UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

WILKLER GARCIA MAGALHÃES

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE PREPARAÇÃO PARA O ENEM

CAMPO GRANDE - MS

FEVEREIRO DE 2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MATO GROSSO DO SUL
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL
MESTRADO PROFISSIONAL

WILKLER GARCIA MAGALHÃES

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE PREPARAÇÃO PARA O ENEM

ORIENTADORA: Prof.ª Dr.ª Lilian Milena Ramos Carvalho

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional do Instituto de Matemática – INMA/UFMS, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

CAMPO GRANDE - MS

FEVEREIRO DE 2015

A MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ESTRATÉGIA DE PREPARAÇÃO PARA O ENEM

WILKLER GARCIA MAGALHÃES

Dissertação submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional, Instituto de Matemática, da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre.

Aprovado pela Banca Examinadora:

Prof.ª Dr.ª Lilian Milena Ramos Carvalho - UFMS

Prof.ª Dr.ª Selma Helena Marchiori Hashimoto - UFGD

Prof.ª Dr.ª Rúbia Mara de Oliveira Santos - UFMS

CAMPO GRANDE - MS

FEVEREIRO DE 2015

AGRADECIMENTOS

Ao fim desta caminhada, aproveito para agradecer àqueles que, direta ou indiretamente, influenciaram nesta conquista, por isso agradeço:

A Deus, por me abençoar com saúde e forças necessárias para enfrentar os obstáculos, concedendo mais uma oportunidade de crescimento em minha vida.

A minha esposa Elaine Cristina dos Reis, pelo apoio e compreensão. Todo meu amor a você que, durante essa jornada, deu-me o maior presente de todos, nossa filha Helena.

Aos meus pais, Sebastião Garcia Magalhães e Elizabeth Camargo Magalhães, pela dedicação em proporcionar-me os princípios e valores fundamentais para minha formação.

Ao meu irmão Franklin Garcia Magalhães, pela amizade e cumplicidade em todos os momentos.

A minha orientadora Prof.ª Dr.ª Lilian Milena Ramos Carvalho, pelos valiosos conselhos e sugestões que contribuíram na realização deste trabalho.

A todos os professores do PROFMAT, pelo profissionalismo, incentivo e qualidade das aulas.

Aos colegas do PROFMAT, pelos momentos de convivência e conhecimentos compartilhados. Em particular a Eder Regiolli Dias, Edgard José dos Santos Arinos, Silvio Rogério Alves Esquinca, Viviam Ciarini de Souza Amorim e Wagner da Silva Maciel pela amizade e companheirismo.

Aos meus alunos que contribuíram, significativamente, para a produção deste trabalho. Todo o meu carinho e dedicação a vocês que me motivam à excelência profissional.

Aos meus amigos, Waleska Rodrigues Martins e Sérgio Ricardo Oliveira Martins, pela amizade e apoio.

A CAPES, pelo apoio financeiro.

Por fim, a todos que contribuíram para que essa conquista fosse possível.

RESUMO

Neste trabalho, a Modelagem Matemática é utilizada como uma possibilidade de preparar o aluno do Ensino Médio para o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Busca-se no processo, não somente, a aprendizagem do conteúdo matemático, mas também a motivação pela disciplina através de sua aplicabilidade em situações reais, desenvolvendo, por consequência, as habilidades e competências avaliadas no exame. Inicialmente, o conceito e as etapas a serem seguidas no processo de Modelagem Matemática são abordados na visão de diferentes autores para um melhor entendimento do assunto. Posteriormente, são apresentadas quatro aplicações de Modelagem Matemática em turmas da 1ª série do Ensino Médio, tendo questões do ENEM adaptadas como temas geradores. As aplicações são descritas de forma que o leitor possa compreender cada etapa do processo de Modelagem Matemática e as tarefas dos agentes envolvidos (professor e aluno). Por fim, são identificadas as habilidades e competências em Matemática, presentes na Matriz de Referência do ENEM, que foram desenvolvidas nos alunos através das aplicações realizadas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Habilidades, Competências, ENEM.

ABSTRACT

In this work, the Mathematical Modeling is used as a possibility to prepare high school students for the National Examination of Secondary Education (ENEM). Search in the process, not only the learning of mathematical content, but also the motivation for this course through its applicability in real situations, developing, therefore the skills and competencies assessed in the examination. Initially, the concept and the steps to be followed in the mathematical modeling process are discussed in view of different authors for a better understanding of the subject. They are subsequently submitted four applications of Mathematical Modeling in classes of the 1st year of high school, and ENEM of questions adapted as generating themes. Applications are described so that the reader can understand each step of the mathematical modeling process and the tasks of those involved (teacher and student). Finally, the skills and competencies are identified in Mathematics, present in ENEM Reference Matrix, which were developed in students through the investments made.

Keywords: Mathematical Modeling, Skills, Competencies, ENEM.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE QUADROS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Qual professor de matemática do Ensino Médio não se deparou com a dúvida sobre como trabalhar a sua disciplina com seus alunos em uma feira de ciências na sua escola? Ou, durante o ano letivo, como fazer com que seus alunos se tornem agentes mais ativos no processo de aprendizagem da disciplina? Como inserir um novo conteúdo da matemática fugindo um pouco das tradicionais metodologias? Ou ainda, como fazer com que o aluno se sinta motivado e preparado a enfrentar uma desgastante prova com 45 questões contextualizadas de matemática como a prova do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM)?

O fato é que depois que o ENEM se tornou um dos principais meios de seleção para se ingressar nas Instituições Públicas de Ensino Superior do país, os professores se viram na obrigação de rever suas metodologias para desenvolver em seus alunos as habilidades e competências exigidas nesta prova. Por se tratar de uma avaliação que extrai do aluno a necessidade de relacionar o conhecimento adquirido, em sala de aula, com o mundo em que vive, os professores do Ensino Médio e de cursos pré-vestibulares passaram a exercitar com seus alunos questões mais contextualizadas e interdisciplinares. Porém, é comum vermos alunos que consideraríamos "bons em matemática" não irem tão bem no ENEM quanto imaginávamos. São assim considerados, apenas por serem acostumados a reproduzirem uma "receita", resolvendo contas armadas com agilidade, entretanto, mecanicamente, sem pensar na natureza do que está sendo calculado e sem uma significação para os números envolvidos.
Constata-se que em sua vida estudantil, não foi aprimorado o senso de interpretação de problemas matemáticos com situações ligadas ao seu cotidiano, o que realça a importância da matemática como uma ferramenta poderosa para a resolução de problemas reais. Um outro fator que leva os alunos a não ter um bom desempenho no ENEM é o curto espaço de tempo para a resolução das quarenta e cinco questões que compõem a área de Matemática e suas Tecnologias. A dificuldade é mais acentuada quando o vestibulando demora para retirar do texto os dados necessários para resolver situações em que o cálculo é relevante. Há ainda os alunos que possuem grande dificuldade no uso da linguagem matemática, desencadeando, assim, aversão à disciplina. Característica revelada naqueles que não veem aplicabilidade do que se estuda e por isso são desmotivados a se aprofundarem na matemática.

Por esses e outros motivos, estamos cada vez mais caminhando para uma educação em que o aprendizado na escola entre em consonância com a prática no ambiente domiciliar, profissional, entre outros. E que o conteúdo visto em sala de aula se revele de forma mais interessante para as crianças e adolescentes. Essa transformação se dá pela disposição do professor em planejar suas aulas de forma contextualizada, embora o mesmo poderá defrontar-se com alguns obstáculos como: tempo de execução das atividades, cumprimento integral do programa curricular, obrigatoriedade da utilização integral do livro didático ou apostilas (onde a cobrança dos pais se torna maior quando há um custo pelo material), entre outros. Apesar de tais dificuldades, o professor é ciente de que o acúmulo de informações transmitidas não se reflete numa aprendizagem significativa. Por essa razão, o PCN+: Ensino Médio, Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2002b) é justificado em função da necessidade do desenvolvimento de uma educação no Ensino Médio, em que professores e alunos sejam mais que meros cumpridores de listas de tópicos propostos. É sugerida, então, uma educação desafiadora, com sentido prático e efetivamente contextualizada no mundo do aluno e com a preocupação de que os autores sejam os envolvidos no processo da aprendizagem.

Imbuído nessa preocupação, esse trabalho tem o objetivo de apresentar a Modelagem Matemática como uma metodologia alternativa que possibilita despertar no aluno um maior interesse pela matemática, assim como prepará-lo para a prova do ENEM, desenvolvendo suas habilidades e competências.

A presente temática produziu uma dissertação a qual foi organizada em três capítulos.

Inicialmente, no *Capítulo 1,* o conceito de Modelagem Matemática é abordado na visão de diferentes autores que se dedicaram ao estudo do tema. Em seguida é apresentada a classificação dos modelos segundo Lachtermacher, Goldbarg e Bassanezi. O processo de se modelar é discutido no âmbito da educação matemática, trazendo sua contribuição no processo de ensino-aprendizagem assim como os obstáculos a serem enfrentados pelos professores da disciplina. As etapas do processo de Modelagem Matemática são descritas segundo Ribeiro, Bassanezi, Biembengut e Warwick, assim como as tarefas dos agentes envolvidos (professor e aluno) chamados de casos 1, 2 e 3 por Barbosa.

No *Capítulo 2*, são apresentadas quatro aplicações de Modelagem Matemática em turmas da 1º série de Ensino Médio, selecionadas como relatos de experiência em que questões do ENEM são utilizadas como temas geradores e adaptadas para a aplicação da Modelagem Matemática. As etapas seguidas em cada aplicação são descritas de forma que se possa entender todo o processo. No tópico *Considerações finais* é exposta uma comparação entre as aplicações contidas nesse trabalho e os casos descritos por Barbosa. Traz ainda quadros que resumem as aplicações.

Por fim, no *Capítulo 3*, é apresentada a conclusão do autor com base nas informações aqui contidas e nos resultados obtidos através das pesquisas e aplicações feitas. Um quadro expõe as Habilidades e Competências exigidas no ENEM que foram desenvolvidas nos alunos em cada aplicação descrita. Nas referências são apresentadas as obras consultadas e em seguida dois apêndices: o PCNEM e a Matriz de Referência do ENEM na área de Matemática e suas Tecnologias que norteiam os profissionais da educação, estabelecem as diretrizes para a disciplina de matemática e apresentam as habilidades e competências a serem desenvolvidas nos alunos.

CAPÍTULO 1: MODELAGEM MATEMÁTICA

1.1 O que é Modelagem Matemática?

Para o bom desenvolvimento de uma prática pedagógica é preciso ter a devida compreensão do que se propõe a realizar. Por isso, se fez necessária a pesquisa de diferentes pontos de vista de autores que se dedicaram ao estudo da Modelagem Matemática e, de acordo com suas definições, verificar possibilidades de sua aplicação em sala de aula.

Segundo Monteiro (1992), há dois grupos que utilizam a Modelagem Matemática: os que a concebem como um método de pesquisa em matemática e os que a concebem como um método pedagógico no processo de ensino e aprendizagem da matemática. No segundo grupo, que é o foco de nossa atenção, a autora entende a modelagem como um caminho para o ensino e a aprendizagem da matemática, no qual o aluno parte de uma realidade observada.

Já para Biembengut e Hein (2000, p. 12), Modelagem Matemática

> é o [...] processo que envolve a obtenção de um modelo, de modo que [...] um conjunto de símbolos e relações matemáticas que procura traduzir, de alguma forma, um fenômeno em questão ou problema de situação real, denomina-se modelo matemático.

D'Ambrósio (1986), em seu livro *Da realidade à ação*, define Modelagem Matemática da seguinte forma:

> O indivíduo é parte integrante e ao mesmo tempo, observador da realidade. Sendo que ele recebe informações sobre determinada situação e busca, através da reflexão, a representação dessa situação em grau de complexidade. Para se chegar ao modelo é necessário que o indivíduo faça uma análise global da realidade na qual tem sua ação, onde define estratégias para criar o mesmo, sendo esse processo caracterizado de modelagem.

D'Ambrósio caracteriza a Modelagem Matemática por meio da Figura 1.1.

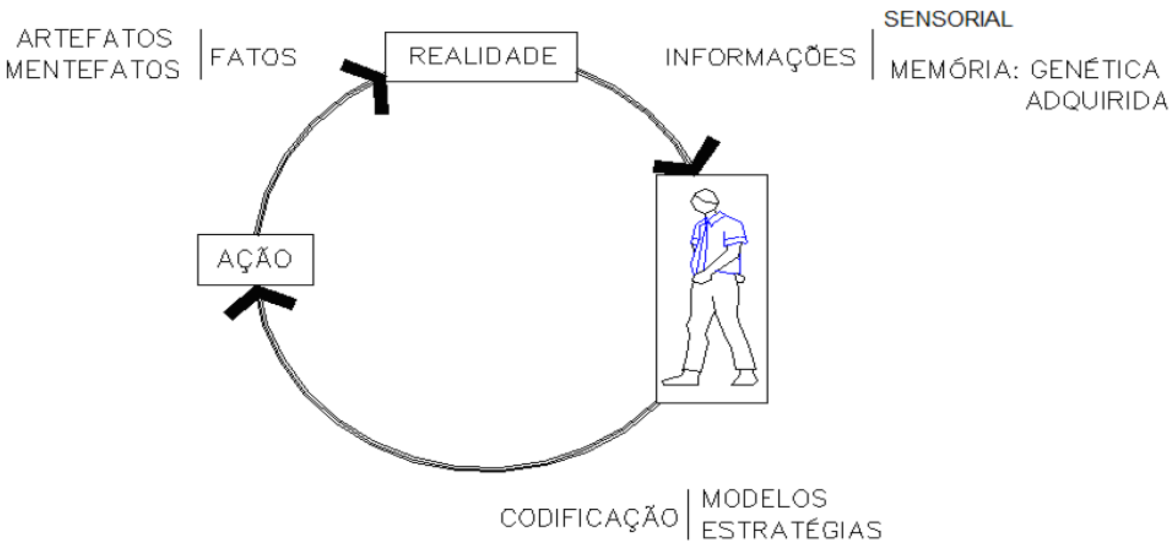


Figura 1.1: Esquema de Modelagem Matemática, segundo D'Ambrósio (1986)

Segundo o autor, a realidade é composta de artefatos (elementos concretos) e mentefatos (elementos abstratos). Quando os mentefatos, que resultam da ação, se incorporam à realidade, ela será modificada. Desta forma, a Modelagem Matemática pode ser entendida como uma dinâmica realidade-reflexão, resultando numa ação planejada através da construção de modelos sobre os quais o indivíduo opera.

Mclone (1976) *apud* Bassanezi (2004) define a Modelagem Matemática como:

> um processo dinâmico utilizado para a obtenção e validação de modelos matemáticos. É uma forma de abstração e generalização com a finalidade de previsão de tendências. A modelagem consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A modelagem é eficiente a partir do momento que nos conscientizamos que estamos sempre trabalhando com aproximações da realidade, ou seja, que estamos elaborando sobre representações de um sistema ou parte dele.

A ideia apresentada na obra de Bassanezi (2004, p. 44) está representada na Figura 1.2.

Figura 1.2: Esquema simplificado de Modelagem Matemática.

Na visão desse autor, as situações reais são convertidas e explicadas por meio de situações matematizadas. Nessa mesma perspectiva, Dale Bean (2001), destaca a ideia do "modelo matemático" como uma aproximação da realidade. De acordo com Bean (2001, p. 55):

> [...] a essência da modelagem matemática consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras, e representadas em termos matemáticos (o modelo). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto à crítica e ao aperfeiçoamento.

Berry e O'Shea (1982) se referem à Modelagem Matemática como um processo que inicia com a descrição de um problema de origem não matemática para chegar a uma linguagem matemática.

Burak (1987) vê a Modelagem Matemática como um conjunto de procedimentos cujo objetivo é construir um paralelo para tentar explicar, matematicamente, os fenômenos do seu cotidiano, ajudando o homem a fazer predições e a tomar decisões.

Para Mendonça (1993), a Modelagem Matemática é um processo de sentido global que se inicia numa situação-problema, na qual se procura a solução por meio de um modelo matemático que traduzirá, em linguagem matemática, as relações naturais do problema de origem, bem como buscará a verificação e a validação ou não dos dados reais.

Para Barbosa (2004), Modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a problematizar e investigar, por meio da Matemática, situações com referência na realidade.

Araújo (2004) referencia sua perspectiva na *Educação Matemática Critica*, e se refere ao desenvolvimento da "*materacia*"; ou seja, propõe que o ensino da matemática não se restrinja ao desenvolvimento de cálculos matemáticos, mas também se ocupe de sua utilização e da participação crítica dos alunos como cidadãos na sociedade. Para a autora, a Modelagem Matemática na Educação Matemática se define:

> [...] como uma abordagem por meio da matemática, de um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Critica embase o desenvolvimento do trabalho. (ARAUJO, 2004, p. 91)

Cury (2004) parece explicar e estar de acordo com esta visão quando propõe que as *entidades*, com foco no trabalho de *Modelagem Matemática* na Educação Matemática, devem emergir a partir de "investigação de situações concretas trazidas por outras áreas do conhecimento que não a matemática" (CURY, 2004, p. 66).

O grau de complexidade de um modelo matemático é que tornará a Modelagem viável, ou não, em determinado nível de Ensino. Por esse motivo é importante conhecer os tipos de modelo para os quais podem ser construídos no âmbito do ensino-aprendizagem.

1.2 Classificação dos Modelos

Para representar uma parte da realidade através de um objeto, de uma imagem ou de um conjunto de símbolos e relações, é preciso entender à natureza dos chamados modelos.

Quanto à natureza dos modelos, encontram-se diversos autores que apresentam arquiteturas distintas, entre eles Lachtermacher (2002) que apresenta três tipos:

- Modelos físicos - são protótipos, muito utilizados na engenharia, que representam proporcionalmente aeronaves e imóveis.

- Análogos - representam as relações através de diferentes meios. Como os mapas rodoviários que representam as rodovias de uma região através de traços sobre um papel e um marcador do tanque de combustível que representa, por meio de uma escala circular, a quantidade de combustível existente no tanque.

- Modelos matemáticos ou simbólicos - são modelos cujas grandezas são representadas por variáveis de decisão e as relações entre elas por expressões matemáticas. Sendo assim, os modelos matemáticos precisam de informações quantificáveis. Um modelo simbólico precisa conter um conjunto suficiente de detalhes, de tal maneira que os resultados atinjam suas necessidades, que o modelo seja consistente com os dados e que possa ser analisado no tempo disponível à sua concepção.

Já Goldbarg (2000) classifica os modelos quanto à natureza de acordo com a Figura 1.3.

$$\textit{Modelos}\begin{cases}\textit{Concretos}\begin{cases}\textit{Físicos}\\ \textit{Geométricos}\end{cases}\\ \\ \textit{Abstratos}\begin{cases}\textit{Matemáticos}\\ \textit{Lógicos}\\ \textit{Esquemáticos}\end{cases}\end{cases}$$

Figura 1.3: Uma classificação geral dos modelos, segundo Goldbarg (2000, p. 9).

Os autores citados apontam os modelos matemáticos, foco desse trabalho, como sendo uma tipologia de modelos e corroboram apenas no aspecto abstrato e simbólico dos mesmos.

De uma forma mais específica, Bassanezi (2004, p. 20) destaca que os modelos matemáticos podem ser formulados de acordo com a natureza dos fenômenos ou situações analisadas e classificadas conforme o tipo de matemática utilizada em:

- Linear ou não-linear - quando as equações básicas apresentam tais características;
- Estático - quando representa a forma do objeto (por exemplo, a forma geométrica de um alvéolo); ou dinâmico a qual simula variações de estágios do fenômeno (por exemplo, o crescimento populacional de uma colmeia).
- Educacional - quando é baseado em um número pequeno ou simples de suposições, tendo, quase sempre, soluções analíticas. Geralmente, esses modelos não representam

a realidade com o grau de fidelidade adequada para se fazer previsões. Entretanto, a virtude de tais modelos está na aquisição de experiência e no fornecimento de ideias para a formulação de modelos mais adequados à realidade estudada; ou Aplicativo, que se baseia em hipóteses realísticas e, geralmente, envolve inter-relações de um grande número de variáveis, fornecendo, em geral, sistemas de equações com numerosos parâmetros. Neste caso, um tratamento analítico pode ser impossível e os métodos utilizados para obtenção das soluções devem ser computacionais. E quanto mais complexo for o modelo, mais difícil será mostrar sua validade.

- Estocástico ou Determinístico - de acordo com o uso ou não de fatores aleatórios nas equações. Os modelos estocásticos descrevem a dinâmica de um sistema em termos probabilísticos, e os modelos determinísticos são baseados na suposição de que se existem informações suficientes em um determinado instante, ou num estágio de algum processo, então todo o futuro do sistema pode ser previsto precisamente.

1.3 Sobre o processo de se modelar:

Apesar das várias definições de Modelagem Matemática apresentadas nesse estudo, a ideia de que seja um método de pesquisa em matemática que parte de problemas reais está destacada em boa parte pelos autores, mas que, principalmente, constitui-se num processo pedagógico para o ensino e aprendizagem da matemática.

E é com esse "olhar" que Barbosa (2004) introduz uma discussão diferente quando propõe a modelagem como um ambiente de aprendizagem.

> Modelagem é um ambiente de aprendizagem no quais os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade. (BARBOSA, 2004, p. 66)

Barbosa, assim como outros autores, salienta que as atividades devem ter referências na realidade, devem ser interdisciplinares, distinguindo-se pelo fato de que não devem ser inventadas ou fictícias.

Algumas características do processo de ensino-aprendizagem são apresentadas quando Biembengut (1997) destaca que o processo de modelagem pode, sob alguns aspectos, ser considerado um processo artístico. Na perspectiva da autora, para elaborar um modelo, além de conhecimento apurado de Matemática, o modelador deve ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar o contexto, discernir que conteúdo matemático melhor se adapta para descrevê-lo, além de senso lúdico para "jogar" com as variáveis envolvidas.

Autores como Machado Júnior (2005), Barbosa (2004a), Barbosa e Santos (2007) , Barasuol (2006), baseados em Blum (1995), apresentam cinco argumentos para a inclusão da modelagem no currículo.

1) Motivação - os alunos se sentiriam mais motivados para o estudo da matemática, pois vislumbrariam a aplicabilidade do que estudam na escola.

2) Facilitação da aprendizagem - os alunos teriam mais facilidade em compreender as ideias matemáticas, já que poderiam relacioná-las a outros assuntos.

3) Preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas - os alunos teriam a oportunidade de desenvolver a capacidade de aplicar matemática em diversas situações, o que é desejável para inserir-se no cotidiano e no mundo do trabalho.

4) Desenvolvimento de habilidades gerais de investigação - os alunos teriam a oportunidade de pesquisar e desenvolver oportunidades de investigação.

5) Compreensão do papel sócio-cultural da matemática - os alunos analisariam como a matemática pode ser usada nas práticas sociais.

Biembengut e Schimitt (2007) citam que a aprendizagem também tem relação com o interesse e é neste sentido que a Modelagem Matemática pode contribuir.

Biembengut e Hein (2000) utilizam o termo modelação, mas com sentido idêntico à modelagem, salientando que o mesmo pode valer como método de aprendizagem da matemática em qualquer nível, das séries iniciais aos cursos de Pós-graduação. Segundo os autores, os objetivos são:

a) aproximar outras áreas do conhecimento da matemática;

b) enfatizar a importância da matemática para a formação do aluno;

c) despertar o interesse pela matemática através da aplicabilidade;

d) melhorar a apreensão dos conceitos matemáticos;

e) desenvolver a habilidade para resolver problemas;

f) estimular a criatividade.

Apesar de serem apontadas vantagens em relação ao uso da Modelagem Matemática, também há obstáculos a serem enfrentados tanto por professores quanto por alunos. Bassanezi (2004) aponta três tipos:

1) Obstáculos instrucionais - o cumprimento, na íntegra, dos programas nos cursos regulares. Além disso, alguns professores têm dúvidas se as aplicações e conexões com outras áreas fazem parte do ensino da matemática.

2) Obstáculos para estudantes - o uso da modelagem foge do estilo tradicional de aprendizado dos alunos, que veem o professor como aquele que transmite conhecimentos.

3) Obstáculos para professores - muitos professores não estão habituados a desenvolver a Modelagem Matemática em seus cursos, por falta de conhecimento ou por medo de encontrarem situações embaraçosas, principalmente quando as aplicações fogem do seu escopo de conhecimentos. Há, ainda, aqueles que alegam a necessidade de preparar as aulas e que também não terão tempo de cumprir todo o programa.

Embora sejam apontados alguns obstáculos, a maioria das pesquisas sinaliza vantagens para o uso da Modelagem Matemática. É importante ressaltar que passar por todo o currículo não garante a aprendizagem, reduzindo-se as experiências ao nível da informação.

Para os alunos do Ensino Médio, público alvo na aplicação desse trabalho, é necessário um bom planejamento dos professores que resolverem utilizar a Modelagem Matemática. Não somente o profissional que está em sala de aula, mas também a equipe pedagógica das Instituições de Ensino, que dá apoio aos professores, devem ser conscientes da disponibilização de tempo para a problematização dos conteúdos, possibilitando, assim, que os conhecimentos matemáticos sejam explorados significativamente. Esse fator contribui para a realização de todo o processo e, consequentemente, alcançar os objetivos pedagógicos almejados, como o desenvolvimento das habilidades e competências em Matemática apresentadas no PCNEM (APÊNDICE A − Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio).

Nesse sentido, os projetos de Modelagem Matemática se apresentam como possibilidade concreta de aprendizagem na perspectiva de uma educação matemática crítica

(JACOBINI, 2004). Essa perspectiva cognitivista é baseada na Teoria de Ausubel (1968; 2003) em que a modelagem é um processo de construção da aprendizagem, e que o crescimento da inteligência não se dá pelo acúmulo de informações, mas pela organização das mesmas. As novas ideias precisam ser incorporadas às já existentes por meio de relações que devem ser estabelecidas.

Sobre o despreparo dos alunos e até, em algumas situações, a apatia inicial dos mesmos na realização de um projeto de Modelagem Matemática, é interessante comentar que, de modo geral, os alunos não estão acostumados a um processo de ensino-aprendizagem em que são os principais agentes do processo. Num ensino tradicional de Matemática, eles são meros receptores e reprodutores de conhecimentos, quase sempre prontos e inquestionáveis. Diferentemente, num projeto de Modelagem Matemática, os alunos veem-se obrigados a produzir novos conhecimentos à medida que levantam hipóteses, fazem questionamentos, resolvem problemas e avaliam soluções. Essa proposta de ensino exige uma mudança de postura por parte dos alunos, rompendo com antigas estruturas de ensino sobre as quais repousavam suas ideias acerca do significado de ensinar e aprender.

1.4 Etapas da Modelagem Matemática

A dificuldade dos professores em utilizar a Modelagem Matemática como uma ferramenta de ensino-aprendizagem se apresenta logo na sua inicialização.

Hernández e Ventura (1998) consideram a Modelagem Matemática como uma das possibilidades de trabalho com projetos de ensino. Os autores definem como um ponto de partida de um projeto de Modelagem Matemática a escolha do tema, que pode fazer parte do currículo oficial, partir de determinada experiência do grupo, de um fato atual ou, ainda, emergir de um problema originado de diferentes contextos.

Utilizando a ideia de Hernández e Ventura, Ribeiro (2008) organiza um projeto de modelagem tomando como ponto de partida:

a) a seleção dos conteúdos curriculares;
b) a escolha do *tema gerador:* assunto a ser investigado, ou seja, a temática cujos conteúdos curriculares serão estudados;
c) a definição de uma *questão matriz*: encaminha o tratamento do tema gerador, ou seja, define o que se pretende alcançar a partir do tema.

Os modelos matemáticos são elaborados seguindo-se etapas, as quais são descritas por Bassanezi (2004) de acordo com a Figura 1.4:

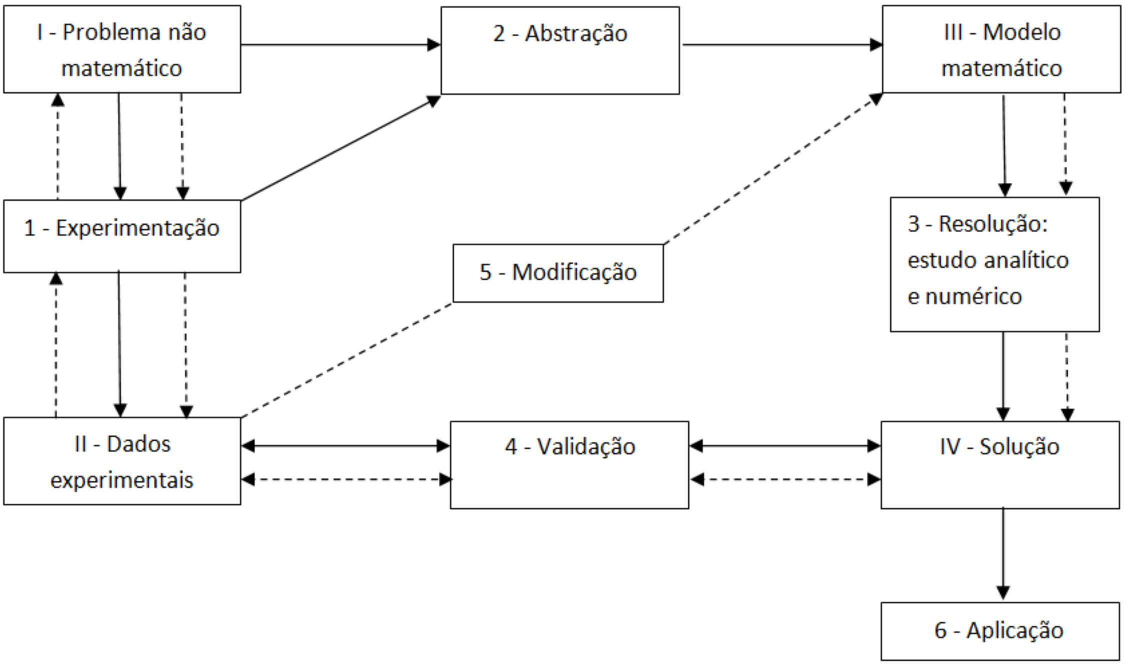


Figura 1.4: Esquema de Modelagem Matemática: as setas contínuas indicam a primeira aproximação. A busca de um modelo matemático que melhor descreva o problema estudado torna o processo dinâmico, indicado pelas setas pontilhadas (BASSANEZI, 2004).

As atividades intelectuais da Modelagem Matemática esboçadas na Figura 1.4 são as seguintes:

- Experimentação - é uma atividade laboratorial ou estatística para a obtenção de dados experimentais ou empíricos que ajudem na compreensão do problema, na modificação do modelo e na decisão de sua validade.

- Abstração - é o procedimento que deve levar à formulação dos modelos matemáticos. Nessa fase, o modelador deve preocupar-se com o processo de seleção das variáveis essenciais e a formulação em linguagem "natural" do problema ou da situação real, bem como formular hipóteses a serem investigadas.

- Resolução - o modelo matemático é montado quando se substitui a linguagem natural por uma linguagem matemática coerente. O estudo do modelo depende da sua complexidade e pode ser um processo numérico. Quando os argumentos conhecidos não são eficientes, novos métodos podem ser criados, caso contrário, o modelo deve ser modificado.

- Validação - é o processo de aceitação ou não do modelo proposto. Nesta fase, deve-se comparar a solução obtida via resolução do modelo matemático com os dados reais. É um processo de decisão de aceitação ou não do modelo final. O grau de aproximação desejado será o fator preponderante na decisão.

- Modificação - caso o grau de aproximação entre os dados reais e a solução do modelo não seja aceito, devem-se modificar as variáveis ou a lei de formação. Assim, o próprio modelo original é modificado e o processo inicia novamente. Bassanezi (2004) aponta algumas razões que justificam a modificação de um modelo matemático: alguma hipótese usada pode ser falsa ou não suficientemente próxima da verdade (uma simplificação demasiada da realidade); alguns dados experimentais ou informações podem ter sido obtidos de forma incorreta; as hipóteses e os dados são verdadeiros, mas insuficientes; intuição da realidade é inadequada: a existência de outras variáveis que não foram utilizadas no modelo teórico: erro no desenvolvimento do modelo matemático formal; algum princípio novo pode ter sido descoberto.

- Aplicação - a modelagem eficiente permite fazer predições, tomar decisões, explicar e entender e, acima de tudo, participar do mundo real com capacidade para influenciar em suas mudanças.

Já Biembengut (1997) é mais estrita em sua proposta de organização da atividade, pois agrupa e identifica procedimentos em três etapas (interação, matematização e modelo matemático), subdivididas em cinco subetapas:

- 1ª etapa: acontece uma *Interação* com o assunto, com o reconhecimento da situação problema e familiarização com o assunto a ser modelado. A situação a ser estudada será delineada através de pesquisas. Livros, revistas especializadas e dados obtidos junto a especialistas da área são apoios nessa etapa.

- 2ª etapa: ocorre com a *Matematização,* ou seja, formulação do problema com o desenvolvimento de uma hipótese e resolução do problema em termos do modelo.

Para Biembengut (1997), esta é a fase mais complexa e desafiadora, pois é nesta que se dará a tradução da situação problema para a linguagem matemática. Assim, intuição e criatividade são elementos indispensáveis.

- 3ª etapa: há o desenvolvimento do *Modelo Matemático* para a interpretação da solução - validação. Se o modelo não atender às necessidades que o geraram, a 2ª etapa deve ser retomada, modificando hipóteses, variáveis, e outros.

De uma forma similar, Warwick (2007), baseado em Edwards e Hamson (1996), apresenta as etapas do processo de Modelagem, conforme a Figura 1.5.

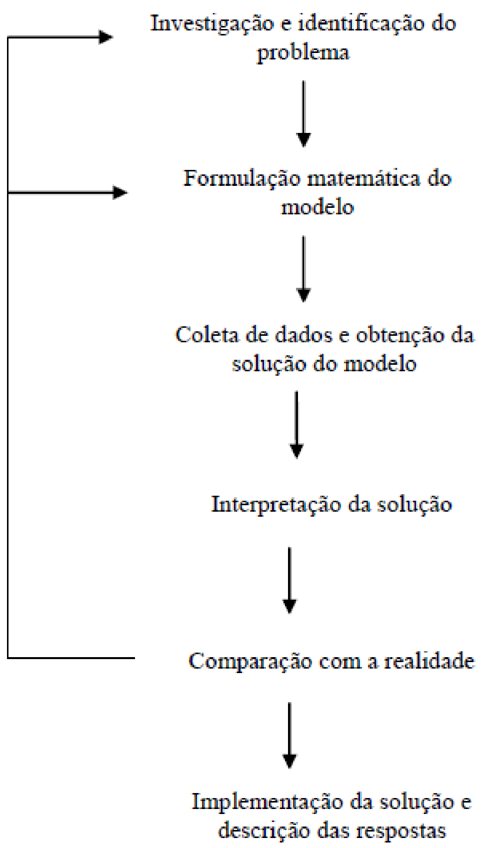


Figura 1.5: Etapas do processo de Modelagem (WARWICK, 2007)

Analisando as descrições dos autores citados, percebe-se que a similaridade está presente na descrição dos processos e também na aplicação. As descrições dos autores corroboram na dinamicidade do processo, mostrando por meio dos esquemas, que a Modelagem não é algo estático e que se o modelo for comparado à realidade e não apresentar um isomorfismo aceito pelo modelador, o processo se inicia novamente, tornando-o dinâmico.

As experiências de Modelagem variam quanto à extensão e às tarefas que cabem ao professor e aluno. Galbraith (1995) apresenta uma ideia poderosa para abordar essa diversidade. O autor fala em níveis de Modelagem e inspirado nessa ideia, Barbosa (2001 *apud* Barbosa, 2004) organizou em regiões de possibilidades, os quais chamou simplesmente de "*casos*". Subordinados à compreensão de Modelagem, numerou os casos de 1 a 3.

- Caso 1 - o professor apresenta um problema, devidamente relatado, com dados qualitativos e quantitativos, cabendo aos alunos a investigação. Aqui, os alunos não precisam sair da sala de aula para coletar novos dados e a atividade não é muito extensa.

- Caso 2 - os alunos se deparam apenas com o problema para investigar, mas têm que sair da sala de aula para coletar dados. Ao professor, cabe apenas a tarefa de formular o problema inicial. Nesse caso, os alunos são mais responsabilizados pela condução das tarefas.

- Caso 3 - trata-se de projetos desenvolvidos a partir de temas 'não-matemáticos', que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos. Aqui, a formulação do problema, a coleta de dados e a resolução são tarefas dos alunos.

Do caso 1 para o 3 a responsabilidade do professor sobre a condução das atividades vai sendo mais compartilhada com os alunos.

	Caso 1	**Caso 2**	**Caso 3**
Formulação do problema	Professor	professor	professor/aluno
Simplificação	Professor	professor/aluno	professor/aluno
Coleta de dados	Professor	professor/aluno	professor/aluno
Solução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Quadro 1.1: Tarefas no processo de Modelagem segundo Barbosa (2004).

Os três casos ilustram a flexibilidade da Modelagem nos diversos contextos escolares. Em certos períodos, a ênfase pode ser projetos pequenos de investigação, como no caso 1; em outros, pode ser projetos mais longos, como os casos 2 e 3. Barbosa destaca a perspectiva crítica nessas atividades e a consideração de situações, de fato, ‘reais’ como subjacentes a eles.

A organização das etapas e tarefas, descritas pelos autores citados nesse capítulo, apresenta-se como um modo de garantir que a atividade desenvolvida configure realmente uma situação de modelagem e, principalmente, atenda às características do ensino, nas quais inúmeros aspectos devem ser considerados e administrados, como por exemplo: o programa escolar a ser cumprido, o tempo disponível e o despreparo dos alunos.

CAPÍTULO 2: APLICAÇÕES DA MODELAGEM MATEMÁTICA EM SALA DE AULA

2.1 Introdução

Em três turmas da 1ª série do Ensino Médio de uma instituição privada de ensino no município de Campo Grande/MS foram desenvolvidos trabalhos de Modelagem Matemática, os quais iremos nos referir como *aplicações*. Para o presente trabalho, foram selecionadas quatro *aplicações* como relatos de experiência e que serão descritas nesse capítulo.

As turmas, que tinham em média 30 alunos cada, foram divididas em grupos de 4 a 6 alunos. Cada grupo foi responsável por uma *aplicação* de Modelagem Matemática com temáticas distintas. A inicialização dos trabalhos seguiu a proposta de Ribeiro (2008) que denomina cada assunto a ser investigado como um *tema gerador* e para cada tema, era definido uma *questão matriz*.

Para a elaboração dos temas geradores das *aplicações* de Modelagem Matemática, o professor regente, autor desse trabalho, selecionou algumas questões do ENEM dos últimos anos, as quais serviram de inspiração e, posteriormente, adaptados para serem utilizados no desenvolvimento do projeto. Alguns temas geradores, já com suas respectivas questões matrizes formuladas pelo professor, foram propostos para que os grupos escolhessem. Porém, os alunos tiveram a autonomia de sugerir outros temas ligados a diferentes áreas do conhecimento, com uma única restrição, que o assunto já tivesse sido abordado no ENEM. A sugestão seria avaliada pelo professor para que o tema pudesse ser adaptado para uma problematização matemática e verificar se o projeto se configuraria como Modelagem Matemática.

Com os grupos formados, os seus temas geradores e suas respectivas questões matrizes definidas, foi dado continuidade as etapas da Modelagem Matemática. O desenvolvimento das *aplicações* de Modelagem Matemática junto às três turmas de alunos seguiram as etapas de Biembengut (1997). Logo, a organização das *aplicações* foi assim estruturada:

I. Escolha do tema gerador: inspirado nas questões do ENEM;
II. Definição da questão matriz: conduz o que se pretende calcular;
III. Interação: pesquisa e coleta de dados sobre o assunto;

IV. Matematização: formulação e resolução do problema através de conceitos matemáticos;

V. Modelo matemático: interpretação e validação do modelo matemático construído;

VI. Apresentação: exposição do grupo em sala de aula do seu tema gerador, a questão matriz e as etapas seguidas para a solução do problema. Para a demonstração da pesquisa feita pelo grupo e dos cálculos realizados, os alunos poderiam utilizar os recursos disponíveis na escola, como: o quadro, computador, data-show, TV, DVD e cópias necessárias para o acompanhamento das explicações, assim como os objetos estudados. Nessa etapa, os demais alunos poderiam fazer questionamentos ao grupo responsável pela aplicação e o professor, quando necessário, poderiam intervir para complementar ideias, sugerir ou corrigir argumentos na explanação.

Quanto as tarefas dos agentes envolvidos (professor e aluno), no processo de modelagem das *aplicações*, foram baseadas na ideia de Barbosa (2004). Assim, cada aplicação será comparada a uma das regiões de possibilidades, já descritas no capítulo anterior, chamados por Barbosa de casos (numerados de 1 a 3).

2.2 Empresas de táxi em Campo Grande - MS

2.2.1 *Escolha do tema gerador:*

Questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2009:

Três empresas de táxi, W, K e L estão fazendo promoções: a empresa W cobra R\$ 2,40 a cada quilômetro rodado e com um custo inicial de R\$ 3,00; a empresa K cobra R\$ 2,25 a cada quilômetro rodado e uma taxa inicial de R\$ 3,80 e, por fim, a empresa L, que cobra R\$ 2,50 a cada quilômetro rodado e com taxa inicial de R\$ 2,80. Um executivo está saindo de casa e vai de táxi para uma reunião que é a 5 km do ponto de táxi, e sua esposa sairá do hotel e irá para o aeroporto, que fica a 15 km do ponto de táxi.

Assim, os táxis que o executivo e sua esposa deverão pegar, respectivamente, para terem a maior economia são das empresas:

A) W e L.

B) W e K.

C) K e L.

D) K e W.

E) K e K.

Enxergando na questão acima a possibilidade de revisar e mostrar aos seus alunos a aplicabilidade do conteúdo "Função afim", o professor regente adaptou o tema gerador "Empresas de táxi em Campo Grande - MS".

2.2.2 *Definição da questão matriz:*

Com o tema gerador "Empresas de táxi em Campo Grande - MS", o professor regente propôs aos alunos a seguinte questão matriz: Dentre três empresas de táxi pesquisadas no município, qual é a mais econômica para um passageiro?

2.2.3 *Interação:*

Estabelecida a questão matriz, desencadeou-se a etapa de interação e suas subetapas: o reconhecimento da situação problema e a coleta de dados, onde os alunos pesquisaram as três empresas de táxi que apresentaram as seguintes informações:

Empresa A			**Empresa B**			**Empresa C**		
Bandeirada		Preço/km	Bandeirada		Preço/km	Bandeirada		Preço/km
1	R$ 4,50	R$ 2,40	1	R$ 5,00	R$ 2,20	1	R$ 5,56	R$ 2,10
2	R$ 4,50	R$ 2,80	2	R$ 5,00	R$ 2,70	2	R$ 5,56	R$ 2,60

Tabela 2.1: Pesquisa com três empresas de táxi em Campo Grande/MS

2.2.4 *Matematização:*

Em posse dessas informações organizadas na Tabela 2.1, iniciou-se a etapa da matematização, levando os alunos a interpretar a situação. E de acordo com seus questionamentos, realizaram diversos cálculos como forma de comparação de quanto se pagaria para cada empresa, caso percorresse distâncias inteiras positivas (1 km, 2 km, 3 km; ...). Os cálculos iniciais realizados constam na Tabela 2.2.

Empresas de táxi - bandeira 1					
Empresa de táxi A		**Empresa de táxi B**		**Empresa de táxi C**	
Distância percorrida (em km)	Custo da corrida (em reais)	Distância percorrida (em km)	Custo da corrida (em reais)	Distância percorrida (em km)	Custo da corrida (em reais)
1	4,50 + 2,4.1 = 6,90	1	5,00 + 2,20.1 = 7,20	1	5,56 + 2,1.1 = 7,66
2	4,50 + 2,4.2 = 9,30	2	5,00 + 2,20.2 = 9,40	2	5,56 + 2,1.2 = 9,76
3	4,50 + 2,4.3 = 11,70	3	5,00 + 2,20.3 = 11,60	3	5,56 + 2,1.3 = 11,86
4	4,50 + 2,4.4 = 14,10	4	5,00 + 2,20.4 = 13,8	4	5,56 + 2,1.4 = 13,96
5	4,50 + 2,4.5 = 16,50	5	5,00 + 2,20.5 = 16,00	5	5,56 + 2,1.5 = 16,06
10	4,50 + 2,4.10 = 28,50	10	5,00 + 2,20.10 = 27,00	10	5,56 + 2,1.10 = 26,56
20	4,50 + 2,4.20 = 52,50	20	5,00 + 2,20.20 = 49,00	20	5,56 + 2,1.20 = 47,56

Tabela 2.2: Cálculos dos alunos para comparação dos custos das três empresas de táxi em Campo Grande/MS.

Comumente, os alunos exploram o conjunto dos naturais para posteriormente abranger outras possibilidades numéricas, mesmo assim, a ideia de restrição conduz a uma importante discussão que é o domínio de uma função. Tais observações levaram-lhes a algumas conclusões:

a) há duas situações para serem analisadas separadamente: quando a corrida é feita na bandeira 1 (horário compreendido entre 6h e 22h) e na bandeira 2 (horário compreendido entre 22h e 6h);
b) há uma relação de dependência entre o valor a ser pago ao taxista e a distância percorrida, em quilômetros (associação ao conceito de variáveis, correspondência biunívoca e proporcionalidade);
c) o valor da bandeirada é um valor fixo, pois independente da distância percorrida este não irá se alterar (associação ao conceito de coeficiente linear ou independente);
d) a distância percorrida, em quilômetros, pode ser um valor racional, desde que seja positivo, assim como o valor, em reais, pago ao taxista pela corrida (associação ao conceito de domínio e imagem da função);
e) o valor total a ser pago ao taxista é determinado pelo valor da bandeirada, acrescido do produto entre o preço de cada quilômetro rodado e a quantidade de quilômetros percorridos (associação ao conceito de função afim);
f) cada empresa terá o menor custo para um passageiro de acordo com a distância percorrida (associação ao conceito de intervalos numéricos e inequações).

Diante dessas conclusões, a fim de conduzi-los à solução, foram questionados sobre qual táxi seria o mais econômico caso o trajeto fosse de suas casas até a escola. Para responderem a tal indagação, cada um teve que pesquisar a distância aproximada de sua casa até a escola e realizar os devidos cálculos. Após verificarem tal situação, como já era esperado, nem todos apresentaram a mesma resposta, pois alguns moravam a alguns quilômetros dali, já outros, mais distante. Com isso, reforçou-se a ideia de que existia um intervalo, em quilômetros, onde cada táxi seria mais vantajoso a se tomar. Os alunos podem não ter utilizado função como recurso para chegarem às conclusões anteriores, podem ter usado apenas recursos numéricos, porém as discussões que possibilitaram ao professor intervir e consolidar a importância de modelar a situação, formalizando assim o conceito de função. Perante isso, os alunos foram levados a novos questionamentos:

a) Como poderiam escrever as funções que modelam a situação para cada empresa de táxi?
b) Qual seria a quilometragem na qual o custo seria o mesmo pelo menos para duas empresas?
c) Como seria a representação gráfica das funções envolvidas?
d) Qual o intervalo, em quilômetros, que uma pessoa pode andar com determinada empresa de táxi de forma que se tenha um menor custo?

2.2.5 *Modelo matemático:*

Sendo x a variável que representa os quilômetros percorridos em uma corrida e y a variável que representa o valor a ser pago ao taxista, os alunos chegaram às seguintes funções:

Táxi	bandeira 1	bandeira 2
A	$y = 4{,}50 + 2{,}40.x$	$y = 4{,}50 + 2{,}80.x$
B	$y = 5{,}00 + 2{,}20.x$	$y = 5{,}00 + 2{,}70.x$
C	$y = 5{,}56 + 2{,}10.x$	$y = 5{,}56 + 2{,}60.x$

Tabela 2.3: Funções que relacionam os quilômetros percorridos e o valor a ser pago a três empresas de táxi em Campo Grande/MS.

Observação 1: Comumente os alunos utilizam as incógnitas y e x como as respectivas variáveis dependente e independente em uma função. O professor deve também estimular a utilização de outras letras para a representação das variáveis como no caso poderíamos adotar

C(x) como o custo da corrida em função de x quilômetros rodados ou V(d) como sendo o valor a ser pago ao taxista em função da distância d percorrida.

Igualando as expressões que representam as funções envolvidas (associação ao conceito de equações), obtiveram as quilometragens contidas nos quadros 2.1 e 2.2.

Análise da bandeira 1		
Função A = Função B	Função A = Função C	Função B = Função C
4,50 + 2,40.x = 5,00 + 2,20.x 2,40.x - 2,20.x = 5,00 - 4,50 0,20.x = 0,50 x = 2,5 km	4,50 + 2,40.x = 5,56 + 2,10.x 2,40.x - 2,10.x = 5,56 - 4,50 0,30.x = 1,06 x ≅ 3,53 km	5,00 + 2,20.x = 5,56 + 2,10.x 2,20.x - 2,10.x = 5,56 -5,00 0,10.x = 0,56 x = 5,6 km
Conclusão		
Ao percorrer 2,5 km, o valor da corrida será o mesmo para as empresas A e B.	Ao percorrer aproximada-mente 3,53 km, o valor da corrida será o mesmo para as empresas A e C.	Ao percorrer 5,6 km, o valor da corrida será o mesmo para as empresas B e C.

Quadro 2.1: Análise feita pelos alunos sobre a igualdade de custos das três empresas de táxi em Campo Grande/MS (Bandeira 1).

Análise da bandeira 2		
Função A = Função B	Função A = Função C	Função B = Função C
4,50 + 2,80.x = 5,00 + 2,70.x 2,80.x - 2,70.x = 5,00 - 4,50 0,10.x = 0,50 x = 5 km	4,50 + 2,80.x = 5,56 + 2,60.x 2,80.x - 2,60.x = 5,56 - 4,50 0,20.x = 1,06 x = 5,3 km	5,00 + 2,70.x = 5,56 + 2,60.x 2,70.x - 2,60.x = 5,56 -5,00 0,10.x = 0,56 x = 5,6 km
Conclusão		
Ao percorrer 5 km, o valor da corrida será o mesmo para as empresas A e B.	Ao percorrer 5,3 km, o valor da corrida será o mesmo para as empresas A e C.	Ao percorrer 5,6 km, o valor da corrida será o mesmo para as empresas B e C.

Quadro 2.2: Análise feita pelos alunos sobre a igualdade de custos das três empresas de táxi em Campo Grande/MS (Bandeira 2).

Representando as funções graficamente, como mostram as figuras 2.1 e 2.2.

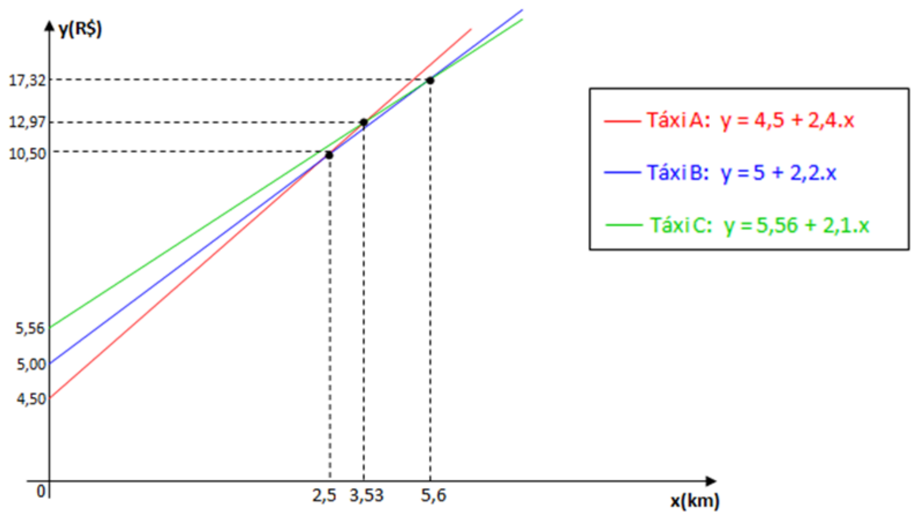


Figura 2.1: Custo das três empresas de táxi em função do km rodado (Bandeira 1).

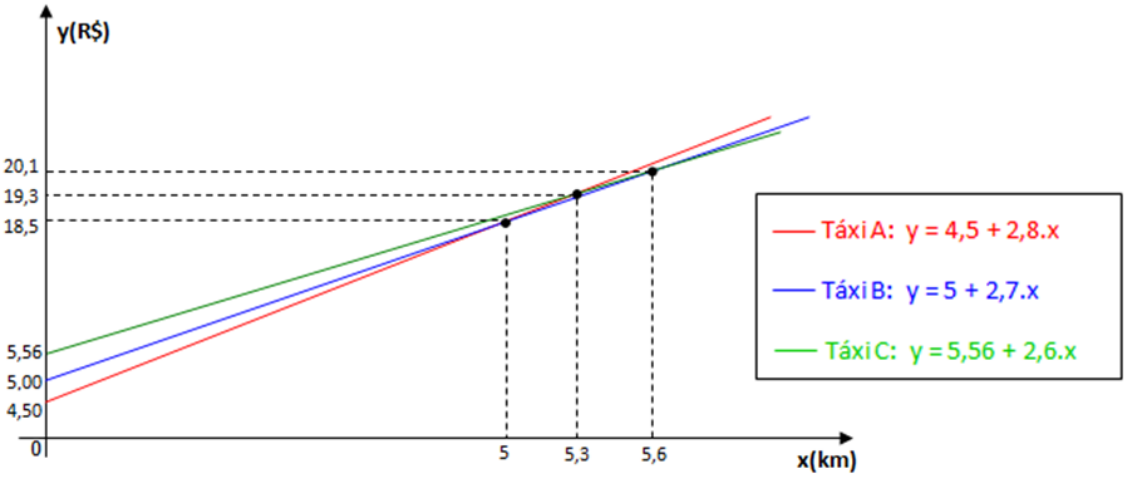


Figura 2.2: Custo das três empresas de táxi em função do km rodado (Bandeira 2).

Analisando os gráficos, os alunos conseguiram visualizar com maior facilidade os intervalos dos quilômetros percorridos, onde o valor da corrida seria mais vantajoso para um passageiro. Por conseguinte chegaram às conclusões:

Análise da bandeira 1		
Táxi	**Intervalo**	**Conclusão**
A	$0 < x < 2{,}5$	Se a corrida for uma distância entre 0 e 2,5 km, um passageiro terá um menor custo com a empresa A.
B	$2{,}5 < x < 5{,}6$	Se a corrida for uma distância entre 2,5 e 5,6 km, um passageiro terá um menor custo com a empresa B.
C	$x > 5{,}6$	Se a corrida for uma distância entre maior que 5,6 km, um passageiro terá um menor custo com a empresa C.

Quadro 2.3: Análise feita pelos alunos sobre o intervalo de quilômetros percorridos para se obter um menor custo nas três empresas de táxi em Campo Grande/MS (Bandeira 1).

Análise da bandeira 2		
Táxi	**Intervalo**	**Conclusão**
A	$0 < x < 5$	Se a corrida for uma distância entre 0 e 5 km, um passageiro terá um menor custo com a empresa A.
B	$5 < x < 5{,}6$	Se a corrida for uma distância entre 5 e 5,6 km, um passageiro terá um menor custo com a empresa B.
C	$x > 5{,}6$	Se a corrida for uma distância entre maior que 5,6 km, um passageiro terá um menor custo com a empresa C.

Quadro 2.4: Análise feita pelos alunos sobre o intervalo de quilômetros percorridos para se obter um menor custo nas três empresas de táxi em Campo Grande/MS (Bandeira 2).

Após as análises se fez uma verificação das conclusões para validar os modelos construídos, até mesmo para estarem seguros de que não precisariam fazer nenhuma modificação (procedimento na etapa responsável pela validação do modelo matemático e reformulação, caso necessário).

Devido às características apresentadas nas etapas do processo de modelagem Matemática, o presente tema gerador se enquadra no "Caso 2" de Barbosa em que o professor apenas formula o problema inicial. Os alunos são responsáveis pela investigação e contam com o apoio do professor na simplificação, na coleta dos dados e na solução do problema.

2.2.6 *Apresentação:*

Para a exposição do tema gerador "Empresas de táxi em Campo Grande - MS", o grupo de alunos utilizou o recurso do data-show. As tabelas e os gráficos foram apresentados em PowerPoint e, os cálculos realizados para a obtenção dos resultados que respondiam a questão matriz, foram demonstrados no quadro.

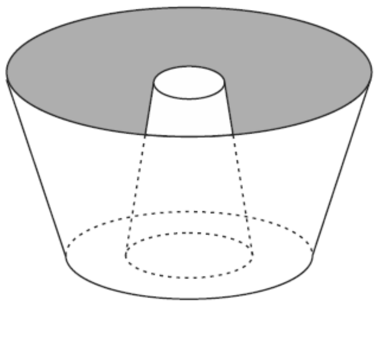
Durante a apresentação, houve grande participação dos alunos expectadores, que interagiam com perguntas e associavam as informações com os conteúdos que já haviam estudado. Com a definição de função afim, as representações através de um modelo (lei de formação da função), as tabelas e os gráficos, os alunos puderam se convencer de que o uso dos conceitos matemáticos facilitam na interpretação e solução de problemas do cotidiano, tornando o caminho para as respostas mais rápido e eficaz.

2.3 Formas de bolo

2.3.1 *Escolha do tema gerador:*

Questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2013:

Uma cozinheira, especialista em fazer bolos, utiliza uma forma no formato representado na figura:



Nela identifica-se a representação de duas figuras geométricas tridimensionais. Essas figuras são:
A) um tronco de cone e um cilindro.
B) um cone e um cilindro.

C) um tronco de pirâmide e um cilindro.
D) dois troncos de cone.
E) dois cilindros.

Enxergando na questão acima a possibilidade de introduzir o conteúdo "Volume de figuras espaciais", o professor regente adaptou o tema gerador " Formas de bolo ".

2.3.2 *Definição da questão matriz:*

Com o tema gerador "Formas de bolo" foi proposta aos alunos a seguinte questão matriz: Como é possível calcular o volume de uma forma de bolo com o mesmo formato apresentado na questão do ENEM? E ainda, quais seriam as dimensões de diferentes formas de bolo que possuem o mesmo volume da primeira?

2.3.3 *Interação:*

Estabelecida a questão matriz, o grupo de alunos pensou em analisar três formatos diferentes para as formas de bolo, que posteriormente seriam associadas às figuras tridimensionais estudadas na geometria espacial: o paralelepípedo reto-retângulo, o cilindro circular reto e o tronco de cone circular reto.

Inicialmente, os alunos utilizaram uma forma de bolo com o formato da mesma apresentada na questão do ENEM e identificaram o objeto como a composição de dois troncos de cone circular reto de bases paralelas, como mostram as figuras 2.3 e 2.4:

Figura 2.3: Forma de bolo utilizada pelos alunos como objeto de estudo.

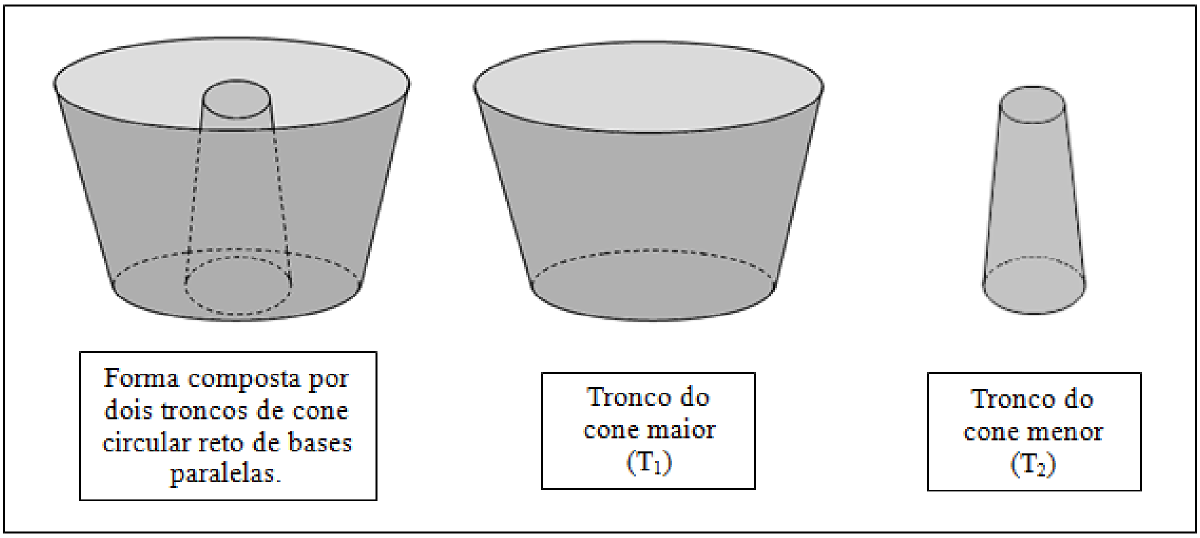


Figura 2.4: Composição da forma de bolo utilizada pelos alunos como objeto de estudo.

Considerando:

T_1: Tronco do cone circular reto maior

T_2: Tronco do cone circular reto menor

R_1: Raio da base maior de T_1

r_1: Raio da base menor de T_1

R_2: Raio da base maior de T_2

r_2: Raio da base menor de T_2

H_1: Altura de T_1

H_2: Altura de T_2

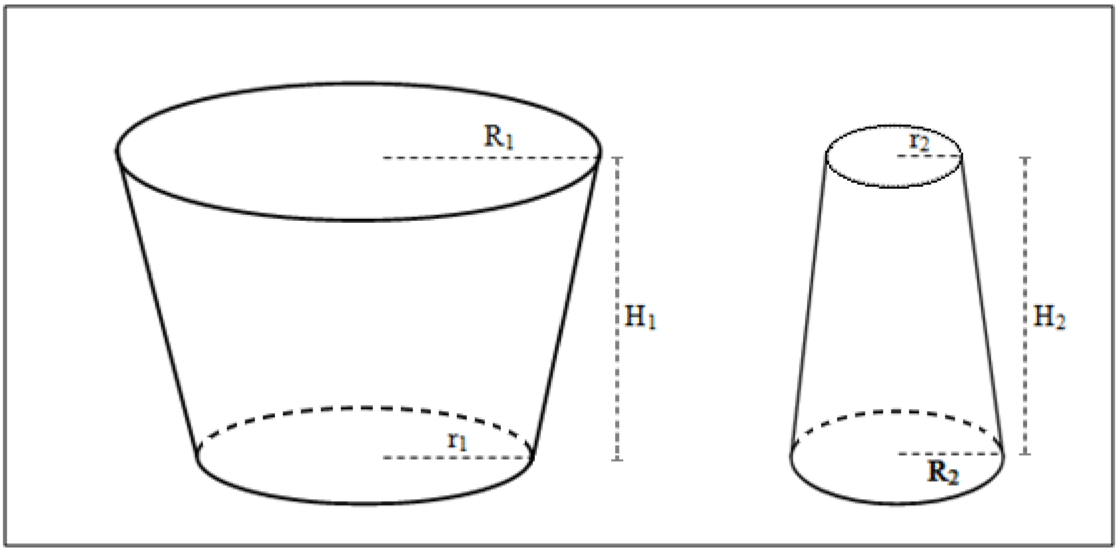


Figura 2.5: Dimensões analisadas nos troncos de cone.

Com o uso de uma fita métrica e uma régua retiraram as medidas necessárias para o cálculo do seu volume.

R_1 = 11,2 cm

r_1 = 9,2 cm

R_2 = 4,7 cm

r_2 = 2,2 cm

$H_1 = H_2$ = 8,2 cm

2.3.4 *Matematização:*

Em posse das medidas da forma de bolo, com o auxílio do professor, os alunos iniciaram o cálculo para obter o volume do objeto.

- Calculando V_{T_1} (o volume do tronco do cone maior T_1):

Prolongando as geratrizes do tronco, obtém-se um cone circular reto C_1 e através da sua secção meridiana, analisam-se os triângulos LOM e LPN:

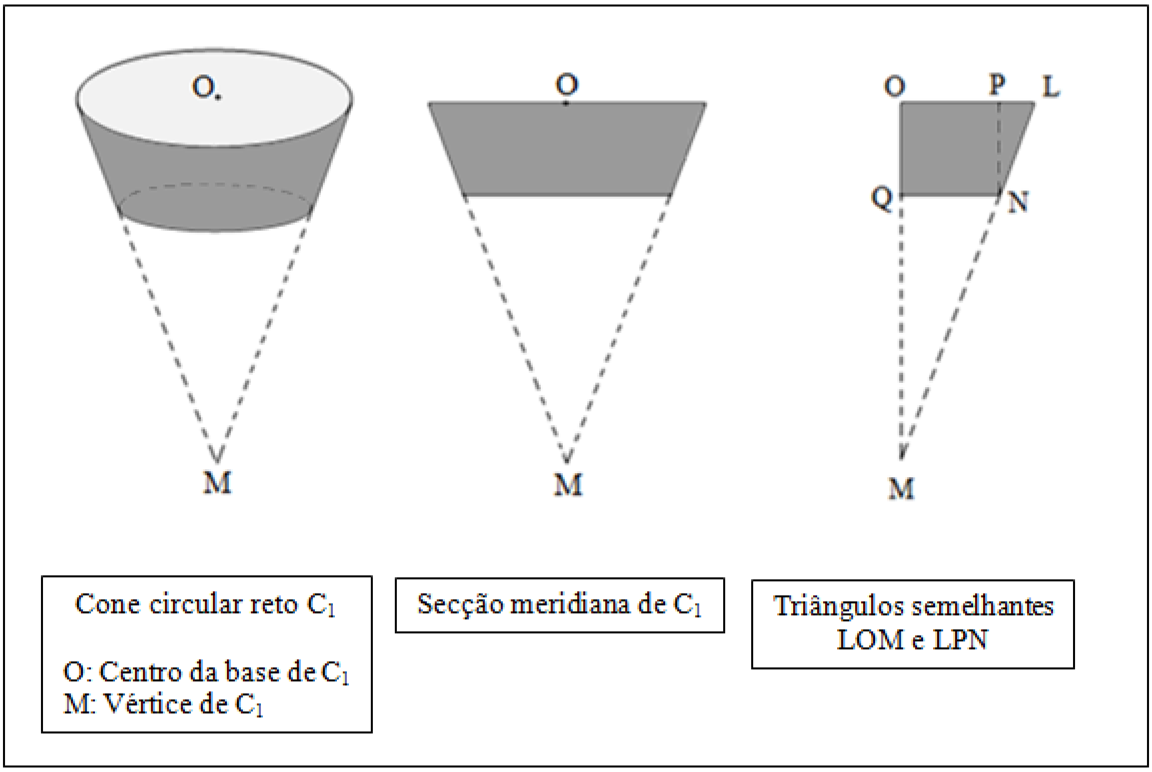


Figura 2.6: Secção meridiana do cone maior C_1.

Chamando de H a medida da altura desse cone, logo OM = H, OQ = PN = H_1 e PL = R_1 - r_1. Assim, fazendo a semelhança entre os triângulos LOM e PNM, temos que:

$$\frac{OM}{PN} = \frac{OL}{PL} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{H_1} = \frac{R_1}{R_1 - r_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{H}{8{,}2} = \frac{11{,}2}{11{,}2 - 9{,}2}$$

$$\therefore\ H = 45{,}92 \text{ cm}$$

Sendo V' o volume do cone de vértice L e altura H e V'' o volume do cone de vértice L e altura H - H_1 , temos:

$$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot R_1{}^2 \cdot H \ \Rightarrow V' = \frac{1}{3}\pi.(11{,}2)^2.(45{,}92) \cong 1920{,}07\pi \text{ cm}^3 \text{ e}$$

$$V'' = \frac{1}{3}\pi \cdot r_1{}^2 \cdot (H - H_1) \ \Rightarrow V'' = \frac{1}{3}\pi.(9{,}2)^2.(45{,}92 - 8{,}2) \cong 1064{,}21\pi \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume (V_{T_1}) do tronco do cone circular reto maior T_1 da forma é:

$$V_{T_1} = V' - V'' \ \Rightarrow V_{T_1} = 1920{,}07\pi - 1064{,}21\pi = 855{,}86\pi \text{ cm}^3$$

Como 1 cm^3 = 1 ml e considerando $\pi = 3{,}14$, teremos:

$$V_{T_1} = 2687{,}40 \text{ cm}^3 = 2687{,}40 \text{ ml}$$

- Calculando V_{T_2} (o volume do tronco do cone menor T_2):

Prolongando as geratrizes do tronco, obtém-se um cone circular reto C_2 e através da sua secção meridiana, analisam-se os triângulos L'O'M' e L'P'N':

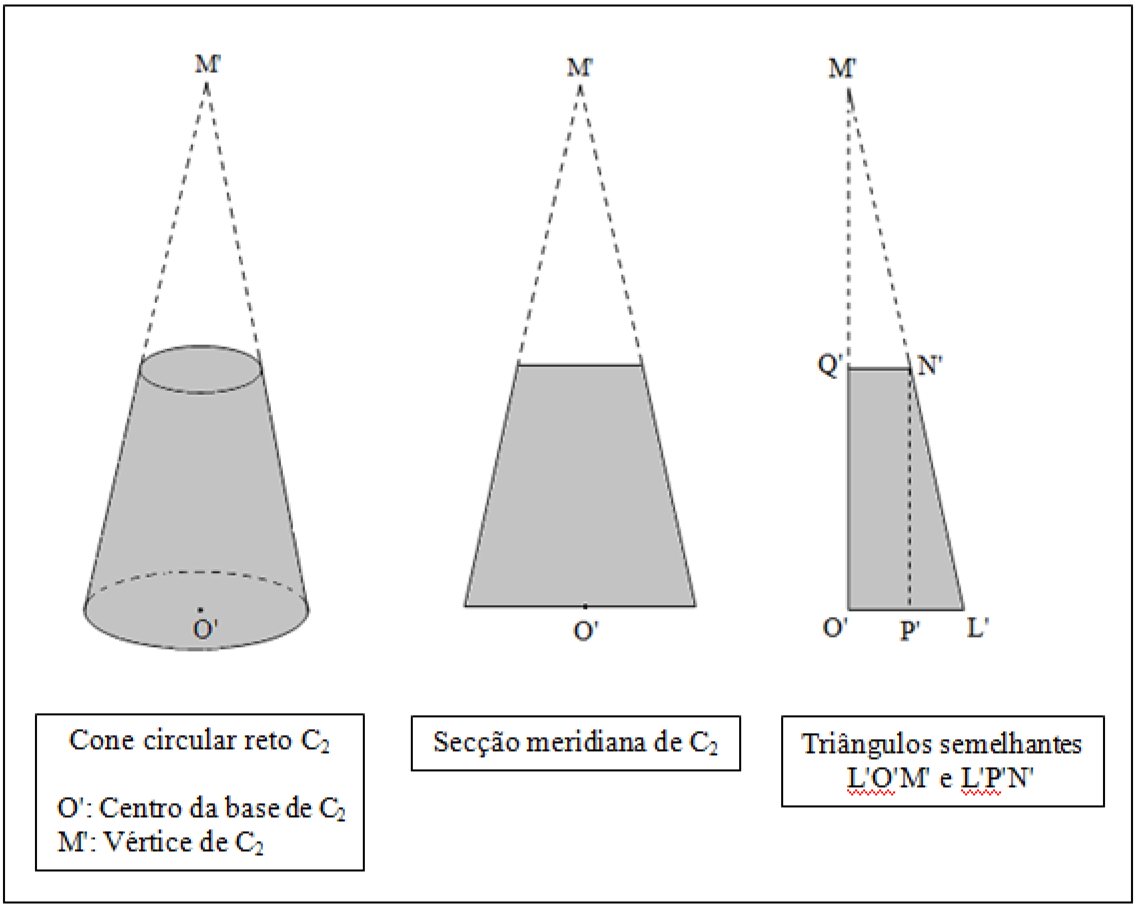


Figura 2.7: Secção meridiana do cone menor C_2.

Chamando de H a medida da altura desse cone, logo O'M' = H', O'Q' = P'N' = H_2 e P'L' = R_2 - r_2. Assim, fazendo a semelhança entre os triângulos L'O'M' e L'P'N', temos que:

$$\frac{O'M'}{P'N'} = \frac{O'L'}{P'L'} \quad \Rightarrow \quad \frac{H'}{H_2} = \frac{R_2}{R_2 - r_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{H'}{8{,}2} = \frac{4{,}7}{4{,}7 - 2{,}2}$$

$$\therefore\ H' = 15{,}416 \text{ cm}$$

Sendo V' o volume do cone de vértice L e altura H' e V'' o volume do cone de vértice L e altura H' - H_2 , temos:

$$V' = \frac{1}{3}\pi \cdot R_2^{\ 2} \cdot H' \ \Rightarrow V' = \frac{1}{3}\pi.(4{,}7)^2.(15{,}416) \cong 113{,}51\pi \ \text{ cm}^3 \ \text{ e}$$

$$V'' = \frac{1}{3}\pi \cdot r_2^{\ 2} \cdot (H' - H_2) \ \Rightarrow V'' = \frac{1}{3}\pi.(2{,}2)^2.(15{,}416 - 8{,}2) \cong 11{,}64\pi \ \text{ cm}^3$$

Portanto, o volume $\left(V_{T_2}\right)$ do tronco do cone circular reto menor T_2 da forma é:

$$V_{T_2} = V' - V'' \Rightarrow V_{T_1} = 113{,}51\pi - 11{,}64\pi = 101{,}87\pi$$

Considerando $\pi = 3{,}14$, teremos:

$$V_{T_2} = 319{,}87 \text{ cm}^3$$

2.3.5 *Modelo matemático:*

Como o volume total (V) da forma de bolo é a diferença entre o volume do tronco do cone maior $\left(V_{T_1}\right)$ pelo volume do tronco do cone menor $\left(V_{T_2}\right)$, logo:

$$V = V_{T_1} - V_{T_2} \Rightarrow \text{V} = 2687{,}40 - 319{,}87$$

$$\boxed{\therefore\ V = 2367{,}53 \text{ cm}^3 = 2367{,}53 \text{ ml}}$$

Para validar a solução encontrada, os alunos pesquisaram e aplicaram a fórmula do volume do tronco de um cone circular reto:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot H \cdot \left(R^2 + R \cdot r + r^2\right)$$

Em que:

- R: Raio da base maior do tronco de cone
- r: raio da base menor do tronco de cone
- H: Altura do tronco de cone

Assim, o volume do tronco do cone maior T_1 será:

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi \cdot H_1 \cdot \left[R_1^{\ 2} + R_1 \cdot r_1 + r_1^{\ 2}\right]$$

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}.(3{,}14).(8{,}2).\left[(11{,}2)^2 + (11{,}2).(9{,}2) + (9{,}2)^2\right] \cong 2687{,}40 \text{ cm}^3$$

E o volume do tronco do cone menor T_2:

$$V_{T_2} = \frac{1}{3}\pi \cdot H_2 \cdot \left[R_2^{\ 2} + R_2 \cdot r_2 + r_2^{\ 2}\right]$$

$$V_{T_2} = \frac{1}{3}.(3{,}14).(8{,}2).\left[(4{,}7)^2 + (4{,}7).(2{,}2) + (2{,}2)^2\right] \cong 319{,}88\,\text{cm}^3$$

Assim, o volume total (*V*) da forma de bolo é a diferença:

$$V = V_{T_1} - V_{T_2} \Rightarrow V = 2687{,}40 - 319{,}88$$

$$\boxed{\therefore\ V = 2367{,}52\ \text{cm}^3 = 2367{,}52\ \text{ml}}$$

O leitor poderá observar que nessa *aplicação*, especificamente, os alunos não chegaram a um modelo matemático no qual se pode generalizar o volume do objeto estudado, no caso o volume dos troncos de cone, até mesmo pela quantidade de variáveis envolvidas, caracterizando-o como um modelo não-linear. Contudo, a riqueza na contextualização, a abordagem de conteúdos importantes da geometria ligados à realidade, e até mesmo pela natureza de investigação, é que nos permite caracterizá-lo como um instrumento pedagógico que chamamos de Modelagem Matemática.

Visto que, os alunos chegaram próximo da fórmula do volume do tronco de cone circular reto, que ajudaria na construção do modelo matemático, o professor os auxiliou para a conclusão da mesma partindo da primeira relação entre os triângulos semelhantes LOM e PNM, em que:

$$\frac{H}{H_1} = \frac{R_1}{R_1 - r_1}$$

Isolando *H*:

$$H = \frac{H_1 \cdot R_1}{R_1 - r_1} \quad \textbf{(I)}$$

Sendo o volume do tronco de cone circular reto determinado por:

$$V_{T_1} = V' - V''$$

Logo,

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot(R_1)^2\cdot H \quad - \quad \frac{1}{3}\pi\cdot(r_1)^2\cdot(H - H_1)$$

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot(R_1)^2\cdot H \; - \; \frac{1}{3}\pi\cdot(r_1)^2\cdot H \; + \; \frac{1}{3}\pi\cdot(r_1)^2\cdot H_1$$

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot\left[(R_1)^2\cdot H - (r_1)^2\cdot H + (r_1)^2\cdot H_1\right]$$

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot\left[H\cdot\left(R_1{}^2 - r_1{}^2\right)^2 + r_1{}^2\cdot H_1\right] \qquad \textbf{(II)}$$

Substituindo **(I)** em **(II)**, temos:

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot\left[\frac{H_1\cdot R_1}{R_1 - r_1}\cdot\left(R_1{}^2 - r_1{}^2\right)^2 + r_1{}^2\cdot H_1\right]$$

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot\left[H_1\cdot R_1{}^2 - H_1\cdot R_1\cdot r_1 + r_1{}^2\cdot H_1\right]$$

$$\boxed{V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot H_1\cdot\left[R_1{}^2 - R_1\cdot r_1 + r_1{}^2\right]}$$

Demonstrada a fórmula do volume do tronco de um cone circular reto, foi possível definir o modelo matemático que determina o volume da forma de bolo.

Como as alturas dos dois troncos de cone (H_1 e H_2) que compõe a forma de bolo são iguais, denominamos $H_1 = H_2 = h$.

Com isso,

$$V_{T_1} = \frac{1}{3}\pi\cdot H_1\cdot\left[R_1{}^2 - R_1\cdot r_1 + r_1{}^2\right] = \frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot\left[R_1{}^2 - R_1\cdot r_1 + r_1{}^2\right]$$

$$V_{T_2} = \frac{1}{3}\pi\cdot H_2\cdot\left[R_2{}^2 - R_2\cdot r_2 + r_2{}^2\right] = \frac{1}{3}\pi\cdot h\cdot\left[R_2{}^2 - R_2\cdot r_2 + r_2{}^2\right]$$

Onde,

T_1: Tronco do cone circular reto maior

T_2: Tronco do cone circular reto menor

R_1: Raio da base maior do tronco T_1

r_1: Raio da base menor de T_1

R_2: Raio da base maior de T_2

r_2: Raio da base menor de T_2

h: Altura dos troncos T_1 e T_2 (altura da forma de bolo)

V_{T_1} : Volume do tronco T_1

V_{T_2} : Volume do tronco T_2

V: Volume total da forma de bolo

Como,

$$V = V_{T_1} - V_{T_2}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left[R_1^{\ 2} - R_1 \cdot r_1 + r_1^{\ 2}\right] - \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left[R_2^{\ 2} - R_2 \cdot r_2 + r_2^{\ 2}\right]$$

Colocando os fatores comuns em evidência, temos o volume total da forma de bolo.

$$\boxed{V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \left[R_1^{\ 2} - R_2^{\ 2} - R_1 \cdot r_1 + R_2 \cdot r_2 + r_1^{\ 2} - r_2^{\ 2}\right]}$$

Após a verificação através da fórmula, os alunos optaram por uma outra maneira de certificar a veracidade de seus cálculos. Com o uso de um recipiente graduado, os alunos encheram, completamente, a forma de bolo com água, e assim, foi possível determinar, experimentalmente, a capacidade total de dois mil e quatrocentos mililitros (2400 ml). Com isso, notou-se uma diferença de, aproximadamente, trinta mililitros (30 ml) entre o cálculo efetuado com o modelo matemático encontrado e a experiência com água.

Para responder sobre quais seriam as dimensões de diferentes formas de bolo que possuem o mesmo volume desta que foi calculada, os alunos analisaram outras duas formas como mostram as figuras 2.8 e 2.9:

Figura 2.8: Forma de bolo com formato de paralelepípedo reto-retângulo.

Figura 2.9: Forma de bolo com formato de cilindro circular reto.

Em suas pesquisas, os alunos perceberam que para igualar o volume destas duas figuras tridimensionais com o volume da forma trazida na questão do ENEM, era necessário fixar o valor de algumas variáveis. Para isso, utilizaram as medidas da largura e do comprimento da forma da Figura 2.8 e a medida do raio da base da forma da Figura 2.9.

Assim, considerando:

- largura da forma = 22,3 cm.
- comprimento da forma = 32,5 cm.
- h_1: altura da forma para obtenção do volume V = 2367,52 ml.

Como o volume de um paralelepípedo reto-retângulo é determinado pelo produto do seu comprimento, largura e altura, assim foi feito a igualdade entre os volumes:

Volume da forma (paralelepípedo reto-retângulo) = Volume da forma (troncos de cone)

$$22{,}3 \cdot 32{,}5 \cdot h_1 = 2367{,}52$$

$$\boxed{\therefore\ h_1 \cong 3{,}27 \text{ cm}}$$

Com relação a forma no formato de cilindro circular reto, de raio R e altura h_2, foi medido a circunferência da base da figura 6 encontrando 96 cm de comprimento. Em posse deste valor e considerando $\pi \cong 3{,}14$ foi possível calcular o raio da base do cilindro:

$$96 = 2 \cdot \pi \cdot R$$

$$96 = 2 \cdot 3{,}14 \cdot R$$

$$R = \frac{96}{6{,}28}$$

$$\boxed{\therefore\ R \cong 15{,}3 \text{ cm}}$$

Igualando os volumes:

Volume da forma (cilindro circular reto) = Volume da forma (troncos de cone)

$$\pi \cdot R^2 \cdot h_2 = 2367{,}52$$

$$3{,}14 \cdot (15{,}3)^2 \cdot h_2 = 2367{,}52$$

$$h_2 = \frac{2367{,}52}{735{,}0426}$$

$$\boxed{\therefore\ h_2 \cong 3{,}22 \text{ cm}}$$

Com isso concluíram que as dimensões das formas que possuem o mesmo volume que a apresentada na questão matriz são:

- Paralelepípedo reto-retângulo: largura (22,3 cm), comprimento (32,5 cm) e altura (3,27 cm);
- Cilindro circular reto: raio da base (15,3 cm) e altura (3,22 cm).

Com o tema gerador "Formas de bolo", foi possível estudar as figuras espaciais: paralelepípedo reto-retângulo, cilindro e cone circular reto. Possibilitou ainda, mostrar aos alunos a importância dos conceitos matemáticos envolvidos para a demonstração da fórmula do volume do tronco de cone, a qual foi necessária para determinar o modelo matemático que responde a questão matriz.

Devido às características apresentadas nas etapas do processo de modelagem Matemática, o presente tema gerador também se enquadra no "Caso 2" de Barbosa em que o professor apenas formula o problema inicial. Os alunos são responsáveis pela pesquisa para se familiarizar com o tema e tem o apoio do professor na simplificação, na coleta dos dados e na solução do problema.

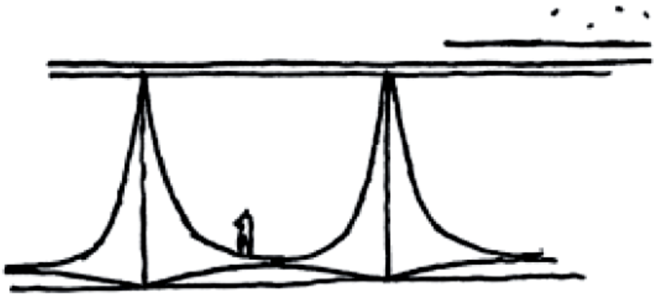
2.3.6 *Apresentação:*

Para a exposição do tema gerador "Formas de bolo", o grupo de alunos levou para a sala de aula os objetos usados em seus estudos, no caso, as formas de bolo das figuras 2.3, 2.8 e 2.9. Com as formas, os demais alunos puderam visualizar as dimensões e as medidas retiradas para a realização dos cálculos. O data-show foi utilizado para a demonstração, em PowerPoint, do modelo matemático encontrado. Pela complexidade da demonstração do modelo e por ser um conteúdo ainda não visto pelos alunos no ano corrente, houve maiores questionamentos durante as explicações. Porém, tais dúvidas foram sanadas pelo grupo de alunos que demonstrou segurança nas explicações, havendo pouca intervenção do professor.

2.4 Obras de Oscar Niemeyer

2.4.1 *Escolha do tema gerador:*

Questão do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2011:



IMODESTO *"As colunas do Alvorada podiam ser mais fáceis de construir, sem aquelas curvas. Mas foram elas que o mundo inteiro copiou"*

Brasília 50 anos. Veja. Nº 2 138, nov. 2009.

Utilizadas desde a Antiguidade, as colunas, elementos verticais de sustentação, foram sofrendo modificações e incorporando novos materiais com ampliação de possibilidades. Ainda que as clássicas colunas gregas sejam retomadas, notáveis inovações são percebidas, por exemplo, nas obras de Oscar Niemeyer, arquiteto brasileiro nascido no Rio de Janeiro em 1907. No desenho de Niemeyer, das colunas do Palácio da Alvorada, observa-se

A) a presença de um capitel muito simples, reforçando a sustentação.
B) o traçado simples de amplas linhas curvas opostas, resultando em formas marcantes.

C) a disposição simétrica das curvas, conferindo saliência e distorção à base.
D) a oposição de curvas em concreto, configurando certo peso e rebuscamento.
E) o excesso de linhas curvas, levando a um exagero na ornamentação.

Enxergando na questão acima a possibilidade de revisar e fixar o conteúdo "Funções afins e quadráticas", o professor regente adaptou o tema gerador "Obras de Oscar Niemeyer".

2.4.2 *Definição da questão matriz:*

Com o tema gerador "Obras de Oscar Niemeyer" foi proposta aos alunos a seguinte questão matriz: Como representar a fachada frontal da Escola Estadual Maria Constança Barros Machado por meio de funções?

2.4.3 *Interação:*

Uma das importâncias da Escola Estadual Maria Constança Barros Machado para a capital de Mato Grosso do Sul, foi ter sido projetada pelo mais famoso arquiteto brasileiro, Oscar Niemeyer. A escola começou a ser construída em 4 de novembro de 1952 e foi inaugurada em 26 de agosto de 1954 (aniversário de Campo Grande). O prédio da escola foi tombado em 1995 como Patrimônio Histórico Estadual. A arquitetura chama atenção por ter uma fachada frontal que representa um livro aberto, a caixa d'água um giz, um palito branco posicionado na entrada, que traz a ideia de um lápis, e no interior, o corredor extenso que traz à mente uma régua.

Figura 2.10: Escola Estadual Maria Constança Barros Machado, Campo Grande/MS.

Primeiramente, o professor junto ao grupo de alunos, responsável pelo desenvolvimento da aplicação, analisaram a vista frontal da escola para verificar qual função que em sua representação gráfica remeteria os traços da obra. Percebendo que não poderia ser representada com apenas uma única lei de formação, verificaram que era preciso mais de uma sentença para representar a junção da curva e das retas aparentes. Com isso, os alunos concluíram que a fachada seria representada por uma função definida por uma parábola, uma reta constante e uma reta crescente, ou seja, a junção de uma função quadrática com duas funções afins.

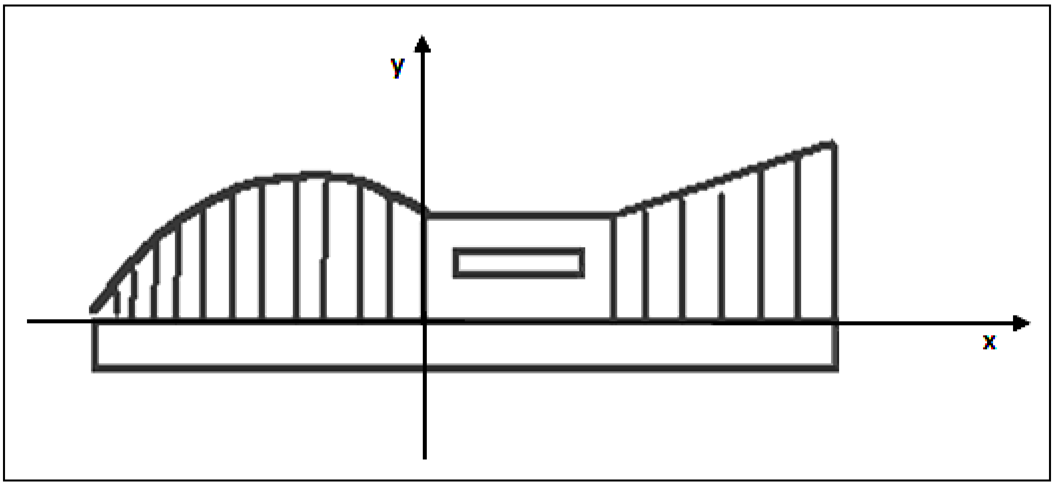


Figura 2.11: Representação no plano cartesiano da fachada frontal da E.E. Maria Constança Barros Machado.

Para determinar a primeira sentença que define a função, já identificada como do 2º grau, foi necessário retirar algumas medidas da fachada:

- a distância entre o ponto onde a parábola toca na coluna que representa o eixo das ordenadas (y) até o solo (3,7 metros) define um ponto de coordenadas (0 ; 3,7);
- um ponto qualquer sobre o eixo das abscissas (x) cuja distância horizontal até a coluna das ordenadas (26,6 metros) e sua distância vertical até a parábola (3,62 metros) define outro ponto de coordenadas (-26,6 ; 3,62);
- a distância entre o ponto onde a parábola toca o solo até a coluna das ordenadas (34,65 metros) determina um terceiro ponto de coordenadas (-34,65 ; 0).

Perceba que as abscissas dos pontos são negativas, pois estes se localizam no sentido negativo do eixo x.

2.4.4 *Matematização:*

Em posse das coordenadas dos três pontos da parábola (0 ; 3,7), (-26,6 ; 3,62) e (-34,65 ; 0) os alunos determinaram os coeficientes ***a***, ***b*** e ***c*** da função quadrática $f(x) = \boldsymbol{a}x^2 + \boldsymbol{b}x + \boldsymbol{c}$ no intervalo [-34,65 ; 0] através dos seguintes cálculos:

Como $f(0) = 3{,}7$, temos que:

$$\boldsymbol{a}.0^2 + \boldsymbol{b}.0 + \boldsymbol{c} = 3{,}7 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{c} = 3{,}7}$$

Como $f(-26{,}6) = 3{,}62$ e $\boldsymbol{c} = 3{,}7$, temos que:

$$\boldsymbol{a}.(-26{,}6)^2 + \boldsymbol{b}.(-26{,}6) + \boldsymbol{c} = 3{,}62$$

$$707{,}56.\boldsymbol{a} - 26{,}6.\boldsymbol{b} + 3{,}7 = 3{,}62$$

$$707{,}56.\boldsymbol{a} - 26{,}6.\boldsymbol{b} = - 0{,}08$$

$$2660.\boldsymbol{b} = 70756.\boldsymbol{a} + 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b} = \frac{70756.a + 8}{2660}} \quad \textbf{(I)}$$

Como $f(-34{,}65) = 0$, $\boldsymbol{c} = 3{,}7$ e $\boldsymbol{b} = \dfrac{70756.a + 8}{2660}$, temos que:

$$\boldsymbol{a}.(-34{,}65)^2 + \boldsymbol{b}.(-34{,}65) + 3{,}7 = 0$$

$$1200{,}6225.\boldsymbol{a} - 34{,}65.\boldsymbol{b} + 3{,}7 = 0$$

$$3465.\boldsymbol{b} = 120062{,}25.\boldsymbol{a} + 370 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b} = \frac{120062{,}25.a + 370}{3465}} \quad \textbf{(II)}$$

Comparando **(I)** e **(II)**:

$$\frac{70756.a + 8}{2660} = \frac{120062{,}25.a + 370}{3465}$$

$$245169540.a + 27720 = 319365585.a + 984200$$

$$74196045.a = -956480 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{a} = - 0{,}012891253}$$

Substituindo o valor de $\boldsymbol{a}$ em **(I):**

$$\boldsymbol{b} = \frac{70756.(-0{,}012891253) + 8}{2660} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\boldsymbol{b} = - 0{,}339899811}$$

Adotando $\boldsymbol{a} \cong - 0{,}013$, $\boldsymbol{b} \cong - 0{,}34$ e $\boldsymbol{c} = 3{,}7$ chegaram a lei de formação da função no intervalo [-34,65 ; 0]:

$$\boxed{f(\mathrm{x}) = - 0{,}013.x^2 - 0{,}34.x + 3{,}7}$$

Através desta lei de formação os alunos puderam relacionar o sinal negativo do coeficiente ***a*** com a concavidade da parábola apresentada na fachada voltada para baixo. E ainda, pela mesma característica, perceberam que era possível calcular a altura máxima dessa parte da fachada através do ponto de máximo da parábola. Para isso, utilizaram a fórmula da abscissa do vértice de uma parábola (X_V):

$$X_V = -\frac{b}{2.a} = -\frac{(-0{,}34)}{2.(-0{,}013)} = -13{,}077 \cong -13{,}08$$

Para calcular a ordenada do ponto de máximo (Y_V) determinaram *f*(-13,08):

$$f(-13{,}08) = -0{,}013.(-13{,}08)^2 - 0{,}34.(-13{,}08) + 3{,}7$$
$$f(-13{,}08) = -2{,}2241232 + 4{,}4472 + 3{,}7$$
$$f(-13{,}08) = 5{,}9230768$$

Portanto, $Y_V \cong 5{,}92$, ou seja, a altura máxima da parte da fachada formada pela parábola é de aproximadamente 5,92 metros. Determinada a primeira sentença da função, era preciso encontrar as demais.

Identificada como um caso particular de função afim, que é a função constante, os alunos determinaram a segunda sentença que define a função da fachada medindo apenas:

- a distância entre o ponto onde a reta toca na coluna que representa o eixo das ordenadas até o solo (essa distância coincide com o mesmo da parábola: 3,7 metros);
- a distância horizontal do ponto mencionado anteriormente até o ponto em que inicia-se a reta crescente (7,9 metros).

Assim, o modelo matemático é dado por:

$$\boxed{f(x) = 3{,}7 \text{ , } [0 \text{ ; } 7{,}9]}$$

Com a intenção de determinar a terceira sentença que define a função da fachada, já identificada como uma função afim, foi necessário obter as seguintes medidas:

- a distância horizontal entre o primeiro ponto onde se começa a reta crescente e a coluna das ordenadas (7,9 metros) e sua respectiva altura que coincide com a reta constante (3,7 metros), definindo assim um ponto de coordenadas (7,9 ; 3,7);
- a distância horizontal entre o ponto que termina a reta crescente e a coluna das ordenadas (30,12 metros) e sua respectiva altura (7,3 metros), definindo assim um ponto de coordenadas (30,12 ; 7,3).

Com os pontos de coordenadas (7,9 ; 3,7) e (30,12 ; 7,3) os alunos determinaram os coeficientes ***m*** e ***n*** da função do 1º grau $f(x) = \boldsymbol{m}x + \boldsymbol{n}$ no intervalo [7,9 ; 30,12] realizando os seguintes cálculos:

Como $f(7{,}9) = 3{,}7$, temos que:

$$\boldsymbol{m}.7{,}9 + \boldsymbol{n} = 3{,}7 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{n} = 3{,}7 - 7{,}9.\boldsymbol{m}} \ \textbf{(I)}$$

Como $f(30{,}12) = 7{,}3$ e $\boldsymbol{n} = 3{,}7 - 7{,}9.\boldsymbol{m}$, temos que:

$$\boldsymbol{m}.30{,}12 + \boldsymbol{n} = 7{,}3$$

$$30{,}12.\boldsymbol{m} + 3{,}7 - 7{,}9.\boldsymbol{m} = 7{,}3$$

$$22{,}22\boldsymbol{m} = 3{,}6 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{m} = 0{,}16201620...}$$

Adotando $\boldsymbol{m} \cong 0{,}162$ e substituindo em **(I)**, temos que:

$$n = 3{,}7 - 7{,}9.0{,}162 \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{n} = 2{,}4202}$$

Assim, a lei de formação da função no intervalo [7,9 ; 30,12] é:

$$\boxed{f(x) = 0{,}162.x + 2{,}4202}$$

2.4.5 *Modelo matemático:*

De acordo com os cálculos, junto com o professor, os alunos concluíram que a altura $f(x)$ da fachada da Escola Estadual Maria Constança Barros Machado em função da distância horizontal x, com ambas as medidas em metros, seria definida por:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}013x^2 - 0{,}34x + 3{,}7 \ ; \ se \ \ x \leq 0 \\ 3{,}7 \ ; \ se \ \ 0 < x \leq 7{,}9 \\ 0{,}162x + 2{,}4202 \ ; \ se \ \ x > 7{,}9 \end{cases}$$

Os alunos foram ainda questionados sobre os valores de *x* menores que -34,65 adotados na primeira sentença, e quanto aos valores de *x* maiores que 30,12 na terceira sentença, o que os levaram a discussão sobre o domínio, contradomínio e imagem da função. Percebendo que adotando para *x* um valor menor que -34,65 a altura resultaria em um valor negativo (o que não convém para a situação), e adotando um valor para *x* maior que 30,12 resultaria em uma altura que ultrapassava a altura máxima da fachada, tiveram que restringir o domínio e o contradomínio de *f*(*x*).

Logo, para validar o modelo matemático encontrado, fizeram a seguinte correção:
A função tem como domínio o intervalo real [-34,65 ; 30,12], sendo $\mathbb{R}_+$ o seu contradomínio e consequentemente o conjunto imagem seria o intervalo real [0 ; 7,3]. Com as devidas modificações definiram a função:

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}013x^2 - 0{,}34x + 3{,}7 \;\; ; \;\; se \;\; -34{,}65 \le x \le 0 \\ 3{,}7 \;\; ; \;\; se \;\; 0 < x \le 7{,}9 \\ 0{,}162x + 2{,}4202 \;\; ; \;\; se \;\; 7{,}9 < x \le 30{,}12 \end{cases} \quad \text{, sendo } f : [-34{,}65 \; ; \; 30{,}12] \rightarrow \mathbb{R}_+$$

Determinadas as três sentenças que definem a função, os alunos a representaram graficamente:

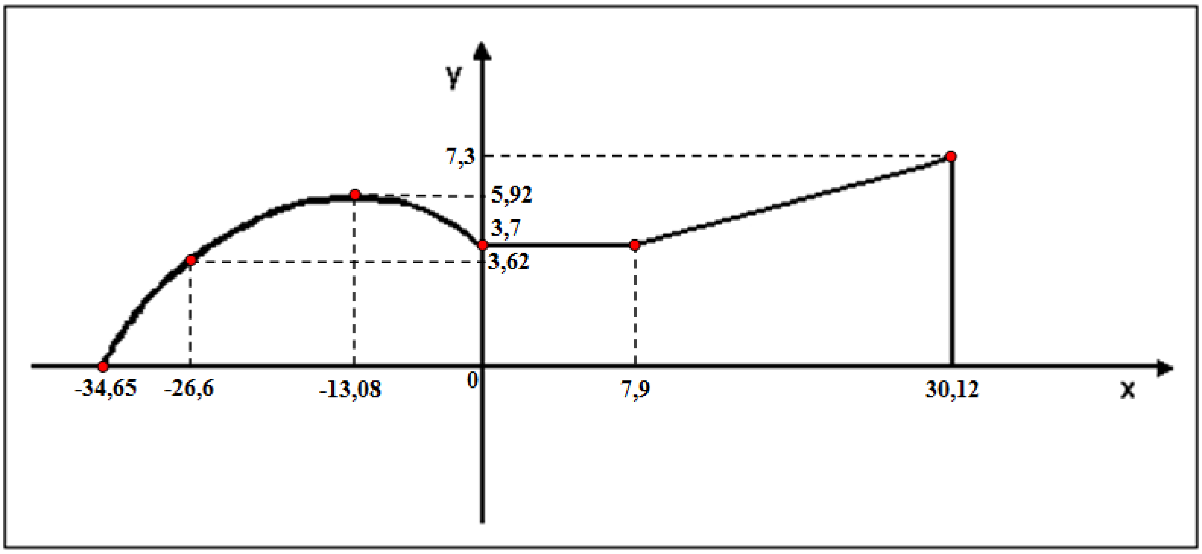


Figura 2.12: Gráfico da função *f*(*x*) definida por três sentenças.

Com o uso do programa WinPlot, os alunos plotaram o gráfico da mesma função *f(x)*.

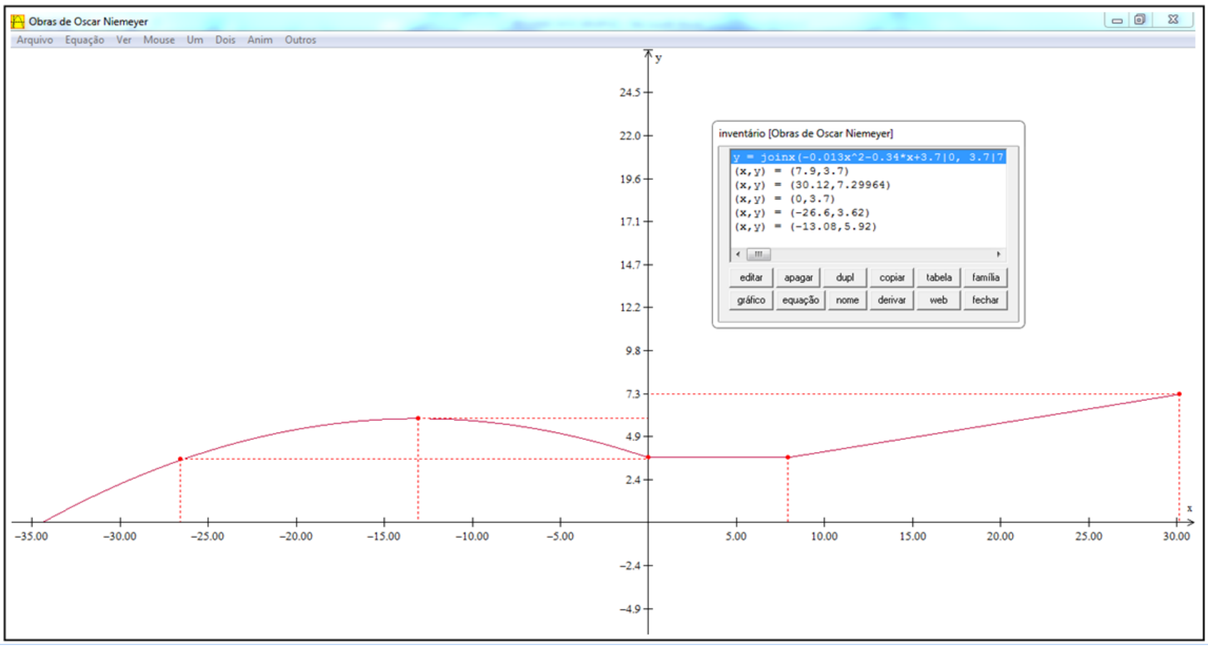


Figura 2.13: Gráfico da função *f*(*x*) definida por três sentenças (WinPlot).

Devido às características apresentadas nas etapas do processo de modelagem Matemática, o presente tema gerador se enquadra no "Caso 1" de Barbosa. Percebe-se que o professor teve uma participação maior no processo, pois além de formular o problema inicial, colaborou na simplificação e forneceu os dados da obra para que junto com os alunos respondessem à questão matriz.

2.4.6 *Apresentação:*

Para a exposição do tema gerador "Obras de Oscar Niemeyer", o grupo de alunos utilizou o data-show para mostrar, em PowerPoint, as fotos da fachada da obra e a demonstração dos cálculos efetuados. O programa WinPlot foi utilizado para a visualização da representação gráfica do modelo matemático encontrado. Os alunos expectadores puderam relembrar as características das funções envolvidas, assim como o conceito de domínio, contradomínio e imagem de funções.

2.5 Fontes de energia

2.5.1 *Escolha do tema gerador:*

Os assuntos mais abordados nas questões do ENEM, de certa forma, conduzem as aulas do Ensino Médio, fazendo com que o professor, sempre que possível, contextualize sua disciplina buscando despertar o senso crítico do aluno, aumentando assim sua capacidade de enfrentar situações-problema, compreender fenômenos, argumentar e propor intervenções na sociedade. Dentre os mais recorrentes pode-se notar que os conteúdos relacionados aos problemas da natureza são um dos mais focados no exame. As questões do ENEM que abordam conceitos químicos e físicos, respectivamente, exemplificam essa análise.

Questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2010:

O abastecimento de nossas necessidades energéticas futuras dependerá certamente do desenvolvimento de tecnologias para aproveitar a energia solar com maior eficiência. A energia solar é a maior fonte de energia mundial. Num dia ensolarado, por exemplo, aproximadamente 1 kJ de energia solar atinge cada metro quadrado da superfície terrestre por segundo. No entanto, o aproveitamento dessa energia é difícil porque ela é diluída (distribuída por uma área muito extensa) e oscila com o horário e as condições climáticas. O uso efetivo da energia solar depende de formas de estocar a energia coletada para uso posterior.

BROWN, T. Química e Ciência Central. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2005.

Atualmente, uma das formas de se utilizar a energia solar tem sido armazená-la por meio de processos químicos endotérmicos que mais tarde podem ser revertidos para liberar calor. Considerando a reação:

$$CH_{4(g)} + H_2O_{(v)} + calor \leftrightarrow CO_{(g)} + 3H_{2(g)}$$

e analisando-a como potencial mecanismo para o aproveitamento posterior da energia solar, conclui-se que se trata de uma estratégia

A) insatisfatória, pois a reação apresentada não permite que a energia presente no meio externo seja absorvida pelo sistema para ser utilizada posteriormente.
B) insatisfatória, uma vez que há formação de gases poluentes e com potencial poder explosivo, tornando-a uma reação perigosa e de difícil controle.
C) insatisfatória, uma vez que há formação de gás CO que não possui conteúdo energético passível de ser aproveitado posteriormente e é considerado um gás poluente.
D) satisfatória, uma vez que a reação direta ocorre com absorção de calor e promove a formação das substâncias combustíveis que poderão ser utilizadas posteriormente para obtenção de energia e realização de trabalho útil.
E) satisfatória, uma vez que a reação direta ocorre com liberação de calor havendo ainda a formação das substâncias combustíveis que poderão ser utilizadas posteriormente para obtenção de energia e realização de trabalho útil.

Deseja-se instalar uma estação de geração de energia elétrica em um município localizado no interior de um pequeno vale cercado de altas montanhas de difícil acesso. A cidade é cruzada por um rio, que é fonte de água para consumo, irrigação das lavouras de subsistência e pesca. Na região, que possui pequena extensão territorial, a incidência solar é alta o ano todo. A estação em questão irá abastecer apenas o município apresentado.

Qual forma de obtenção de energia, entre as apresentadas, é a mais indicada para ser implantada nesse município de modo a causar o menor impacto ambiental?

A) Termelétrica, pois é possível utilizar a água do rio no sistema de refrigeração.
B) Eólica, pois a geografia do local é própria para a captação desse tipo de energia.
C) Nuclear, pois o modo de resfriamento de seus sistemas não afetaria a população.
D) Fotovoltaica, pois é possível aproveitar a energia solar que chega à superfície do local.
E) Hidrelétrica, pois o rio que corta o município é suficiente para abastecer a usina construída.

Enxergando nas questões acima a possibilidade de interdisciplinar com outras áreas do conhecimento que abordam os problemas ambientais, como química, física e biologia, o professor regente, juntamente com um grupo de alunos, adaptaram o tema gerador "Fontes de energia". De acordo com essa preocupação, os alunos foram perguntados sobre qual fonte de energia gostariam de trabalhar e se propuseram a pesquisar sobre a energia solar, especificamente os painéis solares. Sendo um sistema que gera energia térmica ou elétrica, os painéis solares geraram também a curiosidade nos alunos em saber como essa tecnologia pode beneficiar a sociedade em termos econômicos e ecológicos.

2.5.2 *Definição da questão matriz:*

Diante de tal iniciativa, o professor apenas elaborou a questão matriz com o tema "Fontes de energia": Qual a economia que se tem na utilização de painéis de energia solar em um imóvel e quais os seus benefícios para o meio ambiente?

2.5.3 *Interação:*

Através de pesquisas realizadas pelo grupo, verificou-se que o uso dos raios solares como fonte de energia térmica é feito de forma passiva, por meio de técnicas modernas de arquitetura e construção (coletores ou concentradores solares) que permitem apenas uma maior iluminação natural aos ambientes ou basicamente aquecer a água. Já a conversão da energia solar em elétrica pode ocorrer por processo termoelétrico ou fotoelétrico. Como o rendimento do termoelétrico é baixo e o custo do seu material é muito elevado, o que inviabiliza o uso comercial, levou o grupo a dar um maior enfoque no uso do processo fotoelétrico. Esse processo escolhido pelos alunos, converte os fótons contidos na luz solar em energia elétrica através de painéis fotovoltaicos. Tais painéis são estruturas relativamente leves (em torno de 15 a 20 kg/m^2), composta por células fotovoltaicas, onde a radiação solar entra em contato com o silício, metal base da placa, e é transformada em energia elétrica na forma de corrente contínua, que por sua vez é conduzida por cabos até um inversor que se responsabilizará em transformá-la em corrente alternada, e por fim levada às tomadas para o uso.

Em 2012, foi aprovada uma Resolução Normativa da ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica) que incentiva consumidores de todo o Brasil a produzir eletricidade a partir de fontes renováveis, onde poderão ligar um sistema de energia solar implantado em um imóvel à rede elétrica. A energia que sobra irá para a distribuidora e em troca o consumidor ganha um abatimento na sua fatura. Para melhor entender esse procedimento, usaremos o seguinte exemplo:

Durante o dia, os painéis solares fotovoltaicos de uma casa produzem 10 kWh (dez quilowatts-hora) de energia e nesse período o consumo é de apenas 2 kWh. Com isso, a sobra de 8 kWh vai para a distribuidora. À noite, o painel solar não gera energia, mas o consumo da casa com luzes e aparelhos eletrônicos sobe para 7 kWh. Nesse caso toda a energia vem da distribuidora. A diferença entre os 8 kWh que a casa enviou para a rede e os 7 kWh que usou a noite, resulta em um crédito de 1 kWh por dia ou 30 kWh em um mês. O consumidor tem até 3 anos para usar esse valor.

Para aderir é preciso apresentar um projeto à distribuidora e se aprovada, o consumidor terá de arcar com o custo de um novo medidor, que mede a energia que entra e a consumida, e com o custo maior que é com os painéis. Segundo dados de uma empresa privada, que presta serviços de venda e instalação do sistema gerador fotovoltaico, o investimento total é de aproximadamente 15 mil reais para uma residência que tem um consumo médio de 220 a 300 kWh por mês.

Figura 2.14: Painéis solares fotovoltaicos.

Familiarizados com todo o processo de funcionamento e utilização da energia gerada pelos painéis solares fotovoltaicos, os alunos decidiram investigar se compensaria para um consumidor residencial comum (classificado como consumidor de baixa tensão) aderir ao projeto e quanto tempo levaria para obter o retorno total do investimento aplicado. Para isso, os alunos analisaram as 12 últimas faturas mensais de um consumidor que possuía em sua residência um padrão bifásico e um consumo médio de energia de 285 kWh por mês. Para efetuar os cálculos e responder a questão matriz, fez-se necessário compreender a composição da fatura de energia elétrica e verificou-se que nela são cobrados :

- os tributos federais (PIS/COFINS) e estadual (ICMS);
- o tributo municipal (CIP) referente à Contribuição para Custeio do Serviço de Iluminação Pública;
- o consumo mensal de energia (produto do consumo mensal, em kWh, pela tarifa cobrada por kWh).

Observação 1: Os tributos mencionados também integram a própria base de cálculo sobre a qual incidem suas respectivas alíquotas, a chamada cobrança "por dentro".

Observação 2: A CIP é uma contribuição legal criada por meio da emenda constitucional nº 39, de dezembro de 2002 em que são isentos da cobrança as Unidades Consumidoras da classe "Residencial baixa renda" – monofásico, que consome até 60 KWh/mês.

Observação 3: Importante salientar que no valor cobrado proporcional a energia consumida no mês, já está embutido a cobrança pela distribuição, transmissão e outros encargos setoriais.

Observação 4: A tarifa cobrada por kWh consumido é um valor homologado pela ANEEL para cada concessionária que no período pesquisado (últimos 12 meses) teve a média apresentada na tabela abaixo.

Fatura	Tributos		CIP		Consumo mensal (kwh)	Tarifa por kwh (R$) (**)	Consumo mensal (R$)		Valor total da fatura
	R$	% (*)	R$	% (*)			R$	% (*)	
1	29,72	20,6	17,87	12,4	295	0,32648	96,31	66,9	143,96
2	31,01	22,0	21,35	15,1	272	0,32648	88,80	62,9	141,18
3	26,86	19,5	16,52	12,0	289	0,32648	94,35	68,5	137,74
4	31,35	21,5	18,78	12,9	293	0,32648	95,66	65,6	145,82
5	33,27	21,9	16,92	11,1	312	0,32648	101,86	67,0	152,03
6	35,13	22,9	19,50	12,7	277	0,35708	98,91	64,4	153,59
7	33,91	22,3	18,25	12,0	280	0,35708	99,98	65,7	152,18
8	34,60	21,1	22,01	13,4	301	0,35708	107,48	65,5	164,09
9	35,47	21,7	22,95	14,0	295	0,35708	105,34	64,3	163,82
10	33,90	24,0	16,86	11,9	254	0,35708	90,70	64,1	141,50
11	32,85	22,1	20,04	13,5	269	0,35708	96,05	64,5	148,92
12	30,81	19,9	22,35	14,4	286	0,35708	102,12	65,8	155,20
Média	32,41	21,6	19,45	13,0	285	0,34433	98,13	65,4	150,00
(*) porcentagem correspondente ao valor total da fatura (**) tarifa homologada pela ANEEL									

Tabela 2.4: Análise das 12 últimas faturas mensais de um consumidor de baixa tensão.

2.5.4 *Matematização:*

Após compilados e interpretados os dados da Tabela 2.4, concluíram que a média do valor total da fatura de energia elétrica é composta da seguinte forma percentual:

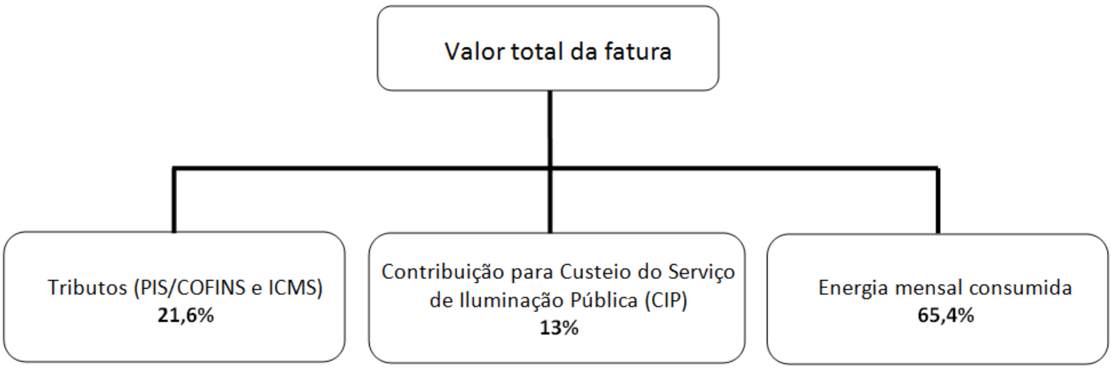


Figura 2.15: Composição do valor médio percentual pago na fatura de energia elétrica.

Com os valores médios determinados, os alunos calcularam:

Uma fatura mensal no valor de R$150,00 que apresenta um consumo de 285 kWh de energia à uma tarifa de R$ 0,34433 por kWh terá um custo (C_1) para o consumidor em n meses:

$$C_1(n) = 150.n$$

Se esse mesmo consumidor resolver adquirir painéis solares fotovoltaicas, ao invés de utilizar toda a energia da concessionária, que faz a distribuição na cidade, terá que arcar com o custo do material e da implantação do sistema por uma empresa privada. Além do investimento que gira em torno de 15 mil reais, ele ainda se responsabilizará por pagar mensalmente o valor de R$ 19,45 referente ao CIP. Supondo que o sistema de energia renovável vá gerar 10 kWh de energia por dia e como seu consumo é de 285 kWh/mês, ou seja, 9,5 kWh/dia, a diferença entre a energia que se produz e a que se gasta, gera um crédito de 0,5 kWh, equivalente a 15 kWh de energia no mês perante a concessionária. Logo, o custo total (C_2) para esse consumidor, ao investir no sistema de painéis solares em *n* meses, é dado por:

$$C_2(n) = \underbrace{\boxed{15000}}_{\text{Custo total com o sistema de painéis solares fotovoltaicos}} + \overbrace{\boxed{19{,}45}}^{\text{CIP mensal}}.n - \left(\underbrace{\boxed{0{,}5}}_{\text{Crédito (kWh/dia)}} . \overbrace{\boxed{0{,}34433}}^{\text{tarifa/KWh (R\$)}} . \underbrace{\boxed{30}}_{\text{dias do mês}} \right).n$$

Na intenção de determinar o tempo necessário para que o consumidor tenha o retorno de todo o investimento aplicado, igualaram os custos C_1 e C_2:

$$C_1(n) = C_2(n)$$

$$150.n = 15000 + 19{,}45.n - (0{,}5 \;.\; 0{,}34433 \;.\; 30).n$$

$$150.n = 15000 + 19{,}45.n - 5{,}16495.n$$

$$135{,}71495.n = 15000$$

$$n \cong 110{,}53 \text{ meses}$$

$$\boxed{n \cong 9{,}2 \text{ anos}}$$

Portanto, depois de aproximadamente nove anos e três meses, uma pessoa que consome 285 kWh/mês em energia elétrica, terá lucro no investimento em painéis solares fotovoltaicos em sua residência.

Observação 5: Como na simulação os valores aplicados na fórmula são médias, logo o período encontrado despreza os aumentos das tarifas citadas durante o mesmo.

Observação 6: Caso a energia diária produzida pelos painéis solares seja menor que a gasta, resultará em débito para o consumidor.

Após responder a questão matriz, o professor orientou os alunos a determinar uma fórmula capaz de generalizar o tempo de retorno no investimento em painéis solares. Através da equação montada na situação do consumidor pesquisado, foi possível identificar as variáveis necessárias para a composição da fórmula:

n: tempo de retorno no investimento (anos)
F: média do valor total da fatura de energia elétrica (R$)
I: média da CIP (Contribuição para Custeio do Serviço de Iluminação Pública)
P: média da energia diária produzida pelos painéis solares (kWh)
C: média do consumo mensal de energia (kWh)
T: média da tarifa por kWh (R$)

Analisando a equação:

$$150.n = 15000 + 19{,}45.n - (0{,}5 \cdot 0{,}34433 \cdot 30).n$$

E substituindo pelas variáveis, temos:

$$F.n = 15000 + I.n - \left[\left(P - \frac{C}{30}\right).T.30\right].n$$

$$\boxed{F.n - I.F.n + \left[30.P.T - C.T\right].n = 15000}$$

Com o intuito de diminuir o número de incógnitas na equação, verificou-se que:
Como o valor pago pela C.I.P corresponde a 13% do valor total da fatura, ou seja,

$\boxed{I = 0{,}13.F}$, temos que

$$F.n - 0{,}13.F.n + \left[30.P.T - C.T\right].n = 15000$$

$$\left(F - 0{,}13.F + 30.P.T - C.T\right).n = 15000$$

$$\left(0{,}87.F + 30.P.T - C.T\right).n = 15000$$

E ainda, como o valor pago apenas pela energia mensal consumida corresponde a 65,4% do valor total da fatura, ou seja,

$\boxed{0{,}654.F = C.T}$, temos que

$$F = \frac{C.T}{0{,}654} \text{ ou}$$

$$\boxed{F = \frac{500.C.T}{327}}$$

Assim, substituindo na equação $(0{,}87.F + 30.P.T - C.T).n = 15000$, teremos:

$$\left(0{,}87.\frac{500.C.T}{327} + 30.P.T - C.T\right).n = 15000$$

$$\left(\frac{145.C.T}{109} + 30.P.T - C.T\right).n = 15000$$

$$\left(\frac{36.C.T}{109} + 30.P.T\right).n = 15000$$

$$\left(\frac{36.C.T + 3270.P.T}{109}\right).n = 15000$$

$$n = \frac{15000 \cdot 109}{36.C.T + 3270.P.T} = \frac{1635000}{6T.(6C + 545.P)}$$

$$n = \frac{817500}{3T.(6.C + 545.P)}, \text{ com } n \text{ em meses.}$$

2.5.5 *Modelo matemático:*

Para que a fórmula determine o período em anos, os alunos dividiram o segundo membro da equação por 12:

$$n = \frac{817500}{3T.(6.C + 545.P)} \cdot \frac{1}{12}, \text{ logo}$$

$$\boxed{n = \frac{68125}{3T.(6C + 545P)}} \quad \textbf{(I)}$$

Para validar a fórmula que determina o tempo necessário, em anos, para o retorno do investimento em painéis solares em função de *T*, *C* e *P*, substituíram as variáveis pelos dados obtidos do consumidor pesquisado:

T = R$ 0,34433 por kWh

C = 285 Kwh

P = 10 kWh

Assim,

$$n = \frac{68125}{3.0{,}34433(6.285 + 545.10)}$$

$$n = \frac{68125}{7396{,}2084} \Rightarrow \boxed{n \cong 9{,}2 \text{ anos}}$$

Confirmando a eficácia da fórmula, os alunos levantaram importantes observações durante a apresentação do grupo na sala de aula, como a verificação das proporcionalidades envolvidas: quanto maior a irradiação, a tarifa da energia elétrica e o consumo mensal da residência, consequentemente, menor será o tempo de retorno do que foi investido.

Através de planilhas construídas no Excel, o grupo aplicou o modelo matemático, fixando a tarifa média T de 0,34433 R$/kWh e uma produção diária dos painéis solares P de 8 e 10 kWh, para efeitos de cálculo, obtendo os seguintes valores de n:

T	*C*	*P*	*n*
0,34433	220	8	11,6108
0,34433	225	8	11,5498
0,34433	230	8	11,48943
0,34433	235	8	11,42969
0,34433	240	8	11,37057
0,34433	245	8	11,31206
0,34433	250	8	11,25415
0,34433	255	8	11,19683
0,34433	260	8	11,14009
0,34433	265	8	11,08392
0,34433	270	8	11,02832
0,34433	275	8	10,97327
0,34433	280	8	10,91876
0,34433	285	8	10,8648
0,34433	290	8	10,81137
0,34433	295	8	10,75846
0,34433	300	8	10,70606

T	*C*	*P*	*n*
0,34433	220	10	9,741408
0,34433	225	10	9,698431
0,34433	230	10	9,655832
0,34433	235	10	9,613605
0,34433	240	10	9,571746
0,34433	245	10	9,53025
0,34433	250	10	9,489112
0,34433	255	10	9,448328
0,34433	260	10	9,407893
0,34433	265	10	9,367803
0,34433	270	10	9,328053
0,34433	275	10	9,288638
0,34433	280	10	9,249556
0,34433	285	10	9,2108
0,34433	290	10	9,172369
0,34433	295	10	9,134256
0,34433	300	10	9,09646

Tabela 2.5 e 2.6: Períodos de retorno do investimento com variação do consumo mensal entre 220 e 300 kWh.

Utilizando a fórmula **(I)**, comprova-se que uma pessoa que tem um consumo mensal de energia elétrica variando entre 220 e 300 kWh, tendo implantado em sua residência um sistema de painéis solares fotovoltaicos, que produz diariamente de 8 a 10 kWh de energia, terá como período de retorno do investimento de R$ 15.000,00, variando entre 9 e 12 anos.

Como os painéis tem vida útil de 25 anos, a expectativa é que os custos diminuam com o crescimento do mercado e com a diminuição de impostos para consumidores e fabricantes.

Os alunos do grupo concluíram ainda, que a vantagem da utilização desse recurso não só reduz os custos de geração de energia no país, mas também de transmissão e distribuição. Além do fator econômico, a solução traz também menos impacto para o meio ambiente: como se 12 lâmpadas de 60 watts ficassem desligadas por um ano ou 39 árvores seriam deixadas de ser cortadas, ou ainda, o equivalente a 1 tonelada de gás carbônico (CO_2) não seriam emitidas na atmosfera.

Devido às características apresentadas nas etapas do processo de modelagem Matemática, o presente tema gerador se enquadra no "Caso 3" de Barbosa em que um tema 'não-matemático' é sugerido pelos próprios alunos, os quais possuem maior autonomia no desenvolvimento da aplicação. A investigação, a coleta dos dados e a solução do problema são tarefas dos alunos.

2.5.6 *Apresentação:*

Para a exposição do tema gerador "Fontes de energia", o grupo de alunos exibiu um vídeo que explica o funcionamento dos painéis fotovoltaicos e duas reportagens a respeito do tema. As pesquisas, tabelas e cálculos realizados, para a obtenção do modelo matemático, foram apresentadas em PowerPoint. Cópias dos slides foram entregues aos demais alunos para o acompanhamento das explicações e anotações. Durante a apresentação do grupo, notou-se que o tema abordado possibilitou também debater com a turma de alunos, sobre o comportamento ideal para que um consumidor economize mais energia.

2.6 Considerações finais

O tempo de duração das *aplicações* selecionadas como relatos de experiência e aqui descritas, desde a escolha do tema gerador até a apresentação dos alunos, foi de um mês e meio.

Com base nos casos (1, 2 e 3) de Barbosa (2004), quanto as tarefas do professor e do aluno no processo de Modelagem Matemática, apresentadas no Capítulo 1, segue o quadro comparativo.

APLICAÇÕES	"Obras de Oscar Niemeyer"	"Empresas de táxi em Campo Grande - MS" e "Formas de bolo"	"Fontes de energia"
CASOS	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do problema	professor	professor	professor/aluno
Simplificação	professor	professor/aluno	professor/aluno
Coleta de dados	professor	professor/aluno	professor/aluno
Solução	professor/aluno	professor/aluno	professor/aluno

Quadro 2.5: Comparação entre os casos descritos por Barbosa e as *aplicações* realizadas em sala de aula.

De uma forma sintetizada, são apresentadas as quatro *aplicações* de Modelagem Matemática através dos seguintes quadros.

MODELAGEM MATEMÁTICA - APLICAÇÃO 1	
Tema gerador	Empresas de táxi em Campo Grande - MS
Questão matriz	Dentre três empresas de táxi pesquisadas no município, qual é a mais econômica para um passageiro?
ETAPAS	**DESENVOLVIMENTO**
Interação	Os alunos pesquisaram as empresas de táxi em atividade na capital e colheram dados sobre os valores cobrados por km rodado e bandeiradas.
Matematização	Relacionaram o problema com conteúdos matemáticos que os possibilitavam responder a questão matriz (conjuntos numéricos, equação, função afim e intervalos numéricos). Formulação e resolução do problema através de cálculos.
Modelo matemático	Interpretação e validação do(s) modelo(s) matemático(s) construído(s): leis de formação das funções afins.
Apresentação	Exposição do grupo em sala de aula quanto a pesquisa, desenvolvimento e conclusão do trabalho demonstrando os cálculos em PowerPoint.

Quadro 2.6: Resumo das etapas seguidas no processo de Modelagem Matemática do Grupo 1.

MODELAGEM MATEMÁTICA - APLICAÇÃO 2	
Tema gerador	Formas de bolo
Questão matriz	Como é possível calcular o volume de uma forma de bolo com o mesmo formato apresentado na questão do ENEM? E ainda, quais seriam as dimensões de diferentes formas de bolo que possuem o mesmo volume da primeira?
ETAPAS	**DESENVOLVIMENTO**
Interação	Análise feita pelos alunos de três formatos diferentes para as formas de bolo. Coleta de medidas necessárias para os cálculos.
Matematização	Relacionaram as formas com figuras tridimensionais da geometria espacial (tronco de cone circular reto, paralelepípedo reto-retângulo e cilindro circular reto). Utilizaram unidades de medida de capacidade e conceitos da geometria plana (semelhança de triângulos) para formular e resolver o problema.
Modelo matemático	Interpretação e validação do(s) modelo(s) matemático(s) construído(s): volume das formas de bolo.
Apresentação	Exposição do grupo quanto ao desenvolvimento e conclusão do trabalho manipulando os objetos em sala de aula e demonstrando os cálculos em PowerPoint.

Quadro 2.7: Resumo das etapas seguidas no processo de Modelagem Matemática do Grupo 2.

MODELAGEM MATEMÁTICA - APLICAÇÃO 3	
Tema gerador	Obras de Oscar Niemeyer.
Questão matriz	Como representar a fachada frontal da Escola Estadual Maria Constança Barros Machado por meio de funções?
ETAPAS	**DESENVOLVIMENTO**
Interação	Análise da fachada da escola e pesquisa sobre gráfico de funções. Coleta de medidas necessárias da obra para os cálculos.
Matematização	Relação entre a fachada com o gráfico de uma função composta por três sentenças (uma quadrática, uma constante e uma afim). Formulação e resolução do problema através de cálculos.
Modelo matemático	Interpretação e validação da função encontrada.
Apresentação	Exposição do grupo em sala de aula quanto ao desenvolvimento e conclusão do trabalho com visualização em PowerPoint de fotos da obra e os cálculos realizados para a construção do modelo matemático.

Quadro 2.8: Resumo das etapas seguidas no processo de Modelagem Matemática do Grupo 3.

MODELAGEM MATEMÁTICA - APLICAÇÃO 4	
Tema gerador	Fontes de energia
Questão matriz	Qual a economia que se tem na utilização de painéis de energia solar em uma residência e quais os seus benefícios para o meio ambiente?
ETAPAS	**DESENVOLVIMENTO**
Interação	Pesquisa sobre o que é, quais são os tipos e como é o funcionamento de um painel solar. Compreensão da composição da fatura mensal de energia elétrica. Coleta de dados das faturas de um consumidor residencial.
Matematização	Construção da fórmula que calcula o tempo de retorno no investimento em painéis solares fotovoltaicos através de médias, equações envolvendo várias incógnitas e representações percentuais.
Modelo matemático	Interpretação das variáveis envolvidas e validação da fórmula encontrada.
Apresentação	Exposição do grupo em sala de aula quanto à pesquisa, desenvolvimento e conclusão do trabalho utilizando o PowerPoint para visualização de fotos e demonstração dos cálculos realizados. Apresentação de vídeos com reportagens sobre o assunto.

Quadro 2.9: Resumo das etapas seguidas no processo de Modelagem Matemática do Grupo 4.

Apesar da inserção de jogos pedagógicos e de programas computacionais no ensino da Matemática para melhorar a aprendizagem nas escolas, essas metodologias ainda estão mais presentes no Ensino Fundamental. Muitos professores do Ensino Médio, que lecionam essa disciplina, se encontram acomodados em metodologias tradicionais, seja por falta de formação ou pelo pouco incentivo à utilização de novos recursos pedagógicos. Desta forma, muitos alunos terminam sua trajetória na educação básica com inúmeras fórmulas acumuladas na mente para uma finalidade: passar no exame vestibular. Exame no qual exige do aluno o que muitas vezes na sala de aula ele não foi preparado a fazer: utilizar o conhecimento matemático para solucionar problemas do cotidiano e agir na sociedade como um cidadão ativo.

É importante salientar que o intuito não é que o professor de matemática deva radicalizar e focar suas aulas em apenas tópicos da matemática concreta, com atividades de aplicação real, descartando assim, as teorias mais abstratas, as demonstrações, o pensamento empírico e o reflexivo que também são fundamentais para um ensino de matemática de qualidade. Afinal, por mais distantes da realidade do aluno que ainda possam parecer, muitos conteúdos da matemática do Ensino Médio são pré-requisitos para cursos da área de exatas, ou até mesmo em disciplinas de outras áreas, caso o mesmo venha futuramente cursar.

A intenção deste trabalho é que os leitores/professores possam enxergar a Modelagem Matemática como uma estratégia capaz de aumentar o interesse do aluno do Ensino Médio pela disciplina, assim como, preparar o estudante a ingressar numa universidade, tendo como porta de entrada o ENEM. A falta de ideias para iniciar um projeto de Modelagem Matemática faz com que o professor se sinta desestimulado, mas tendo as próprias questões de provas anteriores do ENEM como temas geradores, o professor poderá adaptá-las para o contexto ou assunto que ele queira abordar.

CAPÍTULO 3: CONCLUSÃO

A motivação em estudar a Matemática no Ensino Médio se revela, muitas das vezes, em alunos que veem a aplicabilidade da mesma em situações reais. O uso da Modelagem Matemática é uma ferramenta que estimula um interesse maior pela disciplina em foco e, concomitantemente, atende ao objetivo de desenvolver nos alunos as habilidades e competências contidas no PCNEM (APÊNDICE A).

Através do conceito de Modelagem Matemática e das etapas a serem seguidas no processo de se modelar, estudados no Capítulo 1 do presente trabalho, o professor poderá, de forma consciente, utilizar essa metodologia em turmas do Ensino Médio.

As quatro *aplicações* de Modelagem Matemática, descritas no Capítulo 2, demonstram como é possível a utilização das questões do ENEM como temas geradores e a aprendizagem significativa dos alunos. Ao ser utilizada como uma estratégia de preparação para o ENEM, podemos concluir que a proposta é eficaz, pois as *aplicações* desenvolveram nos alunos envolvidos importantes habilidades e competências que são avaliadas no exame. De acordo com a Matriz de Referência do ENEM, apresentada no APÊNDICE B desse trabalho, a Tabela 3.1 mostra as competências (representadas por C1 a C7) e as respectivas habilidades (H1 a H28) desenvolvidas nas *aplicações*.

APLICAÇÕES	COMPETÊNCIAS E HABILIDADES
"Empresas de táxi em Campo Grande - MS"	C1: H1/H3/H4 C5: H19/H20/H21 C6: H24/H25/H26
"Formas de bolo"	C2: H7/H8/H9 C3: H10/H13/H14
"Obras de Oscar Niemeyer"	C1: H1/H3/H4 C5: H19/H20/H21/H22
"Fontes de energia"	C1: H1/H3/H4 C4: H15/H16/H17/H18 C5: H19/H21/H23 C7: H27/H28

Tabela 3.1: Habilidades e competências desenvolvidas nas *aplicações* de Modelagem Matemática.

As *aplicações* comprovam que a temática apresentada permite que o professor utilize-a como uma ferramenta que estimula o próprio aluno a descobrir por meio de pesquisas, observações ou experiências, os conceitos, as fórmulas e consequentemente a solução de um problema. Revelando-se, ainda, como um instrumento que favorece a interdisciplinaridade com outras áreas do conhecimento ou, até mesmo, possibilita a revisão e fixação do que já foi ensinado, mostrando a aplicabilidade de um determinado conteúdo. Na primeira opção, apesar do aluno fazer suas próprias descobertas, o papel do professor é fundamental para conduzir o aluno aos objetivos de sua aula e que de acordo com a sua necessidade e características da turma, poderá fazer as devidas adaptações.

Desse modo, o uso da Modelagem Matemática para turmas do Ensino Médio possibilita uma reaproximação dos alunos a essa ciência que se encontra tão presente em nossas vidas, mas se mantém oculta aos olhos de muitos nas escolas do nosso país.

REFERÊNCIAS

ARAÚJO, J. L. 2004, em Cury, H. N (Ed.) **Disciplinas Matemáticas em cursos superiores: Reflexões, relatos, propostas**. 1º ed. Rio Grande do Sul, RS, 2004.

AUSUBEL, D. P. **Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva.** Lisboa: Plátano Edições Técnicas, 2003.

BARASUOL, F. **Modelagem matemática: uma metodologia alternativa para o ensino da matemática**. In: UNI revista - Vol. 1, n° 2: (abril 2006).

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática: Concepções e Experiências de Futuros Professores**. Tese de Doutorado em Educação Matemática, UNESP, Rio Claro, 2001.

BARBOSA, J. C. Modelagem **Matemática: O que é? Por que? Como?** *Veritati*, n. 4, p. 73-80, 2004.

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática na sala de aula**. In: VIII encontro nacional de educação matemática, 2004, Recife. Anais do VIII Enem, Recife: Sbem-PE, 2004. 1 CD-ROM.

BARBOSA, J. C.; SANTOS, M. A. **Modelagem matemática, perspectivas e discussões**. In:ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte. *Anais*... Recife: SBEM, 2007. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia.** 2.ed. São Paulo: Contexto, 2004.

BEAN, D. **O que é modelagem matemática?** Educação Matemática em Revista, São Paulo, ano 8, n. 9-10, p. 49-57, abril. 2001.

BIEMBENGUT, M. S. **Qualidade de Ensino de Matemática na Engenharia: uma proposta metodológica e curricular**. Florianópolis: UFESC, 1997. Tese de Doutorado, Curso de Pós-Graduação em Engenharia de Produção e Sistemas.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2000.

BLUM, W. **Applications and Modelling in mathematics teaching and mathematics education – some important aspects of practice and of research**. In: SLOYER, C. et al (Ed.) *Advances and perspectives in the teaching of Mathematical modelling and Applications*. Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, 1995. p. 1-20.

BURAK, Dionísio. **Modelagem Matemática: uma metodologia alternativa para o ensino**

de Matemática na 5a. Série, Rio Claro, São Paulo, 1987, 188f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho.

BRASIL. Agência Nacional de Energia Elétrica. **Por dentro da conta de energia: informação de utilidade pública.** 4. ed. Brasília: ANEEL, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. **Matriz de Referência do ENEM 2013**. Brasília: MEC/INEP. 2013.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. **PCN+ Ensino Médio. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC/SEF. 2002.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto/ Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio**. Brasília: MEC/SEF. 2002.

CURSO DO AMBIENTE ENERGIA TREINAMENTOS. **Uma aula sobre energia solar fotovoltaica.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=RmFKXeTs6gk>. Acesso em: 14 fev. 2014.

CURY, H. N. **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**. Porto Alegre: Edipucrs, 2004, 430 p.

D' AMBRÓSIO, Ubiratan. **Da realidade a ação: reflexões sobre educação e matemática.** São Paulo: Summus; Campinas: Editora da Universidade Estadual de Campinas, 1986.

GALBRAITH, P. **Modelling, teaching, reflecting – what I have learned**. In: SLOYER, C. et al. *Advances and perspectives in the teaching of Mathematical modelling and Applications*. Yorklyn, DE: Water Street Mathematics, 1995. p. 21-45.

HERNÁNDEZ, F.; VENTURA, M. **A organização do currículo por projetos de trabalho**. 5º ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1998.

JACOBINI, O. R. **A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula.** 2004. 225 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

JORNAL NACIONAL. **Agora você pode produzir sua própria Energia.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=JQwPgsJrzPQ>. Acesso em: 14 fev. 2014.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões.** Rio de Janeiro: Campus, 2002.

GOLDBARG, M. C. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos.** Rio de Janeiro: Campus, 2000.

MACHADO JÚNIOR, A. G. **Modelagem matemática no ensino-aprendizagem e resultados**. Belém, Pará, 2005. 142 p. Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Núcleo Pedagógico de Apoio ao Desenvolvimento Científico, Universidade Federal do Pará, Belém, 2005.

MENDONÇA, M. C. D. **Problematização: Um caminho a ser percorrido em Educação Matemática**, Tese de Doutorado, Campinas - SP, 1993.

MONTEIRO, A. **O ensino de Matemática para Adultos através do Método Modelagem Matemática**. Dissertação de Mestrado. UNESP, Rio Claro, 1992

MSTV. **Nova Legislação autoriza residências gerarem sua própria energia elétrica.** Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=EMgsqMWBQV4>. Acesso em: 14 fev. 2014.

O'SHEA, T. e BERRY, J. **Assessing mathematical modeling**. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol. London v. 13. n.6, 1982.

PAIVA, M. R., **Matemática / Manoel Rodrigues Paiva. Volume 2** – 1ª Edição – São Paulo: Moderna, 1995.

RIBEIRO, Flávia Dias. **Jogos e Modelagem na Educação Matemática**, Curitiba, Ibpex, 2008.

SCHIMITT, A. L. F.; BIENBENGUT, M. S. **Mapeamento das Pesquisas sobre Modelagem Matemática no Cenário Mundial – Análise dos trabalhos apresentados no 14º grupo de estudo do Comitê Internacional de Educação Matemática** – Study Group, 14 – ICMI. In: V CNMEM – Congresso Nacional de Modelagem em Educação Matemática, 2007, Ouro Preto. Anais do V CNMEM, 2007.

WARWICK, J. Some reflections on the Teaching of Mathematical Modeling. **The Mathematical Educator**, Londres, v.17, n. 1, p. 32-41, 2007.

APÊNDICE A − PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS DO ENSINO MÉDIO (PCNEM)

Considerada como última e complementar etapa da Educação Básica, o Ensino Médio é apontado no PCNEM como uma etapa em que já se pode contar com uma maior maturidade do aluno, os objetivos educacionais podem passar a ter maior ambição formativa, tanto em termos da natureza das informações tratadas, dos procedimentos e atitudes envolvidas, como em termos das habilidades, competências e dos valores desenvolvidos.

Buscando apoio e orientação no mesmo documento, a disciplina de Matemática no Ensino Médio é destacada por seu valor formativo que ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio dedutivo do aluno, e que também desempenha um papel instrumental, pois é uma ferramenta que serve para a vida cotidiana e para muitas tarefas específicas em quase todas as atividades humanas. No que diz respeito ao caráter instrumental da Matemática no Ensino Médio, ela deve ser vista pelo aluno como um conjunto de técnicas e estratégias para serem aplicadas a outras áreas do conhecimento, assim como para a atividade profissional.

Contudo, a Matemática no Ensino Médio não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser vista como ciência, com suas características estruturais específicas. É importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações, encadeamentos conceituais e lógicos têm a função de construir novos conceitos e estruturas a partir de outros, os quais servem para validar intuições e dar sentido às técnicas aplicadas. Assim, o PCNEM especifica as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática quanto a:

Representação e comunicação

- Ler e interpretar textos de Matemática.
- Ler, interpretar e utilizar representações matemáticas (tabelas, gráficos, expressões etc).
- Transcrever mensagens matemáticas da linguagem corrente para linguagem simbólica (equações, gráficos, diagramas, fórmulas, tabelas etc.) e vice-versa.
- Exprimir-se com correção e clareza, tanto na língua materna, como na linguagem matemática, usando a terminologia correta.
- Produzir textos matemáticos adequados.
- Utilizar adequadamente os recursos tecnológicos como instrumentos de produção e de comunicação.

• Utilizar corretamente instrumentos de medição e de desenho.

Investigação e compreensão

• Identificar o problema (compreender enunciados, formular questões etc.).
• Procurar, selecionar e interpretar informações relativas ao problema.
• Formular hipóteses e prever resultados.
• Selecionar estratégias de resolução de problemas.
• Interpretar e criticar resultados numa situação concreta.
• Distinguir e utilizar raciocínios dedutivos e indutivos.
• Fazer e validar conjecturas, experimentando, recorrendo a modelos, esboços, fatos conhecidos, relações e propriedades.
• Discutir ideias e produzir argumentos convincentes.

Contextualização sócio-cultural

• Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática na interpretação e intervenção no real.
• Aplicar conhecimentos e métodos matemáticos em situações reais, em especial em outras áreas do conhecimento.
• Relacionar etapas da história da Matemática com a evolução da humanidade.
• Utilizar adequadamente calculadoras e computador, reconhecendo suas limitações e potencialidades.

APÊNDICE B – MATRIZ DE REFERÊNCIA DO ENEM

Além de serem utilizadas nos exames de vestibulares de grande parte das universidades e faculdades do país, as provas do ENEM cobram habilidades importantes, em consonância com os Parâmetros Curriculares Nacionais definidos pelo MEC. A Matriz de Referência do ENEM estabelece cinco eixos cognitivos que são comuns a todas as áreas do conhecimento.

I. **Dominar linguagens (DL):** dominar a norma culta da Língua Portuguesa e fazer uso das linguagens matemática, artística e científica e das línguas espanhola e inglesa.

II. **Compreender fenômenos (CF):** construir e aplicar conceitos das várias áreas do conhecimento para a compreensão de fenômenos naturais, de processos histórico geográficos, da produção tecnológica e das manifestações artísticas.

III. **Enfrentar situações-problema (SP):** selecionar, organizar, relacionar, interpretar dados e informações representadas de diferentes formas, para tomar decisões e enfrentar situações-problema.

IV. **Construir argumentação (CA):** relacionar informações, representadas em diferentes formas, e conhecimentos disponíveis em situações concretas, para construir argumentação consistente.

V. **Elaborar propostas (EP):** recorrer aos conhecimentos desenvolvidos na escola para elaboração de propostas de intervenção solidária na realidade, respeitando os valores humanos e considerando a diversidade sociocultural.

Já a Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias estabelece sete competências e suas respectivas habilidades a serem avaliadas nos alunos.

• **Competência de área 1 -** Construir significados para os números naturais, inteiros, racionais e reais.

H1 - Reconhecer, no contexto social, diferentes significados e representações dos números e operações - naturais, inteiros, racionais ou reais.

H2 - Identificar padrões numéricos ou princípios de contagem.

H3 - Resolver situação-problema envolvendo conhecimentos numéricos.

H4 - Avaliar a razoabilidade de um resultado numérico na construção de argumentos sobre afirmações quantitativas.

H5 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos numéricos.

• **Competência de área 2** - Utilizar o conhecimento geométrico para realizar a leitura e a representação da realidade e agir sobre ela.

H6 - Interpretar a localização e a movimentação de pessoas/objetos no espaço tridimensional e sua representação no espaço bidimensional.

H7 - Identificar características de figuras planas ou espaciais.

H8 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos geométricos de espaço e forma.

H9 - Utilizar conhecimentos geométricos de espaço e forma na seleção de argumentos propostos como solução de problemas do cotidiano.

• **Competência de área 3** - Construir noções de grandezas e medidas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H10 - Identificar relações entre grandezas e unidades de medida.

H11 - Utilizar a noção de escalas na leitura de representação de situação do cotidiano.

H12 - Resolver situação-problema que envolva medidas de grandezas.

H13 - Avaliar o resultado de uma medição na construção de um argumento consistente.

H14 - Avaliar proposta de intervenção na realidade utilizando conhecimentos geométricos relacionados a grandezas e medidas.

• **Competência de área 4** - Construir noções de variação de grandezas para a compreensão da realidade e a solução de problemas do cotidiano.

H15 - Identificar a relação de dependência entre grandezas.

H16 - Resolver situação-problema envolvendo a variação de grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

H17 - Analisar informações envolvendo a variação de grandezas como recurso para a construção de argumentação.
H18 - Avaliar propostas de intervenção na realidade envolvendo variação de grandezas.

• **Competência de área 5** - Modelar e resolver problemas que envolvem variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

H19 - Identificar representações algébricas que expressem a relação entre grandezas.
H20 - Interpretar gráfico cartesiano que represente relações entre grandezas.
H21 - Resolver situação-problema cuja modelagem envolva conhecimentos algébricos.
H22 - Utilizar conhecimentos algébricos/geométricos como recurso para a construção de argumentação.
H23 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos algébricos.

• **Competência de área 6 -** Interpretar informações de natureza científica e social obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendência, extrapolação, interpolação e interpretação.

H24 - Utilizar informações expressas em gráficos ou tabelas para fazer inferências.
H25 - Resolver problema com dados apresentados em tabelas ou gráficos.
H26 - Analisar informações expressas em gráficos ou tabelas como recurso para a construção de argumentos.

• **Competência de área 7** - Compreender o caráter aleatório e não-determinístico dos fenômenos naturais e sociais e utilizar instrumentos adequados para medidas, determinação de amostras e cálculos de probabilidade para interpretar informações de variáveis apresentadas em uma distribuição estatística.

H27 - Calcular medidas de tendência central ou de dispersão de um conjunto de dados expressos em uma tabela de frequências de dados agrupados (não em classes) ou em gráficos.
H28 - Resolver situação-problema que envolva conhecimentos de estatística e probabilidade.
H29 - Utilizar conhecimentos de estatística e probabilidade como recurso para a construção de argumentação.

H30 - Avaliar propostas de intervenção na realidade utilizando conhecimentos de estatística e probabilidade.

Os objetos de conhecimento associados à Matriz de Referência de Matemática e suas Tecnologias são:

• **Conhecimentos numéricos**: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem.

• **Conhecimentos geométricos**: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo.

• **Conhecimentos de estatística e probabilidade**: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade.

• **Conhecimentos algébricos**: gráficos e funções; funções algébricas do 1.º e do 2.º graus, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas.

• **Conhecimentos algébricos/geométricos**: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.