apolônio de Perga, Hiparco, Menelau de Alexandria, Ptolomeu, entre outros, estudaram sobre os triângulos esféricos. Neste trabalho, estudaremos os resultados fundamentais a trigonometria esférica buscando uma associação com o globo terrestre. Iniciaremos com o estudo dos elementos fundamentais de uma superfície esférica, donde definiremos os triângulos esféricos e provaremos suas principais propriedades, como soma das medidas dos ângulos internos e a fórmula de Girard para o cálculo de sua área. Em seguida, apresentamos a classificação dos triângulos esféricos e as principais relações entre os lados e os ângulos desses triângulos, como a lei dos senos e lei dos cossenos, além de um breve estudo dos triângulos esféricos retângulos. Finalmente, consideramos a Terra como uma esfera, denominada globo terrestre, sobre a qual abordamos diversos conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes, longitudes, a fim de utilizar da trigonometria esférica para o cálculo de distâncias e ângulos sobre a superfície terrestre, criando o forte caráter interdisciplinar entre Matemática e Geografia.

Palavras-chave: Trigonometria esférica. Triângulo esférico. Globo terrestre.

ABSTRACT

The spherical trigonometry came from the needs of Astronomy, in the search for mathematically describing the solar system. Brilliant minds like Euclides, Aristarco of Samos, Apolônio of Perga, Hiparco, Menelau of Alexandria, Ptolomeu, and others, have studied the spherical triangles. In this work, we study the fundamental results spherical trigonometry seeking an association with the globe. We begin with the study of the fundamental elements of a spherical surface, where we define the spherical triangles and prove their important properties, such as sum of the measures of the internal angles and the Girard formula to calculate its area. Then, we present the classification of spherical triangles and the main relationships between the sides and angles of these triangles, as the law of sines and law of cosines, and a brief study of spherical rectangle triangles. Finally, we consider the Earth as a sphere called earth globe, over which we address various geographical concepts such as parallels, meridians, latitudes, longitudes, in order of use of spherical trigonometry to calculate distances and angles on the Earth's surface, creating strong interdisciplinary character between Mathematics and Geography.

Keywords: Spherical trigonometry. Spherical triangles. Earth Globe.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	9
2	A SUPERFÍCIE ESFÉRICA E OS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS..	10
2.1	Elementos fundamentais de uma superfície esférica.....	10
2.1.1	<i>A interseção entre um plano e uma superfície esférica</i>	10
2.1.2	<i>A distância numa superfície esférica.....</i>	14
2.1.3	<i>Ângulo esférico</i>	16
2.2	Triângulos esféricos.....	17
2.2.1	<i>Definição</i>	17
2.2.2	<i>Desigualdades fundamentais dos triângulos esféricos</i>	19
2.2.3	<i>Triângulos esféricos polares</i>	22
2.2.4	<i>Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico</i>	24
2.2.5	<i>Área de um triângulo esférico</i>	26
3	TRIGONOMETRIA ESFÉRICA	31
3.1	Classificação dos triângulos esféricos	31
3.2	Fórmulas fundamentais	32
3.2.1	<i>Lei dos cossenos para triângulos esféricos.....</i>	32
3.2.2	<i>Lei dos senos para triângulos esféricos.....</i>	35
3.3	Triângulos esféricos retângulos.....	37
3.3.1	<i>Regras de Neper</i>	39
3.3.2	<i>Leis dos Quadrantes</i>	40
4	A TRIGONOMETRIA E O GLOBO TERRESTRE.....	41
4.1	O globo terrestre.....	41
4.1.1	<i>Coordenadas geográficas</i>	43
4.1.2	<i>Calculando distâncias sobre o globo terrestre.....</i>	44
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	48
	REFERÊNCIAS.....	49

1 INTRODUÇÃO

O início dos estudos sobre a esfera foi desencadeado devido às necessidades da Astronomia, que buscava como seria a forma da Terra e o movimento dos planetas. O nascimento da trigonometria, uma criação da Matemática grega, esteve associado a previsão de efemérides terrestre, ao cálculo do tempo e para ser utilizada na Navegação e na Geografia.

A trigonometria esférica, sobretudo os triângulos esféricos, vinha sendo estudada por diversos matemáticos, que viveram entre 300 e 200 a.C., como Euclides, Aristarco de Samos e Apolônio de Perga, no entanto, Hiparco, que viveu em torno de 120 a.C, é considerado o precursor, por ser o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocaso de várias estrelas. Um pouco depois, cerca de 100 a.C, Menelau de Alexandria, apresentava trabalhos desenvolvidos sobre o assunto. Contudo, o ápice da Trigonometria grega foi alcançado com Cláudio Ptolomeu, que viveu em torno de 150 d.C., com o seu trabalho *Almagesto*, que tinha como objetivo primordial descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar.

Neste trabalho, serão mostrados resultados clássicos da trigonometria esférica, com o propósito de aplicar no estudo do globo terrestre. Para isto, dividimos a dissertação em três capítulos.

No capítulo 1, será tratado sobre a superfície esférica e seus elementos, em seguida definiremos triângulo esférico e provaremos suas principais propriedades, as quais requerem o conhecimento prévio de alguns conceitos da geometria espacial, especialmente as propriedades dos triedros.

No capítulo 2, apresentamos a classificação dos triângulos esféricos. Doravante é desenvolvido as principais relações entre os lados e os ângulos desses triângulos, a lei dos senos e lei dos cossenos, desenvolvidas pelo alemão Bessel (1784 - 1846). Ainda nesse capítulo, apresentamos um breve estudo dos triângulos esféricos retângulos.

Finalmente no capítulo 3, exploramos o globo terrestre, onde são abordados conceitos geográficos como paralelos, meridianos, latitudes e longitudes. O modelo mais simples de representar a superfície da Terra obtido através de um globo, requer a utilização da trigonometria esférica para resolver diversas questões sobre cálculo de distâncias e ângulos sobre a esfera, abrindo caminho para um interessante interdisciplinaridade entre Matemática e Geografia.

2 A SUPERFÍCIE ESFÉRICA E OS TRIÂNGULOS ESFÉRICOS

Estudaremos neste capítulo os elementos fundamentais de uma superfície esférica, definiremos triângulo esférico, onde destacaremos as suas principais propriedades, como soma das medidas dos seus ângulos internos e sua área.

2.1 Elementos fundamentais de uma superfície esférica

Definição 1 *Seja O um ponto e r um número real positivo. A **superfície esférica** de centro O e raio r é o conjunto dos pontos do espaço cuja distância ao ponto O é igual a r .*

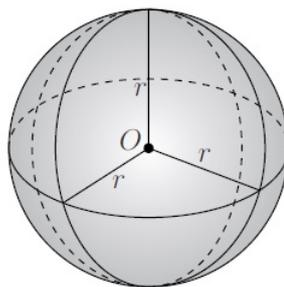


Figura 2.1: Superfície esférica de centro O e raio r

Os pontos do espaço cuja distância ao ponto O é menor do que r são *interiores* à superfície esférica. Desse modo, a reunião da superfície esférica de centro O e raio r com seus pontos interiores é chamada de **esfera** de centro O e raio r . Em outras palavras, tal esfera é a reunião de todos os segmentos de reta de origem O e comprimento r .

Indicaremos com \overline{AB} o comprimento do segmento de reta AB .

2.1.1 A interseção entre um plano e uma superfície esférica

Considere uma superfície esférica S e um plano Π que a encontre. Se a interseção $\Pi \cap S$ é exatamente um ponto, dizemos que o plano Π é *tangente* à superfície esférica S . Por outro lado, se $\Pi \cap S$ possuir mais do que um ponto, o plano Π é *secante* à superfície esférica S . Podemos caracterizar o plano tangente conforme o seguinte resultado.

Teorema 2.1.1 *Um plano perpendicular a um raio na sua extremidade comum com a superfície esférica é tangente à mesma. Reciprocamente, todo plano tangente a uma superfície esférica é perpendicular ao raio no ponto de tangência.*

Demonstração: Consideremos um plano Π perpendicular ao raio \overline{OT} em T . Devemos provar que nenhum outro ponto de Π está na superfície esférica.

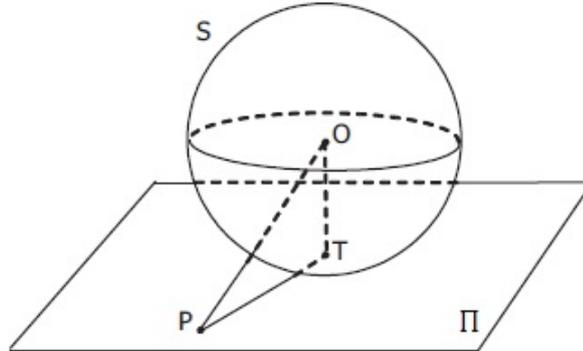


Figura 2.2: Plano tangente à superfície esférica

Seja P um ponto qualquer de Π , com P distinto de T . Como Π é perpendicular a \overline{OT} , temos que o triângulo ΔOPT é retângulo, com hipotenusa \overline{OP} e catetos \overline{OT} e \overline{PT} . Logo $OP > OT = r$ e, portanto, P não está na superfície esférica.

Reciprocamente, seja Π um plano tangente à superfície esférica no ponto T . Suponha, por absurdo, que Π não seja perpendicular ao raio \overline{OT} .

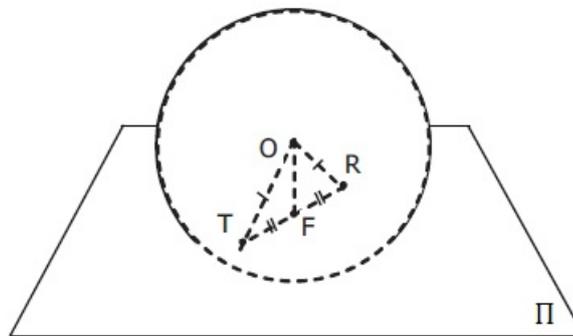
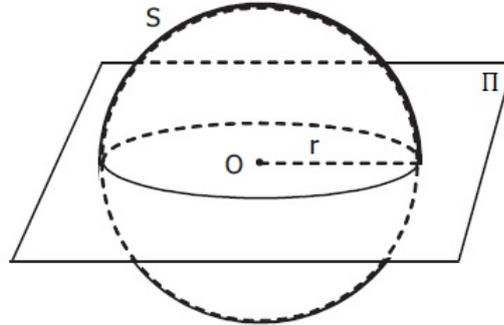


Figura 2.3: Π é perpendicular ao raio \overline{OT} em T

Sendo F o pé da perpendicular ao plano Π , traçada a partir de O , temos que $F \neq T$, pois Π não é perpendicular a \overline{OT} . Agora, considere o ponto R da reta FT tal que F seja o ponto médio de \overline{TR} . Dessa forma, os triângulos ΔOFR e ΔOFT são congruentes, pelo caso lado - ângulo - lado, acarretando que $OR = OT = r$, e conseqüentemente, R está na superfície esférica. Logo, o plano Π intersecta a superfície esférica em dois pontos distintos R e T , contradizendo a hipótese de que Π é um plano tangente. ■

Agora analisaremos que figura é obtida quando um plano secante corta a superfície esférica. Se o plano passa pelo centro O a resposta é imediata.

Teorema 2.1.2 *A interseção de uma superfície esférica com um plano passando pelo seu centro é uma circunferência de mesmo centro e mesmo raio.*



Demonstração: Dada uma superfície esférica S com centro O e raio r e um plano Π que passa por O , a interseção $\Pi \cap S$ é o conjunto dos pontos de Π cuja distância a O é igual a r , o que corresponde a uma circunferência de centro O e raio r . ■

O próximo resultado nos dará a situação mais geral.

Teorema 2.1.3 *Se um plano passa por um ponto do interior de uma superfície esférica, então a interseção do plano com a superfície esférica é uma circunferência. O centro dessa circunferência é o pé da perpendicular ao plano traçada a partir do centro da superfície esférica.*

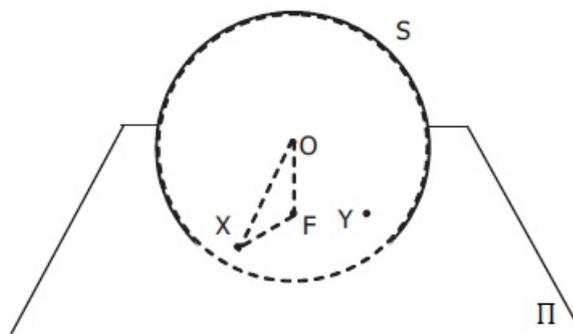


Figura 2.4: Plano secante à superfície esférica

Demonstração: Consideremos uma superfície esférica S de centro O e raio r . Seja Π um plano que não passa pelo centro de S e que passa por um ponto Y do seu interior. Sendo F o pé da perpendicular a Π traçada a partir de O , mostraremos que a interseção $\Pi \cap S$ é uma circunferência de centro em F .

Ora, como Y está no interior de S , temos que $OY < r$. Além disso, no triângulo retângulo $\triangle OFY$ temos que \overline{OY} é hipotenusa, enquanto que \overline{OF} é cateto. Logo $OF < OY < r$, ou seja, F também está no interior de S .

Agora, seja X um ponto qualquer na interseção $\Pi \cap S$. Assim, considerando o triângulo $\triangle OFX$, retângulo em F , pelo teorema de Pitágoras, temos que

$$OF^2 + FX^2 = OX^2 = r^2$$

e, portanto, $FX = \sqrt{r^2 - OF^2}$.

Logo, X está na circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$. Provamos assim que a interseção $\Pi \cap S$ está contida na circunferência de centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$.

Para completar a demonstração, precisamos mostrar que todo ponto dessa circunferência pertence a interseção.

Seja X um ponto qualquer da circunferência, em Π , com centro F e raio $\sqrt{r^2 - OF^2}$. Novamente pelo teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} OX^2 &= OF^2 + FX^2 \\ &= OF^2 + r^2 - OF^2 \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Portanto $OX = r$ e X pertence à superfície esférica S . ■

A secção plana de uma superfície esférica é uma circunferência. Esta circunferência é chamada uma **circunferência máxima**¹ quando o plano que intersecta a superfície esférica passa pelo seu centro. Em caso contrário, a circunferência obtida é **circunferência mínima**.

As extremidades do diâmetro da superfície esférica que é perpendicular ao plano que a intersecta, são os **polos** da circunferência (máxima ou mínima).

¹Há uma forte razão para esse nome: as circunferências máximas são as circunferências de maior raio contidas na superfície esférica.

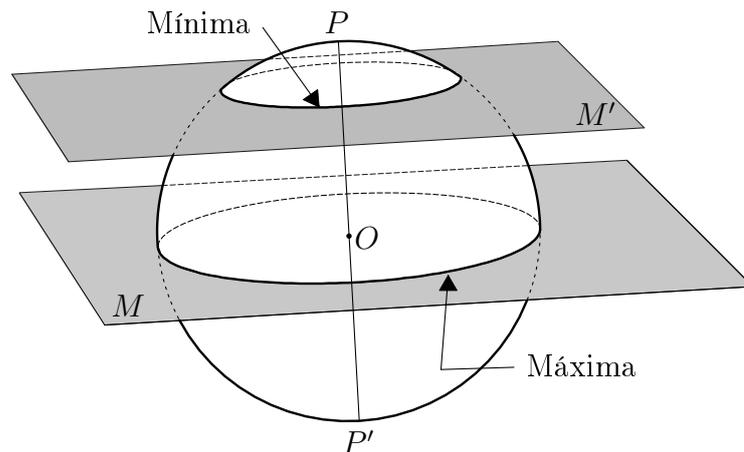


Figura 2.5: Seção plana de uma superfície esférica

Na Figura 2.5, P é o polo de uma infinidade de circunferências, no entanto somente uma delas é uma circunferência máxima. Desse modo, o plano que determina esta circunferência máxima divide a superfície esférica em duas regiões, as quais chamaremos de **hemisférios**.

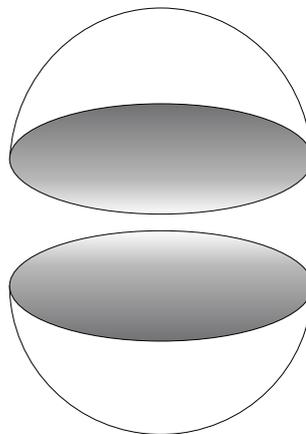


Figura 2.6: Hemisférios

2.1.2 A distância numa superfície esférica

A distância entre dois pontos A e B de uma superfície esférica S é, essencialmente, o menor de todos os comprimentos das trajetórias sobre S ligando A a B . O seguinte resultado caracteriza a distância entre dois pontos sobre uma superfície esférica.

Teorema 2.1.4 *Por dois pontos distintos de uma superfície esférica, que não são polos, passa uma única circunferência máxima.*

Demonstração: Seja S uma superfície esférica de centro O . Sendo A e B dois pontos de S que não são polos, considere o plano Π determinado pelos pontos não-colineares O , A e B . Pelo Teorema 2.1.2 a interseção $\Pi \cap S$ é uma circunferência máxima, que passa pelos pontos A e B , a qual é única, pois do contrário teríamos dois planos passando pelos pontos não-colineares O , A e B , o que não é possível. ■

Desse modo, podemos definir a distância numa superfície esférica como segue:

Definição 2 *Dados dois pontos A e B sobre uma superfície esférica, a distância $d(A, B)$ é o comprimento do menor arco AB da circunferência máxima que passa por A e B .*

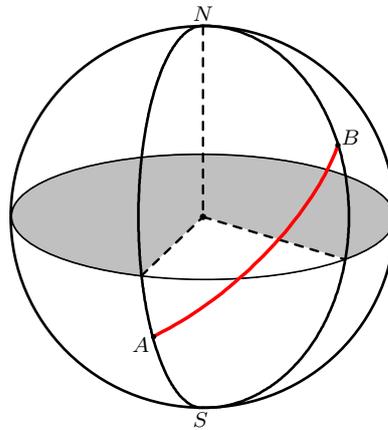


Figura 2.7: Distância entre A e B

Observação: A partir da definição acima, temos que tal arco faz o papel de segmento de reta da Geometria Plana, enquanto que as circunferências máximas fazem analogia as retas.

O cálculo desse comprimento pode ser feito a partir da medida do ângulo \widehat{AOB} , uma vez que o comprimento de um arco é proporcional à medida do ângulo central correspondente. Assim, sendo A e B dois pontos de uma superfície esférica de centro O e raio r , a distância $d(A, B)$ entre A e B é dada por

$$d(A, B) = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

onde α é a medida do ângulo \widehat{AOB} em graus.

Dessa forma, todos os pontos de uma circunferência máxima são equidistante do seu polo, ou melhor, essa distância, denominada **distância polar**, é dada por um ângulo central de 90° .

2.1.3 Ângulo esférico

Definição 3 O ângulo α formado em uma superfície esférica pela interseção de dois arcos de circunferências máximas denomina-se **ângulo esférico**. Os arcos das circunferências máximas são os **lados** e o seu ponto de interseção, o **vértice** do ângulo esférico. A medida do ângulo esférico é igual a medida do ângulo diedro formado pelos planos que contêm as circunferências máximas.

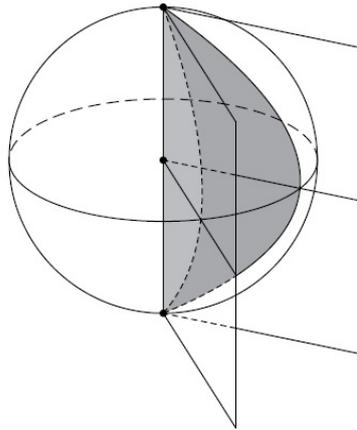


Figura 2.8: Ângulo esférico

Na Figura 2.9, \widehat{APB} é um ângulo esférico na superfície esférica de centro O e raio OP . Considere o plano OAB que determina a circunferência máxima ABC , cujo polo é o ponto P , que é vértice do referido ângulo esférico. Como o ângulo diedro formado pelos planos AOP e BOP é medido pelo ângulo plano \widehat{AOB} o qual, por sua vez, é medido pelo arco \widehat{AB} , segue-se que um ângulo esférico é medido pelo menor arco de circunferência máxima, cujo polo é o vértice do ângulo. Desse modo, teremos que a medida de um ângulo esférico é menor do que ou igual a 180° .

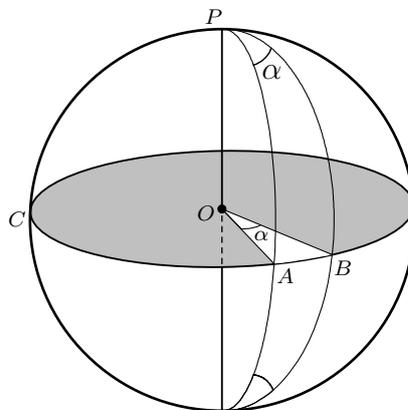


Figura 2.9: Medida do ângulo esférico

2.2 Triângulos esféricos

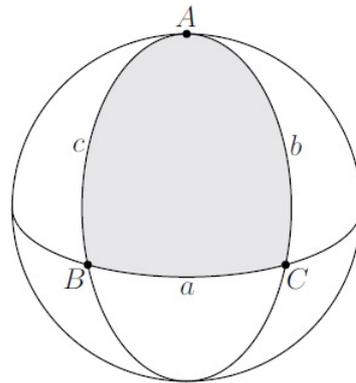
O início do estudo dos triângulos esféricos foi atrelado à criação da Trigonometria pelos gregos, a qual surgiu devido às necessidades da Astronomia. Esse estudo na Matemática grega vinha sendo feito desde os últimos pitagóricos. O próprio *Euclides*, que viveu em torno de 300 a.C., em um de seus trabalhos, *O Fenômeno*, estudou sucintamente a *Geometria Esférica*. Porém, podemos dizer que *Hiparco*², o mais eminente dos astrônomos da Antiguidade, que viveu em torno de 120 a.C., foi o precursor desse estudo, uma vez que usando tábuas trigonométricas resolveu triângulos esféricos retângulos com processos semelhantes às várias fórmulas conhecidas atualmente.

Um pouco depois de Hiparco, *Menelau de Alexandria*, que viveu em torno de 100 a.C., já apresentava resultados desenvolvidos sobre Trigonometria, mostrado em partes do seu livro *Geometria Esférica*. No trabalho de Menelau, aparece pela primeira vez a definição de triângulo esférico, além de diversas proposições relativas a esses triângulos e semelhantes às estabelecidas por Euclides para os triângulos da Geometria Plana. Provou ainda que, não existe nenhum conceito de semelhança na geometria esférica, pois dois triângulos esféricos têm ângulos correspondentes congruentes, então os triângulos são congruentes, resultado para o qual não há nenhum análogo no plano. Ele usou, sem provar, o teorema da Geometria Plana, hoje conhecido por *Teorema de Menelau*, para deduzir diversos resultados sobre trigonometria esférica, provando, também, o correspondente desse teorema para triângulos esféricos.

2.2.1 Definição

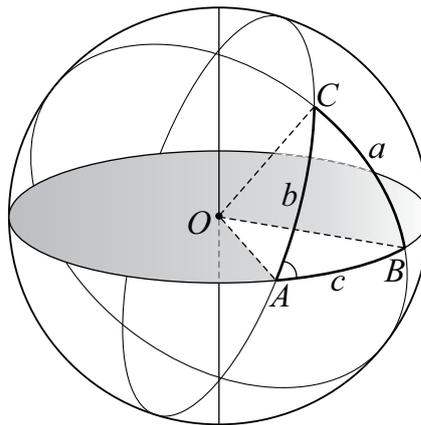
Definição 4 *Um triângulo esférico é a porção da superfície esférica limitada pelos arcos de três circunferências máximas menores do que uma semicircunferência, que se intersectam dois a dois. Os arcos são chamados **lados** e os vértices dos três ângulos esféricos são também os **vértices** do triângulo esférico.*

²Considerado o pai da Trigonometria, por ter sido o pioneiro na elaboração de uma tabela trigonométrica, além de introduzir na Grécia a divisão do círculo em 360 partes iguais.

Figura 2.10: Triângulo esférico ABC

Na figura 2.10, o triângulo esférico ABC têm A , B e C como vértices e os arcos opostos correspondentes a , b e c como lados.

Ademais, observe que ligando-se os vértices A , B e C de um triângulo esférico ao centro O da superfície esférica, obtemos o triedro $O-ABC$, conforme Figura 2.11.

Figura 2.11: Triedro $O-ABC$

O resultado seguinte cria uma relação intrínseca entre um triângulo esférico e o triedro construído a partir dele.

Lema 2.2.1 *A todo triedro corresponde um triângulo esférico, que está sobre a superfície esférica cujo centro é o vértice desse triedro, tal que seus lados medem ângulos das faces do triedro e seus ângulos medem ângulos diedros formado pelas faces.*

Demonstração: Imaginemos um triedro cujo vértice seja o centro O de uma superfície esférica S . Pelo Teorema 2.1.2 os planos que formam o triedro, passando por O , determinam sobre S arcos de circunferências máximas, os quais se encontram dois a dois e formam um triângulo esférico. Além disso, os ângulos das faces do triedro ficam sendo

ângulos centrais dos arcos de circunferência máxima determinado pelo plano da face sobre S e, portanto, tendo como medida o arco compreendido entre seus lados, mas esses arcos são os lados do triângulo esférico formado, cujos lados medem as faces do triedro.

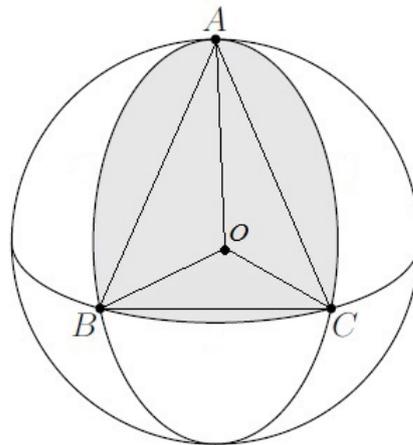
Por outro lado, se traçarmos, a partir dos pontos que as arestas do triedro cortam S e que são os vértices do triângulo esférico, retas tangentes aos arcos de circunferência máxima que formam os lados do triângulo esférico, os ângulos formados por essas tangentes medem os ângulos desse triângulo; mas essas tangentes são perpendiculares aos raios no ponto de tangência, ou seja, são perpendiculares às arestas do triedro em um mesmo ponto e, portanto, são as medidas dos ângulos dos diedros que formam o triedro. Assim, concluímos que os ângulos do triângulo esférico medem os ângulos diedros do triedro considerado. ■

Notemos que o Lema anterior mostra que podemos deduzir diversas propriedades dos triângulos esféricos através das propriedades dos triedros.

2.2.2 Desigualdades fundamentais dos triângulos esféricos

Teorema 2.2.5 (Desigualdade triangular para triângulos esféricos) *Qualquer lado de um triângulo esférico é menor do que a soma dos outros dois lados.*

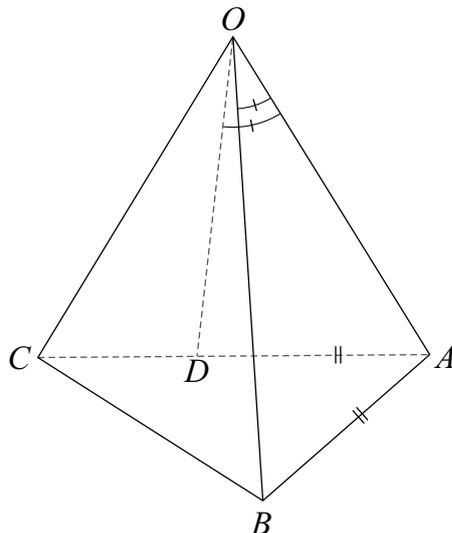
Demonstração: Consideremos o triângulo esférico ABC sobre a superfície de uma esfera de centro O e raio r . Ligando-se os vértices A, B, C do triângulo esférico ao centro O da esfera, obtemos o triedro $O-ABC$.



Dessa forma, pelo Lema 2.2.1 para basta provar que qualquer ângulo da face do triedro $O-ABC$ é menor que a soma dos outros dois.

De fato, se os três ângulos das faces são congruentes o teorema é obviamente verdadeiro. Agora, suponha que \widehat{AOC} seja a maior face do triedro $O-ABC$. No interior

de \widehat{AOC} existe um ponto D , tal que $\widehat{AOD} = \widehat{AOB}$. Assim, tomemos $D \in \overline{AC}$ de modo que $OB = OD$. Desse modo, teremos que os triângulos $\triangle AOB$ e $\triangle AOD$ são congruentes, e, conseqüentemente, $AD = AB$.



Por outro lado, considerando o triângulo $\triangle ABC$, pela desigualdade triangular, temos que:

$$AC < AB + BC \quad (2.1)$$

e, como $D \in \overline{AC}$, então:

$$AC = AD + DC. \quad (2.2)$$

Assim, usando (2.2) em (2.1) teremos que:

$$AD + DC < AB + BC.$$

Mas, como $AD = AB$ temos que:

$$DC < BC$$

donde segue que,

$$\widehat{DOC} < \widehat{BOC}. \quad (2.3)$$

Portanto,

$$\widehat{AOC} = \widehat{AOD} + \widehat{DOC} < \widehat{AOB} + \widehat{BOC}.$$

Sendo a maior face menor que a soma das outras duas, concluímos que qualquer face de um triedro $O-ABC$ é menor que a soma das outras duas, como queríamos. ■

Teorema 2.2.6 *A soma dos três lados de um triângulo esférico está compreendida entre 0° e 360° .*

Demonstração: Que a soma dos lados é maior do que 0° é evidente. Vamos mostrar que a soma dos lados é menor do que 360° . Conforme anteriormente, construiremos o triedro $O-ABC$, e usando o Lema 2.2.1, mostraremos que a soma dos ângulos das suas faces é menor do que 360° .

Construindo a semirreta OC' oposta de OC , obteremos o triedro $O-ABC'$ e, pelo Teorema 2.2.5, temos que:

$$\widehat{AOB} < \widehat{BOC'} + \widehat{AOC'}. \quad (2.4)$$

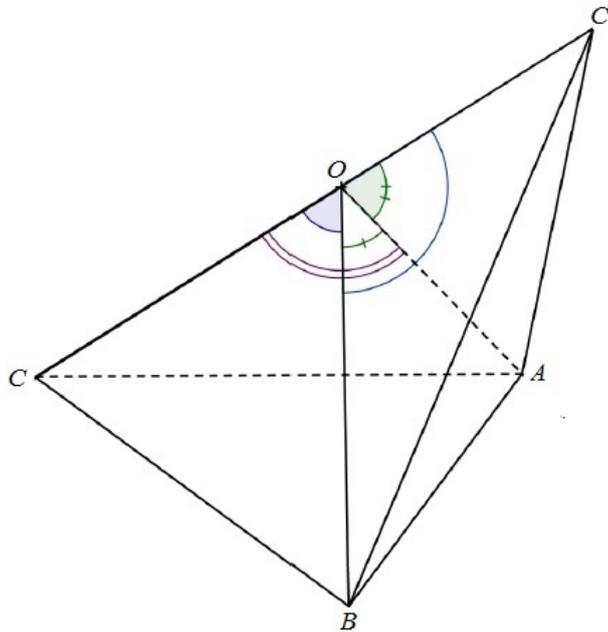


Figura 2.12: a semirreta OC' é oposta de OC

Observe que, os ângulos \widehat{BOC} e $\widehat{BOC'}$ são adjacentes suplementares, e o mesmo ocorre com \widehat{AOC} e $\widehat{AOC'}$. Logo,

$$\widehat{BOC} + \widehat{BOC'} + \widehat{AOC} + \widehat{AOC'} = 360^\circ. \quad (2.5)$$

Portanto, usando (2.4) em (2.5), segue que:

$$\widehat{BOC} + \widehat{AOC} + \widehat{AOB} < 360^\circ$$

como queríamos. ■

2.2.3 Triângulos esféricos polares

Seja ABC um triângulo esférico. Construamos três circunferências máximas tais que os vértices A , B e C seja seus respectivos polos. Agora, sejam A' a interseção das circunferências máximas que possuem B e C como polos e, que localiza-se no mesmo hemisfério do lado \widehat{BC} ; por B' a interseção das circunferências máximas que possuem A e C como polos e, que localiza-se no mesmo hemisfério do lado \widehat{AC} ; e por C' a interseção das circunferências máximas que possuem A e B como polos e, que localiza-se no mesmo hemisfério do lado \widehat{AB} . Desse modo, obtemos um outro triângulo esférico $A'B'C'$, conforme a seguinte:

Definição 5 O *triângulo polar* de um triângulo esférico ABC é outro triângulo esférico $A'B'C'$ que se obtêm a partir de circunferências máximas cujos polos são os vértices do triângulo ABC .

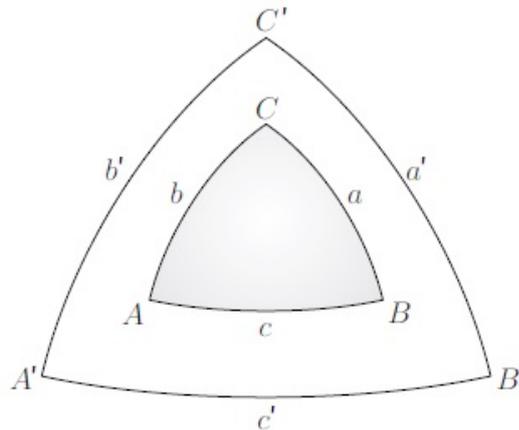


Figura 2.13: $A'B'C'$ é o triângulo polar de ABC

As propriedades fundamentais sobre os triângulos polares são:

Teorema 2.2.7 Se $A'B'C'$ é o triângulo polar de ABC , então ABC é o triângulo polar de $A'B'C'$.

Demonstração: Sendo A polo de $\widehat{B'C'}$ e C é polo de $\widehat{A'B'}$, então os arcos $\widehat{AB'}$ e $\widehat{CB'}$ medem 90° , logo, B' é polo de \widehat{AC} . Evidentemente, do mesmo modo A' é polo de \widehat{BC} e C' é polo de \widehat{AB} . Assim, o triângulo esférico ABC é um dos oito triângulos formados pelas circunferências máximas cujos polos são A' , B' e C' .

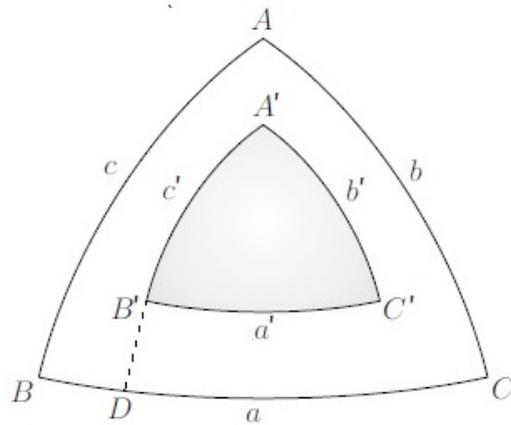


Figura 2.14: Triângulos polares

Para concluir que o triângulo esférico ABC é o triângulo polar de $A'B'C'$, é necessário verificar que A e A' estejam do mesmo lado que $\widehat{B'C'}$, que B e B' estejam do mesmo lado que $\widehat{A'C'}$ e que C e C' estejam do mesmo lado que $\widehat{A'B'}$. Por definição, B e B' estão no mesmo lado de \widehat{AC} e D dista menos de 180° que qualquer ponto sobre \widehat{AC} . Então, uma vez que B' por ser polo de \widehat{AC} está a 90° de qualquer ponto deste arco, portanto B e B' estão do mesmo lado de $\widehat{A'C'}$.

De maneira inteiramente análoga, pode ser mostrado que A e A' estejam do mesmo lado que $\widehat{B'C'}$ e C estejam do mesmo lado que $\widehat{A'B'}$. ■

Teorema 2.2.8 *Em dois triângulos polares, cada ângulo de um triângulo é igual ao suplemento do lado oposto correspondente, do outro triângulo.*

Demonstração: Consideremos os triângulos polares ABC e $A'B'C'$ da figura abaixo, basta provar que $\widehat{A'} = 180^\circ - a$.

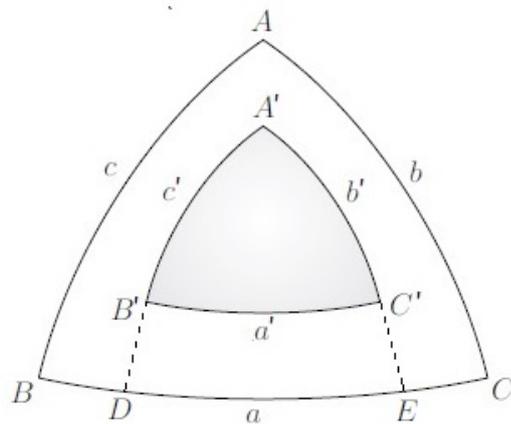


Figura 2.15: Triângulos polares

Prolongando-se os arcos $\widehat{A'B'}$ e $\widehat{A'C'}$ até que encontrem o arco \widehat{BC} nos pontos D e E , respectivamente. Assim, o ângulo $\widehat{A'}$ possui medida igual a \widehat{DE} . Por outro lado, sendo B polo de $\widehat{A'E}$ e C polo de $\widehat{A'D}$, então, por definição de distância polar, tem-se $\widehat{BE} = \widehat{DC} = 90^\circ$. Portanto,

$$a = \widehat{BE} + \widehat{DC} - \widehat{DE} = 180^\circ - \widehat{A'},$$

e, equivalentemente,

$$\widehat{A'} = 180^\circ - a.$$

■

2.2.4 Soma dos ângulos internos de um triângulo esférico

Os triângulos esféricos possuem diversas especificidades quando comparados com os triângulos da Geometria Plana, uma dessas diferenças é mostrada a seguir.

Teorema 2.2.9 *A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo esférico está compreendida entre 180° e 540° .*

Demonstração: Consideremos um triângulo esférico ABC , de ângulos internos \widehat{A} , \widehat{B} e \widehat{C} , e o seu triângulo polar $A'B'C'$. Desse modo, pelo Teorema 2.2.8 temos que:

$$\widehat{A} = 180^\circ - a'$$

$$\widehat{B} = 180^\circ - b'$$

$$\widehat{C} = 180^\circ - c'$$

o que acarreta

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 540^\circ - (a' + b' + c') \quad (2.6)$$

Por outro lado, usando o Teorema 2.2.6 temos que:

$$0^\circ < a' + b' + c' < 360^\circ \quad (2.7)$$

Portanto, de (2.6) e (2.7) segue que

$$180^\circ < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 540^\circ.$$

■

Observação: O teorema acima, caracteriza que não existe nenhuma *isometria*³ entre a superfície esférica e o plano (ou mesmo entre uma parte da superfície esférica e uma parte do plano).

Conforme mostrado anteriormente, a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico é sempre superior a dois ângulos retos, o que sugere a seguinte definição.

Definição 6 *Sejam \hat{A} , \hat{B} e \hat{C} os ângulos internos de um triângulo esférico ABC . A diferença $E = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - 180^\circ$ é chamada de **excesso esférico** do triângulo ABC .*

Ainda do Teorema 2.2.9, podemos estabelecer a seguinte desigualdade sobre os ângulos de um triângulo esférico:

Corolário 2.2.1 *Em todo triângulo esférico cada ângulo interno aumentado de 180° é maior do que a soma dos outros dois ângulos.*

Demonstração: Sendo $A'B'C'$ o triângulo polar do triângulo esférico ABC , pelo Teorema 2.2.8 temos que:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= 180^\circ - a' \\ \hat{B} &= 180^\circ - b' \\ \hat{C} &= 180^\circ - c'\end{aligned}$$

Somando as duas últimas igualdades obtemos que

$$\hat{B} + \hat{C} < 360^\circ - (b' + c') \quad (2.8)$$

Agora, usando Teorema 2.2.5 no triângulo $A'B'C'$ teremos que

$$a' < b' + c'. \quad (2.9)$$

Dessa maneira, usando (2.9) na inequação (2.8) chegaremos que

$$\hat{B} + \hat{C} < 360^\circ - a'$$

e, portanto,

$$\hat{B} + \hat{C} < 180^\circ + \hat{A}.$$

■

³Uma **isometria** é uma aplicação $T : X \rightarrow Y$ entre dois espaços métricos, que preserva distância entre seus pontos, isto é, $d_Y(T(x_1), T(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ para quaisquer $x_1, x_2 \in X$. Desse modo, se existisse uma isometria $\psi : S \rightarrow \Pi$ entre a superfície esférica S e o plano Π teria que preservar distâncias, isto é, teria que aplicar circunferências máximas de S em retas de Π , conseqüentemente a soma dos ângulos internos de um triângulo esférico teria que coincidir com a soma dos ângulos internos do correspondente triângulo plano.

2.2.5 Área de um triângulo esférico

O geômetra francês *Albert Girard*⁴ (1595 - 1632) interessou-se por Geometria Esférica, realizando diversas contribuições neste ramo. Entre essas, Girard mostrou em 1629, a fórmula da área de um triângulo esférico em termos do seu excesso esférico.

Nesta seção, provaremos a fórmula obtida por Girard. Antes disso precisaremos de alguns resultados.

Consideremos uma superfície esférica S de centro em O e raio r , a qual permanecerá fixa no decorrer desta seção.

Definição 7 Um **fuso** é uma região da superfície esférica compreendida entre duas circunferências máximas. Essas circunferências possuem, em comum, dois pontos diametralmente opostos, que são ditos **vértices** do fuso. O ângulo α formado pelas circunferências máximas é o ângulo do fuso, onde essas circunferências são os seus **lados**.

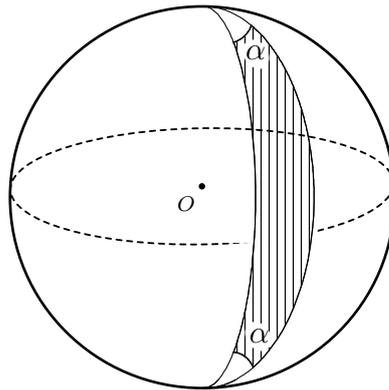


Figura 2.16: Fuso de ângulo α

Um fuso de ângulo π radianos é um hemisfério e, portanto, sua área compreende a metade da área da superfície esférica, isto é, $2\pi r^2$. Analogamente, um fuso de ângulo $\frac{\pi}{2}$ radianos ocupa $\frac{1}{4}$ da superfície esférica, logo sua área é πr^2 . De um modo geral, a área de um fuso é proporcional ao seu ângulo. Assim sendo, se o ângulo de um fuso mede α radianos, a área desse fuso é igual a $2\alpha r^2$.

Definição 8 Dado um ponto qualquer X na superfície esférica, chama-se **antípoda** de X , o único ponto X' da superfície esférica tal que o segmento de reta $\overline{XX'}$ contém o centro O .

⁴Em 1626 publicou um tratado sobre trigonometria contendo as primeiras abreviaturas *sin*, *tan*, *sec*. Em Álgebra conquistou méritos consideráveis, quando desenvolveu esboços do *Teorema Fundamental da Álgebra* e traduziu os trabalhos de *Simon Stevin*, em 1625.

Dado um fuso φ na superfície esférica, o conjunto formado pelos antípodas dos pontos de φ é ainda um fuso φ' , chamado de **fuso antípoda** de φ . Desse modo, surge o conceito de **fuso completo**.

Definição 9 Um **fuso completo** é a reunião $\Phi = \varphi \cup \varphi'$.

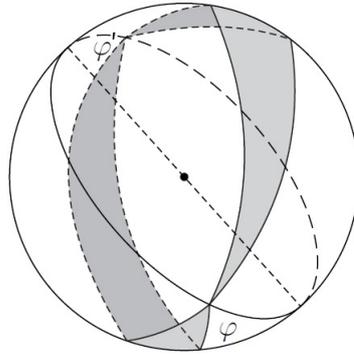


Figura 2.17: Fuso completo

Lema 2.2.2 Seja Φ um fuso completo, cujo ângulo mede α radianos. Qualquer plano que passe pelo centro da superfície esférica a decompõe em dois hemisférios H e H' . As partes R e R' do fuso completo Φ contidos em cada um dos hemisférios possuem a mesma área $2\alpha r^2$.

Demonstração: Basta provar que R e R' possuem a mesma área, pois assim sendo,

$$\text{área de } \Phi = (\text{área de } R) + (\text{área de } R') = 2 \cdot (\text{área de } R)$$

e, portanto,

$$\text{área de } R = \frac{1}{2} \cdot (\text{área de } \Phi) = 2\alpha r^2.$$

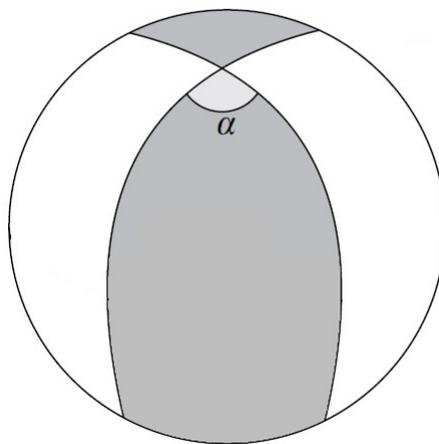


Figura 2.18: Fuso completo contido em um hemisfério arbitrário

Sendo R e R' figuras antípodas, todo ponto de R' é o antípoda de um ponto de R e reciprocamente. Consequentemente, $R = s \cup t$ é a reunião de dois triângulos esféricos com um vértice comum e $R' = s' \cup t'$ é a reunião dos triângulos antípodas de s e t . Desta forma, apenas é preciso provar que o triângulo esférico t e o seu antípoda t' têm a mesma área. Observe que t e t' possuem ângulos iguais e lados congruentes, dois a dois, porém t e t' não são congruentes, uma vez que não é possível, por um movimento rígido, mover um deles no espaço até sobrepor-se exatamente sobre o outro, exceto no caso excepcional de que eles sejam isósceles. As figuras seguintes mostram duas tentativas de sobrepor t e t' . Numa delas fazem-se coincidir os três vértices. Na outra, coincide-se um ângulo de t com o outro igual de t' .

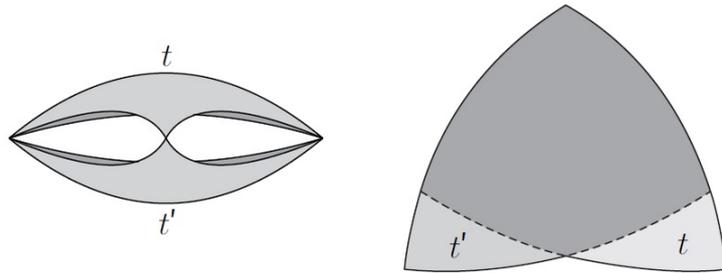


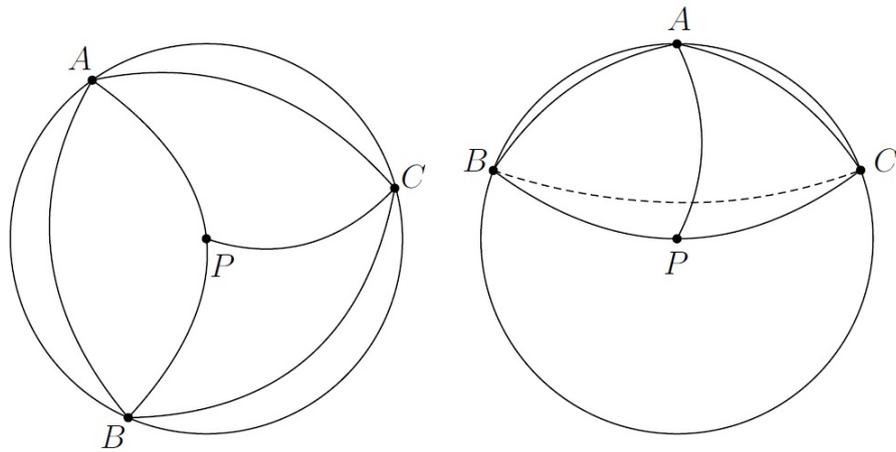
Figura 2.19: Sobreposição dos triângulos esféricos

Na segunda tentativa, observe que se t (e portanto t') for isósceles então t é congruente ao seu antípoda t' , logo estes dois triângulos têm a mesma área. No caso geral, procede-se do seguinte modo. O plano determinado pelos pontos A, B, C , vértices de t , intersectam a superfície esférica segundo uma circunferência mínima, determinado assim uma calota esférica que contém o triângulo t . Seja P polo da calota, o qual é o ponto de interseção da calota com a reta perpendicular ao plano ABC tirada pelo centro da circunferência. Os arcos de circunferência máxima \widehat{PA} , \widehat{PB} e \widehat{PC} possuem o mesmo comprimento, logo os triângulos esféricos PAB , PBC e PAC são isósceles. Assim, se o polo P estiver no interior do triângulo $t = ABC$, tem-se que

$$\text{área de } t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PBC) + (\text{área de } PAC).$$

Ora, uma construção inteiramente análoga pode ser efetuada com o triângulo antípoda $t' = A'B'C'$, decompondo-o como união justaposta dos triângulos esféricos isósceles $P'A'B'$, $P'B'C'$ e $P'A'C'$, cada um deles antípoda do seu correspondente em t . Donde, segue-se que

$$\text{área de } t = \text{área de } t'.$$

Figura 2.20: O polo P do triângulo ABC

Por outro lado, pode ocorrer o caso de que o polo P esteja fora do triângulo t . Neste caso,

$$\text{área de } t = (\text{área de } PAB) + (\text{área de } PAC) - (\text{área de } PBC).$$

Analogamente ocorre com t' , e conclui-se como acima que

$$\text{área de } t = \text{área de } t'.$$

■

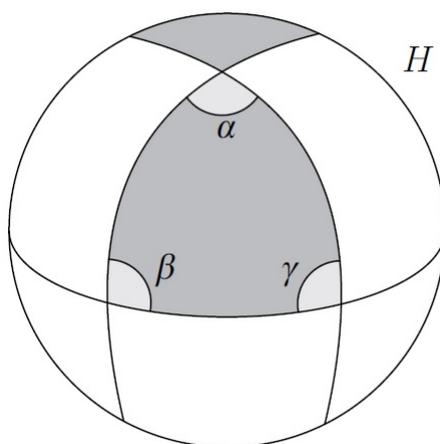
Agora podemos demonstrar a fórmula de Girard para o cálculo da área de um triângulo esférico.

Teorema 2.2.10 (Fórmula de Girard) *Sejam α , β e γ os ângulos de um triângulo esférico, medidos em radianos, então a área \mathcal{A} desse triângulo é dada por*

$$\mathcal{A} = E \cdot r^2$$

onde $E = \alpha + \beta + \gamma - \pi$ é o excesso esférico do triângulo.

Demonstração: Consideremos um hemisfério H que contenha o triângulo esférico dado. Prolongando, nos dois sentidos, os lados que formam o ângulo α , até encontrarem o bordo de H , obteremos uma região $R_\alpha \subset H$, cuja área é $2\alpha r^2$, de acordo com o Lema 2.2.2 acima.

Figura 2.21: A região R_α

Com o mesmo procedimento sobre os ângulos β e γ , obteremos as regiões, contidas em H , R_β e R_γ , cujas áreas são $2\beta r^2$ e $2\gamma r^2$, respectivamente. Dessa forma, a área do hemisfério H é a soma das áreas das regiões R_α , R_β , R_γ menos duas vezes a área \mathcal{A} do triângulo esférico dado. Logo,

$$2\alpha r^2 + 2\beta r^2 + 2\gamma r^2 - 2\mathcal{A} = 2\pi r^2$$

e conseqüentemente,

$$\mathcal{A} = E \cdot r^2$$

como queríamos demonstrar. ■

3 TRIGONOMETRIA ESFÉRICA

Neste capítulo, estudaremos a classificação dos triângulos esféricos e provaremos os principais resultados da trigonometria esférica. Em seguida, faremos um estudo dos triângulos esféricos retângulos, onde encerraremos com as Regras de Neper e as Leis dos Quadrantes.

3.1 Classificação dos triângulos esféricos

Com referência a medida dos lados e dos ângulos de um triângulo esférico, temos a seguinte classificação:

- **Triângulos esféricos retângulos:** Um triângulo esférico é dito retângulo quando possui um ângulo reto.

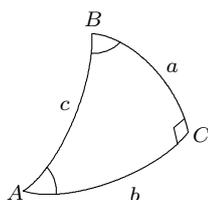


Figura 3.22: O triângulo esférico ABC é retângulo em C

Um triângulo esférico retângulo pode ter um, dois ou três ângulos retos, são chamados de triângulo retângulo, bi-retângulo ou tri-retângulo, respectivamente.

- **Triângulos esféricos retiláteros:** Um triângulo esférico é retilátero quando possui um lado igual 90° , esse lado é chamado de **quadrantal**.

Um triângulo esférico que possui dois lados quadrantais, é chamado de bi-retilátero. Além disso, quando um triângulo esférico for tri-retângulo, obviamente os seus três lados são quadrantais.

- **Triângulos esféricos obliquângulos:** Um triângulo esférico é obliquângulo quando os seus três ângulos forem oblíquos e os lados maiores ou menores do que 90° .

Observação: Um caso especial é quando o triângulo esférico é *isósceles*, aquele que possui dois ângulos congruentes.

3.2 Fórmulas fundamentais

Nesta seção, provaremos as fórmulas fundamentais da trigonometria esférica, também conhecidas como *Fórmulas de Bessel*, pois foram deduzidas pela primeira vez pelo matemático e astrônomo alemão *Friedrich Wilhelm Bessel* (1784 - 1846). Essas fórmulas serão necessárias para a resolução dos triângulos esféricos.



Figura 3.23: Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846)

3.2.1 Lei dos cossenos para triângulos esféricos

A seguinte fórmula relaciona quatro elementos de um triângulo esférico, três lados e um ângulo.

Teorema 3.1.11 (Lei dos Cossenos para Lados) *Em todo triângulo esférico, o cosseno de um lado é igual ao produto dos cossenos dos outros dois lados mais o produto dos senos desses mesmos lados pelo cosseno do ângulo compreendido entre eles.*

Demonstração: Consideremos o triângulo esférico ABC , sobre a superfície de uma esfera de centro O . Os lados a , b e c são medidos pelos ângulos centrais \widehat{BOC} , \widehat{AOC} e \widehat{AOB} , respectivamente.

Suponhamos que os lados sejam menores do que 90° .

Sejam AP e AQ as retas tangentes a superfície esférica em A , onde P e Q estão, nessa ordem, sobre as retas suportes dos raios \overline{OB} e \overline{OC} . Dessa forma, o ângulo \widehat{PAQ} , formado pelas tangentes AP e AQ , mede o ângulo diedro $B-OA-C$ que corresponde ao ângulo esférico \hat{A} .

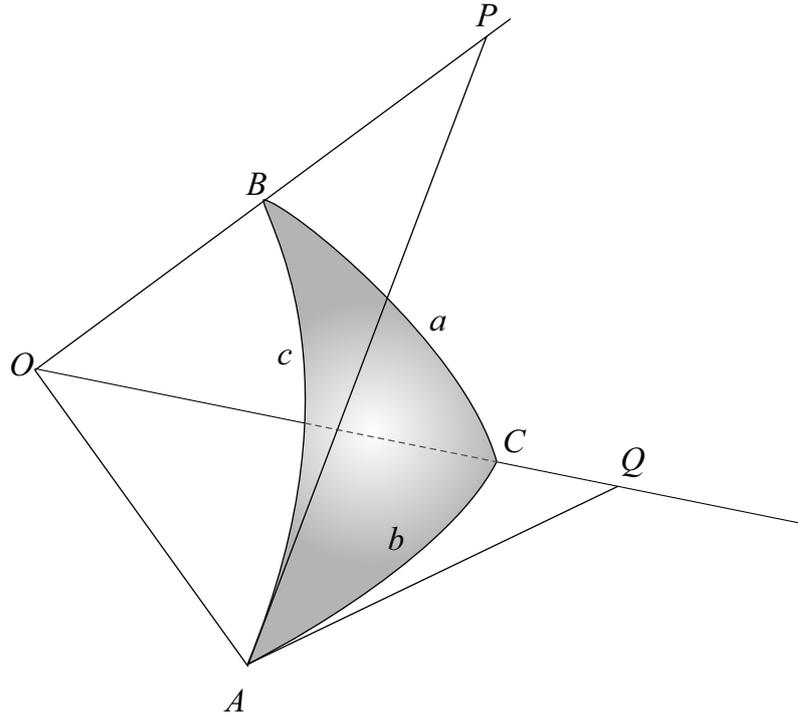


Figura 3.24: Retas tangentes em A

Considerando o triângulo plano ΔAPQ temos que:

$$PQ^2 = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \hat{A} \quad (3.10)$$

Analogamente, considerando o triângulo plano ΔOPQ temos que:

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos a \quad (3.11)$$

Igualando os segundos membros das equações (3.10) e (3.11) teremos:

$$OP^2 + OQ^2 - 2 \cdot OP \cdot OQ \cdot \cos a = AP^2 + AQ^2 - 2 \cdot AP \cdot AQ \cdot \cos \hat{A} \quad (3.12)$$

Por outro lado, sendo \overline{AP} e \overline{AQ} perpendiculares a \overline{OA} , obteremos pelo teorema de Pitágoras nos triângulos retângulos ΔOAP e ΔOAQ as seguintes relações:

$$OP^2 = OA^2 + AP^2 \quad (3.13)$$

$$OQ^2 = OA^2 + AQ^2 \quad (3.14)$$

Substituindo as relações (3.13) e (3.14) na equação (3.12), e isolando $\cos a$, teremos que:

$$\cos a = \frac{OA \cdot OA}{OP \cdot OQ} + \frac{AP \cdot AQ}{OP \cdot OQ} \cdot \cos \hat{A} \quad (3.15)$$

Além disso, ainda dos triângulos retângulos $\triangle OAP$ e $\triangle OAQ$, podemos escrever as seguintes razões trigonométricas:

$$\operatorname{sen} b = \frac{AQ}{OQ} \quad (3.16)$$

$$\operatorname{cos} b = \frac{OA}{OQ} \quad (3.17)$$

$$\operatorname{sen} c = \frac{AP}{OP} \quad (3.18)$$

$$\operatorname{cos} c = \frac{OA}{OP} \quad (3.19)$$

Fazendo as substituições das razões (3.16), (3.17), (3.18) e (3.19) na equação (3.15), temos:

$$\operatorname{cos} a = \operatorname{cos} b \cdot \operatorname{cos} c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{cos} \hat{A} \quad (3.20)$$

Agora, consideremos o caso em que pelo menos um dos lados seja maior do que 90° . Suponhamos, sem perda de generalidade, que a seja maior do que 90° , prolongando os lados a e c até completarmos o fuso esférico que contém o triângulo esférico ABC . A partir dessa construção, obtemos o triângulo esférico $AB'C$.

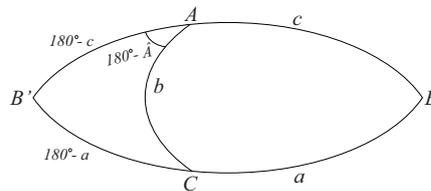


Figura 3.25: O triângulo esférico $AB'C$

Assim, aplicando a relação (3.20) obtida acima, teremos que:

$$\operatorname{cos}(180^\circ - a) = \operatorname{cos} b \cdot \operatorname{cos}(180^\circ - c) + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen}(180^\circ - c) \cdot \operatorname{cos}(180^\circ - \hat{A})$$

e, como de um modo geral $\operatorname{cos}(180^\circ - x) = -\operatorname{cos} x$ e $\operatorname{sen}(180^\circ - x) = \operatorname{sen} x$, segue que:

$$\operatorname{cos} a = \operatorname{cos} b \cdot \operatorname{cos} c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \operatorname{cos} \hat{A} \quad (3.21)$$

o que generaliza a fórmula fundamental para qualquer triângulo esférico. ■

A lei dos cossenos para lados é conhecida por **fórmula fundamental** da Trigonometria Esférica, por desempenhar um papel crucial, uma vez que a partir dela, por transformações especiais, podemos obter as demais fórmulas.

Vamos agora deduzir a outra fórmula que liga quatro elementos de um triângulo esférico, três ângulos e um lado, conhecida como **fórmula suplementar**.

Corolário 3.1.2 (Lei dos Cossenos para Ângulos) *Sejam A, B, C os vértices de um triângulo esférico e a, b, c são as medidas dos respectivos lados opostos. Então*

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos a.$$

$$\cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos b.$$

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} + \sin \hat{A} \cdot \sin \hat{B} \cdot \cos c.$$

Demonstração: Consideremos o triângulo esférico polar $A'B'C'$ de ABC . Pelo Teorema 3.1.11 no triângulo $A'B'C'$ teremos:

$$\cos a' = \cos b' \cdot \cos c' + \sin b' \cdot \sin c' \cdot \cos \hat{A}'. \quad (3.22)$$

Ora, do Teorema 2.2.8 temos que:

$$a' = 180^\circ - \hat{A} \quad (3.23)$$

$$b' = 180^\circ - \hat{B} \quad (3.24)$$

$$c' = 180^\circ - \hat{C} \quad (3.25)$$

Assim, substituindo as igualdades (3.23), (3.24) e (3.25) em (3.22), obtemos que:

$$\cos(180^\circ - \hat{A}) = \cos(180^\circ - \hat{B}) \cdot \cos(180^\circ - \hat{C}) + \sin(180^\circ - \hat{B}) \cdot \sin(180^\circ - \hat{C}) \cdot \cos(180^\circ - a)$$

donde,

$$-\cos \hat{A} = (-\cos \hat{B}) \cdot (-\cos \hat{C}) + \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \cdot (-\cos a)$$

e, portanto,

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \sin \hat{B} \cdot \sin \hat{C} \cdot \cos a.$$

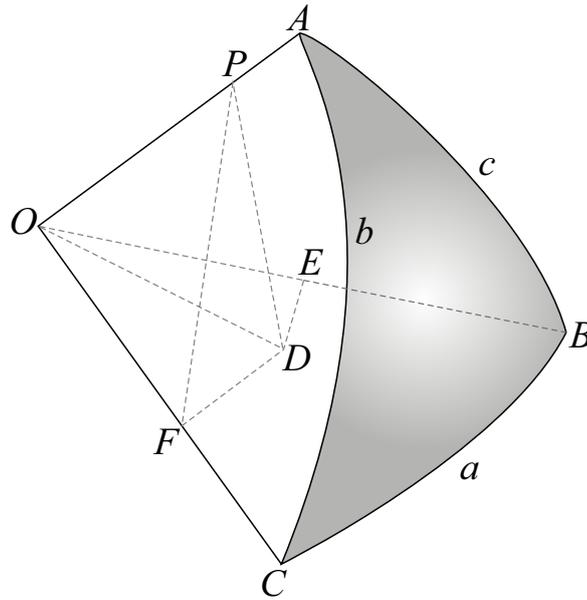
As demais relações são obtidas de modo análogo. ■

3.2.2 Lei dos senos para triângulos esféricos

Teorema 3.1.12 *Em todo triângulo esférico, os senos dos ângulos são proporcionais aos senos dos lados opostos:*

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sin a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sin b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sin c}.$$

Demonstração: Consideremos o triângulo esférico ABC , sobre a superfície esférica de centro O . Tomemos um ponto P sobre o raio \overline{OA} . Seja PD a perpendicular sobre o plano OBC , traçada a partir de P , e E, F os pés das perpendiculares traçadas por D sobre os raios \overline{OB} e \overline{OC} , respectivamente.

Figura 3.26: A reta PD

Assim, como as retas PD e DE são ambas ortogonais ao raio \overline{OB} , o plano definido por estas retas é perpendicular a \overline{OB} e, portanto, a reta PE desse plano é perpendicular a \overline{OB} . Da mesma forma, a reta PF é perpendicular a \overline{OC} . Conseqüentemente, os ângulos \widehat{PED} e \widehat{PFD} são congruentes aos ângulos internos \hat{B} e \hat{C} .

Portanto, usando o triângulo $\triangle OPE$ temos que:

$$\text{sen } c = \frac{PE}{OP} \quad (3.26)$$

e, usando o triângulo $\triangle PED$ temos que:

$$\text{sen } \hat{B} = \frac{PD}{PE} \quad (3.27)$$

Multiplicando membro a membro as igualdades (3.26) e (3.27) obtemos que:

$$\text{sen } c \cdot \text{sen } \hat{B} = \frac{PD}{OP}. \quad (3.28)$$

Analogamente, usando os triângulos $\triangle OPE$ e $\triangle PFD$, chegaremos que:

$$\text{sen } b \cdot \text{sen } \hat{C} = \frac{PD}{OP}. \quad (3.29)$$

Logo,

$$\text{sen } b \cdot \text{sen } \hat{C} = \text{sen } c \cdot \text{sen } \hat{B}, \quad (3.30)$$

donde,

$$\frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } b} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } c}.$$

Agora, considerando um ponto Q sobre o raio \overline{OB} e realizando uma construção inteiramente análoga, teremos que:

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \hat{C}}{\text{sen } c}$$

o que conclui a demonstração. ■

3.3 Triângulos esféricos retângulos

Nos triângulos esféricos retângulos além do ângulo reto, devemos conhecer mais dois de seus elementos para que seja possível a sua resolução.

As fórmulas de resoluções desses triângulos serão mostradas no resultado seguinte:

Teorema 3.3.13 *Dado um triângulo esférico ABC retângulo em \hat{C} , então valem as seguintes relações:*

$$(i) \text{ sen } a = \text{sen } \hat{A} \cdot \text{sen } c$$

$$(vi) \text{ sen } b = \text{sen } \hat{B} \cdot \text{sen } c$$

$$(ii) \text{ tg } a = \text{tg } \hat{A} \cdot \text{sen } b$$

$$(vii) \text{ tg } b = \text{tg } \hat{B} \cdot \text{sen } a$$

$$(iii) \text{ tg } a = \cos \hat{B} \cdot \text{tg } c$$

$$(viii) \text{ tg } b = \cos \hat{A} \cdot \text{tg } c$$

$$(iv) \cos c = \cos a \cdot \cos b$$

$$(ix) \cos c = \cotg \hat{A} \cdot \cotg \hat{B}$$

$$(v) \cos \hat{A} = \text{sen } \hat{B} \cdot \cos a$$

$$(x) \cos \hat{B} = \text{sen } \hat{A} \cdot \cos b$$

onde a , b e c são as medidas dos respectivos lados opostos aos vértices A , B e C .

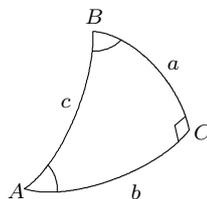


Figura 3.27: Triângulo esférico ABC retângulo em C

Demonstração: Seja ABC um triângulo esférico retângulo em C . Pela lei dos senos temos que:

$$\frac{\text{sen } \hat{A}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \hat{B}}{\text{sen } b} = \frac{1}{\text{sen } c}.$$

donde, teremos:

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} c \quad (i)$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} c \quad (vi)$$

Por outro lado, escrevendo a lei dos cossenos para o lado c temos:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos \hat{C}$$

como $\cos \hat{C} = \cos 90^\circ = 0$, segue que:

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b \quad (iv)$$

Agora, usando a lei dos cossenos para ângulos temos:

$$\cos \hat{A} = -\cos \hat{B} \cdot \cos \hat{C} + \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} \hat{C} \cdot \cos a \quad (3.31)$$

$$\cos \hat{B} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{C} + \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{C} \cdot \cos b \quad (3.32)$$

$$\cos \hat{C} = -\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} + \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \cos c \quad (3.33)$$

Como $\cos \hat{C} = 0$ e $\operatorname{sen} \hat{C} = 1$, segue por (3.31) e (3.32) que:

$$\cos \hat{A} = \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \cos a \quad (v)$$

$$\cos \hat{B} = \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \cos b \quad (x)$$

Além disso, obtemos de (3.33) que:

$$\cos \hat{A} \cdot \cos \hat{B} = \operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \cos c$$

e, conseqüentemente,

$$\cos c = \cotg \hat{A} \cdot \cotg \hat{B} \quad (ix)$$

Agora, como $\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$, usando as relações (i) e (v) temos:

$$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} c}{\frac{\cos \hat{A}}{\operatorname{sen} \hat{B}}} = \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} c$$

e, por (vi) chegamos que:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} b \quad (ii)$$

Analogamente, usando as relações (i), (vi) e (x) obteremos:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} \hat{B} \cdot \operatorname{sen} a \quad (vii)$$

Por outro lado, como $\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{cos} c}$, usando (i) e (iv) temos:

$$\operatorname{tg} c = \frac{\frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} \hat{B}}}{\operatorname{cos} b \cdot \operatorname{cos} a} = \frac{\operatorname{tg} b}{\operatorname{sen} \hat{B} \cdot \operatorname{cos} a}$$

e, por (v) concluímos que:

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{cos} \hat{A} \cdot \operatorname{tg} c \quad (\text{viii})$$

Finalmente, por (i) temos que $\operatorname{sen} \hat{A} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c}$ e por (iv) que $\operatorname{cos} b = \frac{\operatorname{cos} c}{\operatorname{cos} a}$, usando isto em (x) teremos:

$$\operatorname{cos} \hat{B} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} c} \cdot \frac{\operatorname{cos} c}{\operatorname{cos} a} = \frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} c}$$

acarretando que:

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{cos} \hat{B} \cdot \operatorname{tg} c \quad (\text{iii})$$

o que conclui a demonstração. ■

Dado um triângulo esférico ABC retângulo em C , a relação

$$\operatorname{cos} c = \operatorname{cos} a \cdot \operatorname{cos} b$$

é conhecida como **teorema de Pitágoras para triângulos esféricos**.

3.3.1 Regras de Neper

Para facilitar a obtenção das dez relações mostradas no Teorema 3.3.13, o matemático inglês John Neper (1550 - 1617) estabeleceu duas regras recorrendo-se ao seguinte artifício:

Dado um triângulo esférico ABC retângulo em C , escrevemos seus elementos em uma circunferência, excluindo o ângulo reto \hat{C} , na ordem em que se encontram no triângulo, substituindo o lado c e os ângulos \hat{A} e \hat{B} por seus complementos, conforme mostrado na figura.

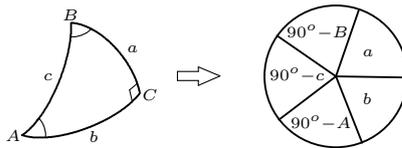


Figura 3.28: Artifício de Neper

Escolhe-se qualquer um dos cinco elementos na circunferência e denomina-o de

meio, os dois com fronteira comum são os *adjacentes* e os dois restantes os *opostos*.

Então, as regras de Neper são:

Regra 1 *O seno do meio é igual ao produto das tangentes dos adjacentes.*

Regra 2 *O seno do meio é igual ao produto dos cossenos dos opostos.*

Considerando-se cada um dos cinco elementos escritos na circunferência da Figura 3.28 como meio e aplicando as regras acima, obteremos as dez fórmulas fundamentais dos triângulos esféricos retângulos mostradas no Teorema 3.3.13. Por exemplo, tomando-se b como meio e, aplicando a Regra 1, teremos que:

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{tg}(90^\circ - \hat{A}) \cdot \operatorname{tg} a$$

e, conseqüentemente, chegaremos a (ii):

$$\operatorname{tg} a = \operatorname{tg} \hat{A} \cdot \operatorname{sen} b.$$

3.3.2 Leis dos Quadrantes

Algumas das relações obtidas anteriormente para triângulos esféricos retângulos nos conduzem às propriedades seguintes, conhecidas como **Leis dos Quadrantes**.

Teorema 3.3.14 *Seja ABC um triângulo esférico retângulo em C . Então o lado a e o ângulo \hat{A} (também o lado b e o ângulo \hat{B}) estão no mesmo quadrante.*

Demonstração: Usando a fórmula (v) do Teorema 3.3.13 podemos escrever que $\operatorname{sen} \hat{B} = \frac{\cos \hat{A}}{\cos a}$. Como $\operatorname{sen} \hat{B}$ é sempre positivo, uma vez que $\hat{B} < 180^\circ$, então $\cos \hat{A}$ e $\cos a$ terão sempre o mesmo sinal. Assim, se $\cos \hat{A}$ e $\cos a$ forem positivos, então \hat{A} e a são ambos menores do que 90° ; por outro lado, se $\cos \hat{A}$ e $\cos a$ forem negativos, então \hat{A} e a são ambos maiores do que 90° . Portanto, a e \hat{A} estão no mesmo quadrante.

Analogamente, usando fórmula (x) do Teorema 3.3.13, obteremos que b e \hat{B} estão no mesmo quadrante. ■

Teorema 3.3.15 *Seja ABC um triângulo esférico retângulo em C . Se $c < 90^\circ$, então os lados a e b estão no mesmo quadrante; se $c > 90^\circ$, então os lados a e b estão em quadrantes diferentes.*

Demonstração: Usando fórmula (iv) do Teorema 3.3.13, temos que se $c < 90^\circ$, então $\cos c$ é positivo; daí, $\cos a$ e $\cos b$ possuem o mesmo sinal, logo a e b estão no mesmo quadrante. Se $c > 90^\circ$, então $\cos c$ é negativo; daí, $\cos a$ e $\cos b$ possuem sinais diferentes, logo a e b estão em quadrantes diferentes. ■

4 A TRIGONOMETRIA E O GLOBO TERRESTRE

Neste capítulo será estudado o Globo Terrestre, onde usaremos as coordenadas geográficas de um ponto, para serem analisadas algumas situações que envolvem distâncias sobre a superfície terrestre, havendo assim necessidade de utilização dos conceitos de Geometria e Trigonometria Esférica.

4.1 O globo terrestre

O planeta Terra não é uma esfera perfeita, e sim aproximadamente uma *elipsóide*, uma vez que é achatada nos polos. No entanto, o valor desse achatamento é extremamente pequeno, o que nos permite, para efeitos de cálculos, desprezá-lo e considerar a Terra como se fosse uma esfera. Desse modo, a superfície da Terra passa a ser considerada daqui por diante como um globo: **o globo terrestre**.

O eixo de rotação do globo terrestre intersecta sua superfície nos pontos N e S , os quais representam o **Polo Norte** e o **Polo Sul**, respectivamente. A reta determinada por N e S é chamada o **eixo polar**.

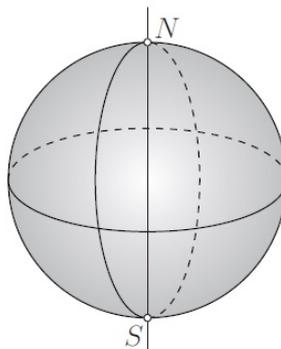


Figura 4.29: Eixo polar.

O plano que passa pelo centro da superfície terrestre e é perpendicular ao eixo polar chama-se o **plano do Equador**. O **Equador** é a circunferência máxima obtida pela interseção do plano do Equador com a superfície terrestre.

O plano do Equador divide a superfície terrestre em dois hemisférios: o **Hemisfério Norte** (que contém o Polo Norte) e o **Hemisfério Sul** (que contém o Polo Sul).

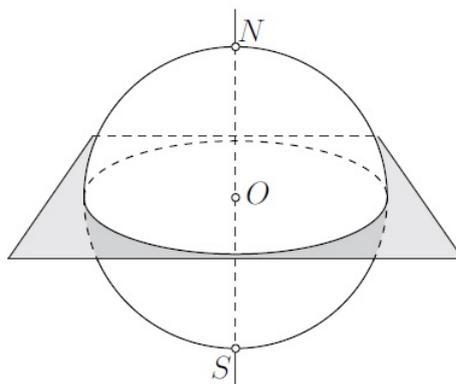


Figura 4.30: Equador

Os **paralelos** são circunferências geradas pelas secções da superfície terrestre através de planos paralelos (ou coincidentes) ao plano do Equador.

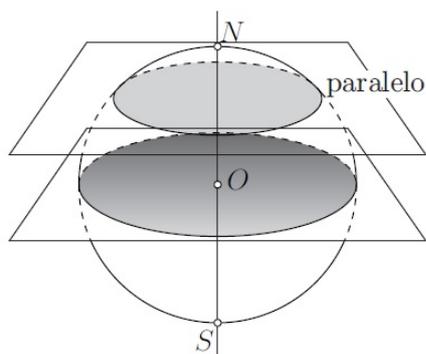


Figura 4.31: Paralelo

Os paralelos notáveis são:

- Equador
- Trópico de Câncer
- Trópico de Capricórnio
- Círculo Polar Ártico
- Círculo Polar Antártico

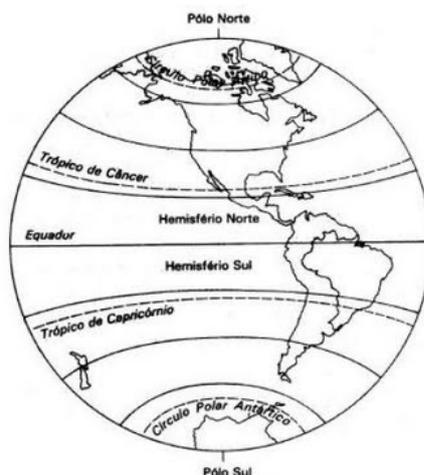


Figura 4.32: Paralelos Notáveis

Os **meridianos** são semicircunferências que ligam os Polos Norte e Sul por meio de arcos de circunferências máximas. Convém ressaltar que os meridianos, ao contrário dos paralelos, não são circunferências. Além disso, eles estão contidos em planos perpendiculares ao plano do Equador. O meridiano mais notável é o de **Greenwich**, nome de uma localidade próxima a Londres, onde está instalado um observatório astronômico.



Figura 4.33: Meridiano de Greenwich

4.1.1 Coordenadas geográficas

O sistema utilizado para localizar um determinado ponto na superfície terrestre são as coordenadas geográficas: **latitude** e **longitude**.

Dado um ponto P na superfície terrestre, a **latitude** desse ponto P é a medida do arco de meridiano que passa por P situado entre o paralelo que contém P e o Equador. A latitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a $90^\circ N$ (norte) ou de

0° a $90^\circ S$ (sul), conforme esse ponto pertença ao Hemisfério Norte ou ao Sul. Enquanto, a **longitude** de P é a medida do arco de paralelo que passa por P situado entre o meridiano que contém P e o meridiano de Greenwich. A longitude é expressa em graus, minutos e segundos e se mede de 0° a $180^\circ E$ (leste) ou de 0° a $180^\circ W$ (oeste), conforme o ponto esteja a Leste (E) ou a Oeste (W) do meridiano de Greenwich.

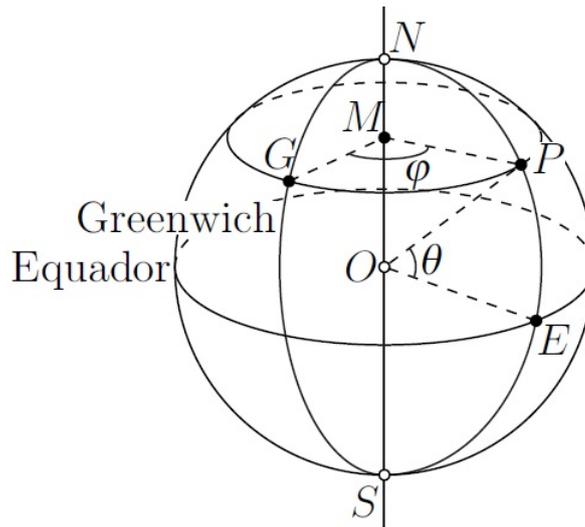


Figura 4.34: Coordenadas Geográficas

Na figura 4.34 temos que $\theta = \widehat{EOP}$ é a latitude de P , enquanto que $\varphi = \widehat{GMP}$ é a longitude de P .

Além disso, observe que pontos sobre um mesmo paralelo possuem latitudes iguais, assim como pontos sobre um mesmo meridiano possuem longitudes iguais.

Portanto, o Equador e o meridiano de Greenwich são como uma par de eixos coordenados na superfície terrestre.

4.1.2 Calculando distâncias sobre o globo terrestre

Sendo a forma do planeta Terra semelhante a uma esfera, os problemas de determinação de rotas na *Navegação* aparecem como uma das aplicações da Trigonometria Esférica, onde a partir das coordenadas geográficas, podemos utilizar as relações dos triângulos esféricos para calcular a distância entre pontos na superfície terrestre.

Assim, dados dois pontos A e B na superfície terrestre, os meridianos que passam por esses pontos e o menor arco de circunferência máxima que une esses pontos, formam dois triângulos esféricos ANB e ASB . Quando um navio ou um avião desloca-se de um ponto A para um ponto B na superfície terrestre, o seu **rumo**, em cada instante, é o ângulo que o arco de circunferência máxima \widehat{AB} forma com o meridiano do navio ou avião no instante considerado, medido a partir do norte no sentido horário.

Se, por exemplo, um navio deve ir de A para B , o rumo inicial, em A , é o ângulo \widehat{NAB} e o rumo de chegada é o ângulo \widehat{NBC} , no ponto B .

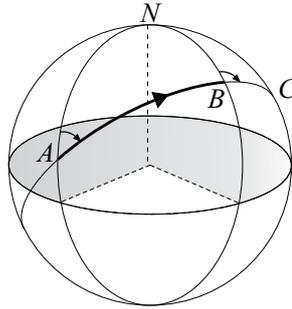
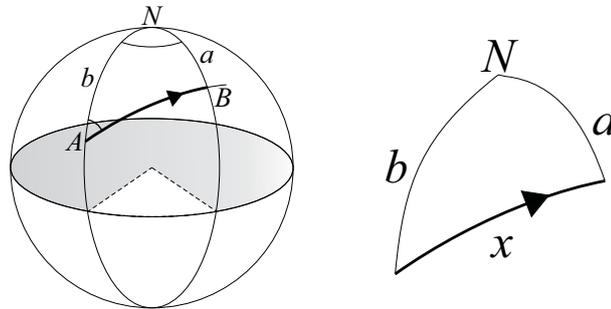


Figura 4.35: Rumo

Agora, veremos alguns problemas:

Problema 1: Determine a distância percorrida em uma viagem de Honolulu ($\theta_A = 21^\circ 18,3' \text{ N}$; $\varphi_A = 157^\circ 52,3' \text{ W}$) para São Francisco ($\theta_B = 37^\circ 47,5' \text{ N}$; $\varphi_B = 122^\circ 25,7' \text{ W}$), ao longo de uma circunferência máxima.

Resolução: Na figura seguinte, A e B representam Honolulu e São Francisco, respectivamente.



Com os dados do enunciado e a figura, temos que:

- $a = 90^\circ - 37^\circ 47,5' = 52^\circ 12,5'$
- $b = 90^\circ - 21^\circ 18,3' = 68^\circ 41,7'$
- $\widehat{ANB} = 157^\circ 52,3' - 122^\circ 25,7' = 35^\circ 26,6'$

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo esférico ANB obtemos que:

$$\cos \widehat{AB} = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos \widehat{ANB}$$

isto é,

$$\cos \widehat{AB} = \cos(52^\circ 12,5') \cdot \cos(68^\circ 41,7') + \operatorname{sen}(52^\circ 12,5') \cdot \operatorname{sen}(68^\circ 41,7') \cdot \cos(35^\circ 26,6')$$

Logo,

$$\widehat{AB} = \arccos(0,82245) = 34^\circ 40', 2'.$$

Supondo que o raio da Terra é de aproximadamente 6371 km, temos que a distância pedida é aproximadamente:

$$d(A, B) = \frac{34^\circ 40', 2'}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6371 = 3855 \text{ km}$$

◇

Problema 2: Determine o rumo inicial de uma viagem de Honolulu ($\theta_A = 21^\circ 18', 3'$ N; $\varphi_A = 157^\circ 52', 3'$ W) para São Francisco ($\theta_B = 37^\circ 47', 5'$ N; $\varphi_B = 122^\circ 25', 7'$ W), ao longo de uma circunferência máxima.

Resolução: Devemos encontrar a medida do ângulo \widehat{BAN} . Dessa forma, considerando os dados obtidos no problema 1 e aplicando a lei dos senos no triângulo esférico ANB temos que:

$$\frac{\text{sen } \widehat{BAN}}{\text{sen } a} = \frac{\text{sen } \widehat{ANB}}{\text{sen } \widehat{AB}}$$

isto é,

$$\frac{\text{sen } \widehat{BAN}}{\text{sen}(52^\circ 12', 5')} = \frac{\text{sen}(35^\circ 26', 6')}{\text{sen}(34^\circ 40', 2')}$$

Logo,

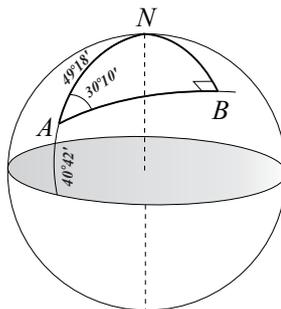
$$\widehat{BAN} = \arcsen(0,80559) = 53^\circ 40'.$$

◇

Problema 3: O rumo inicial para uma viagem de New York ($\theta = 40^\circ 42'$ N; $\varphi = 74^\circ 1'$ W) ao longo de uma circunferência máxima é de $30^\circ 10'$. Calcule a menor distância que se irá passar do polo Norte.

Resolução: Devemos encontrar a menor distância possível de um ponto B da rota descrita ao polo Norte. A menor distância da rota ao polo Norte N é medida ao longo do meridiano que lhe é perpendicular.

Na figura A representa a cidade de New York.



Desse modo, teremos que calcular a distância entre B e N .

De acordo com o enunciado temos que:

- $\widehat{AN} = 90^\circ - 40^\circ 42' = 49^\circ 18'$
- $\widehat{NAB} = 30^\circ 10'$
- $\widehat{ABN} = 90^\circ$

Pelas regras de Neper, temos que:

$$\text{sen } \widehat{BN} = \text{sen } \widehat{NAB} \cdot \text{sen } \widehat{AN}$$

isto é,

$$\text{sen } \widehat{BN} = \text{sen}(30^\circ 10') \cdot \text{sen}(49^\circ 18')$$

Logo,

$$\widehat{BN} = \arcsen(0,38098) = 22^\circ 23,7'$$

Supondo que o raio da Terra é de aproximadamente 6371 km, temos que a distância pedida é aproximadamente:

$$d(A, B) = \frac{22^\circ 23,7'}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 6371 = 2490 \text{ km}$$

◇

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A trigonometria esférica foi fundamental para o desenvolvimento da Astronomia, Navegação e Geografia, recebendo a atenção de renomados matemáticos. Devido às peculiaridades de suas propriedades, os triângulos esféricos geram fatos intrigantes aos iniciantes, despertam um interesse no estudo da Geometria Esférica.

Neste trabalho foram tratados fatos relevantes sobre os triângulos esféricos, onde destacamos suas principais propriedades. Além disso, desenvolvemos as principais relações da trigonometria esférica, como as quais resolvemos problemas envolvendo cálculo de distâncias e ângulos sobre a superfície terrestre, criando, desse modo, uma conexão entre Matemática e Geografia.

Portanto, espero que este trabalho seja mais uma contribuição para a Educação Básica, gerando importantes ligações de ideias geométricas com conceitos geográficos que, quando trabalhadas em contexto, conduzem a uma melhor compreensão e aprendizagem do tema.

REFERÊNCIAS

- [1] AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. Tradução: João Bosco Pitombeira. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção do Professor de Matemática).
- [2] ALVES, Sérgio. **A Geometria do Globo Terrestre**. II Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, 2004. Disponível em: < www.bienasbm.ufba.br/M29.pdf >. Acesso em: 25 Mar. 2014.
- [3] ANDRADE, Plácido; BARROS, Abdênago. **Introdução à Geometria Projetiva**. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010. (Coleção Textos Universitários).
- [4] ARAÚJO, Paulo Ventura. **Geometria Diferencial**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012. (Coleção Matemática Universitária).
- [5] AYRES JR., Frank. **Trigonometria Plana e Esférica**. Tradução: Mario Pinto Guedes. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S. A., 1968. (Coleção Schaum).
- [6] AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira. **Geometria Euclidiana Espacial**. [S.l.: s.n.], 1999.
- [7] CARMO, Manfredo Perdigão; MORGADO, Augusto César; WAGNER, Eduardo. **Trigonometria, Números Complexos**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).
- [8] CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **Introdução à Geometria Espacial**. 4. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).
- [9] EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.
- [10] FLEIUSS, Henrique. **Elementos de Trigonometria Esférica**. Rio de Janeiro: [s.n.], 1988.
- [11] INSTITUTO DE CIENCIAS Y HUMANIDADES. **Trigonometría Plana y Esférica e Introducción al Cálculo**. 2. ed. Lima - Perú: Lumbreras Editores, 2012.
- [12] LIMA, Elon Lages. **Isometrias**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. (Coleção do Professor de Matemática).
- [13] _____. **Meu Professor de Matemática e Outras Histórias**. 3. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2011. (Coleção do Professor de Matemática).

- [14] MOISE, Edwin E. **Elementary Geometry from an Advanced Standpoint**. 3. ed. [S.l.]: Addison Wesley Publishing Co., 1990.