Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
Departamento de Matemática
Mestrado Profissional em Matemática em Rede
Nacional - PROFMAT

João Majoni Neto

UM ESTUDO SOBRE RAÍZES DE EQUAÇÕES NO ENSINO BÁSICO: APLICANDO TEORIAS NUMÉRICAS ATRAVÉS DE PLANILHAS ELETRÔNICAS

Vitória-ES
2021

João Majoni Neto

UM ESTUDO SOBRE RAÍZES DE EQUAÇÕES NO ENSINO BÁSICO: APLICANDO TEORIAS NUMÉRICAS ATRAVÉS DE PLANILHAS ELETRÔNICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação PROFMAT – Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional do Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito para obtenção de título de Mestre em Matemática.

Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Orientador: Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

Vitória-ES
2021

João Majoni Neto

UM ESTUDO SOBRE RAÍZES DE EQUAÇÕES NO ENSINO BÁSICO: APLICANDO TEORIAS NUMÉRICAS ATRAVÉS DE PLANILHAS ELETRÔNICAS/ João Majoni Neto. – Vitória-ES, 2021-

119p. : il. (algumas color.) ; 30 cm.

Orientador: Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho

Tese (Mestrado) – Universidade Federal do Espírito Santo - UFES, 2021.

1. Educação. 2. Estudo de Equações. 3. Aproximação de raízes reais. 4. Aproximação de números reais. 5. Ensino fundamental. 6. Ensino médio. 7. Métodos numéricos. I. Orientador Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho. II. Universidade Federal do Espírito Santo - UFES- Departamento de Matemática. III. Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT. IV. UM ESTUDO SOBRE RAÍZES DE EQUAÇÕES NO ENSINO BÁSICO: APLICANDO TEORIAS NUMÉRICAS ATRAVÉS DE PLANILHAS ELETRÔNICAS.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

“Um Estudo sobre Raízes de Equações no Ensino Básico: Aplicando Teorias Numéricas através de Planilhas Eletrônicas”

João Majoni Neto

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 20/12/2021 por:

Prof. Dr. Florêncio Ferreira Guimarães Filho
Orientador – UFES

Prof. Dr. Valmecir Antonio dos Santos Bayer
Membro Interno – UFES

Prof. Dr. Fidelis Zanetti de Castro
Membro Externo – IFES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
FLORENCIO FERREIRA GUIMARAES FILHO - SIAPE 294794
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 20/12/2021 às 17:06

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/336659?tipoArquivo=O

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
VALMECIR ANTONIO DOS SANTOS BAYER - SIAPE 99992611
Assessoria de Gestão - AG/CCE
Em 20/12/2021 às 21:33

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/336843?tipoArquivo=O

Agradecimentos

À minha esposa Jeane, que esteve sempre ao meu lado, me incentivando a cada momento, e passou por momentos solitários para que eu pudesse me dedicar aos estudos.

À minha filha Ana Luiza, que mesmo sem entender o que se passava em sua volta, se tornou um dos pilares que me sustentou e não permitiu que eu desistisse.

Aos meus pais, que se sacrificaram em vários momentos para que eu meu irmão tivéssemos condições de estudar, abrindo os caminhos até aqui.

Ao meu irmão, pela força e incentivo nos momentos críticos.

Aos familiares, que sempre estiveram ao meu lado, incentivando a nunca parar de estudar.

Aos amigos, em especial aos parceiros de escola, que me apoiaram nos momentos difíceis e me incentivaram a continuar.

Ao Professor Doutor Florêncio, por compartilhar seu conhecimento, indo além dos programas das disciplinas. Conhecimento que pavimentou o caminho para a conclusão desde trabalho.

Resumo

Historicamente, a matemática sempre andou lado a lado com o desenvolvimento da humanidade, indo desde a simples tarefa de contar, até aos recursos tecnológicos que temos hoje. Por esse motivos, as novas diretrizes educacionais, organizadas pela "Base Nacional Comum Curricular (BNCC)", trazem como uma das competências específicas de matemática "*Utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados*".

Partindo desta relação, este trabalho foi desenvolvido para mostrar como parte destas tecnologias, em particular as planilhas eletrônicas, podem ser utilizadas para tirar o estudo das equações dos métodos convencionais para o ensino básico, através dos princípios do cálculo numérico.

Para esta empreitada, primeiro faremos uma breve análise do caminhar das diretrizes educacionais, e como elas tratavam o ensino da matemática. Em seguida, olharemos para uma pequena parte da história da matemática, focando no avanço dos estudos sobre os números, sobre as equações e sobre os métodos numéricos de aproximação. Em seguida, falaremos sobre o ensino dos conjuntos numéricos e das equações no ensino básico, fazendo em sequência, a definição de número real.

Antes da introdução dos métodos numéricos, daremos uma breve apresentação sobre as planilhas eletrônicas, mostrando sua estrutura, os comandos e funções necessárias para a sua aplicação. Finalizando com as sugestões de utilização, a partir do 8º ano do Ensino Fundamental II, até o 3º ano do Ensino Médio.

Palavras-chave: Educação. Estudo de Equações. Ensino de matemática. Aproximação de raízes. Ensino fundamental. Ensino médio. Métodos numéricos.

Abstract

Historically, mathematics has always walked hand in hand with the development of humanity, ranging from the simple task of counting to the technological resources we have today. For this reason, the new educational guidelines, organized by the "Common National Curriculum Base (CNCB)", bring as one of the specific competences of mathematics "*Use mathematical processes and tools, including available digital technologies, to model and solve everyday, social and other knowledge issues, validating strategies and results.*".
Based on this relationship, this work was developed to show how part of these technologies, in particular electronic spreadsheets, can be used to study the equations of conventional methods for basic education, through the principles of numerical calculus.
For this undertaking, we will first make a brief analysis of the path of educational guidelines, and how they treated the teaching of mathematics. Then, we will look at a small part of the history of mathematics, focusing on the advancement of studies on numbers, on equations and on numerical methods of approximation. Then, we will talk about the teaching of numerical sets and equations in basic education, making in sequence the definition of real number.
Before introducing numerical methods, we will give a brief presentation about electronic spreadsheets, showing their structure, commands, and functions necessary for their application. Ending with the suggestions for use, from the 8th year of Elementary School II, until the 3rd year of High School.

Keywords: Education. Study of Equations. Math teaching. Root approach. Elementary School. High school. Numerical methods.

Lista de ilustrações

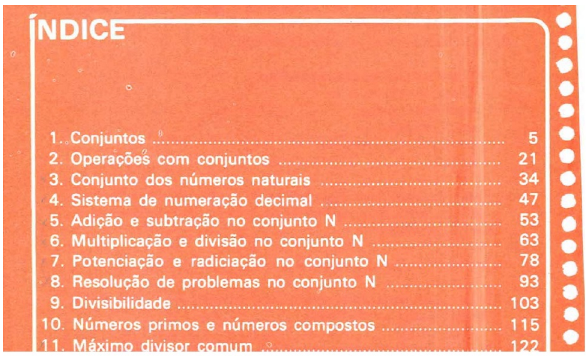
Lista de tabelas

Sumário

1 INTRODUÇÃO

Ao olhar uma pequena parte da história do currículo de matemática no Brasil, conseguimos observar várias mudanças significativas. Umas delas, proposta por Euclides Roxo, na década de 1920, transformou as três áreas de conhecimento matemático: Álgebra, Aritmética e Geometria, em uma única disciplina, chamada de "*matemática*". Segundo Santos[1] a proposta de Roxo não se limitava apenas a presença dos três segmentos em um livro único ou única disciplina e sim, o processo de ensino visando explorar as diversas áreas concomitantemente. fazendo com que todos os assuntos pudessem ser trabalhados de forma concomitante, mostrando a relação entre as três.

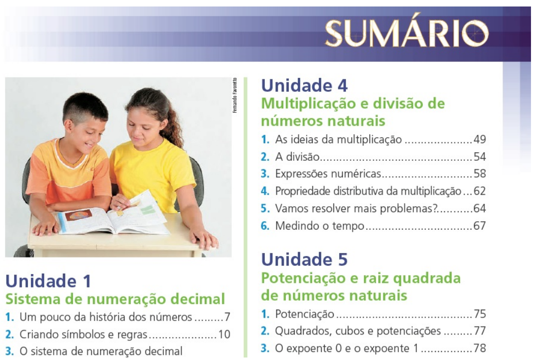
Outra reforma na educação brasileira, que tomou forma na década de 60, foi provocada pelo chamado "*movimento da matemática moderna*". Essa reforma ocorreu diretamente no currículo de matemática da época e durou até a década de 80. D'Ambrósio[2] associa o fracasso do movimento ao fato de que mudaram os conteúdos sem reformular os objetivos e os métodos de ensino. Com a decadência do movimento, o currículo foi modificado novamente, como podemos observar nas figuras 1 e 2, que mostram os sumários de duas coleções. A primeira, do volume do 6º Ano do ensino fundamental (antiga 5ª série) da coleção *Praticando Matemática*, de Álvaro Andrini, em 1989, iniciava com o tema "conjuntos", e, em 2012, passou a iniciar com "sistema de numeração decimal". A segunda, do volume do 1º ano do ensino médio da coleção *Matemática*, de Manoel Paiva, cujo capítulo "noções básicas de lógica" foi retirado da coleção.



ÍNDICE

1. Conjuntos 5
2. Operações com conjuntos 21
3. Conjunto dos números naturais 34
4. Sistema de numeração decimal 47
5. Adição e subtração no conjunto N 53
6. Multiplicação e divisão no conjunto N 63
7. Potenciação e radiciação no conjunto N 78
8. Resolução de problemas no conjunto N 93
9. Divisibilidade 103
10. Números primos e números compostos 115
11. Máximo divisor comum 122

(a) 1989



SUMÁRIO

Unidade 1
Sistema de numeração decimal
1. Um pouco da história dos números 7
2. Criando símbolos e regras 10
3. O sistema de numeração decimal

Unidade 4
Multiplicação e divisão de números naturais
1. As ideias da multiplicação 49
2. A divisão 54
3. Expressões numéricas 58
4. Propriedade distributiva da multiplicação 62
5. Vamos resolver mais problemas? 64
6. Medindo o tempo 67

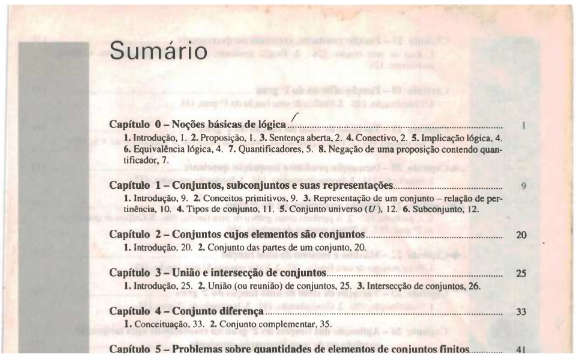
Unidade 5
Potenciação e raiz quadrada de números naturais
1. Potenciação 75
2. Quadrados, cubos e potenciações 77
3. O expoente 0 e o expoente 1 78

(b) 2012

Figura 1 – Sumário do livro *Praticando Matemática*, 6º Ano, de Álvaro Andrini

Essa escolha de conteúdos também foi questionada por Garnica e Souza[3], que terminam com as seguinte perguntas: "*As notações matemáticas – o modo como representamos os conceitos matemáticos – se alteram? Para melhor ou para pior? Melhor e pior a partir de qual ponto de vista? Do ponto de vista de quem?*".

Outras perguntas pertinentes à escolha dos conteúdos são: "*qual a utilidade do conteúdo ensinado? O aluno utilizará em que momento de sua vida? É uma matemática próxima*



Sumário

Capítulo 0 – Noções básicas de lógica 1
1. Introdução, 1. 2. Proposição, 1. 3. Sentença aberta, 2. 4. Conectivo, 2. 5. Implicação lógica, 4. 6. Equivalência lógica, 4. 7. Quantificadores, 5. 8. Negação de uma proposição contendo quantificador, 7.

Capítulo 1 – Conjuntos, subconjuntos e suas representações 9
1. Introdução, 9. 2. Conceitos primitivos, 9. 3. Representação de um conjunto – relação de pertinência, 10. 4. Tipos de conjunto, 11. 5. Conjunto universo (U), 12. 6. Subconjunto, 12.

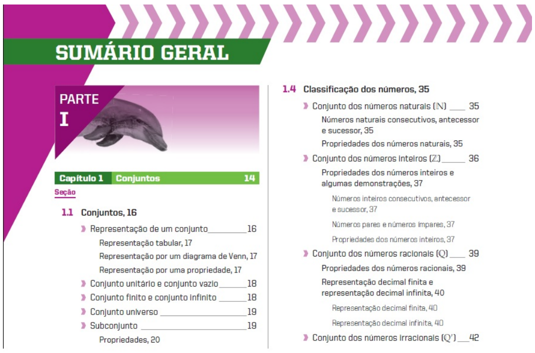
Capítulo 2 – Conjuntos cujos elementos são conjuntos 20
1. Introdução, 20. 2. Conjunto das partes de um conjunto, 20.

Capítulo 3 – União e intersecção de conjuntos 25
1. Introdução, 25. 2. União (ou reunião) de conjuntos, 25. 3. Intersecção de conjuntos, 26.

Capítulo 4 – Conjunto diferença 33
1. Conceituação, 33. 2. Conjunto complementar, 35.

Capítulo 5 – Problemas sobre quantidades de elementos de conjuntos finitos 41

(a) 1995



SUMÁRIO GERAL

PARTE I

Capítulo 1 Conjuntos 14

Seção

1.1 Conjuntos, 16
- Representação de um conjunto ____ 16
  - Representação tabular, 17
  - Representação por um diagrama de Venn, 17
  - Representação por uma propriedade, 17
- Conjunto unitário e conjunto vazio ____ 18
- Conjunto finito e conjunto infinito ____ 18
- Conjunto universo ____ 19
- Subconjunto ____ 19
  - Propriedades, 20

1.4 Classificação dos números, 35
- Conjunto dos números naturais ($\mathbb{N}$) ____ 35
  - Números naturais consecutivos, antecessor e sucessor, 35
  - Propriedades dos números naturais, 35
- Conjunto dos números inteiros ($\mathbb{Z}$) ____ 36
  - Propriedades dos números inteiros e algumas demonstrações, 37
    - Números inteiros consecutivos, antecessor e sucessor, 37
    - Números pares e números ímpares, 37
    - Propriedades dos números inteiros, 37
- Conjunto dos números racionais ($\mathbb{Q}$) ____ 39
  - Propriedades dos números racionais, 39
  - Representação decimal finita e representação decimal infinita, 40
    - Representação decimal finita, 40
    - Representação decimal infinita, 40
- Conjunto dos números irracionais ($\mathbb{Q}'$) ____ 42

(b) 2010

Figura 2 – Sumário do livro *Matemática*, 1º Ano, de Manoel Paiva

da realidade dele? Para que serve a matemática?". Essas perguntas costumam não ser respondidas, pois, muitas vezes, os professores não estão preparados para respondê-las. Este "não estar preparado" não diz respeito à falta de conhecimento, mas sim à falta do contato com as outras áreas para poder criar a ponte entre elas, pois como citado por Lorenzato[4], "a matemática está presente em todos os campos de conhecimento e se faz necessária em qualquer atividade humana".

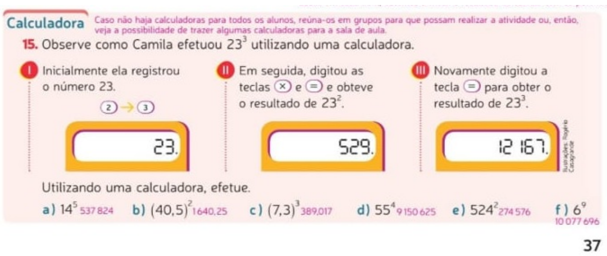
Geralmente, as respostas a essas perguntas sempre estão relacionadas aos avanços tecnológicos. Essa relação nos leva novamente à questão da construção do currículo, pois se ela está relacionada com os avanços tecnológicos, por que não inseri-los no currículo de forma permanente? Castejo e Rosa[5] trazem essa perspectiva de adequar o currículo de matemática, utilizando o processo histórico, de forma a contemplar as tecnologias atuais.

Historicamente, parte do estudo da matemática iniciou-se com as necessidades e observações das ações do dia a dia. A necessidade de contagem, cálculo e medição foram fatores importantes. Para estas duas últimas, as aplicações práticas geraram ferramentas para realizá-las, que foram sendo aperfeiçoadas de acordo com os avanços tecnológicos de cada época, tornando algumas ações, principalmente as de cálculo, mais rápidas e precisas.

Muitos professores já utilizam várias dessas ferramentas no ensino, principalmente as ferramentas gráficas. A construção de gráficos precisos sempre foi uma questão complicada para se fazer manualmente, pois além da precisão do desenho, havia a morosidade dos cálculos. Já as ferramentas de cálculo ainda não são utilizadas em sua totalidade, e como mencionado no início do capítulo, necessitam de uma reformulação dos objetivos e métodos de ensino. Lorenzato[4] faz um alerta ao ensino que prioriza a utilização de determinadas técnicas em detrimento à percepção ao contexto da situação:

- os alunos tornam-se desatenciosos em sala de aula;
- passam a ver a matemática como cansativa e desagradável, ou mesmo como fonte de angústia e temor;
- passam a detestar a matemática;
- não utilizarão a matemática para resolver seus futuros problemas como cidadãos que serão;
- perdem estímulo para a aprendizagem;
- supõe estar neles a causa da dificuldade de compreensão.

Além das construções de gráficos, a questão da coleta, organização e apresentação de dados em tabelas é outro ponto importante de contato entre a matemática e a realidade. Esse contato também foi beneficiado com a tecnologia, com os programas classificados como "*planilhas eletrônicas*'. Estes programas criaram um ambiente que trata desde a questão organizacional dos dados em tabelas e a sua apresentação em gráficos, até a criação de fórmulas para cálculos dinâmicos. Esse último aspecto foi o ponto chave para a indicação desses aplicativos, juntamente com os aplicativos exclusivos para a matemática serem sugeridos como ferramentas didáticas por autores de livros do ensino básico (figura 3).


Calculadora Caso não haja calculadoras para todos os alunos, reúna-os em grupos para que possam realizar a atividade ou, então, veja a possibilidade de trazer algumas calculadoras para a sala de aula.

15. Observe como Camila efetuou 23^3 utilizando uma calculadora.

I Inicialmente ela registrou o número 23.

II Em seguida, digitou as teclas × e = e obteve o resultado de 23^2.

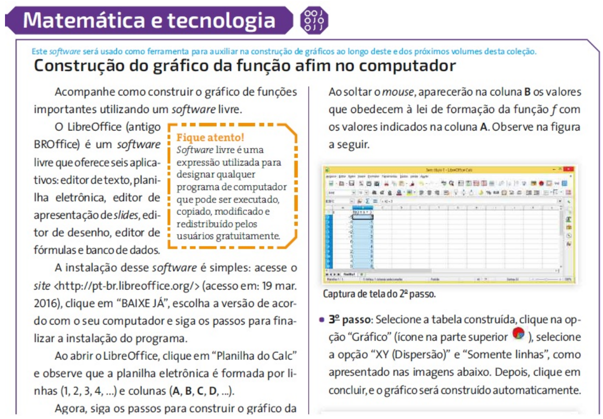
III Novamente digitou a tecla = para obter o resultado de 23^3.

Utilizando uma calculadora, efetue.

a) 14^5 537 824 b) $(40,5)^2$ 1640,25 c) $(7,3)^3$ 389,017 d) 55^4 9 150 625 e) 524^2 274 576 f) 6^9 10 077 696

37

(a) Vontade de Saber Matemática 8º Ano


Matemática e tecnologia

Este *software* será usado como ferramenta para auxiliar na construção de gráficos ao longo deste e dos próximos volumes desta coleção.

Construção do gráfico da função afim no computador

Acompanhe como construir o gráfico de funções importantes utilizando um *software* livre.

O LibreOffice (antigo BROffice) é um *software* livre que oferece seis aplicativos: editor de texto, planilha eletrônica, editor de apresentação de *slides*, editor de desenho, editor de fórmulas e banco de dados.

Fique atento! *Software* livre é uma expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente.

A instalação desse *software* é simples: acesse o *site* <http://pt-br.libreoffice.org/> (acesso em: 19 mar. 2016), clique em "BAIXE JÁ", escolha a versão de acordo com o seu computador e siga os passos para finalizar a instalação do programa.

Ao abrir o LibreOffice, clique em "Planilha do Calc" e observe que a planilha eletrônica é formada por linhas (1, 2, 3, 4, ...) e colunas (A, B, C, D, ...).

Agora, siga os passos para construir o gráfico da

Ao soltar o *mouse*, aparecerão na coluna B os valores que obedecem à lei de formação da função *f* com os valores indicados na coluna A. Observe na figura a seguir.

Captura de tela do 2º passo.

• 3º passo: Selecione a tabela construída, clique na opção "Gráfico" (ícone na parte superior), selecione a opção "XY (Dispersão)" e "Somente linhas", como apresentado nas imagens abaixo. Depois, clique em concluir, e o gráfico será construído automaticamente.

(b) Dante Volume 1

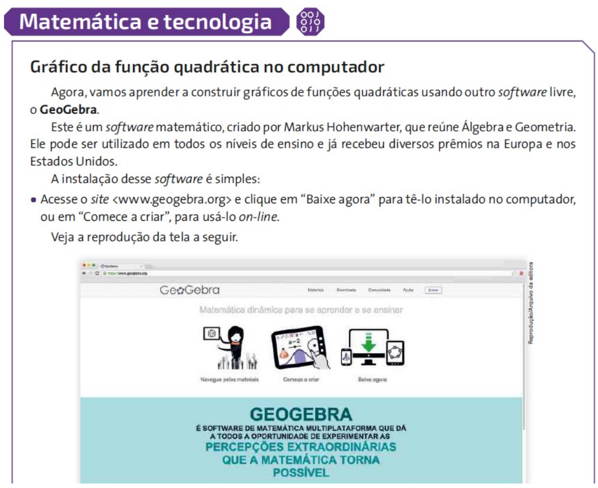

Matemática e tecnologia

Gráfico da função quadrática no computador

Agora, vamos aprender a construir gráficos de funções quadráticas usando outro *software* livre, o **GeoGebra**.

Este é um *software* matemático, criado por Markus Hohenwarter, que reúne Álgebra e Geometria. Ele pode ser utilizado em todos os níveis de ensino e já recebeu diversos prêmios na Europa e nos Estados Unidos.

A instalação desse *software* é simples:

• Acesse o *site* <www.geogebra.org> e clique em "Baixe agora" para tê-lo instalado no computador, ou em "Comece a criar", para usá-lo *on-line*.

Veja a reprodução da tela a seguir.

(c) Dante Volume 2

Figura 3 – Sugestões de utilização dos recursos tecnológicos

A utilização das tecnologias como ferramentas educativas, por sua vez, fazem a ponte entre o currículo de matemática e sua aplicação prática. Essa inserção começou a ser consolidada em documentos oficiais do Ministério da Educação como forma de iniciar a garantia de que todos os futuros cidadãos brasileiros tivessem esse contato durante seu processo educativo, mesmo que esse fosse apenas na escola.

Um dos primeiros documentos oficiais a tratar do assunto foram os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN's[6]. Ele já tratava da inserção da tecnologia no cotidiano escolar, pois já era uma característica do mercado de trabalho. O PCN de matemática ainda cita que

> "a Matemática pode dar sua contribuição à formação do cidadão ao desenvolver metodologias que enfatizem a construção de estratégias, a comprovação e justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios." (PCN's[6], 1998, p.27)

Com essa perspectiva, reafirmam a mudança e adaptação do currículo periodicamente, de forma a acompanhar os avanços tecnológicos e novas necessidades do mercado de trabalho. Aproximar a matemática do dia a dia tem se tornado primordial para uma formação crítica e consciente dos alunos. Fazer com que os alunos percebam que em tudo que fazem existe matemática, mesmo não sendo escrita formalmente, é fazer com que percebam que ela é fundamental para várias relações sociais, principalmente nas relações comerciais.

> As situações e os desafios que o jovem do ensino médio terá de enfrentar no âmbito escolar, no mundo do trabalho e no exercício da cidadania fazem parte de um processo complexo, no qual as informações são apenas parte de um todo articulado, marcado pela mobilização de conhecimentos e habilidades.
>
> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação. (PCN'S[6], 1998, Matemática E.M., pg. 111)

Com base na Lei de Diretrizes e Bases da educação - LDB[7], e em complementação aos PCN's, o governo consolidou as Diretrizes e Bases da Educação - DCN[8]. A DCN veio oficializar as mudanças propostas pelos PCN's, visto que esse último servia apenas como propostas a serem discutidas, e não uma linha obrigatória a ser seguida, permitindo a criação da Base Nacional Comum Curricular - BNCC[9].

> Outro aspecto a ser considerado é que a aprendizagem de Álgebra, como também aquelas relacionadas a Números, Geometria e Probabilidade e estatística, podem contribuir para o desenvolvimento do pensamento

> computacional dos alunos, tendo em vista que eles precisam ser capazes de traduzir uma situação dada em outras linguagens, como transformar situações-problema, apresentadas em língua materna, em fórmulas, tabelas e gráficos e vice-versa.
>
> Associado ao pensamento computacional, cumpre salientar a importância dos algoritmos e de seus fluxogramas, que podem ser objetos de estudo nas aulas de Matemática. Um algoritmo é uma sequência finita de procedimentos que permite resolver um determinado problema. Assim, o algoritmo é a decomposição de um procedimento complexo em suas partes mais simples, relacionando-as e ordenando-as, e pode ser representado graficamente por um fluxograma. A linguagem algorítmica tem pontos em comum com a linguagem algébrica, sobretudo em relação ao conceito de variável. Outra habilidade relativa à álgebra que mantém estreita relação com o pensamento computacional é a identificação de padrões para se estabelecer generalizações, propriedades e algoritmos. (BNCC[9], 2018, p. 271)

A partir desse momento, tornou-se obrigatório relacionar a matemática com ações do dia a dia, bem como com as tecnologias disponíveis no momento.

O Currículo da Rede Estadual de Ensino do Estado do Espírito Santo[10], já antecipava esse processo, e traz como um objetivo da disciplina de matemática, "Estabelecer relação direta com a tecnologia em uma via de mão dupla: como a Matemática colabora na compreensão e utilização das tecnologias e como as tecnologias podem colaborar para a compreensão da Matemática".

Assim, orientando os professores da rede estadual a inserirem nos seus planos de aula a utilização dessas tecnologias, bem como reforçarem a ligação da matemática com o mercado de trabalho.

Partindo dos novos princípios propostos para a educação matemática, este trabalho tem como objetivo geral mostrar a utilização das planilhas eletrônicas no contexto escolar. Como objetivos específicos, temos o reforço do conceito de número real e a implementação dos métodos numéricos para a aproximação de raízes reais de equações no ensino básico, usando como ferramenta as planilhas eletrônicas.

2 UM POUCO DE HISTÓRIA

Os livros didáticos atuais sempre trazem alguns fatos históricos relacionados à alguns conteúdos a serem abordados. Principalmente aqueles considerados “importantes”, como a criação do sistema de numeração, o estudo de equações do 2º grau, o teorema de Tales ou o teorema de Pitágoras.

Contudo, essa é uma pequena parte da história. Eves trouxe alguns questionamentos sobre o estudo da história da matemática:

> Ao se fazer um relato cronológico do desenvolvimento da matemática, a questão de por onde começar se impõe. Deve-se iniciar com as primeiras deduções sistemáticas em geometria, tradicionalmente creditadas a Tales de Mileto, por volta de 600 a.C.? Ou se deve recuar mais no tempo e iniciar com a obtenção de certas fórmulas de mensuração feitas pelas civilizações pré-helênicas da Mesopotâmia e do Egito? Ou deve-se recuar ainda mais no tempo e iniciar com os primeiros esforços tateantes feitos pelo homem pré-histórico visando a sistematização das ideias de grandeza, forma e número? Ou se pode dizer que a matemática teve início em épocas pré-humanas com a manifestação de senso numérico e reconhecimento de modelos, embora muito limitadamente, por parte de alguns animais, pássaros e insetos? Ou mesmo antes disso, nas relações numéricas e espaciais da plantas? Ou até antes, nas nebulosas espiraladas, nas trajetórias de planetas e cometas e na cristalização de minerais em épocas pré-orgânicas? Ou será a matemática, como acreditava Platão, sempre existiu, estando meramente a aguardar a sua descoberta? (Eves[11], 2011, p. 25)

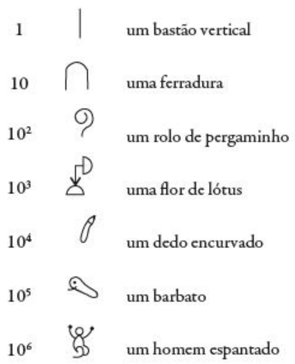
Analisando os questionamentos apontados, podemos crer que, talvez, ao encontrar a resposta para todos eles, possamos inserir os alunos em um outro nível de conhecimento matemático: o de como os conceitos surgiram e foram discutidos e, a partir deles, as fórmulas que usamos foram criadas.

A princípio, fazer essa abordagem pode parecer desnecessária, mas é de extrema importância para responder alguns questionamentos que surgem em sala de aula, sendo um dos principais:“*onde é que eu vou usar isso na vida?*”.

O primeiro capítulo do livro de 6º ano do E.F. II trata dos sistemas de numeração, onde o seu início é contar uma pequena parte da história dos números. Essa pequena parte conta que a ideia de *número* surgiu ao se usar um objeto para quantificar outro, em que se faziam associações entre objetos ou objetos e marcas.

No entanto, a história dos números acaba nesse ponto. A história dos outros conjuntos numéricos são deixadas de lado, como se não tivessem a mesma importância, como se a ideia do número zero, por exemplo, não fosse de uma “aceitação recente” ao se olhar para a história como um todo. Compreender a ideia de número vai muito além da ideia de associação unitária, visto que as necessidades de contagens e medições iam além desse fator.

Outro ponto questionável sobre a história dos números é dar importância apenas aos sistemas de numeração egípcio e o sistema de numeração romano (figura 4). O sistema de numeração babilônio, por exemplo, nos deixou como um dos presentes mais importantes, a divisão da circunferência em 360 partes iguais. Divisão que gerou a unidade que hoje conhecemos como "grau", e permitiu uma contagem de tempo mais eficaz. Então, por que não mencioná-los?



(a) Egípcio

Número Romano	Número Arábico
I	1 (Um)
V	5 (Cinco)
X	10 (Dez)
L	50 (Cinquenta)
C	100 (Cem)
D	500 (Quinhentos)
M	1000 (Mil)

(b) Romano

Figura 4 – Sistemas de numeração por agrupamento

Temos, também, as questões de representações. Os livros não mencionam que até a formalização da escrita e da criação dos sistemas de numeração, os números eram apenas representados por sons, gestos ou pelo posicionamento dos dedos nas mãos. Essa última forma foi chamada de "*números digitais*" (figura 5), e foi amplamente utilizada no período da Idade Média.

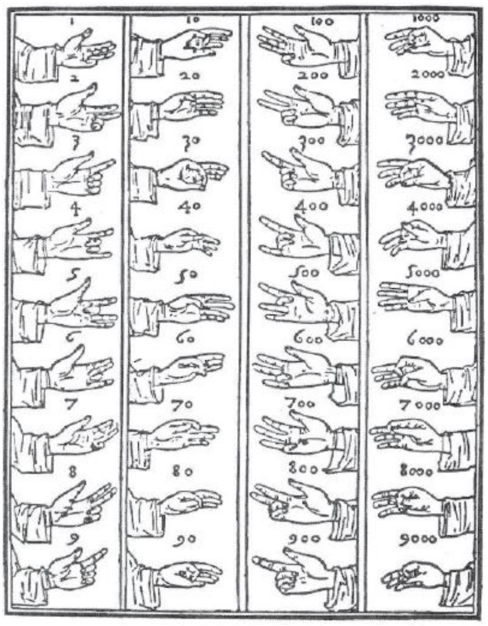


Figura 5 – Números digitais. As duas primeiras colunas representam a mão esquerda, as outras duas a mão direita. Ilustração tirada da Suma de Pacioli, 1491 (Apud Evees, 2011)

Além disso, a própria construção dos conjuntos numéricos não seguem a sequência histórica. Geralmente a sequência é: Naturais, Inteiros, Racionais, Irracionais e Reais. Coloca-se aqui "geralmente é", pois alguns autores acrescentam primeiro a ideia de número negativo, para depois inserir a ideia do número inteiro.

Todavia, em nenhum momento é mencionado que vários desses números estudados já eram conhecidos desde a antiguidade. Nem mencionam que, entre o conhecimento de sua existência e sua aceitação, passaram-se séculos, em alguns casos.

Um dos números mais enigmáticos, o famoso "π", conhecido entre os estudantes como 3,14, apareceu no estudo sobre as circunferências. Sua aproximação era, e ainda é feita, utilizando-se frações decimais. Dentre os povos antigos que deixaram suas contribuições, temos os registros dos babilônios, egípcios, gregos, chineses, indianos e árabes. Todos eles com aproximações entre 3 e 4 casas decimais.

Temos também a chamada "*razão áurea*", que é representada pelo número $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, resultado da igualdade $\dfrac{a}{x} = \dfrac{x}{a-x}$, provenientes do estudo da divisão de segmentos em partes proporcionais. Esta relação também foi registrada pelos babilônios e pelos gregos.

Contudo, a maior parte dos registros sobre os números irracionais estão relacionados com a questão das raízes não exatas, provenientes do estudo sobre áreas e volumes.

Historicamente, datada do fim do século XVIII para o início do século XIX, a formalização do conceito sobre os conjuntos numéricos e a aceitação dos números negativos e irracionais como "números reais" alavancou várias áreas de estudo da matemática.

Como estes números não eram aceitos, todo estudo que recaia em sua utilização era descartado, pois não era um "resultado válido". Os problemas decorrentes sobre a aceitação destes como "números" são citados por Lorenzato, que faz a associação com alguns problemas relacionados à aprendizagem dos alunos.

> Ao longo dos milênios, o ritmo de construção da matemática não foi sempre o mesmo. É interessante, principalmente para nós professores, observar que aquilo que os matemáticos demoraram em descobrir, inventar ou aceitar, são os mesmos pontos em que os nossos alunos apresentam dificuldades de aprendizagem. Essa coincidência entre obstáculos cognitivos históricos e os pontos de maior dificuldade de aprendizagem em sala de aula é reconhecida por muitos pensadores, matemáticos ou educadores de renome, tais como Hanckel, Poincaré, Kline, Klein. Constitui-se em uma importante questão didática para todos os responsáveis pelo ensino da matemática. (Lorenzato[4], 2010, p. 107)

Parte da dificuldade dos alunos com relação aos conjuntos numéricos são as mesmas dos matemáticos da época: a aceitação da existência e a compreensão das suas características. Por exemplo, aceitar que a diagonal de uma caixa quadrada de 1 metro de lado tem $\sqrt{2}$ metros de comprimento, mesmo sabendo que esta é uma dízima não periódica, isto é, um "número infinito" tem comprimento finito.

Os estudos sobre os números sempre andaram lado a lado com a resolução de problemas do cotidiano, ou com a tentativa de entender eventos naturais. Com isso, a resolução de problemas levou os números de encontro ao estudo sobre as equações.

Assim como os números, as equações também evoluíram a partir da observação e da modificação da natureza, e de questões relacionadas às ações do cotidiano de cada povo.

Resolver questões de armazenamento, demarcações de terreno (seja para lavoura ou criação de animais), cálculo de distâncias ou, em alguns casos, gerar problemas com situações fictícias, mas com base em situações reais, levaram a "termos genéricos", ou seja, termos que representavam um valor desconhecido, mas que tinham um direcionamento, dependendo do problema.

Os babilônios deixaram várias contribuições na área da matemática, tanto na área da trigonometria (figura 6) quanto no estudo das equações. Seus registros mostram que já discutiam e resolviam equações de 1º, 2º graus e algumas de 3º grau. Com alguns pensamentos numéricos, construíram diversas tábuas indicando o modo de resolução de vários modelos de equações, como apresentado por Aaboe.

Figura 6 – Tablete Plimpton 322: registro cálculos trigonométricos do triângulo retângulo da forma $a^2 + b^2 = c^2$

> Somei a área e dois terços do lado de meu quadrado, e o resultado é 0.35. Tome 1, o "coeficiente". Dois terços de 1, o coeficiente, é 0;40. Metade disso, 0;20, você multiplicará por 0;20 [e o resultado], que é 0;6,40, você adicionará a 0;35, e [o resultado], 0;41,40, tem raíz quadrada 0;50. Multiplique 0;20 por ele próprio e subtraia [o resultado] de 0;50, e 0;30 é [o lado] do quadrado.
>
> Este exemplo enuncia e acha a solução da equação quadrática[1] $x^2 + \frac{2}{3}x = 0;35$. (Aaboe[12], p. 24)

Os egípcios, por sua vez, contribuíram na engenharia, utilizando o conhecimento matemático na área de cálculo e geometria. No papiro de Rhind[2] (figura 7) foram encontrados vários registros sobre como eram os processos de multiplicação e divisão, e a solução para cálculos da área, como a do círculo.

1 Apenas o texto foi traduzido, os valores envolvidos foram escritos no sistema de numeração Babilônico, que utilizava um sistema posicional na base 60.

2 O nome se deve ao arqueólogo Alexander Henry Rhind e também é conhecido como papiro de Ahmes, que foi o escriba responsável pelo registro na época em que foi escrito.

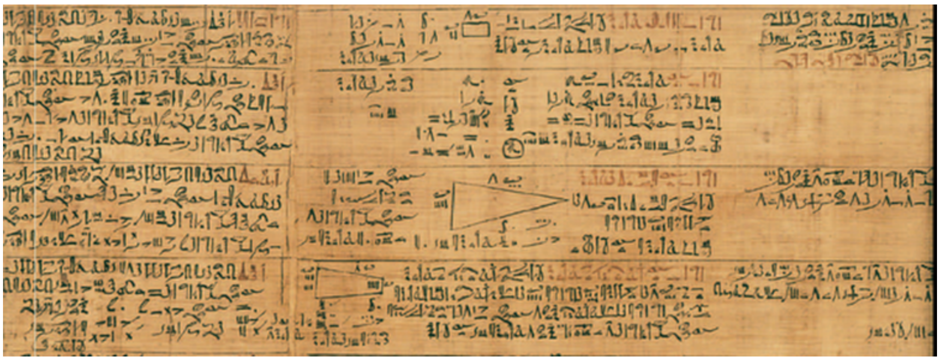


Figura 7 – Parte do papiro Rhind

No entanto, o registro que destacamos é um dos princípios dos métodos numéricos: o princípio da falsa posição para resolver equações do 1º e 2º graus. A seguir, temos dois exemplos da utilização da posição falsa, ambos apresentados por Eves[11, p. 73 - 74]

Exemplo 1: Assim, para resolver:

$$x + \frac{x}{7} = 24$$

assume-se um valor conveniente para x, digamos $x = 7$. Então $x + \frac{x}{7} = 8$, em vez de 24. Como 8 deve ser multiplicado por 3 para se obter 24, o valor correto de x deve ser 3(7) ou 21.

Exemplo 2: Uma dada superfície de 100 unidades de área deve ser representada como a soma de dois quadrados cujos lados estão entre si como $1 : 3/4$.

Nesse caso temos $x^2 + y^2 = 100$ e $x = 3y/4$. A eliminação de x fornece uma equação quadrática em y. Podemos, porém, resolver o problema por falsa posição. Para isso tomemos $y = 4$. Então $x = 3$ e $x^2 + y^2 = 25$ em vez de 100. Por conseguinte devemos fazer a correção de x e y dobrando os valores iniciais, o que dá $x = 6$ e $y = 8$.

Eves também destaca um registro do papiro de Rhind, que trata da soma de potências de 7, e foi associado a vários problemas semelhantes propostos em diferentes épocas posteriores. Ele ressalta que este papiro já era um registro de problemas mais antigos, logo, leva-nos a acreditar que a matemática egípcia, mesmo não sendo tão desenvolvida como a babilônica, era uma das mais avançadas no passado.

Bens	
Casas	7
Gatos	49
Ratos	343
Espigas de trigo	2 401
Hecates de grãos	16 807
	19 607

Os chineses também deixaram suas contribuições na área das equações. Dentre elas, a que também destacaremos aqui é a utilização do princípio da falsa posição para encontrar a raiz de equações. Esse princípio passou a ser conhecido como "*Regra de falsa posição dupla*". Essa regra diz que: Se x_1 e x_2 são dois números próximos, um de cada lado, de uma raiz x da equação $f(x) = 0$, a intersecção do segmento de extremidades $(x_1, f(x_1)$ e $(x_2, f(x_2)$ com o eixo x dá uma aproximação x_3 da raiz procurada (figura 8).

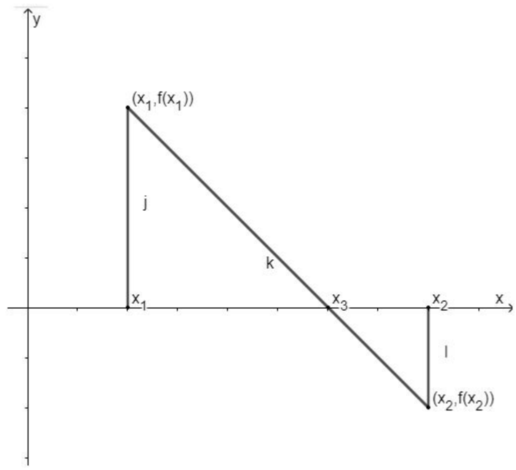


Figura 8 – Visão do método da falsa posição dupla chinesa

Que nos fornece a equação

$$x_3 = \frac{x_2 f(x_1) - x_1 f(x_2)}{f(x_1) - f(x_2)}$$

Por sua vez, os gregos deixaram o legado do método numérico que ficou conhecido como "método da exaustão", que foi dado como trabalho de Arquimedes, mas há registros de que ele foi proposto inicialmente por Eudoxo. O enunciado proposto por Eudoxo dizia que "*dadas duas grandezas que têm uma razão (isto é, nenhuma delas sendo zero), pode-se achar um múltiplo de qualquer delas que seja maior que a outra*". Esse lema, ou axioma, deu base ao método de exaustão grego: "*Se, de uma grandeza qualquer, subtrairmos uma parte não menor que sua metade e, se do resto novamente subtrai-se não menos que a sua metade e se esse processo de subtração for continuado, finalmente restará uma grandeza menor que qualquer grandeza de mesma espécie prefixada*".

Esse método foi utilizado para a aproximação de π, ao calcular o comprimento de uma circunferência, bem como para calcular áreas e volumes de figuras curvilíneas.

Ainda falando sobre métodos de aproximações gregos, temos o método de Herão, utilizado para a aproximação da raiz quadrada de um inteiro que não é quadrado perfeito. Segundo Herão, se $n = ab$, então $\frac{a+b}{2}$ é uma aproximação para $\sqrt{n}$, e quanto mais próximos a e b, melhor será a aproximação. Fazendo $b = \frac{n}{a}$, sendo a_1 a primeira aproximação para

$\sqrt{n}$, temos:

$$\begin{aligned} a_2 &= \frac{a_1 + \frac{n}{a_1}}{2} \\ a_3 &= \frac{a_2 + \frac{n}{a_2}}{2} \\ &\vdots \\ a_n &= \frac{a_{n-1} + \frac{n}{a_{n-1}}}{2} \end{aligned}$$

Trazer estes trechos históricos podem contribuir para a pergunta "tem outra forma de fazer?" Geralmente, essa pergunta acontece quando são ensinados os processos resolutivos das equações.

Os hindus Aryabhata, Brahmagupta e Bhaskara, deixaram vários métodos de resolução mais abrangentes para as equações de 1º e 2º graus, alguns deles usado até hoje. Dentre as principais contribuições há o método de completar quadrados para resolução de equações do 2º grau, que, por sua vez, gerou a fórmula resolutiva que hoje conhecemos como "*fórmula de Bhaskara*": $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Do povo árabe temos a contribuição de Al-Khwarizmi, que além de aperfeiçoar o sistema de numeração Hindu; também trabalhou as resoluções de equações de forma algébrica, generalizando suas resoluções. Ele separou as equações em em seis grupos:

- quadrados iguais a raízes ($ax^2 = bx$)
- quadrados iguais a um número ($ax^2 = c$)
- raízes iguais a um número ($bx = c$)
- quadrados e raízes iguais a um número ($ax^2 + bx = c$)
- quadrados e um número iguais a raízes ($ax^2 + c = bx$)
- raízes e um número iguais a quadrados ($bx + c = ax^2$)

Uma diferença entre os árabes e os hindus é a questão dos números negativos. Os árabes não aceitavam a existência de números negativos, e sempre que uma equação proposta tinha coeficientes negativos, Al-Khwarizmi fornecia procedimentos para torná-los positivos.

Partindo dos estudos desses métodos de resolução para equações de grau 2, foram apresentadas fórmulas resolutivas para as equações de grau 3 e grau 4 no início da idade média, por volta do século XVI. Os matemáticos Scipione del Ferro, Nicolo Tartaglia e Girolamo Cardano contribuíram com as resoluções de equações de 3º grau, enquanto o matemático Lodovico Ferrari com a resolução de equações do 4º grau. Vale ressaltar que mesmo não trabalhando juntos, Tartaglia e Cardano chegaram aos mesmos resultados.

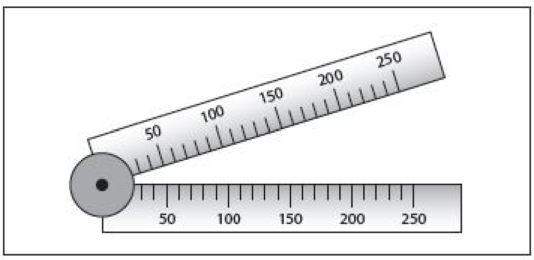
No início do século XVIII, Niels Henrik Abel demostrou que nenhuma raiz de uma equação de 5º grau pode ser expressas por meio de radicais, enquanto Évariste Galois, através da teoria de grupos, estabeleceu critérios para a para a possibilidade das construções com régua e compasso e para a resolubilidade de equações por radicais. Sem exito para encontrar métodos resolutivos gerais para equações acima de grau 4, Lagrange deixou como legado o método de aproximação de raízes de equação por meio de somas de frações contínuas.

As estruturas das equações hindús e árabes passaram a ser conhecidas como "*equações polinomiais*". A partir de suas definições, aprofundaram-se os estudos para encontrar métodos resolutivos para equações polinomiais com graus maiores.

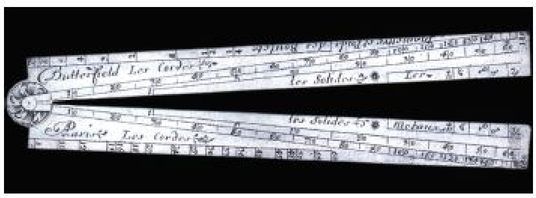
Como não se encontravam métodos resolutivos gerais para tais equações, os métodos numéricos para aproximações foram amplamente utilizados e discutidos, até que, no século XVII, com a formalização do cálculo como uma linha de estudo matemático, os métodos numéricos foram adotados como as ferramentas mais adequadas para a resolução de tais equações.

John Napier foi um dos principais colaboradores, ao criar os logaritmos e tabelas com seus resultados para facilitar as utilização e os cálculos que os envolviam. Os logaritmos de Napier foram modificados por Henry Briggs, gerando os logaritmos de base 10 que utilizamos nos dias de hoje, haja vista que o sistema de numeração adotado é o de base 10, os cálculos numéricos eram realizados em uma velocidade muito superior.

Em paralelo aos avanços nas teorias dos números, eram criadas ferramentas para o auxílio de cálculos. Galileu Galilei, já no final do século XVI, colocou à disposição o chamado"*compasso geométrico militar*" (fig. 9a), que permitia dividir segmentos em partes iguais entre outros cálculos. E, no início do século VII, Edmund Gunter entregou sua contribuição de uma escala logarítmica, também em forma de compasso, chamada de "*gunter*" ou "*escala de Gunter*" (fig. 9b).



(a) Compasso geométrico militar de Galileu



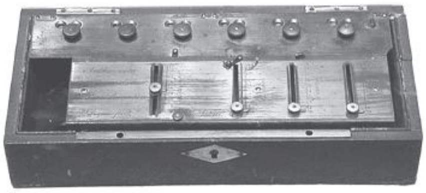
(b) Escala de Gunter

Figura 9 – Ferramentas de cálculo (Boyer e Merzbach, 2012, pg 225)

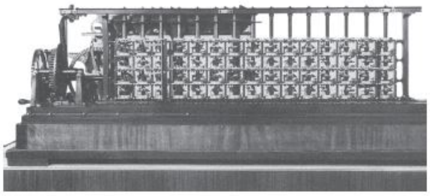
Anos mais tarde, William Oughtred aperfeiçou as réguas de cálculo. Usando duas réguas de Gunter, ele criou uma régua linear e uma circular, evitando a necessidade da utilização de compassos. Oughtred também deixou sua contribuição na escrita, cujos símbolos que permaneceram até os dias de hoje são o de multiplicação ($\times$), proporções ($: :$) e o da diferença ($\sim$).

Ainda nesta mesma época, Baise Pascal, Charles X. Thomas e Georg e Edvard Scheutz (pai e filho) conseguiram construir máquinas de calcular mecânicas (fig. 10), cujas ideias foram aproveitadas a partir do século XIX.

(a) Máquina de calcular de Pascal



(b) *arithmometer* de Thomas



(c) Máquina de diferenças de Scheutz

Figura 10 – Ferramentas de cálculo (Boyer e Merzbach, 2012, pg 225)

Além da máquina de calcular, Pascal deixou sua contribuição na expansão de polinômios da forma $(a+b)^n$, o chamado "*Triângulo de Pascal*"(figura 11). Esse processo foi desenvolvido para definir os coeficientes de sua expansão. A primeira linha do triângulo é constituída apenas de 1 e, a partir da segunda linha, todo elemento é obtido com a soma dos números da linha anterior situados acima e a esquerda dele. Na figura, a 8ª diagonal fornece os coeficientes para a expansão de $(a+b)^7$.

1	1	1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	7	8	...
1	3	6	10	15	21	28	36	...
1	4	10	20	35	56	84	120	...
1	5	15	35	70	126	210	330	...
1	6	21	56	126	252	462	792	...
1	7	28	84	210	462	924	1716	...
1	8	36	120	330	792	1716	3432	...
.	.	.	.	.	.	.	.	...

Figura 11 – Triângulo de Pascal

Ainda no século XVII, René Descartes, ao trabalhar com equações polinomiais, deixou uma das mais importantes contribuições para entender suas raízes, a "*Regra de sinais de Descartes*" (def. 1).

Definição 1 *Seja $f(x) = 0$ uma equação polinomial de coeficientes reais escrita segundo as potências decrescentes de x. O número de raízes positivas da equação é igual ao número de variações de sinais apresentadas pelos coeficientes de $f(x)$ ou menor e, neste caso, a diferença é um número positivo par. O número de raízes negativas é igual ao número de variações de sinal apresentadas pelos coeficientes de $f(x)$ ou menor e, neste caso, a diferença é um número positivo par. Contam-se m vezes uma raiz de multiplicidade m.*

Estas últimas descobertas, junto com os métodos de aproximação, geraram formas de se encontrar a solução de todos os tipos de equação, de acordo com a precisão desejada.

3 AS EQUAÇÕES E OS CONJUNTOS NUMÉRICOS NO ENSINO BÁSICO

Definição 2 (Equação) *Equação [do latim aequationem] s.f. Matemática. Igualdade entre expressões matemáticas que só é satisfeita para determinados valores dos respectivos domínios. (Bueno[13], 2010, p. 184).*

Definição 3 (Equação) *Toda sentença matemática expressa por uma igualdade, na qual haja um ou mais símbolos que representem números desconhecidos dessa sentença, é denominada equação. Cada símbolo que representa um número desconhecido chama-se incógnita.*

A interpretação de problemas é essencial para o estudo da matemática, pois é o caminho para a criação de procedimentos para a sua resolução. Esses procedimentos recaem na construção de fórmulas (mesmo os problemas que podem ser resolvidos apenas com as aplicações das operações básicas[1], pois a diferença está apenas na formalização matemática) que permitem a análise mais detalhada da situação, possibilitando o teste de vários valores.

Quando o problema tem uma condição específica, em que necessitamos de uma comparação entre duas expressões matemáticas, ou entre uma expressão e um valor, as fórmulas são chamadas de "*equações*", que pode ser definida de acordo com a interpretação da língua portuguesa (Definição 2), ou de acordo com a formalização matemática (Definição 3).

O conceito de equação é apresentado aos alunos a partir do momento em que se inicia o estudo sobre as operações básicas, através de perguntas referentes ao número que em determinada operação fornece tal resultado. Essas perguntas são feitas desde o 2º ano do EF I, quando se inicia o processo de formalização da adição, com perguntas do tipo "*Quem somado com 7 é igual a 15?*" ou "*Quem vezes ele mesmo é igual a 16*".

Com essas pequenas perguntas, a conexão entre equações e os conjuntos numéricos vai se formando. Essa conexão, se bem trabalhada, é essencial para a compreensão do que é ser "*raiz da equação*" ou ser "*solução do problema*"

Definição 4 (Raiz de uma equação) *Um número é denominado como "raiz" ou "solução" de uma equação quando, ao substituir a incógnita, torna a igualdade verdadeira.*

Pela definição de equação (def 4), basta tornar a equação verdadeira para ser raiz. Contudo, ser raiz da equação não quer dizer que o número é a solução do problema. Para

[1] São consideradas operações básicas aquelas que estão presentes nas ações mais comuns do dia a dia: juntar, tirar, agrupar e separar. Elas são a **Adição**, a **Subtração**, a **Multiplicação** e a **Divisão**

que o aluno possa usar adequadamente as duas interpretações, precisamos entender quais são os conjuntos de números que podemos trabalhar e como resolver os diferentes tipos de equações para obter tal número.

As definições e referências dos conteúdos tiveram como base as coleções para o ensino fundamental de Andrini[14] e Dante[15]; e para o ensino médio de Iezzi[16] e também de Dante[17].

3.1 Os conjuntos numéricos

Apesar do processo de contagem se iniciar no 1º ano do E.F. I, a definição dos números naturais só aparece no 6º ano do E.F. II, utilizando esse processo como base. Em sua maioria, os autores de livros para o ensino fundamental definem os números naturais como sendo a sequência:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$$

De forma a fazer com aluno associe a ideia de contagem aos números naturais. Após essa associação, é realizada a definição da *sequência dos números naturais*, com as seguintes propriedades:

- Os números naturais se iniciam no zero (0);
- Para obter o número seguinte sempre somamos uma (1) unidade;
- O sucessor de um número natural é o número que vem imediatamente depois, ou seja, está uma unidade à frente.
- A sequência de números naturais é infinita, pois sempre podemos acrescentar 1 ao último número e obter o seu sucessor.

Dentro deste contexto, são apresentadas as *quatro operações fundamentais*, com suas propriedades. Em todas as operações, primeiro se associa a operação com uma ação, depois é feita a formalização do algoritmo dentro do sistema de numeração decimal.

(i) **Adição:** A adição é definida como a ação de juntar duas quantidades, e tem como base o processo de contagem. Ou seja, se aprende a somar contando a segunda quantidade a partir da primeira.

Junto com essas definições, também são apresentadas as suas propriedades, utilizando a linguagem algébrica:

⇒ Comutativa: Dados dois números naturais a e b, a ordem das parcelas não altera a soma.

$$a + b = b + a$$

⇒ Associativa: Em uma adição de três (ou mais) números naturais, a forma de agrupar as parcelas não altera a soma. Então, dados três números naturais a, b e c, temos que:

$$a + b + c = (a + b) + c = a + (b + c) = (a + c) + b$$

⇒ Elemento neutro: Existe um único número natural, o zero (0), do qual toda a adição com qualquer outro número natural, a soma é sempre esse número. Então, se a é um número natural:

$$a + 0 = 0 + a = a$$

(ii) **Subtração:** A subtração é definida como a ação tirar uma quantidade de outra e, assim como a adição, tem como base o princípio da contagem. A diferença é que na subtração a contagem é feita de forma decrescente.

Com relação as propriedades, apenas é feita a relação entre a adição e a subtração, chamada de "*relação fundamental da subtração*": Se a, b e c são três números naturais, então:

$$a - b = c \Leftrightarrow b + c = a$$

(iii) **Multiplicação:** A multiplicação é definida como a ação de "*somar parcelas iguais*", contamos um número uma quantidade definida de vezes.

Assim como na adição, também são definidas as propriedades da multiplicação:

⇒ Comutativa: Dados dois números naturais a e b, a ordem dos fatores não altera o produto.

$$a \times b = b \times a$$

⇒ Associativa: Em uma multiplicação de três (ou mais) números naturais, a forma de agrupar os fatores não altera produto. Então, dados três números naturais a, b e c, temos que:

$$a \times b \times c = (a \times b) \times c = a \times (b \times c) = (a \times c) \times b$$

⇒ Elemento neutro: Existe um único número natural, o um (1), no qual toda multiplicação com qualquer outro número natural, o produto é sempre esse outro número. Então, se a é um número natural:

$$a \times 1 = 1 \times a = a$$

(iv) Distributiva em relação à adição: Se multiplicarmos um número natural por uma soma de dois número naturais, o resultado é o mesmo da soma da multiplicação desse número natural por cada parcela. Então, dados a, b e c, temos:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

(v) **Divisão:** A divisão é definida como a ação de separar uma quantidade em partes iguais. Em alguns casos, a divisão também é relacionada com "*quantas vezes uma quantidade cabe dentro de outra*".

Assim como a subtração, a divisão tem uma única propriedade; relacionando a divisão com a multiplicação, chamada de "*relação fundamental da divisão*: Sendo D, d, q e r quatro números naturais tais que D é o dividendo, d é o divisor, q é o quociente e r é o resto da divisão:

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \cline{2-2} r & q \end{array} \Leftrightarrow D = d \times q + r$$

Embora os livros façam menção à essa relação, o estudo sobre ela se restringe em verificar se a divisão foi efetuada corretamente, e em atividades para completar um dos números envolvidos para que a igualdade seja verdadeira.

Tendo como base o Teorema da Divisão Eclidiana[2] para números inteiros, o trabalho com essa relação poderia ser explorada um pouco mais a fundo. Por exemplo, isolando o resto (equação 3.1) e considerando o conjunto dos números naturais, seria fácil de mostrar aos alunos que o resto (r) nunca poderá ser maior do que o dividendo (D).

$$D = d \times q + r \Leftrightarrow r = D - d \times q \tag{3.1}$$

Considerando a percepção material dos alunos, podemos realizar a prova dessa relação apenas lembrando que nunca podemos tirar mais do que temos, concluindo que $d \times q \leqslant D$.

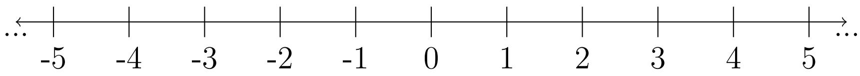
No 7º ano, é introduzida a noção do número negativo, tendo como exemplos os representações dos números nas relações financeiras, nas tabelas de saldo de pontos e de gols no futebol e nas temperaturas. A construção dos números inteiros é realizada da seguinte maneira:

- Com exceção do zero, os demais números naturais podem ser escritos com o símbolo de "+" na frente, e são chamados de *inteiros positivos*. Então o conjunto ($\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ...\}$) pode ser escrito na forma ($\mathbb{N} = \{0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, ...\}$).
- O conjunto dos números *inteiros negativos* é $\{..., -7, -6, -5, -4, * - 3, -2, -1\}$.
- Quando reunimos os números naturais com os números inteiros negativos, temos o *conjunto dos números inteiros* $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, ...\}$ ou $\mathbb{Z} = \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

2 Teorema da Divisão Euclidana: Sejam a e b dois números inteiros com $b \neq 0$. Existem dois únicos números inteiros q e r tais que

$$a = bq + r, \text{ com } 0 \leqslant r \leq |b|$$

- Os números positivos sempre serão escritos à direita do zero, e os números negativos sempre à esquerda do zero.



Com a adição dos números negativos também surgem as definições de novos conceitos:

- **Módulo (| |):** O módulo (ou valor absoluto) de um número inteiro é a distância desse número até o zero.

- **Números opostos:** Dois números inteiros são considerados opostos (ou simétricos) quando possuem o mesmo módulo.

A comparação de números inteiros é definida com base na posição da reta numérica: *o maior número é sempre o que está à direita na reta numérica, logo, o menor número é sempre o que está à esquerda.*

O conceito das operações é ampliado para o contexto dos números negativos. A subtração é redefinida como sendo "*a adição do oposto*" e é acrescentada uma nova propriedade da adição "*elemento oposto*", que diz: *a soma de dois números opostos é sempre zero.*

Os números racionais, irracionais e reais são apresentados no 8º Ano. Suas definições para o ensino básico são as seguintes:

1. **Racionais:** O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais é formado por todos os números que podem ser escritos na forma de fração com numerador e denominador inteiros e denominador diferente de zero. Sendo representado da seguinte maneira:

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b},\ \text{com } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ \text{e } b \neq 0 \right\}$$

   Os números racionais são estruturados em:

   - Inteiros: Quando a fração $\frac{a}{b}$ tem resultado inteiro;
   - Decimais exatos: Quando a fração $\frac{a}{b}$ tem um resultado com uma quantidade finita de casas decimais;
   - Dízimas periódicas: Quando a fração $\frac{a}{b}$ tem um resultado com uma quantidade de casas decimais, e possui um sequência, chamada de período, que se repete seguidamente.

2. **Irracionais:** O conjunto $\mathbb{I}$ dos números irracionais é formado por todos as dízimas não periódicas, ou seja, todos os números decimais que não podem ser escritos na

forma de fração. É comum que este conjunto seja inserido com o exemplo do π e da $\sqrt{2}$. Este conjunto é representado com a expressão:

$$\mathbb{I} = \{x \mid x \notin \mathbb{Q}\}$$

3. **Reais**: O conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais é formado pelo união do conjunto do números racionais $\mathbb{Q}$ com o conjunto dos números irracionais $\mathbb{I}$. Sendo a expressão que o representa:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

Os números reais também são apresentados como pontos de uma reta, criando a chamada *reta real* (fig. 12), associando cada número real a uma medida de comprimento.

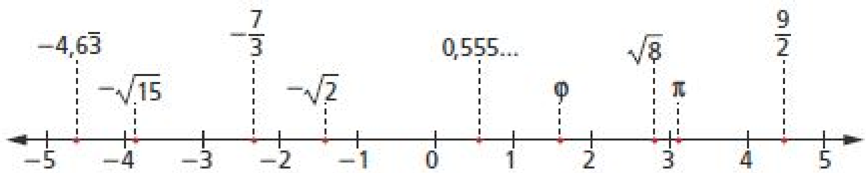


Figura 12 – Representação da reta real

Alguns autores mostram como construir um número irracional na reta numérica, sem recorrer ao teorema de Pitágoras (que será visto apenas no 9º Ano, no estudo das relações métricas no triângulo retângulo), utilizando o conceito de área do quadrado.

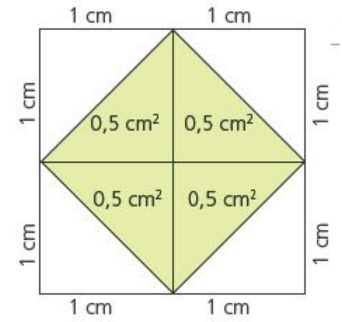
> Vamos localizar, como exemplo, o ponto da reta correspondente a $\sqrt{2}$. Além de poder localizá-lo por uma representação decimal aproximada, podemos obter, por um processo geométrico, a localização exata desse ponto.
>
> A área de cada quadradinho de lado 1 cm é igual a 1 cm^2 (fig. 13a). Dividindo-o ao meio, cada triângulo fica com 0,5 cm^2 de área. Como $4 \cdot 0,5 = 2$, a área do quadrado verde é de 2 cm^2. Então, a medida do lado do quadrado verde é $\sqrt{2}$ cm. Transportamos, com auxílio do compasso, a medida deste segmento para a reta numérica, determinando o ponto correspondente a $\sqrt{2}$ (fig. 13b). (Andrini[14], pg 24).

As propriedades das operações básicas não são mais trabalhadas, dando lugar às propriedades de potenciação e radiciação do final do 8º ano para o início do 9º.

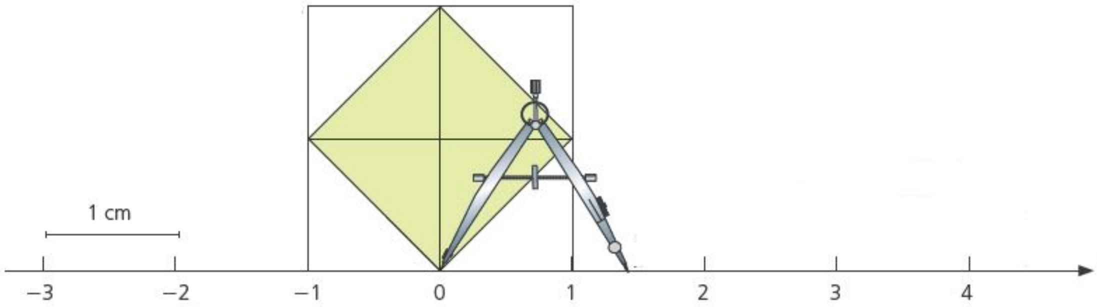
i) **Potenciação:**

a) *Multiplicação de potências de mesma base:* Pode repetir a base e somar os expoentes $\Rightarrow a^m \cdot a^n = a^(m + n)$.

b) *Divisão de potências de mesma base:* Pode repetir a base e subtrair os expoentes $\Rightarrow a^m \div a^n = a^(m - n)$.



(a) Quadrado de lado 2 cm



(b) Reta numérica

Figura 13 – Construção da $\sqrt{2}$ na reta real

c) *Potência de potência:* Pode repetir a base e multiplicar os expoentes $\Rightarrow (a^m)^n = a^(m \cdot n)$

d) *Multiplicação de potências com mesmo expoente:* Pode se multiplicar as bases e repetir o expoente $\Rightarrow a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$

e) *Divisão de potências com mesmo expoente:* Pode se dividir as bases e repetir o expoente $\Rightarrow a^m \div b^m = (a \div b)^m$

No 3º ano do ensino médio é apresentado o conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, com exemplos de resolução das equações cujas soluções são raízes quadradas de números negativos. A descrição é feita da seguinte forma:

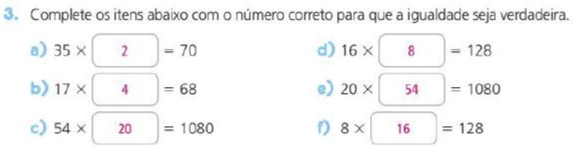
- Existe um número i, tal que $i^2 = -1$, chamado de número imaginário;
- Todo número complexo F é da forma $\mathsf{F} = a + bi$, onde $a, b \in \mathbb{R}$, a é chamado de parte real ($Re(\mathsf{F}) = a$), e b é chamado de parte imaginária ($Im(\mathsf{F}) = b$).
- Todo número complexo F, onde $a = 0$, é chamado de *imaginário puro*.
- Todo número complexo F, onde $b = 0$, é chamado de *real*.

3.2 As equações

O estudo das equações se inicia de forma implícita a partir do momento em que as operações começam a ser aprendidas no 2º ano do EFI. A partir desse momento, as perguntas começam a ser respondidas analisando as ações relacionadas a cada operação, seguindo os princípios:

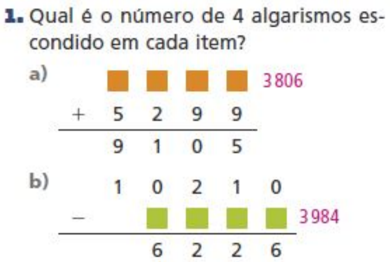
- “Se colocou, tire”;
- “Se tirou, devolva”;
- “Se juntou, separe”;
- “Se separou, junte”;

Além dos problemas descritos com situações do cotidiano e perguntas diretas, nessa fase as equações também aparecem em atividades com a utilização de figuras, desenhos ou espaços vazios para representar o valor da incógnita (figura 14).

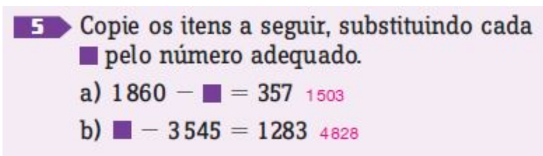


(a) A conquista da matemática 4º Ano

(b) A conquista da matemática 5º Ano



(c) A conquista da matemática 6º Ano



(d) Matemática e compreensão 6º Ano

Figura 14 – Exemplos da utilização do conceito de equação

Já no 6º Ano do E.F.II, temos a inserção de problemas sem solução, pois algumas respostas não estão contempladas dentro do conjunto dos números naturais. Outro ponto importante para o estudo das equações é a formalização do conceito de *operações inversas* (quadro 1), necessários para a compreensão dos procedimentos de resolução.

Operações inversas	
Operação	Inversa
Adição	Subtração
Multiplicação	Divisão
Potenciação	Radiciação

Tabela 1 – Quadro de operações inversas

Após uma definição breve do conjunto dos números racionais, o estudo das equações começa a ser formalizado a partir do 7º ano do E.F.I, quando o aluno é apresentado à definição de *expressão algébrica* (def 5) e *Valor numérico* (def 6). Esse estudo é iniciado pelas "*equações do 1º grau com uma incógnita*" .

Definição 5 (Expressão algébrica) *Toda expressão formada por números e letras é chamada de "expressão algébrica". Em uma expressão algébrica, os números são chamados de "coeficientes" e as letras são chamadas de "incógnitas", quando representam um número específico, ou "variáveis", quando representam vários números diferentes.*

Definição 6 (Valor numérico de uma expressão algébrica) *É denominado "valor numérico" de uma expressão algébrica, o valor obtido através dos cálculos efetuados após a substituição das incógnitas, ou variáveis, por números.*

As equações do 1º grau são introduzidas sem definições formais, apenas com exemplos. O método resolutivo ensinado é de isolamento da incógnita através do princípio das "equações equivalentes", com a realização das operações inversas, realizadas ao mesmo tempo dos dois lados da igualdade, como mostra a resolução da equação 3.2.

$$\begin{aligned} 2x+5 &= 7x+4 \qquad (3.2)\\ 2x+5+(-5)+(-7x) &= 7x+4+(-5)+(-7x)\\ \frac{-5x}{-5} &= \frac{-1}{-5}\\ x &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

A forma $x = \dfrac{-b}{a}$ para a raiz da equação não é mencionada.

No 8º Ano a definição do conjunto dos números racionais é detalhada e as definições dos conjuntos dos números irracionais e reais é inserida. Outro aprofundamento acontece no estudo sobre expressões algébricas, possibilitando que o aluno aprenda a trabalhar com expressões com mais de uma incógnita.

Com o avanço dos conjuntos numéricos, a definição de "*equação do 1º grau com uma incógnita* é formalizada (def 7), junto com a forma algébrica de sua solução (def 8), e é inserido o conceito das "*equações do 1º grau com duas incógnitas*" (9). O aluno aprofunda o conceito de variável e aprende o conceito de *infinitas soluções*, visto que as soluções agora são dadas por pares de números reais, onde para cada número escolhido para uma incógnita existe um outro número que torna a igualdade verdadeira.

Definição 7 (Equação do 1º grau com uma incógnita) *Toda equação que pode ser reduzida à forma $ax + b = 0$, em que x representa a incógnita, e a e b são números racionais, com $a \neq 0$, é denominada equação do 1º grau na incógnita x.*

Definição 8 (Raiz de uma equação do 1º grau com uma incógnita na forma $ax + b = 0$) *Toda equação da forma $ax + b = 0$, tem como raiz o número real $x = \dfrac{-b}{a}$*

$$\begin{aligned} ax + b &= 0 \\ ax + b - b &= 0 - b \\ \frac{ax}{a} &= \frac{-b}{a} \\ x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

Definição 9 (Equações do 1º grau com duas incógnitas) *Toda equação que pode ser reduzida à forma $ax + by = c$, em que x e y representam as incógnitas, a, b e c são números reais, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, é denominada equação do 1º grau com duas incógnitas.*

Embora a forma da raiz tenha sido definida, o foco da resolução das equações do 1º grau com um incógnita permanece o mesmo do 7º Ano, que é a resolução pelo isolamento da incógnita. Com relação às equações com duas incógnitas, as resoluções se baseiam na definição de um valor para uma delas, transformando em uma equação com uma incógnita para encontrar o valor da segunda incógnita.

Os "*sistemas de equações do 1º grau com duas incógnitas*" (def. 10) são inseridos com a interpretação matemática de problemas que duas incógnitas precisam satisfazer duas relações diferentes.

Definição 10 (Sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas) *Quando duas equações de 1º grau com duas incógnitas são escritas ligadas pelo conectivo* **e**, *e possuem as mesmas incógnitas, dizemos que há um sistema de duas equações do 1º grau com duas incógnitas.*

Diferente de trabalhar com apenas uma equação, os sistemas com duas equações podem admitir uma única solução, infinitas soluções ou nenhuma solução real. Sua resolução consiste em transformar as duas equações em uma única equação do 1º grau com uma incógnita. Para isso, elimina-se uma das duas incógnitas, e após encontrar o valor da primeira, ele é utilizado para encontrar o valor da segunda. Os métodos resolutivos ensinados são o da *substituição* e o da *adição*.

I) Método da substituição: Escolhe-se uma das equações, isola-se uma das incógnitas, substitui a expressão na outra equação, que se torna uma equação do 1º grau com uma incógnita. Então, encontra-se o valor da primeira incógnita para encontrar a segunda.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (eq.1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (eq.2) \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \quad (eq.1)$$

$$a_2 \cdot (\frac{c_1 - b_1y}{a_1}) + b_2y = c_2 \quad (eq.2)$$

II) Método da adição: Escolhe-se uma das incógnitas, através da multiplicação e aplicando o princípio de equações equivalentes, faz-se com que os coeficientes nas duas equações sejam números opostos. Soma-se as duas equações, formando uma equação de 1º grau com uma incógnita. Encontra-se o valor da primeira incógnita para, então, encontrar o valor da segunda.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \quad \times (a_2) & (eq.1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad \times (-a_1) & (eq.2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_1 \cdot a_2)x + b_1y = c_1 \quad \times (a_2) & (eq.1) \\ a_2x + b_2y = c_2 \quad \times (-a_1) & (eq.2) \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{c_1 - b_1y}{a_1} \quad (eq.1)$$

$$a_2 \cdot (\frac{c_1 - b_1y}{a_1}) + b_2y = c_2 \quad (eq.2)$$

Com as análises dos possíveis resultados, os sistemas de equações são classificados como:

- **Possíveis e determinados:** Quando possuem uma solução única. Ocorre quando as equações não são equivalentes;
- **Possíveis e indeterminados:** Quando possuem infinitas soluções. Ocorre quando uma equação é equivalente a outra;
- **Impossível:** Quando não possui nenhuma solução. Ocorre quando, ao juntarmos as equações, temos as incógnitas com coeficientes zero, iguais a um valor diferente de zero.

Ao chegar no 9º ano, são aprofundados os conceitos sobre potenciação e radiciação, como preparativos para a introdução das equações do 2º grau com uma incógnita (def. 11). Através dos conceitos de "*mudança de incógnita*", utilizando o princípio de equações equivalentes, são inseridas as equações do 4º grau com uma incógnita da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, chamadas de *equações biquadradas* (def. 12). Também são inseridas as *equações* *fracionárias* (def. 13) e as *equações irracionais* (def. 14), trabalhando com os princípios de fração e raiz, e os sistemas com duas equações, onde uma delas é um produto, onde, ao utilizar o princípio da substituição, uma delas se torna uma equação do 2º grau.

Definição 11 (Equação do 2º grau com uma incógnita) *Denomina-se equação do 2º grau na incógnita x toda equação que pode ser expressa na forma $ax^2 + bx + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.*

Definição 12 (Equações biquadradas com uma incógnita) *Denomina-se equação biquadrada na incógnita x toda equação de 4º grau que pode ser expressa na forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$, em que a, b e c são números reais e $a \neq 0$.*

Definição 13 (Equações fracionárias com uma incógnita) *Denomina-se equação fracionária na incógnita x toda equação cuja incógnita aparece pelo menos uma vez no denominador de uma fração.*

Definição 14 (Equações irracionais com uma incógnita) *Denomina-se equação irracional na incógnita x toda equação cuja incógnita aparece como radicando de uma raiz.*

Ao estudar os métodos resolutivos, as resoluções das equações de 2º grau são separadas em *incompletas* e *completas*:

I) Incompletas: Quando temo $b = 0$, $c = 0$ ou $b = c = 0$. Cada uma dessas equações tem uma fórmula resolutiva própria.

- Resolução da forma $ax^2 = 0$: Pelo processo de isolamento de x sempre terminará com a forma $x = \frac{0}{a}$, portanto a solução sempre será $x = 0$.

$$\begin{aligned} 4x^2 &= 0 \\ x^2 &= \frac{0}{4} \\ x &= \sqrt{0} \\ x = \pm 0 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -7x^2 &= 0 \\ x^2 &= \frac{0}{-7} \\ x &= \sqrt{0} \\ x = \pm 0 &= 0 \end{aligned}$$

- Resolução da forma $ax^2 + c = 0$: Resolvida pelo processo de isolamento de x, tal que $x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 8 &= 0 \\ 4x^2 &= +8 \\ x^2 &= \frac{8}{4} \\ x &= \pm\sqrt{2} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -7x^2 - 4 &= 0 \\ -7x^2 &= +4 \\ x^2 &= \frac{+4}{-7} \\ x &= \sqrt{-\frac{4}{7}} \end{aligned}$$

No primeiro caso, temos a solução $S = \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$, e no segundo, como não existe raiz quadrada real para número negativos, não há soluções reais.

- Resolução da forma $ax^2 + bx = 0$: Usando a propriedade distributiva, colocamos a incógnita x em evidência, fazendo o produto $x \cdot (ax + b) = 0$. Pelas propriedades da multiplicação, ou $x = 0$ ou $ax + b = 0$, então resolve-se a equação do 1º grau para encontrar a segunda raiz.

$$\begin{aligned} -7x^2 - 4x &= 0 \\ x \cdot (-7x - 4) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= 0 \\ &\text{ou} \\ -7x - 4 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -7x - 4 &= 0 \\ -7x &= +4 \\ x &= \frac{+4}{-7} \\ x &= -\frac{4}{7} \end{aligned}$$

Aqui temos o conjunto solução $S = \{-\frac{4}{7}, 0\}$.

II) Completas: São duas resoluções apresentadas.

- Completar quadrados: Consiste em tornar a equação $ax^2 + bx + c = 0$ em um produto notável da forma $(ix + j)^2 = k$, no qual a resolução é $x = \dfrac{\pm\sqrt{k} - j}{i}$

$$\begin{aligned} x^2 + 6x - 7 &= 0 \\ \underbrace{x^2}_{\textit{quadrado de } x} \quad \overbrace{+6x}^{6=2\cdot 3} \quad \underbrace{-7}_{\text{esperado } +9} \quad &= 0 \\ x^2 + 6x - 7 \quad \underbrace{+16}_{\text{para fornecer o } +9} \quad &= +16 \\ x^2 + 6x + 9 &= 16 \\ (x+3)^2 &= 16 \\ x + 3 &= \pm\sqrt{16} \\ x + 3 &= \pm 4 \\ x + 3 = -4 \quad x + 3 &= +4 \\ x = -4 - 3 \quad x &= +4 - 3 \\ x = -7 \qquad x &= +1 \end{aligned}$$

Como conjunto solução temos $S = \{-7, +1\}$.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 16x + 20 &= 0 \\ \underbrace{4x^2}_{\textit{quadrado de } 2x} \quad \overbrace{-16x}^{-2\cdot 2\cdot 4} \quad \underbrace{+20}_{\text{esperado } +16} \quad &= 0 \\ 4x^2 - 16x + 20 \quad \underbrace{-4}_{\text{para fornecer o } +16} \quad &= -4 \\ 4x^2 - 16x + 16 &= -4 \\ (2x-4)^2 &= -4 \\ 2x - 4 &= \sqrt{-4} \end{aligned}$$

Como resultado depende de $\sqrt{-4}$, a equação não possui solução real.

- Fórmula resolutiva (Fórmula de Bhaskara): É a resolução através da fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2 \cdot a}$. Como forma de preparação ao estudo sobre as raízes da equação, ela é apresentada como

$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$

$$x^2 + 6x - 7 = 0$$
$$a = 1,\ b = 6,\ c = -7$$
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$\Delta = (6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-7)$$
$$\Delta = 36 + 28 = 64$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$
$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{64}}{2 \cdot 1} = \frac{-6 \pm 8}{2}$$
$$x_1 = \frac{-6-8}{2} \qquad x_2 = \frac{-6+8}{2}$$
$$x_1 = \frac{-14}{2} = -7 \quad x_2 = \frac{+2}{2} = +1$$

Como conjunto solução temos $S = \{-7, +1\}$.

$$4x^2 - 16x + 20 = 0$$
$$a = 4,\ b = -16,\ c = +20$$
$$\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$
$$\Delta = (-16)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (20)$$
$$\Delta = 256 - 320 = -64$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2 \cdot a}$$
$$x = \frac{-(-16) \pm \sqrt{-64}}{2 \cdot 4} = \frac{+16 \pm \sqrt{-64}}{8}$$

Como resultado depende de $\sqrt{-64}$, a equação não possui solução real.

Embora esteja na classificação de resolução de equações completas, a fórmula de Bhaskara também pode ser utilizada para a resolução de equações incompletas.

Com relação às equações que recaem em equações do 2º grau, temos:

I) Sistemas de equação: Utilizamos o processo de substituição, resolvendo a equação de 2º grau encontrada e utilizando os valores para encontrar o resultado da segunda incógnita.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 72 \\ x \cdot y = 315 \end{cases}$$
$$2x + 2y = 72 \Rightarrow 2x = 72 - 2y$$
$$x = \frac{72 - 2y}{2} = 36 - y$$
$$x \cdot y = 315 \Rightarrow (36 - y) \cdot y = 315$$
$$-y^2 + 36y - 315 = 0$$
$$\Delta = (+36)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-315)$$
$$\Delta = 1296 - 1260 = 36$$

$$y = \frac{-(+36) \pm \sqrt{36}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-36 \pm 6}{-2}$$
$$y_1 = \frac{-36 + 6}{-2} \qquad y_2 = \frac{-36 - 6}{-2}$$
$$y_1 = \frac{-30}{-2} = +15 \quad y_2 = \frac{-42}{-2} = +21$$
$$x_1 = 36 - y_1 \qquad x_2 = 36 - y_2$$
$$x_1 = 36 - 15 \qquad x_2 = 36 - 21$$
$$x_1 = 21 \qquad x_2 = 15$$

A solução do sistema seria $S = \{(15, 21), (21, 15)\}$

II) Equações biquadradas: Fazendo a igualdade $y = x^2$, efetuamos a substituição na equação $ax^4 + bx^2 + c = 0$, de forma a transformá-la em uma equação do 2º grau da forma $ay^2 + by + c = 0$. Então resolvemos a nova equação para depois encontrarmos as raízes da primeira.

$$
\begin{aligned}
x^4 - 5x^2 - 36 &= 0 \\
Fazendo\ x^2 = y,\ temos &: \\
y^2 - 5y - 36 &= 0 \\
\Delta &= (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36) \\
\Delta &= 25 + 144 = 169 \\
y = \frac{-(-5) \pm \sqrt{169}}{2 \cdot 1} &= \frac{+5 \pm 13}{2}
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
y_1 &= \frac{+5 - 13}{2} \\
y_1 &= \frac{-8}{2} = -4 \\
x^2 &= -4 \Rightarrow x = \sqrt{-4} \\
x_1 &= \nexists \\
x_2 &= \nexists
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
y_2 &= \frac{+5 + 13}{2} \\
y_2 &= \frac{18}{2} = 9 \\
x^2 &= 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} \\
x_3 &= +3 \\
x_4 &= -3
\end{aligned}
$$

Como $\sqrt{-4}$ não é real, então a solução é $S = \{-3, +3\}$.

III) Equações fracionárias: É utilizado o conceito do produto como múltiplo comum, para escrever o novo denominador, e o conceito de frações equivalentes, para escrever os novos denominadores. Pelas propriedades da igualdade de fração, os denominadores são descartados, e apenas os numeradores são utilizados para desenvolver a equação. Devido à presença de incógnitas nos denominadores, sempre são destacados os critérios para que ele seja diferente de zero. Esses critérios são levados em consideração para se montar o conjunto solução.

$$
\begin{aligned}
\frac{180}{x-2} - \frac{180}{x} = 1 \qquad (\text{com } x \neq 0 \text{ e } x \neq 2) & \\
\frac{180 \cdot x}{x(x-2)} - \frac{180 \cdot (x-2}{x(x+2)} &= \frac{1 \cdot x(x-2)}{x(x-2)} \\
\frac{180x}{x(x-2)} - \frac{180x - 360}{x(x+2)} &= \frac{x^2 - 2x}{x(x-2)} \\
180x - 180x + 360 &= x^2 - 2x \\
0 &= x^2 - 2x - 180x + 180x - 360 \\
x^2 - 2x - 360 &= 0
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\Delta &= (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-360) \\
\Delta &= 4 + 1440 = 1444 \\
x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{1444}}{2 \cdot 1} &= \frac{2 \pm 38}{2} \\
x_1 = \frac{2 - 38}{2} &= \frac{-36}{2} = -18 \\
x_2 = \frac{2 + 38}{2} &= \frac{40}{2} = +20
\end{aligned}
$$

Como os resultados atendem aos critérios, a solução é $S = \{-18; 20\}$

IV) Equações irracionais: São resolvidas utilizando as propriedades de radiciação e potências, elevando os dois lados ao expoente necessário para eliminar o radical. A equação é desenvolvida e resolvida. Nesta etapa, sempre é trabalhada com raízes quadradas, portanto, sempre é estipulado o critério para que o resultado do radical sempre seja maior ou igual a zero.

$$
\begin{aligned}
x - 1 &= \sqrt{x+5} \qquad (\text{com } x \geq -5) \\
(x-1)^2 &= (\sqrt{x+5})^2 \\
x^2 - 2x + 1 &= x + 5 \\
x^2 - 2x + 1 - x - 5 &= 0 \\
x^2 - 3x - 4 &= 0 \\
\Delta &= (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) \\
\Delta &= 9 + 16 = 25 \\
x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{25}}{2 \cdot 1} \\
x &= \frac{+3 \pm 5}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{+3-5}{2}\frac{-2}{2} = -1 \\
x_2 &= \frac{+3+5}{2}\frac{8}{2} = 4 \\
&\text{Verificação} \\
x_1 &= -1 \\
-1 - 1 &= \sqrt{-1+5} \\
-2 &= \sqrt{4} \\
-2 &= 2 \\
x_2 &= 4 \\
4 - 1 &= \sqrt{4+5} \\
3 &= \sqrt{9} \\
3 &= 3
\end{aligned}
$$

Como -1 não atende à condição inicial, temos que $S = \{4\}$.

O 1º Ano do EM é marcado pelo estudo das funções (def. 15), onde as equações passam a ser utilizadas para fazer a associação entre dois conjuntos numéricos. Com essa relação, passamos a trabalhar com o conceito de variável, visto que o conjunto solução pode não ser dado por valores específicos, mas sim por intervalos numéricos.

Definição 15 (Função) *Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma função de **A** em **B**, denotada $f : A \longrightarrow B$ ou $A \xrightarrow{f} B$, é uma regra que associa cada elemento de $x \in$ **A** à um único elemento em $y \in$ **B**.*

$$y = f(x)$$

A importância do conhecimento sobre os conjuntos numéricos é mais evidente a partir da introdução deste conceito, pois estão diretamente relacionados com os conceitos de *domínio*, *contra-domínio* e *imagem* (def. 16). Como as relações de função são vinculadas às relações entre conjuntos, podemos ter uma função $f : A \longrightarrow B$, tal que $Imf = \varnothing$.

Definição 16 (Domínio, contra-domínio e imagem de uma função) *Dada a função $f : A \longrightarrow B$, o conjunto **A** é chamado de **domínio (D)** da função, o conjunto **B** é chamado de contradomínio (**CD**) da função e, para cada $x \in A$, o elemento $y \in B$, tal que $y = f(x)$, é chamado de **imagem (Im)** da função.*

Ao utilizar as fórmulas matemáticas para as relações entre conjuntos, as funções passam a ser classificadas de acordo com as fórmulas utilizadas.

Definição 17 (Função afim) *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se função afim quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definição 18 (Função quadrática) *Uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ chama-se quadrática quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2. + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Definição 19 (Função modular) *Denomina-se função modular a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = |x|$, ou seja:*

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{para } x \geqslant 0 \\ -x, \text{para } x < 0 \end{cases}$$

Definição 20 (Função exponencial) *Dado um número real* **a** *($a > 0$ e $a \neq 1$), denomina-se função exponencial de base* **a** *uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^*_+$ definida por $f(x) = a^x$.*

Definição 21 (Logaritmo) *Dados os números reais positivos* ***a*** *e* ***b****, com $a > 0$ e $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente* ***c*** *chama-se logaritmo de* ***b*** *na base a.*

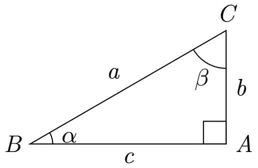
$$\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b, \ \text{com } a \text{ e } b \text{ positivos e } a \neq 1$$

Definição 22 (Função logarítmica) *Denomina-se função logarítmica a função $f : \mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \log_a x$, onde $a > 0$ e $a \neq 1$.*

As relações trigonométricas no triângulo retângulo (def. 23) são retomadas no 2º Ano do E.M. e, com a introdução do conceito de *Circunferência trigonométrica* (def. 24) e *arco* (def. 25), ocorre a ampliação do conceito de seno, cosseno (def. 26) e tangente (def 27) para ângulos maiores do que 90º.

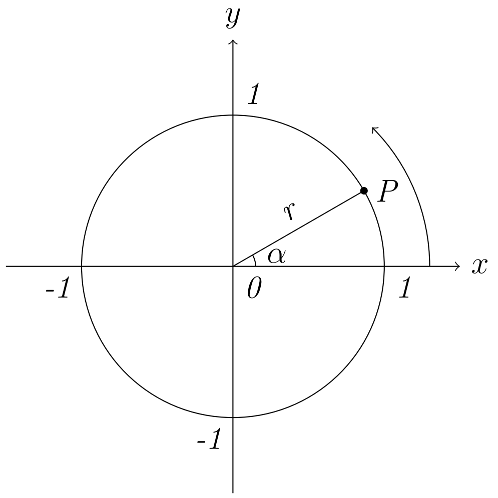
Definição 23 (Relações trigonométricas no triângulo retângulo) *Considerando os ângulos agudos internos do triângulo retângulo, as relações denominadas seno (sen), cosseno (cos) e tangente (tan), ficam assim definidas para cada ângulo â:*

$$\operatorname{sen} \hat{a} = \frac{\textit{Cateto oposto}}{\textit{hipotenusa}}$$
$$\cos \hat{a} = \frac{\textit{Cateto adjacente}}{\textit{hipotenusa}}$$
$$\tan \hat{a} = \frac{\textit{Cateto oposto}}{\textit{Cateto adjacente}}$$

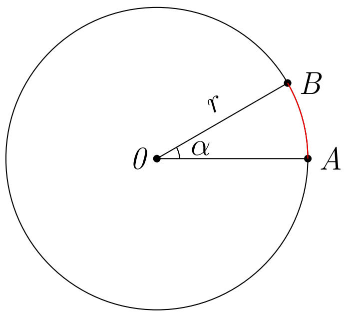


$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{b}{a} \quad \operatorname{sen} \beta = \frac{c}{a}$$
$$\cos \alpha = \frac{c}{a} \quad \cos \beta = \frac{b}{a}$$
$$\tan \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \beta = \frac{c}{b}$$

Definição 24 (Circunferência trigonométrica) *Dado um sistema ortogonal com origem $O = (0, 0)$, denomina-se circunferência trigonométrica, a circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema, onde a cada ponto P sobre a circunferência corresponde à um ângulo α, formado pela semi-reta $\overrightarrow{OX^+}$ e a semi-reta $\overrightarrow{OP}$, sempre contado no sentido anti-horário.*

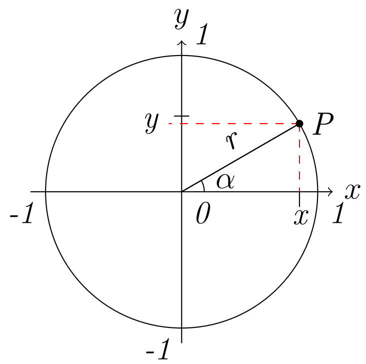


Definição 25 (Arco) *Dado um círculo de centro O de raio r e uma ângulo central $\alpha = A\hat{O}B$, com A e B sobre a circunferência, denomina-se arco do ângulo α, a parte da circunferência compreendida entre A e B, representado por $\overset{\frown}{AB}$, cuja unidade é o o radiano (rad), definida pela medida do raio, e seu comprimento é dado por $\overset{\frown}{AB}= \dfrac{\alpha \cdot \pi}{180\text{ž}}$rad.*



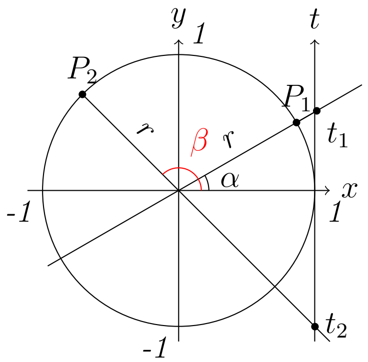
Definição 26 (Seno e cosseno na circunferência trigonométrica) *Dado um ângulo α formado por um ponto $P(x, y)$ na circunferência trigonométrica, as relações de seno e cosseno ficam definidas da seguinte forma:*

$$\operatorname{sen} \alpha = y$$
$$\cos \alpha = x$$



Definição 27 (Tangente na circunferência trigonométrica) *Dado um ângulo α formado por um ponto $P(x, y)$ na circunferência trigonométrica e eixo vertical t, tangente à circunferência no ponto (1,0) no seu respectivo, fica definida a tangente do ângulo α, como sendo a coordenada t_1 do ponto de intersecção da reta $\overline{OP}$ com o eixo t.*

$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = t_1$$
$$\tan\beta = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta} = t_2$$



Os valores do seno, cosseno e tangente dos ângulos maiores do que 90º podem ser estimados com o processo de *redução ao primeiro quadrante*, que consiste em associá-los com os ângulos menores do que 90º através da semelhança de triângulos (fig. 15).

(i) 2º Quadrante:

- $\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\alpha$
- $\cos\beta = -\cos\alpha$

(ii) 3º Quadrante:

- $\operatorname{sen}\gamma = -\operatorname{sen}\alpha$
- $\cos\gamma = -\cos\alpha$

(iii) 4º Quadrante:

- $\operatorname{sen}\delta = -\operatorname{sen}\alpha$
- $\cos\delta = \cos\alpha$

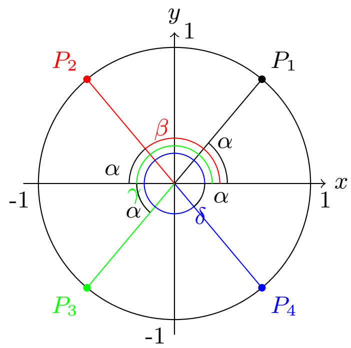


Figura 15 – Redução ao primeiro quadrante

Devido a associação de cada arco a um número real, o passo seguinte é a relação com a ideia de "*mais de uma volta*". Essa relação é dada pela definição de *arcos congruentes* (def. 28), e cria o chamado *ciclo trigonométrico* (def. 29), ampliando o conceito de seno, cosseno e tangente para os números reais.

Definição 28 (Arcos congruentes) *Dois arcos são congruentes quando suas medidas diferem de um múltiplo de* 2π *ou 360º.*

Definição 29 (Ciclo trigonométrico) *Para cada* $\alpha \in \mathbb{R}$*, existe um arco* $\beta \in [0\pi, 2\pi]$*, tal que* $\alpha = \beta + k \cdot 2\pi \quad (k \in \mathbb{N})$.

Essa ampliação transforma as relações de seno, cosseno e tangente em funções reais.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \cos x$.
- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \tan x$.

Este novo conceito também traz as *equações trigonométricas*, que para melhor manipulação podem ser usadas as relações trigonométricas (tabela 2) e as fórmulas trigonométricas (tabela 3).

Tabela 2 – Relações trigonométricas

Identidade	Identidade
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$	$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \ \forall \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\cot x = \frac{1}{\tan x} \ \forall \ x \neq k\pi$	$\sec x = \frac{1}{\cos x} \ \forall \ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$
$\csc x = \frac{1}{\sin x} \ \forall \ x \neq k\pi$	

Tabela 3 – Fórmulas trigonométricas

Fórmula	Fórmula
$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$	$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$
$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$	$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$
$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$	$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
$\sin 2a = 2 \cdot \sin a \cdot \cos a$	$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$
$\cos 2a = 2 \cdot \cos^2 a - 1$	$\cos 2a = 1 - 2 \cdot \sin^2 a$
$\tan 2a = \frac{2 \cdot \tan a}{1 - \tan^2 a}$	$\lvert \sin \frac{a}{2} \rvert = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}$
$\lvert \cos \frac{a}{2} \rvert = \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}$	$\tan \frac{a}{2} = \frac{1 - \cos a}{\sin a} = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$

Em um estudo genérico, as primeiras equações envolvendo seno e cosseno levam em consideração o intervalo do círculo trigonométrico $[-1, 1]$, para encontrar o valor de uma segunda incógnita, como por exemplo encontrar o valor de t mostrado nos exemplo na figura 16.

$$\begin{aligned} \sin x &= t^2 - 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq t^2 - 1 \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 + 1 \leq t^2 \leq 1 + 1 &\Rightarrow 0 \leq t^2 \leq 2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \lvert \sqrt{0} \rvert \leq t \leq \lvert \sqrt{2} \rvert &\Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq +\sqrt{2} \end{aligned}$$

Solução: $S = \{t \in R \mid -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}\}$.

$$\begin{aligned} &\cos x + 5t = 6 \\ \cos x + 5t = 6 &\Rightarrow \cos x = 6 - 5t \Rightarrow \\ -1 \leq \cos x \leq 1 &\Rightarrow -1 \leq 6 - 5t \leq 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow -1 - 6 \leq -5t \leq 1 - 6 &\Rightarrow -7 \leq -5t \leq -5 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{7}{5} \geq t \geq \frac{5}{5} &\Rightarrow 1 \leq t \leq \frac{7}{5} \end{aligned}$$

Solução: $S = \{t \in R \mid 1 \leq t \leq \frac{7}{5}\}$.

Figura 16 – Utilizando o intervalo do círculo trigonométrico para resolver equações envolvendo seno e cosseno

Quando chega na parte das equações envolvendo todas as relações trigonométricas, as atividades se baseiam em utilizar valores já conhecidos e, geralmente, a resposta é uma fórmula com base em um $k \in Z$, devido a periodicidade do círculo trigonométrico, além de substituições para que a equação recaia em uma equação do 1º ou 2º graus. (Figura 17).

Outro ponto após o estudo das matrizes é a inserção das *equações lineares* (def. 30) e dos *sistemas lineares* (def. 31), que são um aprofundamento do estudo sobre equações do 1º grau com duas incógnitas e sobre o sistema de equações do 1º grau com duas incógnitas.

$$2 \cdot \sin^2 x + 3 \cdot \sin x - 2 = 0$$
$$\text{Substituindo } \sin x \text{ por t}$$
$$2t^2 + 3t - 2 = 0$$
$$t = \frac{-(+3) \pm \sqrt{(+3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{4} \Rightarrow t = \frac{-3 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$t_1 = \frac{-3-5}{4} \qquad t_2 = \frac{-3+5}{4}$$
$$t_1 = \frac{-8}{4} = -2 \qquad t_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ } ou \text{ } \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ \sin x = -2 \Rightarrow \nexists x \in R \end{cases}$$

Solução: $S = \left\{ x \in R \mid -x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ } ou \text{ } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right\}$.

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$\text{Como } \frac{\pi}{6} \text{ e } \frac{11\pi}{6} \text{ tem cosseno igual a } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ temos:}$$
$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$
$$ou$$
$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + \frac{2\pi}{6} + 2k\pi \Rightarrow x = \underbrace{\frac{13\pi}{6}}_{\text{Congruente a } \frac{\pi}{6}\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right)} + 2k\pi \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

Solução: $S = \left\{ x \in R \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ } ou \text{ } x = \frac{\pi}{6} + 2k \right\}$.

Figura 17 – Utilizando o intervalo do círculo trigonométrico para resolver equações envolvendo seno e cosseno

Definição 30 (Equação linear) *Denomina-se "equação linear" toda equação que pode ser escrita na forma geral:*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_nx_n = b$$

Onde:

- $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ *são as incógnitas;*
- $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ *são os coeficientes das incógnitas;*
- b *é o termo independente.*

Definição 31 (Sistema Linear) *Denomina-se "sistema linear" todo conjunto com* ***m*** *equações lineares com* ***n*** *incógnitas. Estes sistema é classificado como $m \times n$, e pode ser escrito na forma genérica:*

$$\begin{cases} a_{11}x_{11} + a_{12}x_{12} + a_{13}x_{13} + \cdots + a_{1n}x_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_{21} + a_{22}x_{22} + a_{23}x_{23} + \cdots + a_{2n}x_{2n} = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_{m1} + a_{m2}x_{m2} + a_{m3}x_{m3} + \cdots + a_{mn}x_{mn} = b_m \end{cases}$$

Todo sistema linear pode ser classificado como:

- **Possível e determinado:** quando o sistema possui solução única;

- **Impossível:** quando o sistema não possui nenhuma solução;
- **Possível e indeterminado:** quando o sistema possui infinitas soluções.

A resolução dos sistemas lineares na forma $n \times n$ está diretamente ligado aos conceitos de matrizes. Cada equação é uma linha da matriz, com seus coeficientes como os elementos da linha.

O primeiro conceito envolvido é o de determinante, que permite classificar a matriz

- **Sistema possível e determinado:** o determinante da matriz é diferente de zero;
- **Sistema possível e indeterminado ou sistema impossível:** o determinante da matriz é igual a zero.

Com relação à resolução, a forma apresentada é utilizando o processo de escalonamento. Sendo A a matriz formada pelos coeficientes das equações de incógnitas $[x_1, x_2, x_3, \cdots x_n]$, e K a matriz do resultado de cada equação, teríamos a seguinte relação:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \\ \vdots \\ k_n \end{bmatrix} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & \cdots & a'_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & a'_{33} & \cdots & a'_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}}_{\textit{Sistema escalonado}} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k'_1 \\ k'_2 \\ k'_3 \\ \vdots \\ k'_n \end{bmatrix}$$

Onde $a_{nn}x_n = k_n$ é o primeiro resultado, e cada uma das linhas acima seria encontrado a partir dos resultados das linhas abaixo. Observando ainda a matriz escalonada:

- **Sistema possível e determinado:** se $a_n n \neq 0$;
- **Sistema possível e indeterminado:** se $a_n n = 0$ e $k_n = 0$;
- **Sistema impossível** se $a_n n = 0$ e $k_n \neq 0$;

O 3º Ano encerra o ciclo de equações do ensino básico com as equações polinomiais. Após a definição de números complexos, o estudo dos polinômios é retomado. Agora admitindo as raízes complexas como parte integrante das soluções das equações.

Nesse nível ainda não são discutidos os métodos resolutivos para equações genéricas de grau n. As definições e propriedades apresentadas são utilizadas para trabalhar com casos particulares. Assim, para iniciar o processo de resolução, sempre é dada uma raiz, complexa ou não, como ponto de partida.

A seguir, temos a parte teórica desse estudo.

Definição 32 (Polinômio na variável complexa x) *Uma expressão algébrica é classificada como polinômio na variável complexa x quando assume a forma:*

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Onde:

- $\{a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0\} \subset \mathbb{C}$, *e* $a_n \neq 0$, *são chamados coeficientes do polinômio;*
- a_0 *é chamado de coeficiente independente;*
- $\{n, n-1, n-2, \cdots, 0\} \subset \mathbb{N}$, *e* n *define o grau do polinômio;*
- $\{x_n, x_{n-1}, \cdots, x_0\} \subset \mathbb{C}$.

Definição 33 (Valor numérico) *Dado um polinômio* $\boldsymbol{p}$, *definido por* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, *e um número* $\alpha \in \mathbb{C}$, *denomina-se "valor numérico do polinômio* p *em* α*", o valor obtido ao efetuar as operações indicadas após substituir a variável* x *pelo número* α.

Teorema 1 (Teorema do resto) *O resto da divisão de um polinômio* $f(x)$ *por um polinômio da forma* $x - \alpha$ *é igual a* $f(\alpha)$.

Definição 34 (Equação polinomial ou algébrica) *Uma equação polinomial ou algébrica é equação que pode ser escrita na forma* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, *com* $a_n \neq 0$.

Definição 35 (Função Polinomial) *Uma função polinomial é uma função* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, *tal que* $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$.

Definição 36 (Raiz de uma equação polinomial ou algébrica) *Denomina-se raiz da equação algébrica* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, *com* $a_n \neq 0$, *o valor* α *de* x, *tal que* $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$.

Definição 37 (Conjunto solução de uma equação polinomial ou algébrica) *Denomina-se conjunto solução de uma equação algébrica* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, *com* $a_n \neq 0$, *o conjunto* S, *formado por todas as raízes* $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *do polinômio.*

Teorema 2 (Teorema de D'Alembert) *Um polinômio* f *é divisível por* $x - \alpha$ *se, e somente se,* α *for raiz de* f.

Teorema 3 (Teorema Fundamental da Álgebra (TFO)) *Toda equação polinomial* $p(x) = 0$ *de grau* n $(n \geq 1)$ *possui pelo menos uma raiz complexa (real ou não).*

Teorema 4 (Decomposição em fatores de primeiro grau) *Seja* $p(x)$ *um polinômio de grau* n, $n \geqslant 1$, *dado por:* $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ *(com* $a_n \neq 0$*) pode ser decomposto num produto de* n *fatores de 1º grau.*

$$p(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3) \cdot \ldots \cdot (x - \alpha_n)$$

Onde $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n$ *são as raízes do polinômio* $p(x)$.

Como consequência desse teorema, definimos que:

Definição 38 (Quantidade de raízes de um polinômio p(x)) *Toda equação polinomial de grau* **n**, $n \geqslant 1$, *admite exatamente* **n** *raízes complexas.*

Definição 39 (Multiplicidade de uma raiz de um polinômio p(x)) *O número complexo* α *é uma raiz de multiplicidade* **m**, $(m \in \mathbb{N},\ m > 1)$ *do polinômio* $p(x) = 0$ *se a forma fatorada de* $p(x)$ *é:*

$$p(x) = \underbrace{(x-\alpha)\cdot(x-\alpha)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha)}_{\mathbf{m}\ fatores}\cdot q(x) = (x-\alpha)^m \cdot q(x)$$

Onde $q(x) \neq 0$.

Definição 40 (Relações de Girard) *Para equações polinomiais de grau* n, *de raízes* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *temos:*

- *A soma das* n *raízes é:*

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$$

- *A soma dos produtos das raízes, quando tomadas duas a duas, é:*

$$x_1x_2 + x_1x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

- *A soma dos produtos das raízes, quando tomadas três a três, é:*

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \cdots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_{n-3}}{a_n}$$

- *A soma dos produtos das raízes, quando tomadas quatro a quatro, é:*

$$x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2x_3x_5 + \cdots + x_{n-3}x_{n-2}x_{n-1}x_n = \frac{a_{n-4}}{a_n}$$

$\vdots$

- *O produto das* n *raízes é:*

$$x_1x_2\cdot\cdots\cdot x_n = (-1)^n\frac{a_0}{a_n}$$

Teorema 5 (Raízes racionais de uma equação polinomial) *Se o número racional* $\frac{p}{q}$, *com* $\boldsymbol{p}$ *e* $\boldsymbol{q}$ *primos entre si, é uma raiz da equação algébrica* $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$, *onde* $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0 \in \mathbb{Z}$, *e então* $\boldsymbol{p}$ *divide* a_0 *e* $\boldsymbol{q}$ *divide* a_n.

Teorema 6 (Raízes complexas de uma equação polinomial) *Se um número complexo $z = a + bi$, com $b \neq 0$, é raiz de uma equação polinomial com coeficientes reais, então seu conjugado $z = a - bi$ também é raiz dessa equação.*

O trabalho com equações polinomiais se baseiam na utilização das definições e teoremas, apenas como exercícios de fixação. Não existem propostas para a resolução de equações que não se enquadram em um desses princípios.

4 OS NÚMEROS REAIS

Como vimos, o estudo das equações na educação básica tem como foco a resolução para se encontrar as suas raízes. As resoluções sempre estão associadas com os conjuntos numéricos, tendo como foco, a partir do 8º ano do E.F. II, as chamadas *raízes reais*, que são facilmente encontradas utilizando as fórmulas resolutivas. Mas o que é uma raiz real? O que é um número real?

Com as definições apresentadas no ensino básico, os números reais são apenas classificados como "*a união dos números racionais com os números irracionais*" e como "*um ponto na reta numérica*". Mas apenas essas duas definições são capazes de fazer com que o aluno entenda realmente o que é ser um número real?

O processo histórico nos mostra que a definição de número veio, basicamente, da necessidade de contar e medir. No processo de contagem, tanto números naturais quanto as representações dos racionais em forma de fração são de fácil entendimento pelos alunos. Esse fato se deve à capacidade de visualização.

Quando entramos na representação decimal, conseguimos trabalhar de forma semelhante, sendo a aplicação até duas casas decimais facilitada pelo sistema monetário, que trabalha com a questão dos centavos.

O problema está na representação de medidas de comprimento (ou distância), pois estas nem sempre são exatas. Um problema clássico, tratado desde a Grécia Antiga, é a medida da diagonal de um quadrado de lado unitário (1). Essa diagonal não pode ser expressa por um número inteiro, nem por uma fração. Em se tratando de uma figura formada por segmentos de reta, dizemos que esta diagonal é incomensurável com a unidade, ou qualquer subdivisão que possa ser feita com ela. Então, como expressar seu tamanho utilizando um número? Ou melhor, sua medida é representada por um número?

Os gregos conheciam essa medida, assim como várias outras relacionadas, mas não a chamavam de número. A classificação como um "*número real*" veio séculos mais tarde. E mesmo sem essa classificação, foram utilizados processos matemáticos para aproximá-la, bem como para a aproximação de outros números, como π.

Como o foco é a apresentação para o ensino básico, não vamos trabalhar com as definições que classificam os números reais em um *corpo ordenado completo*. Vamos usar uma forma mais sútil para definí-lo, utilizando a construção com base nas "*expressões decimais*", apresentada por Lima[18].

Uma *expressão decimal* é um símbolo da forma:

$$\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$

Onde a_0 é um número inteiro e $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ são *dígitos*, isto é, números inteiros tais que $0 \leqslant a_n \leqslant 9$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, tem se um dígito a_n, chamado o *n-ésimo dígito* da expressão decimal α. O número a_0 chama-se a *parte inteira* de α.

Utilizando a notação em fração decimal, definimos o *número real* α como sendo a expressão decimal:

$$\alpha = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n} + \cdots$$

As reticências no final indicam que a soma é infinita, pois um número pode ter uma quantidade infinita de dígitos decimais. Contudo, essa soma infinita também tem o significado de que o número real α, pode ser aproximado pelo número racional:

$$\alpha_n = a_0 + \frac{a_1}{10^1} + \frac{a_2}{10^2} + \cdots + \frac{a_n}{10^n}$$

Com erro máximo dependendo da quantidade de casas decimais adotadas, sendo representado por: $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$.

Então, temos que:

- $\alpha_0 = a_0 \leqslant \alpha$
- $\alpha_1 = a_0 + \dfrac{a_1}{10} \leqslant \alpha$
- $\alpha_2 = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} \leqslant \alpha$

  $\vdots$
- $\alpha_n = a_0 + \dfrac{a_1}{10} + \dfrac{a_2}{10^2} + \dfrac{a_n}{10^n} \leqslant \alpha$

Ou seja, a sequência de números racionais $\alpha_0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \alpha_3 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n \leqslant \cdots$ são valores (cada vez mais) aproximados do número real α. Temos então que $0 \leqslant \alpha - \alpha_n \leqslant 10^{-n}$.

Seguindo essas características, podemos fazer a seguinte definição do conjunto dos números reais:

i) Um número real α é um número com uma parte inteira separada por vírgula de uma parte decimal infinita: $\alpha = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$, onde $\alpha \in \mathbb{Z}$ e $0 \leqslant a_n \leqslant 9$;

ii) Um número real pode ser definido como:

  a) **Inteiro:** Um número real é chamado de inteiro quando $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots = 0 \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}^*$;

  b) **Decimal exato:** Um número real é chamado de decimal exato quando dados $n, k \in \mathbb{N}^*$, existe algum $a_n \neq 0$ e $a_k = 0 \; \forall \; k > n$.

  c) **Dízima:** Um número real é chamado de dízima quando:

  - Para cada dígito decimal temos que $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \neq 0 \;\; \forall \; n \in \mathbb{N}^*$ ou
  - Para cada sequência decimal $a_n a_{n+1} a_{n+2} \ldots a_{n+k} = 0$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}$, existe um dígito $a_{n+k+1} \neq 0$;

d) **Dízima periódica:** Uma dízima poderá ser classificada como "*periódica*" quando existir uma sequência decimal $a_i a_{i+1} a_{i+2} \dots, a_{i+k}$ com $i \in \mathbb{N}^*$ e $k \in \mathbb{N}$, tal que $(a_{i+k+1} = a_i, a_{i+k+2} = a_{i+1}, \dots, a_{i+2k} = a_{i+k}, a_{i+2k+1} = a_i, a_{i+2k+2} = a_{i+1}, \dots, a_{i+3k} = a_{i+k}, \dots)$. Esta sequência será chamada de período, e poderá ser representada com uma barra acima dela $(\overline{a_i a_{i+1} a_{i+2} \dots a_{i+k}})$;

4.1 A dízima periódica

Considerando o erro $\frac{1}{10^n} = 10^{-n}$, com n suficientemente grande, temos como transformar uma dízima periódica na sua representação decimal em uma representação na forma racional, através de operações com equação.

I - Quando o período da dízima começa no primeiro dígito decimal: Esse tipo de dízima periódica recebe o nome de *dízima periódica simples*

(1º) Fazemos a igualdade $x = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots$ (equação 4.1).

(2º) Multiplicamos a igualdade por 10^k, com $k \in N^*$, de forma que o primeiro período da dízima $a_1 a_2 \dots, a_k$ passe a integrar a parte inteira (equação 4.2).

(3º) Subtraímos a equação 1 da equação 2, resultando a equação 4.4:

(4º) Como por definição $a_{k+1} = a_1, a_{k+2} = a_2 \dots a_2 k = a_k, a_{2k+1} = a_1, a_{2k+2} = a_2 \dots a_3 k = a_k, \dots$, podemos escrever a equação 4.5;

(5º) Resolvemos a equação para encontrar a fração de x (equação 4.7)

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots \tag{4.1}$$

$$x \cdot 10^k = a_0 a_1 \dots a_k, a_{k+1} \dots a_n \dots \tag{4.2}$$

$$\begin{cases} x \cdot 10^k = a_0 a_1 \dots a_i a_{i+1} \dots, a_{i+k}, a_{k+1} \dots a_n \dots \\ - \quad x = \qquad a_0, a_1 a_2 a_3 a_4 \dots a_n \dots \end{cases} \tag{4.3}$$

$$x \cdot 10^k - x = (a_0 a_1 \dots a_k - a_0), (a_{k+1} - a_1) \dots (a_2 k - a_k) \dots \tag{4.4}$$

$$x \cdot 10^k - x = a_0 a_1 \dots a_k - a_0, 000000 \dots \tag{4.5}$$

$$x \cdot (10^k - 1) = a_0 a_1 \dots a_k - a_0 \tag{4.6}$$

$$x = \frac{a_0 a_1 \dots a_k - a_0}{10^k - 1} \tag{4.7}$$

Exemplos:

$$\begin{gathered} 0,3333\dots \\ x = 0,33333\dots \\ x \cdot 10^1 = 03,33333\dots \\ \begin{cases} 10x = 3,33333\dots \\ -\ x = 0,33333 \end{cases} \\ \hline 9x = 3,00000\dots \\ 9x = 3 \\ x = \frac{3}{9} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 0,434343\dots \\ x = 0,434343\dots \\ x \cdot 10^2 = 043,434343\dots \\ \begin{cases} 100x = 43,434343\dots \\ -\ x = \quad 0,434343 \end{cases} \\ \hline 99x = 43,00000\dots \\ 99x = 43 \\ x = \frac{43}{99} \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} 2,161616\dots \\ x = 2,161616\dots \\ x \cdot 10^2 = 216,161616\dots \\ \begin{cases} 100x = 216,161616\dots \\ -\ x = \quad 2,161616 \end{cases} \\ \hline 99x = 214,00000\dots \\ 99x = 214 \\ x = \frac{214}{99} \end{gathered}$$

Como podemos observar, a subtração $10^k - 1$ sempre resultará em uma sequência de k dígitos 9, portanto, podemos resumir a transformação de uma dízima periódica com período de k dígitos em $x = \dfrac{a_0a_1 \ldots a_k - a_0}{\underbrace{9 \ldots 9}_{k\text{vezes}}}$

II - Quando o período da dízima não começa no primeiro dígito decimal: Esse tipo de dízima periódica recebe o nome de *dízima periódica composta*

(1º) Fazemos a igualdade $x = a_0, a_1a_2a_3a_4 \ldots a_n \ldots$ (equação 4.8).

(2º) Multiplicamos a igualdade por 10^j, com $j \in N^*$, de forma que a sequência $a_1a_2 \ldots, a_j$, que não faz parte da dízima, passe a integrar a parte inteira, criando uma nova dízima periódica (equação 4.9).

(3º) Transformamos a nova dízima em fração (equação 4.10).

(4º) Resolvemos a equação para encontrar a fração de x (equação 4.12)

$$x = a_0, a_1a_2a_3a_4 \ldots a_n \ldots \tag{4.8}$$

$$x \cdot 10^j = b_0, b_1 \ldots b_n \ldots \tag{4.9}$$

$$x \cdot 10^j = \frac{b_0b_1 \ldots b_k - b_0}{\underbrace{9 \ldots 9}_{k\text{vezes}}} \tag{4.10}$$

$$x = \frac{b_0b_1 \ldots b_k - b_0}{\underbrace{9 \ldots 9}_{k\text{vezes}}} \cdot \frac{1}{10^j} \tag{4.11}$$

$$x = \frac{b_0b_1 \ldots b_k - b_0}{\underbrace{9 \ldots 9}_{k\text{vezes}} \cdot 10^j} \tag{4.12}$$

$$\tag{4.13}$$

Exemplos:

$$\begin{aligned} &0,4533\ldots \\ x \cdot 10^2 &= 45,33\ldots \\ 100x &= \frac{453-45}{9} \\ 100x &= \frac{408}{9} \\ x &= \frac{408}{9 \cdot 100} \\ x &= \frac{408}{900} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &1,04343\ldots \\ x \cdot 10^1 &= 10,4343\ldots \\ 10x &= \frac{1043-10}{99} \\ 10x &= \frac{1033}{99} \\ x &= \frac{1033}{99 \cdot 10} \\ x &= \frac{1033}{990} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &5,3796161\ldots \\ x \cdot 10^3 &= 5379,6161\ldots \\ 1000x &= \frac{537961-5379}{99} \\ 1000x &= \frac{532582}{99}\ldots \\ x &= \frac{532582}{99 \cdot 1000} \\ x &= \frac{532582}{99000} \end{aligned}$$

4.2 A aproximação de números reais

Vamos transformar a dízima periódica $0,999\ldots$ em fração.

$$0,99999\ldots = \frac{9}{9} = 1$$

Esta dízima está tão próxima de 1, que o processo de transformação em fração tem como resultado tendencioso $0,9999\ldots = 1$, o que a torna um ponto de observação importante para os alunos acerca do que é uma aproximação.

Pensando em suas variantes $(0,0\overline{9} = 0,1; 0,00\overline{9} = 0,01; 0,00\overline{9} = 0,001; \ldots)$, podemos facilmente concluir que qualquer número real, na forma de inteiro ou decimal exato, pode ser escrito como uma aproximação de uma dízima periódica com período igual a 9. Para fazê-lo, basta somente transformá-lo em uma soma conveniente.

$$\begin{array}{ccc} 5 = 4+1 & 2,63 = 2,62+0,01 & -8,5 = -(8,49+0,01) \\ 5 = 4+0,999\ldots & 2,63 = 2,62+0,0099\ldots & -8,5 = -(8,49+0,0099\ldots) \\ 5 = 4,999\ldots & 2,63 = 2,62999\ldots & -8,5 = -8,4999\ldots) \end{array}$$

Quando o número real é uma dízima periódica, podemos realizar sua aproximação de forma mais "fácil", pois conhecemos todos os algarismos que a compõe, assim como conhecemos também a posição decimal de cada um.

Quando partimos para os números irracionais, encontramos a barreira do desconhecido. Como eles não possuem um padrão, sua aproximação é feita tendo como referência os números racionais que a cercam, através do método de demonstração por exaustão (que não é apresentado com esse nome), utilizando o princípio de falta e execesso. A base do processo se dá com o avanço de casa por casa, aonde cada uma depende do encontro da anterior.

A menção desse processo se dá uma única vez ao inserir o conjunto dos números irracionais, sendo aplicado de forma rápida na aproximação de algumas raízes quadradas. Depois ele é deixado de lado, sem nenhum outro comentário sobre a utilização na aproximação dos outros números irracionais.

5 AS PLANILHAS ELETRÔNICAS

No final do período do ensino fundamental 1 ($4^{\underline{o}}$ e $5^{\underline{o}}$ ano) o aluno começa a lidar com as informações apresentadas em gráficos e tabelas, sempre associadas com o tópico "tratamento de informações", aprendendo a organizar e montar uma tabela com dados e desenhar o gráfico que a representa, geralmente o gráfico de barras verticais.

Com o avanço das etapas, o aluno vai aprendendo a construir outros tipos de tabela e outros tipos de gráficos (barras horizontais, barras múltiplas, linha, pictograma, pizza, entre outros), para representar os mais variados tipos de informação. E, em determinado momento, as tabelas começam a ser vinculadas a cálculos matemáticos, pois uma das colunas precisa ser calculada de acordo com os valores de outra(s).

Essas tabelas passam a ser mais utilizadas quando o aluno inicia o estudo sobre "expressões algébricas", em particular no estudo do seu "valor numérico". O valor numérico de uma expressão aparece quando precisamos substituir todas as letras da expressão por números preestabelecidos. Nesse momento, os exercícios sempre sugerem que as informações sejam organizadas em tabelas, contendo uma coluna para a expressão, uma coluna para cada letra e uma coluna para o resultado.

Quando esse conteúdo é vinculado ao conteúdo "*equações* e "*plano cartesiano*" , as expressões algébricas passam a ter apenas duas incógnitas, onde uma depende do valor escolhido para a outra. O plano cartesiano é associado a essas incógnitas, onde cada eixo representa uma delas. Por padrão, o eixo horizontal é sempre a incógnita dominante e o eixo vertical a incógnita dependente.

Um exemplo clássico utilizado com os alunos no estudo de expressões algébricas é o cálculo do lucro na venda de determinado produto, levando-se em consideração o seu custo de produção, o valor de venda e a quantidade vendida. Nesse exemplo, além da organização dos dados em tabela, o aluno também aprende a visualizar e tirar informações de gráficos.

Criar tabelas e gráficos utilizando apenas folha, régua e compasso é um recurso bastante útil em sala de aula para compreender o processo. Infelizmente esse processo começa a se tornar inviável para grandes quantidades de informação ou para cálculos complexos. Em relação aos cálculos, eles acabam tornando o trabalho cansativo, pois exigem muitas repetições do mesmo processo.

Com a evolução das tecnologias e inovações das ferramentas de cálculo, os livros didáticos já trazem para o professor sugestões de onde e quando utilizá-las. Sempre iniciando pela calculadora, ao se aprender o conceito de potenciação como expoente natural e expressões numéricas, como podemos ver no sumário da figura 18.

SUMÁRIO

Figura 18 – Sumário do livro A conquista da Matemática - 6º Ano.

Após a sua popularização, o computador se tornou um grande aliado da educação matemática, pois permite realizar cálculos com maior precisão do que as calculadoras convencionais. Além de permitir trabalhar com a construção ou a utilização de fórmulas já inseridas na máquina. A utilização desse recurso também já é recomendada nos próprios livros didáticos, como vemos na figura 19.

Figura 19 – Sumário do livro A conquista da Matemática - 6º Ano.

O programa sugerido neste caso é a *planilha eletrônica*.

Uma planilha eletrônica é um programa para computador (e atualmente disponibilizado também para tablets e smartphones), baseado no processo de construção de tabelas.

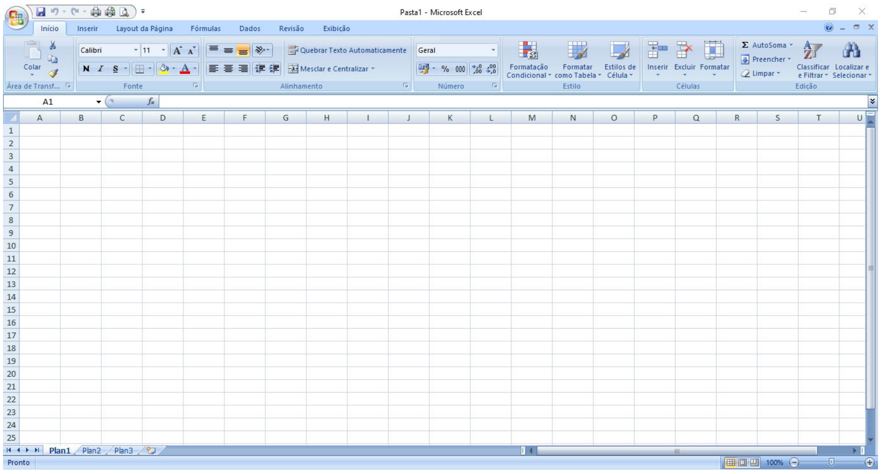
Tecnicamente, ele é uma grande tabela, onde suas linhas e colunas são referenciadas por números e letras, respectivamente. Talvez surja a dúvida: por que ter um programa de planilha eletrônica se eu posso criar a tabela em um editor de texto, que vai me servir para dois trabalhos ao invés de um só?

A resposta é simples: os programas de planilhas eletrônicas permitem a criação de fórmulas para cálculos dinâmicos. Assim, podemos dispensar o uso da calculadora e ainda ganhamos a facilidade do cálculo ser feito de forma automática, logo após os valores serem digitados.

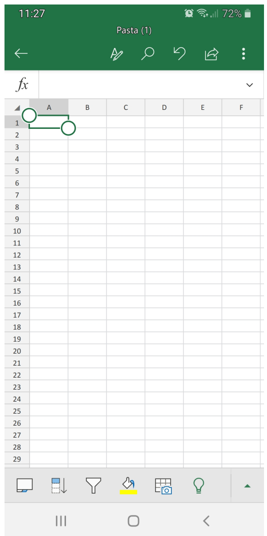
As planilhas eletrônicas, junto com os programas de edição de texto e de criação de apresentações, receberam a classificação de "*ferramentas de escritório*", visto que sua primeira utilização foi para organizar os dados e permitir a criação de controles para gerenciamento, tanto de pessoal quanto de produção. Esse fator sobre as planilhas eletrônicas foi o motivo da sua escolha para desenvolver esse trabalho, pois o aluno terá a oportunidade de associar os conceitos matemáticos com o mercado de trabalho.

Embora existam vários programas de planilhas eletrônicas, todos eles seguem um mesmo padrão. Por exemplo, as colunas são sempre referenciadas por letras, na ordem alfabética, e as linhas por números, inciando do 1; o encontro entre cada coluna e linha é chamado de "célula", que é referenciada pela letra da coluna seguida do número da linha, então a célula A1 é a primeira célula da planilha, pois é o encontro da primeira coluna com a primeira linha (figura 20). Os arquivos de planilhas eletrônicas são chamados de pastas, e cada pasta pode conter várias planilhas. Com essa organização, em um único arquivo podem ser construídas várias planilhas, incluindo a possibilidade de uma delas fazer referência às informações das outras.

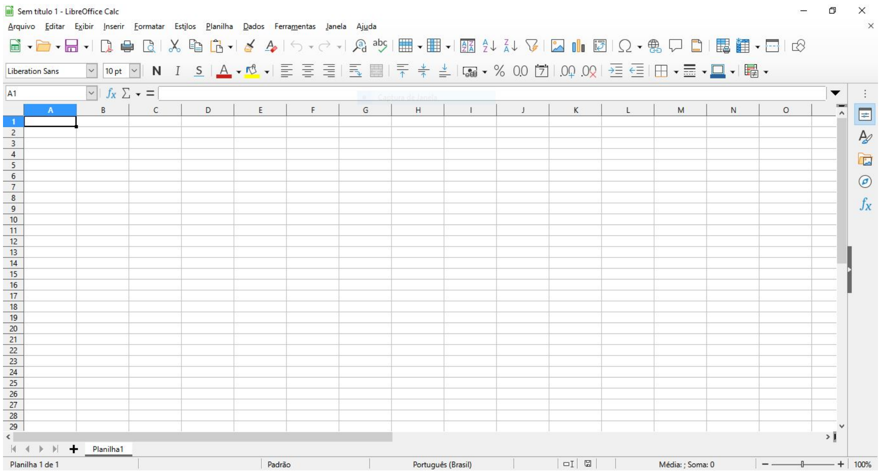
Cada célula pode ser configurada para um tipo de conteúdo específico, e o programa irá tratá-lo de acordo com a opção escolhida, que pode ser um número, uma data ou um texto. A primeira diferença de tratamento é na forma de apresentação, onde os números e datas são alinhados automaticamente à direita e os textos à esquerda. As outras diferenças estão nas opções de apresentação para números e datas. Os números podem ser presentados como inteiros ou decimais (escolhendo a quantidade de casas decimais apresentadas), fração, notação científica, moeda ou CEP.



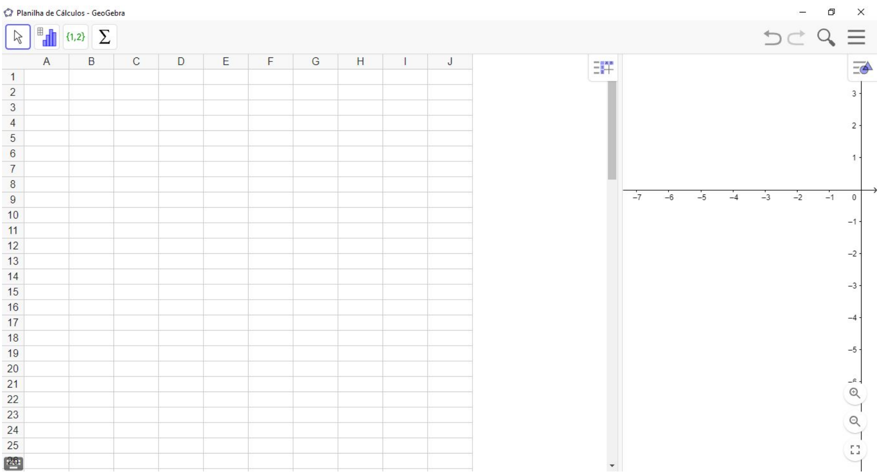
(a) Microsoft Excel para computador



(b) Microsoft Excel para smartphone e tablet



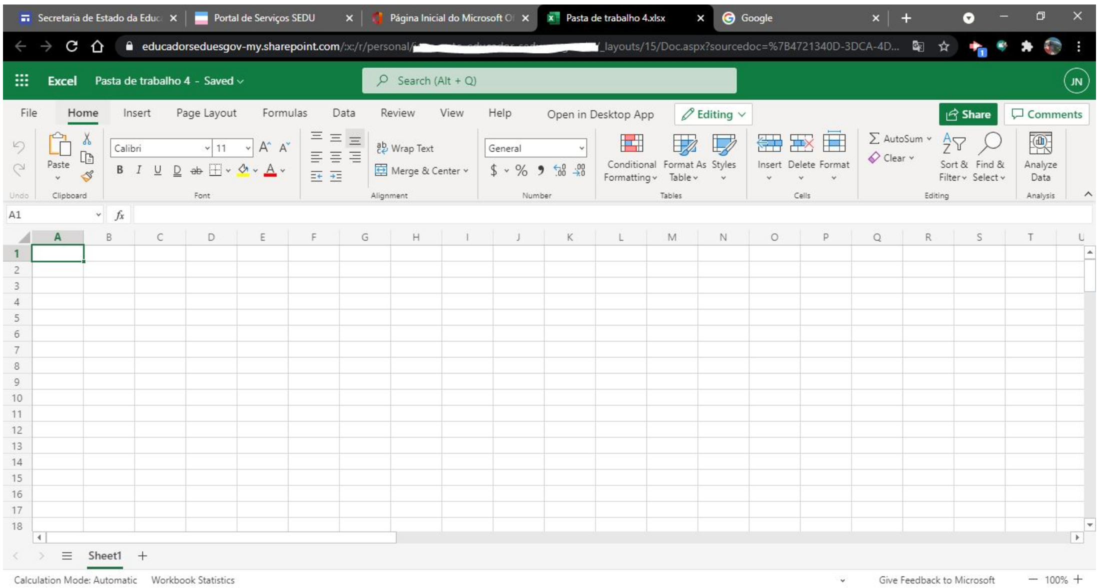
(c) LibreOffice Calc



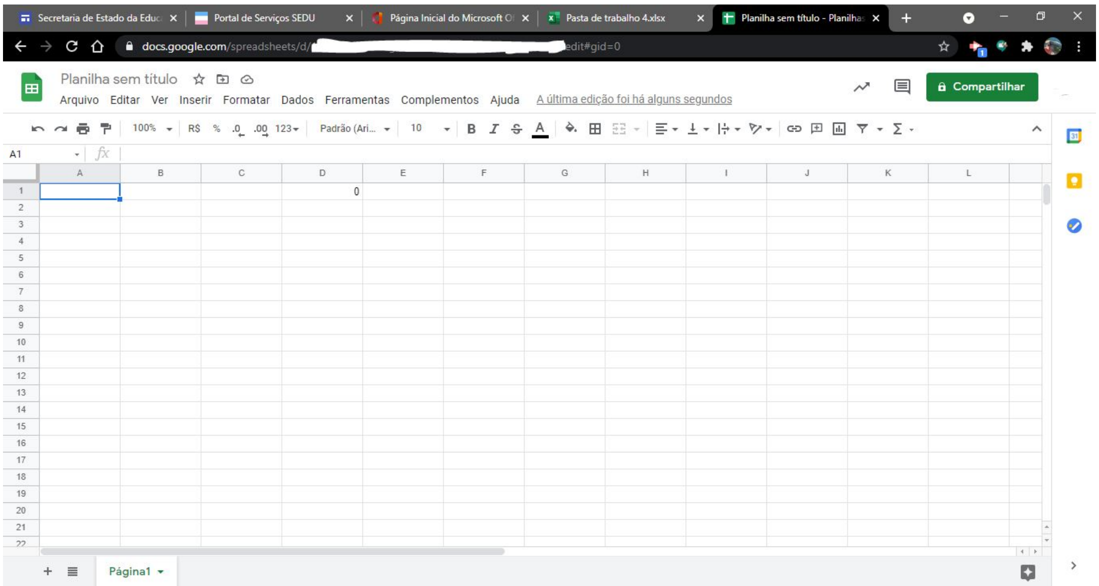
(d) Geogebra planilha

Figura 20 – Visão da estrutura de tabela de planilhas eletrônicas

Com o aumento dos serviços em nuvem, várias empresas, junto com a disponibilização do serviço de armazenamento, também disponibilizam versões dos seus programas de forma on-line, como é o caso da Microsoft com o Excel e da Google com o Planilhas (figura 21) .



(a) Microsoft Excel online



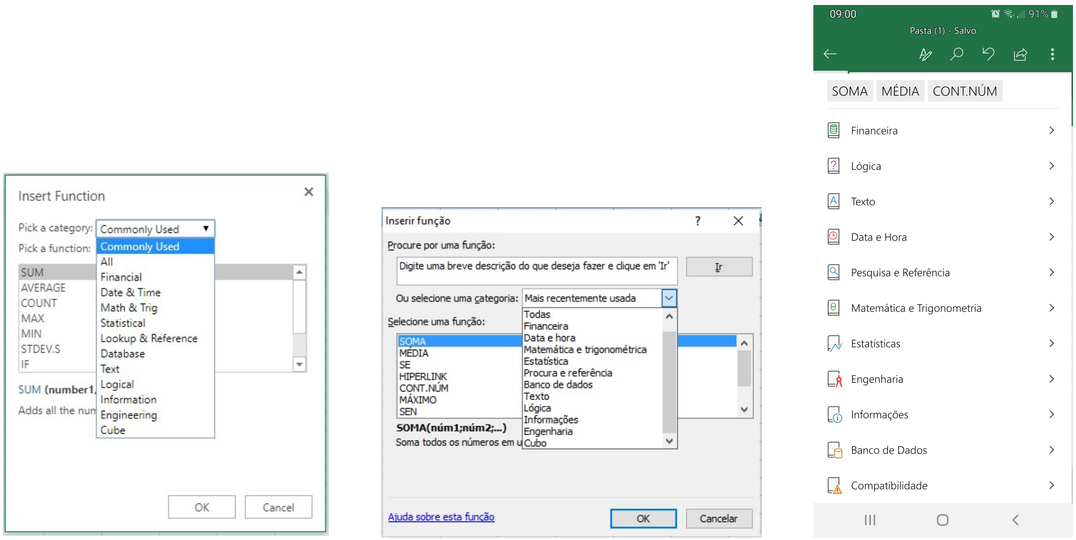
(b) Google Planilhas online

Figura 21 – Planilhas eletrônicas online

A menção dessas duas empresas deve-se aos convênios com o governo do estado Espírito Santo, que disponibiliza gratuitamente contas institucionais para professores e alunos, garantindo acesso aos programas sem a necessidade de comprar uma licença, bastando ter apenas, um acesso à internet.

5.1 Funções e operadores

Para cada tipo de conteúdo temos funções e operadores específicos e funções e operadores comuns a todos (Figura 22). Para este trabalho, focaremos nas funções e operadores[1] necessárias para a estruturação de expressões algébricas e montagens de equações (Tabela 4), que são as que podem ser utilizadas com o formato "número".



(a) Versão online **(b)** Versão desktop **(c)** Versão smartphone

Figura 22 – Menu com as funções disponíveis nos programa Excel

Tabela 4 – Operadores e funções necessárias

Operador / Função	Descrição
$	Fixador de coluna e linha (não permite alteração ao arrastar a célula)
+	Soma
-	Subtração
*	Multiplicação
/	Divisão
∧	Potência
=	Igualdade e indicador de início de fórmula quando é o primeiro caractere da célula
>	Maior
>=	Maior ou igual
<	Menor
<=	Menor ou igual
<>	Diferente
( )	Prioridade de cálculo
Raiz	Raiz quadrada
SE	Condicionante: teste, comando se verdadeiro, comando se falso
E	Condicionante: Todos os argumentos tem que ser verdadeiros

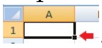
Operador / Função	Descrição
OU	Condicionante: Pelo menos um dos argumentos tem que ser verdadeiro
Soma / Sum	Soma todos os valores de uma lista de células
MULT	Multiplica os valores de uma lista de células
INT	Retorna a parte inteira de um número
ARRED	Arredonda um número com uma quantidade específica de casas decimais/
ABS	Valor absoluto de um número
PI()	Retorna o valor aproximado de π com 15 casas decimais
SEN	Seno
COS	Cosseno
TAN	Tangente
EXP	Potência de e
LOG	Logaritmo especificando a base
LOG10	Logaritmo na base 10
MATRIZ. DETERM	Determinante de uma matriz

Para indicar que a célula receberá uma operação ou uma função, iniciamos a digitação com "=", depois inserimos os comandos desejados.

[1] As funções e operadores estão listadas no idioma "Português (Brasil)", dependendo da versão utilizada, podem aparecer no idioma "Inglês (Estados Unidos)", cabendo ao professor a tradução durante a aula.

Uma observação importante é de que as planilhas eletrônicas só têm a função raiz quadrada. Neste caso, para calcularmos raízes com outros índices, os alunos precisam utilizar as definições básicas de potência e radiciação, usando potências com expoente fracionário para determinar raízes de índice “n”, quando necessário.

Antes de passarmos para a construção das fórmulas propriamente ditas, convém deixar que os alunos se adaptem ao ambiente, experimentando informalmente as funções e outros recursos.

Vale a pena destacar o recurso de “arrastar” o conteúdo de uma célula pelo canto inferior direito , para que o aluno veja a distinção entre o que acontece com diferentes tipos de conteúdos: copiar, criar uma sequência ou transportar uma fórmula, mudando a referência após “=”.

5.2 Construindo fórmulas

Após a apresentação dos comandos, o próximo passo é aprender a utilizá-los. Aqui apresentamos um outro ambiente ao aluno, a barra de fórmulas, que é parte digitável depois de "fx"(ver figura 20). Esse espaço serve para melhorar a visualização do que é digitado na célula, facilitando a correção de textos e fórmulas.

A construção de fórmulas é uma parte integrante do conhecimento matemático. Ao trazer este conceito para dentro do ambiente das planilhas, podemos avançar no conceito sobre expressões algébricas. Nesse novo ambiente, as incógnitas ou variáveis não são mais representadas pela forma padrão, onde utilizamos letras. Agora elas são representadas pelas células da planilha; então, eles têm de compreender que ao invés de utilizar x ou y (as mais comuns), têm de utilizar as referências **A1**, **B3**, **D5**.

Para iniciar o contato com as planilhas eletrônicas, todos trabalharão com o mesmo padrão de operações (tabela 5).

Tabela 5 – Cabeçalho da primeira planilha para construção de fórmulas básicas

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
1	x	y	x + y	y - 2x	(y - 2)x	x^2	raiz quadrada de x	raiz cúbica de y	x elevado a y

E uma lista de valores prefixado (tabela 6), para que depois possamos comparar os resultados e corrigir os erros individuais.

Nesta situação, os alunos tentaram digitar a fração apenas fazendo "1/8"e "1/3". Por definição, o Excel entende como data, e apresentará "1/agosto"e "1/março"e não vai mostrar a fração. Para resolver esse problema, ou o aluno trabalha com a definição "toda fração representa uma divisão entre dois inteiros", que deve ser feita digitando "=1/8"e "=1/3", e trabalhando com a representação decimal, ou o aluno coloca a célula no formato "fração",

Tabela 6 – Valores utilizados como exemplos para construção das fórmulas básicas

	A	**B**
1	x	y
2	-2	- 8
3	0	- 5
4	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$
5	2	8

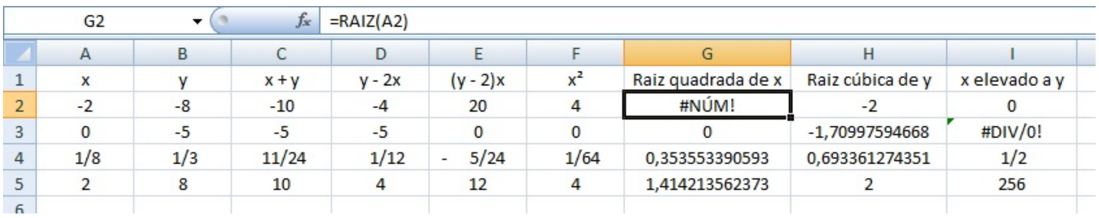
bem como as células onde as fórmulas estão inseridas, para que o resultado siga o mesmo modelo.

O formato fração tem alguns modelos pré-estabelecidos e, como padrão, permite a escrita de frações com no máximo 3 algarismos no numerador e 3 algarismos no denominador, para aumentar a quantidade de algarismos, precisamos criar um formato "personalizado"a partir do modelo de fração, aumentando a quantidade de casas decimais.

As fórmulas utilizadas estão descritas na tabela 7, com os resultados apresentados na figura 23.

Tabela 7 – Construção das fórmulas básicas

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**
1	x	y	x + y	y - 2x	(y - 2)x	x^2	raiz quadrada de x	raiz cúbica de y	x elevado a y
2	- 2	- 8	= A2 + B2	= B2 - 2*A2	= (B2 - 2)*A2	$A2^2$	= RAIZ(A2)	= B2^(1/3)	= A2^B2



G2 | =RAIZ(A2)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	y	x + y	y - 2x	(y - 2)x	x²	Raiz quadrada de x	Raiz cúbica de y	x elevado a y
2	-2	-8	-10	-4	20	4	#NÚM!	-2	0
3	0	-5	-5	-5	0	0	0	-1,70997594668	#DIV/0!
4	1/8	1/3	11/24	1/12	- 5/24	1/64	0,353553390593	0,693361274351	1/2
5	2	8	10	4	12	4	1,414213562373	2	256
6									

Figura 23 – Primeira planilha com a construção das fórmulas básicas

Usando os resultados apresentados (figura 23), podemos discutir algumas mensagens de erro do Excel:

1. O erro #NUM! em G2 representa que o cálculo não é válido para o número específico, obtido ao tentar extrair a raiz quadrada de um número negativo;

2. O erro #DIV/0! em I3 representa uma divisão por zero, obtido ao tentar elevar 0 a um expoente negativo;

Os dois erros estão ligados aos domínios das operações.

Partindo dos erros encontrados, podemos trabalhar com o comando “SE”, com o comando “E” e com o comando “OU” para contorná-los. Para contornar o erro da raiz quadrada, devemos calcular apenas para números não negativos, então o pensamento seria

"Se for maior ou igual a zero eu calculo". Para contornar o erro da divisão por zero, se a base for 0, o expoente só pode ser positivo, mas se a base for diferente de 0, o cálculo procede, logo, "Se a base for 0 com expoente positivo ou a base for diferente de zero, eu calculo". A construção da fórmula nas colunas G e I passam a ser as da tabela 8 com os resultados da figura 24.

Tabela 8 – Contornando os erros com os comandos "SE", "E" e "OU"

	G	**I**
2	= SE(A2 >= 0; RAIZ(A2); "A raiz não é real")	= SE(OU(E(A2 = 0; B2 >= 0); A2 <> 0); A2^B2; "Divisão por zero")

G2 =SE(A2>=0;RAIZ(A2);"A raiz não é real")

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	x	y	x + y	y - 2x	(y - 2)x	x²	Raiz quadrada de x	Raiz cúbica de y	x elevado a y
2	-2	-8	-10	-4	20	4	A raiz não é real	-2	0
3	0	-5	-5	-5	0	0	0	-1,70997594668	Divisão por zero
4	1/8	1/3	11/24	1/12	- 5/24	1/64	0,353553390593	0,6933612743506	1/2
5	2	8	10	4	12	4	1,414213562373	2	256
6									

Figura 24 – Resultado com o tratamento dos erros com os comandos "SE", "E" e "OU"

Em uma outra planilha construiremos a tabela trigonométrica dos ângulos notáveis, para podermos compreender como o Excel trabalha com as fórmulas trigonométricas. O cabeçalho e as fórmulas estão descritas na tabela 9, e a planilha com a tabela completa na figura 25.

Tabela 9 – Utilização das fórmulas trigonométricas

	A	**B**	**C**	**D**
1	Ângulo	Seno	Cosseno	Tangente
2	0	= SEN(A2)	= COS(A2)	= TAN(A2)

B2 =SEN(A2)

	A	B	C	D
1	**Ângulo**	**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
2	**0**	0	1	0
3	**30**	-0,988031624	0,15425145	-6,405331197
4	**45**	0,850903525	0,525321989	1,619775191
5	**60**	-0,304810621	-0,95241298	0,320040389
6	**90**	0,893996664	-0,448073616	-1,995200412

Figura 25 – Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

Pelo resultado, podemos observar que, com exceção do 0, os outros valores estão "errados". Isso porque o Excel não tem formato para ângulos, então o cálculo é realizado com os valores em radianos. Para que o valor se aproxime do original, precisamos utilizar a função PI() e escrever os ângulos na forma de radianos (tabela 10), obtendo os resultados na figura 26.

Tabela 10 – Ângulos utilizados nas fórmulas trigonométricas

	B
1	Ângulo
2	Radiano
3	0
4	=PI()/6
5	=PI()/4
6	=PI()/3
7	=PI()/2

A1 fx Ângulo

	A	B	C	D	E
1	**Ângulo**		**Seno**	**Cosseno**	**Tangente**
2	**Grau**	**Radiano**			
3	**0**	**0**	0	1	0
4	**30**	**0,52359877560**	0,5	0,866025404	0,577350269
5	**45**	**0,78539816340**	0,707106781	0,707106781	1
6	**60**	**1,04719755120**	0,866025404	0,5	1,732050808
7	**90**	**1,57079632679**	1	0,0000000000	16324552277619100

Figura 26 – Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis com adaptação para radianos

Neste exemplo vemos o erro provocado pelas limitações do programa, pois sabemos que $\tan 90$ž não existe, mas ele aproxima o valor com base na quantidade de casas decimais de π programadas.

O último exemplo é inserir pontos dentro de um intervalo $[a, b]$, definindo a quantidade de pontos i, fornecendo o espaçamento[2] $h = \frac{b-a}{i+1}$, usando a fórmula $x_n = x_{n-1} + h$, com $1 \leq n \leq i$, conforme esquema apresentado na tabela 11, gerando a tabela da figura 27.

Para isso, vamos utilizar uma funcionalidade que é a de adaptação da fórmula ao arrastá-la para células adjacentes ou copiá-las para outras células. Por exemplo, se na célula A2 você digita a fórmula "=A1$_2$"e a arrasta para a célula B2, automaticamente ele escreverá a fórmula "=B1$_2$",; se arrasta para a célula A3, escreverá "= A2$_2$, e se copia para a célula K30, escreverá "=K29$_2$". Em alguns casos, quando uma célula for usada como referência constante, ela é escrita com $ antes da coluna e antes da linha que será fixada, sendo escrita dessa forma $A$3.

Tabela 11 – Inserção de pontos em um intervalo

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**
1	a =			b =			i =			h =	= (E1-B1) / (H1 + 1)	
2	a	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	b
3	= B1	= A3 + $K$1	= B3 + $K$1	= C3 + $K$1	= D3 + $K$1	= E3 + $K$1	= F3 + $K$1	= G3 + $K$1	= H3 + $K$1	= I3 + $K$1	= J3 + $K$1	= K3 + $K$1

2 Devemos lembrar aos aluno que utilizaremos $i+1$ para criá-lo pois temos que considerar as extremidades do intervalo, sendo a o ponto 0 e b o ponto 11.

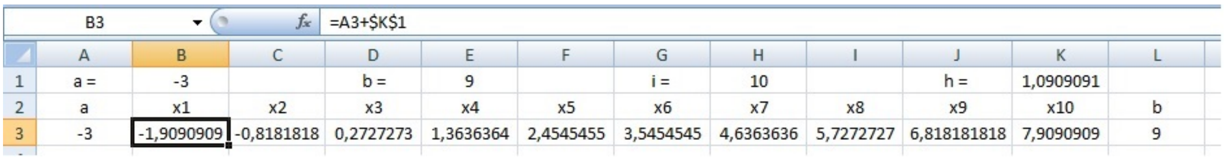


Figura 27 – Tabela trigonométrica dos ângulos notáveis

5.3 Inserindo gráficos

O gráfico é um recurso muito aplicado em várias áreas da matemática, principalmente no que diz respeito ao tratamento de informações, sendo utilizado para transformar uma apresentação puramente numérica em uma apresentação visual, propiciando uma visualização mais rápida da variação de valores. Os programas de planilha eletrônica já têm vários modelos de gráficos para serem utilizados, e podem ser vinculados a qualquer planilha da pasta de trabalho, ou seja, o gráfico não precisa estar na mesma planilha dos dados. Além disso, podemos ter vários dados no mesmo gráfico, possibilitando a comparação entre eles de forma mais simples.

A construção gráfica também é um tópico de suma importância para o estudo das equações, pois permite a visualização do comportamento dos resultados à medida que os valores da incógnita aumentam ou diminuem. Para trabalhar com os gráficos, faremos uma tabela utilizando as funções LOG10 e EXP de x no intervalo $[-5, 5]$, dividindo o intervalo em 20 pontos. Como o intervalo é longo, produziremos a tabela com o intervalo na vertical.

Para inserir um gráfico, vamos ao menu Inserir $\rightarrow$ Gráfico, e selecionamos o gráfico adequado para apresentar os nossos dados. Inicialmente, utilizaremos o gráfico de linhas com marcadores (Figura 28).

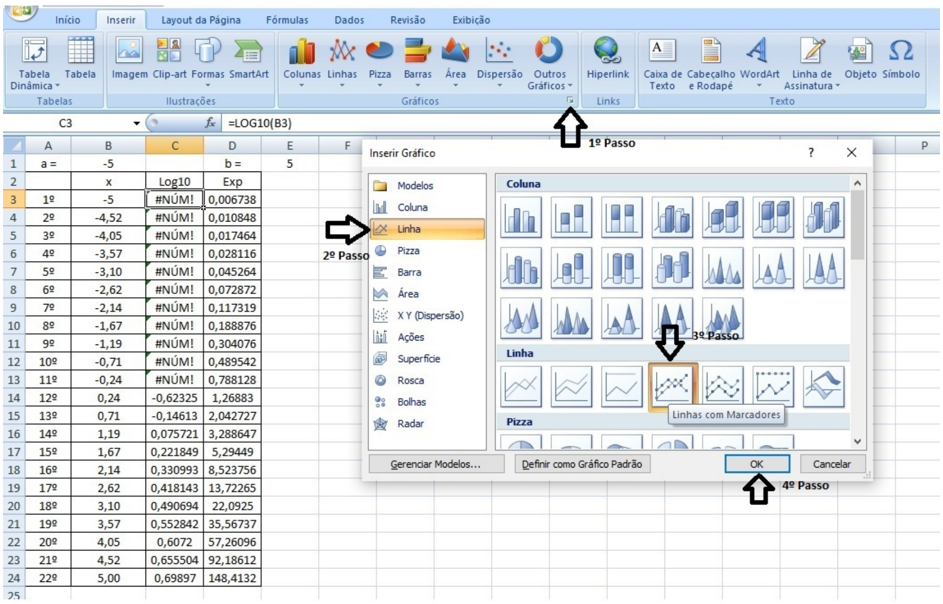
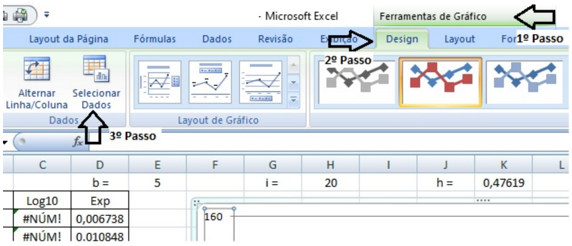


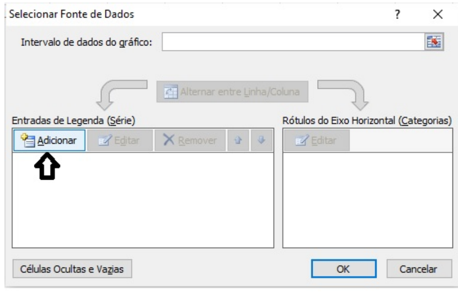
Figura 28 – Inserindo gráfico

Criaremos um ambiente gráfico vazio, se não tiver informações na planilha, ou um gráfico com valores que o próprio programa escolherá; para mudar esses valores, selecionamos o gráfico inserido, e no menu de "ferramentas de gráfico", vamos na aba "Design"e na opção "Selecionar Dados"(Figura 29a). Na caixa de diálogo que irá abrir, apagamos as informações da opção "Intervalo de dados". Automaticamente as informações da "Entrada de Legenda (séries)"e "Rótulos do eixo horizontal (Categorias)"serão apagados. Em seguida vamos clicar em "Adicionar"da "Entrada de Legenda (séries)"(Figura 29b). Na caixa de diálogo que abrir, em "Nome da série", selecionamos a célula com o nome "Log10", e em "Valores da série", selecionamos toda a coluna com os valores de LOG10 de x e clicamos em "OK"(figura 29c). Depois, em "Rótulos do eixo horizontal (Categorias)", clicamos em em "Editar"(Figura 29d), e no "Intervalo do rótulo do eixo"será selecionado todo o intervalo com os valores de x utilizados, e clicando em "OK"(figura 29e). Ao voltar para a tela inicial, faremos o mesmo procedimento para inserir os valores de EXP de x. Então, finalizamos um gráfico com as duas informações, o $\log x$ e e^x(Figura 30).

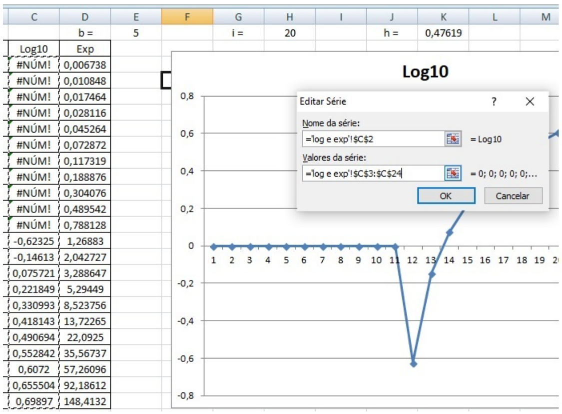
Para discutir os resultados, podemos inserir uma série de cada vez. Sobre o logaritmo, como não é definido para números negativos, a fórmula gerou o erro, mas o Excel associou os resultados a 0 no gráfico. Essa associação errada precisa ser explicada, caso esse gráfico tenha que ser apresentado. Sobre a exponencial, verifica-se facilmente que ela não assume resultados negativos, pois pelas propriedades de potências, o expoente negativo apenas inverte a fração da base.



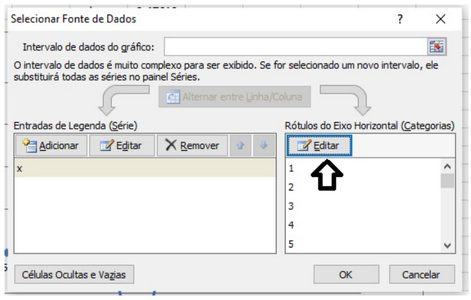
(a) Alterando as opções do gráfico



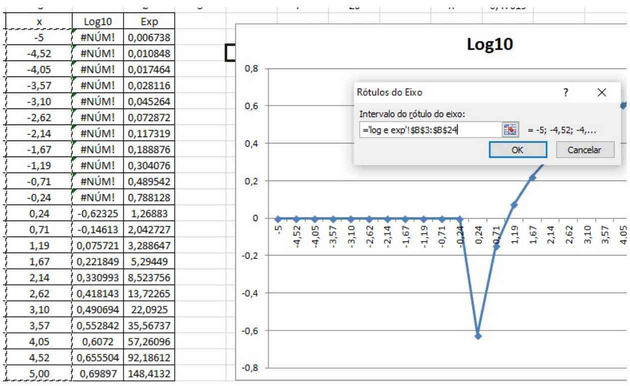
(b) Adicionando Séries



(c) Selecionando o nome o os valores da série



(d) Modificando o rótulo do eixo horizontal da série



(e) Selecionando os valores do rótulo do eixo horizontal da série

Figura 29 – Modificando as séries de dados do gráfico

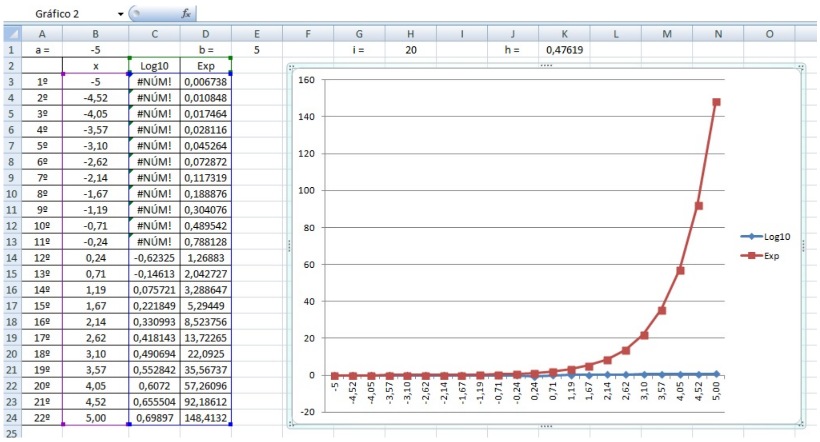


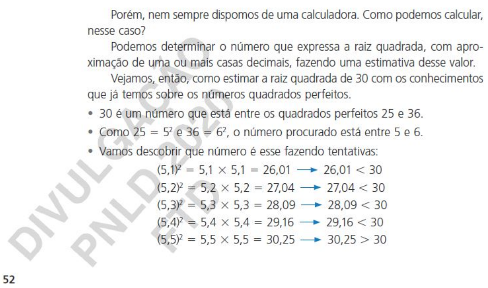
Figura 30 – Gráfico das equações $\log x$ e $\exp^x$

6 INTRODUÇÃO AOS MÉTODOS NUMÉRICOS PARA APROXIMAÇÃO DE RAÍZES REAIS

Nos cursos de graduação em matemática, uma das disciplinas que fazem parte do currículo é a de Cálculo Numérico. Nesta disciplina os alunos aprendem a resolver modelos matemáticos através da análise numérica ao invés da análise algébrica, utilizando vários métodos iterativos de aproximações para a solução dos modelos.

Com o avanço e popularização de recursos tecnológicos com alta capacidade de processamento, os estudos dos métodos de aproximação de raízes se tornaram mais práticos, onde o único trabalho seria escrever a programação correta para que a máquina fizesse a parte pesada dos cálculos. Existem vários programas que realizam essas análise numéricas de forma rápida, bastando apenas digitar a equação.

No contexto da educação básica, o aluno já aprende sobre o conceito de aproximação por falta e excesso ao estudar sobre raízes quadradas irracionais. Esse procedimento é mostrado com a aproximação feita por etapas, avançando uma casa decimal por vez, em sequência, até a precisão desejada, conforme mostra a figura 31.



Porém, nem sempre dispomos de uma calculadora. Como podemos calcular, nesse caso?

Podemos determinar o número que expressa a raiz quadrada, com aproximação de uma ou mais casas decimais, fazendo uma estimativa desse valor.

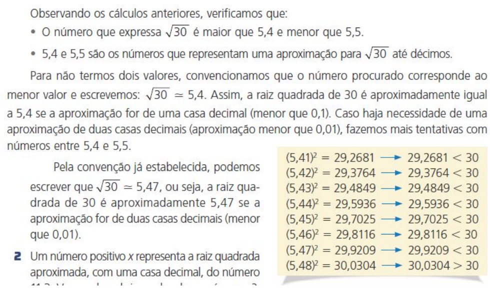
Vejamos, então, como estimar a raiz quadrada de 30 com os conhecimentos que já temos sobre os números quadrados perfeitos.

- 30 é um número que está entre os quadrados perfeitos 25 e 36.
- Como $25 = 5^2$ e $36 = 6^2$, o número procurado está entre 5 e 6.
- Vamos descobrir que número é esse fazendo tentativas:

$(5,1)^2 = 5,1 \times 5,1 = 26,01 \longrightarrow 26,01 < 30$
$(5,2)^2 = 5,2 \times 5,2 = 27,04 \longrightarrow 27,04 < 30$
$(5,3)^2 = 5,3 \times 5,3 = 28,09 \longrightarrow 28,09 < 30$
$(5,4)^2 = 5,4 \times 5,4 = 29,16 \longrightarrow 29,16 < 30$
$(5,5)^2 = 5,5 \times 5,5 = 30,25 \longrightarrow 30,25 > 30$

52

(a)



Observando os cálculos anteriores, verificamos que:

- O número que expressa $\sqrt{30}$ é maior que 5,4 e menor que 5,5.
- 5,4 e 5,5 são os números que representam uma aproximação para $\sqrt{30}$ até décimos.

Para não termos dois valores, convencionamos que o número procurado corresponde ao menor valor e escrevemos: $\sqrt{30} \simeq 5,4$. Assim, a raiz quadrada de 30 é aproximadamente igual a 5,4 se a aproximação for de uma casa decimal (menor que 0,1). Caso haja necessidade de uma aproximação de duas casas decimais (aproximação menor que 0,01), fazemos mais tentativas com números entre 5,4 e 5,5.

$(5,41)^2 = 29,2681 \longrightarrow 29,2681 < 30$
$(5,42)^2 = 29,3764 \longrightarrow 29,3764 < 30$
$(5,43)^2 = 29,4849 \longrightarrow 29,4849 < 30$
$(5,44)^2 = 29,5936 \longrightarrow 29,5936 < 30$
$(5,45)^2 = 29,7025 \longrightarrow 29,7025 < 30$
$(5,46)^2 = 29,8116 \longrightarrow 29,8116 < 30$
$(5,47)^2 = 29,9209 \longrightarrow 29,9209 < 30$
$(5,48)^2 = 30,0304 \longrightarrow 30,0304 > 30$

Pela convenção já estabelecida, podemos escrever que $\sqrt{30} \simeq 5,47$, ou seja, a raiz quadrada de 30 é aproximadamente 5,47 se a aproximação for de duas casas decimais (menor que 0,01).

2 Um número positivo x representa a raiz quadrada aproximada, com uma casa decimal, do número

(b)

Figura 31 – Apresentação do método de aproximação de raiz quadrada: livro A conquista da matemática, 8º Ano

Mesmo sem a definição formal, este método utiliza o conceito do erro de aproximação dos números reais na forma de fração decimal: $\dfrac{1}{10^n} = 10^{-n}$.

Com base nesse procedimento, e nas definições de Ruggioero e Lopes[19], podemos inserir o conceito dos métodos de aproximação, melhorando o procedimento apresentado nos livros didáticos e ampliando para equações polinomiais, logarítmicas, exponenciais e trigonométricas.

Embora faça parte do programa do 2º Ano do E.M., não trataremos dos métodos numéricos para sistemas lineares, pois a estrutura seria complexa demais para o ambiente das planilhas eletrônicas sem a utilização de uma programação via código interno, chamado de "*macro*".

6.1 Definição de Erro e Precisão

Para que possamos trabalhar com aproximações, devemos definir com os alunos alguns conceitos. Começando com o de precisão e erro. De acordo com a língua portuguesa do Brasil:

- **Erro:** Desacerto, engano;
- **Precisão:** 1. Necessidade, falta de alguma coisa indispensável, pobreza, urgência 2. Exatidão, rigor.

Em cálculo numérico, a precisão é representada por ϵ, e é o limite para o erro obtido com as aproximações. O erro pode ser encontrado de duas formas:

1. **Erro Absoluto (EA):** Definido como a diferença entre o valor exato de um número e seu valor aproximado $\bar{x}$.
$$EA_x = x - \bar{x}$$
2. **Erro Relativo (ER):** Definido como o erro absoluto dividido pelo valor aproximado $\bar{x}$.
$$ER_x = \frac{EA_x}{\bar{x}} = \frac{x - \bar{x}}{\overline{x}}$$

Então, por definição $EA \leq \epsilon$ e $ER \leq \epsilon$.

Como não conhecemos o valor real do zero da função, se $x \in [a, b]$, então podemos definir o erro E através do intervalo real $[a, b]$ definido, fazendo

$$E_x = |b - a| \leq \epsilon$$

Além disso, também temos que considerar que, se x for uma aproximação da raiz da equação, então $f(x)$ estará bem próxima de zero, logo, podemos definir que:

Definição 41 (Teste de parada) *O número real $x \in [a, b]$ é uma aproximação da raiz da função f com precisão ϵ se $|b - a| \leq \epsilon$ e $f(x) \leq \epsilon$*

6.2 Os métodos numéricos

Os métodos estudados serão os da *bissecção* e da *posição falsa*, que tem como princípio o **Teorema de Bolzano**[1], o qual gera a chamada *fase do isolamento*, pois produz o intervalo onde possivelmente a raiz está incluída.

Teorema 7 (Teorema de Bolzano) *Seja f(x) uma função contínua num intervalo [a, b]. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $x = c$ entre a e b tal que $f(c) = 0$.*

Demonstração 1 *Suponha $f(a) < 0 < f(b)$ e tome $a = a_0$ e $b = b_0$. Seja c_0 o ponto médio do segmento $[a_0, b_0]$. Desta forma temos que:*

$$f(c_0) < f(b_0) \text{ ou } f(c_0) \geq f(b_0)$$

Suponhamos $f(c_0) < 0$ (o pensamento é análogo para $f(c_0) \geq f(b_0)$ e façamos $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$, logo $f(a_1) < 0 < f(b_1)$. Seja c_1 o ponto médio do segmento $[a_1, b_1]$. Então temos que:

$$f(c_1) < f(b_1) \text{ ou } f(c_1) \geq f(b_1)$$

Seguindo essa linha de raciocínio, construímos uma sequência de intervalos encaixados da forma:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset ... \supset ... \supset [a_n, b_n] \supset ...$$

Pelo Teorema dos Intervalos Encaixantes[2]*, existe um único $\alpha \in R$ tal que $a_n \leq \alpha \leq b_n$ para todo $n \in N$. As sequências (a_n) e (b_n) convergem para α devido à maneira como foram construídas. Como por hipótese f é contínua, segue que:*

$$\lim_{n \to +\infty} f(a_n) = f(\alpha) \text{ e } \lim_{n \to -\infty} f(b_n) = f(\alpha)$$

Conclui-se que:

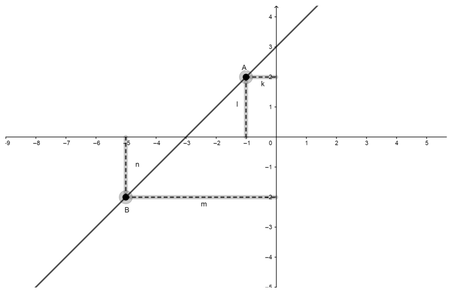
$$f(\alpha) \leq 0 \text{ e } f(\alpha) \geq 0$$

Portanto, $f(\alpha) = 0$.

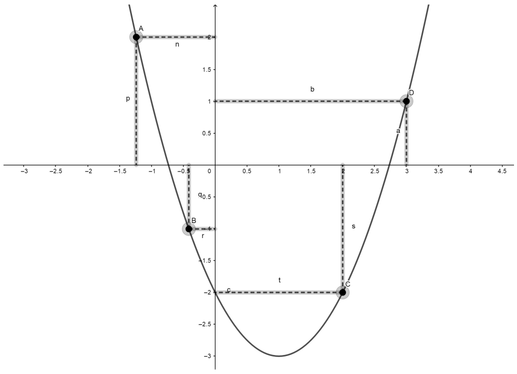
Essa demonstração para os alunos do ensino médio pode ser convertida em uma demonstração visual, visto que nesta etapa o raciocínio lógico ainda está em desenvolvimento.

[1] O teorema de Bolzano tem como base o Teorema do Valor Intermediário: Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a,b] e N um número qualquer entre *f(a)* e *f(b)*, em que *f(a)* ≠ *f(b)*. Então existe um número c em $(a,\ b)$ tal que *f(c)* = N

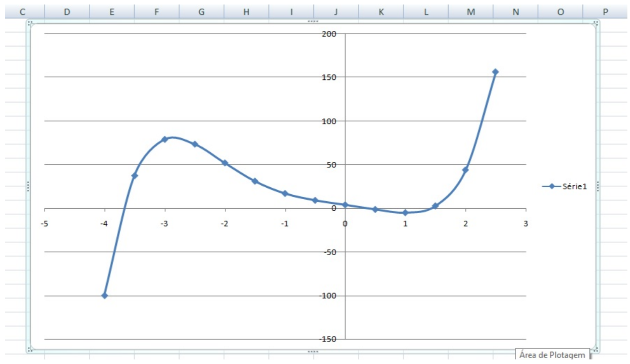
[2] Teorema dos Intervalos Encaixantes: Seja $I_1 \supset ... \supset ...I_n \supset I_{n+1} \supset ...$ uma sequência decrescente de intervalos fechados e limitados de $R, I_n = [a_n, b_n]$. Então existe $x \in \cap_{n \in N} I_n$.



(a) $f(x) = x + 3$



(b) $f(x) = x^2 - 2x - 2$



(c) $f(x) = x^5 + 3x^4 - 2x^3 - x^2 - 10x + 4$

Figura 32 – Demonstração visual do Teorema de Bolzano

6.2.1 Método da Bissecção

O método da bissecção é um dos métodos iterativos para se obter os zeros reais de uma função. Ele consiste em, após a escolha do intervalo inicial $[a, b]$ e a precisão ϵ desejada, realizar a redução do intervalo através da obtenção do ponto médio $\bar{x}$ do intervalo, até encontrar um intervalo $[a, b]$ onde $|b - a| < \epsilon$.

Para realizar esse processo, implementaremos os seguintes comandos:

- Escolher o intervalo inicial $[a, b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$.
- Encontrar $\bar{x}$, fazendo $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$
- Realizar os testes

$$Se f(a)f(\bar{x}) \begin{cases} > 0, \text{ então fazemos } a = \bar{x} \\ < 0, \text{ então fazemos } b = \bar{x} \\ = 0, \text{então } \bar{x} \text{ é a raiz procurada} \end{cases}$$

- Com o novo intervalo $[a, b]$, se $|b - a| < \epsilon$, escolhemos um $\bar{x}$ no intervalo como a raiz procurada.

6.2.1.1 Estudo da Convergência do método da Bissecção:

Estudar a convergência é verificar se os procedimentos adotados realmente se aproximam do resultado esperado ou não. Como vimos anteriormente, dado um intervalo inicial $[a, b]$, o método gera uma sequência de n intervalos tais que:

$$\begin{aligned}
b_1 - a_1 &= \frac{b-a}{2} \\
b_2 - a_2 &= \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{\frac{b-a}{2}}{2} = \frac{b-a}{2^2} \\
b_3 - a_3 &= \frac{b_2 - a_2}{2} = \frac{\frac{b-a}{2^2}}{2} = \frac{b-a}{2^3} \\
&\vdots \\
b_n - a_n &= \frac{b_{n-1} - a_{n-1}}{2} = \frac{\frac{b-a}{2^{n-1}}}{2} = \frac{b-a}{2^n} \\
b_n - a_n &= \frac{b-a}{2^n}, \ \forall \, n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

Como $n \to \infty$, podemos aplicar o limite nos dois lados da igualdade, ficando:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) &= \underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{2^n}}_{=0} \\
\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n &= 0 \\
\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n &= \alpha
\end{aligned}$$

Como $f(x)$ é contínua em $[a_n, b_n]$, então $f(a_n)f(b_n) \leq 0$, logo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} f(a_n)f(b_n) \leq 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(a_n) \cdot \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow f(\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot f(\lim_{n\to\infty} b_n) \leq 0
\end{aligned}$$

Como $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, então

$$f(\alpha) \cdot f(\alpha) \leq 0 \Rightarrow [f(\alpha)]^2 \leq 0 \Rightarrow f(\alpha) = 0$$

6.2.1.2 Quantidade de interações

A quantidade de iterações a serem efetuadas é uma das preocupações ao se realizar os testes numéricos. No método da bissecção, podemos realizar esta estimativa com base na própria relação entre os intervalos. Então, sendo $[a_0, b_0]$ o intervalo inicial, procuramos um intervalo $[a_n, b_n] \mid b_n - a_n \leq \epsilon$. Com relação a $[a_0, b_0]$ e $[a_n, b_n]$ temos que:

$$b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}, \ \forall \, n \in \mathbb{N}$$

Então, temos que:

$$\begin{aligned} b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n} &\Rightarrow \epsilon > \frac{b_0 - a_0}{2^n} \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2^n > \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \Rightarrow \log 2^n > \log \frac{b_0 - a_0}{\epsilon} \Rightarrow \\ &\Rightarrow n \log 2 > \log(b_0 - a_0) - \log \epsilon \Rightarrow \\ &\Rightarrow n > \frac{\log(b_0 - a_0) - \log \epsilon}{\log 2} \end{aligned}$$

Deste modo, para um intervalo $[a, b]$ qualquer, a quantidade de interações será $n > \frac{\log(b-a)-\log \epsilon}{\log 2}$.

Por exemplo, se escolhermos o intervalo $[-2, -1]$ com precisão $\epsilon = 10^{-5}$,

$$n > \frac{\log(b-a) - \log \epsilon}{\log 2} = \frac{\log(-1-(-2)) - \log 10^{-5}}{\log 2} = \frac{\log 1 - (-5)}{0,301} = \frac{5}{0,301} = 16,611$$

teremos, no mínimo, 17 iterações.

6.2.2 Método da Posição falsa

O método da posição falsa é semelhante ao método da bissecção. A diferença está no fato de, após a escolha do intervalo inicial $[a, b]$ e a precisão ϵ desejada, a redução do intervalo será através da obtenção da média ponderada $\bar{x}$ do intervalo, até encontrar um intervalo $[a, b]$ onde $|b - a| < \epsilon$.

Para realizar esse processo, implementaremos os seguintes comandos:

- Escolher o intervalo inicial $[a, b]$, tal que $f(a)f(b) < 0$.
- Encontrar $\bar{x}$, fazendo $\bar{x} = \frac{a_n|f(b_n)|+b_n|f(a_n)|}{|f(b_n)|+|f(a_n)|}$, quando $f(a_n)f(b_n) \geq 0 \,\forall\, a_n, b_n \in [a, b]$ ou $\bar{x} = \frac{a_n f(b_n) - b_n f(a_n)}{f(b_n) - f(a_n)}$, quando $f(a_n)f(b_n) < 0 \forall\, a_n, b_n \in [a, b]$.
- Realizar os testes

$$Sef(a)f(\bar{x}) \begin{cases} > 0, \text{ então fazemos } a = \bar{x} \\ < 0, \text{ então fazemos } b = \bar{x} \\ = 0, \text{então } \bar{x} \text{ é a raiz procurada} \end{cases}$$

- Com o novo intervalo $[a, b]$, se $|b - a| < \epsilon$, escolhemos um $\bar{x}$ no intervalo como a raiz procurada.

7 APLICANDO OS MÉTODOS NUMÉRICOS

Neste capítulo, mostraremos como utilizar as planilhas eletrônicas para o processo de aproximação de raízes. Para isso, utilizaremos alguns problemas propostos nos próprios livros didáticos.

Quando se relaciona situações problema com equações, por várias vezes o aluno consegue interpretar e montar a equação descrita no problema, mas erra pequenos detalhes no momento em que tem que reduzir a expressão algébrica criada. Esses pequenos erros impedem que o aluno obtenha a resposta real do problema.

Todavia, se formos comparar com situações reais, dificilmente encontraremos alguém que, nos dias de hoje, monte uma estrutura algébrica, passe pelo processo de redução para depois resolvê-la. Já existem várias aplicações que resolvem essas estruturas da maneira como são escritas, reduzindo o tempo e evitando o erro da simplificação algébrica.

Para familiarizar o aluno a esses processos, vamos apresentar como montar essas estruturas utilizando as planilhas eletrônicas, de forma que a máquina procure as suas raízes. Dessa forma, mostramos ao aluno que, utilizando as novas tecnologias ao nosso favor, não precisamos a todo momento recorrer a fórmulas resolutivas em aplicações reais.

Antes, porém, vamos criar um modelo de estrutura para as planilhas, de forma a padronizar a construção para ser utilizada em todas as etapas.

7.1 Modelo de estrutura para utilização dos métodos da bissecção e posição falsa

Definiremos aqui um modelo de estrutura para as planilhas, de forma a direcionar o aluno em alguns pontos, para que o foco seja a construção das fórmulas e a análise dos resultados.

1. **Inserção de pontos no intervalo:** Escolhido o intervalo $[a, b]$ inicial, sempre inseriremos 20 pontos para a análise de sinais (conforme procedimento criado anteriormente), acrescentando uma segunda linha com a construção da função escolhida, formatando suas células como "número", com a opção de apresentar os números negativos em vermelho, com duas casas decimais. Inicialmente, teremos duas escolhas para o refinamento do intervalo, podendo ser ampliada de acordo com a necessidade. Também será construído o gráfico da segunda escolha do intervalo, de forma a visualizar o comportamento dos valores. Das opções de gráfico disponíveis, a que

mais se assemelha ao gráfico de uma função é a opção "dispersão com linhas suaves". (figura 33).

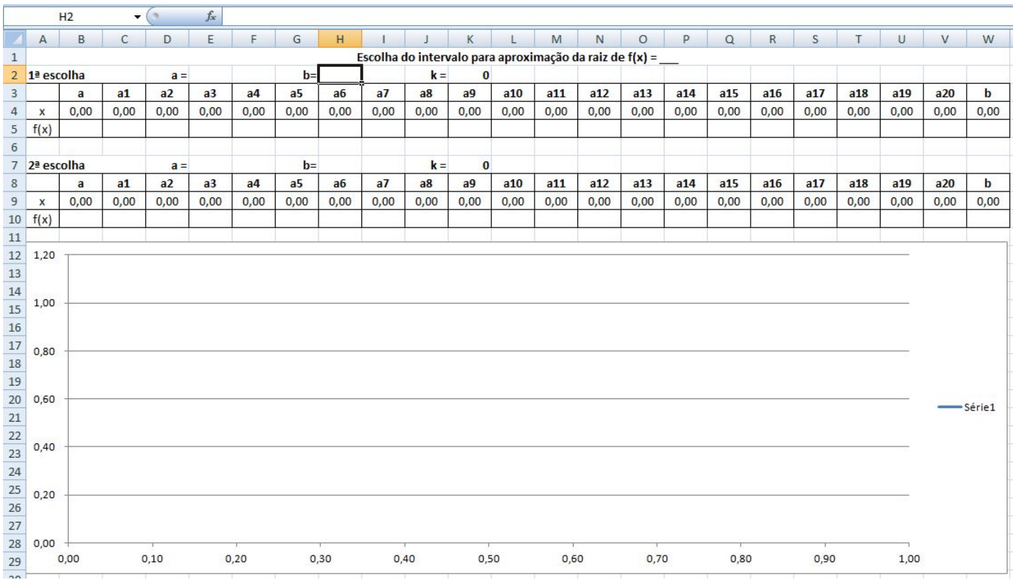


Figura 33 – Padrão para a escolha do intervalo

2. **Construção das planilhas com os métodos de aproximação:** Cada método de aproximação será construído em sua própria planilha, mas seguindo o mesmo padrão de cabeçalho, mudando apenas com relação à média **m**. No caso da bissecção, o cabeçalho será "Ponto Médio (m)", e no caso da posição falsa será "Média ponderada (m)". A precisão utilizada será sempre sempre 10^{-7} (figura 34).

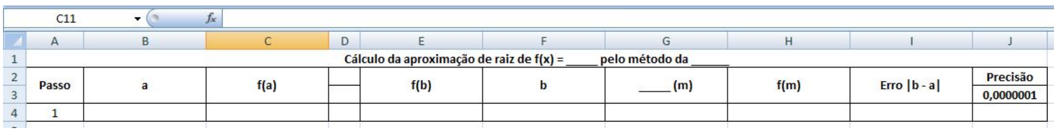


Figura 34 – Padrão para a escolha do intervalo

Quando ocorrer o caso de mais de uma raiz, será construída uma planilha para cada intervalo.

3. **Fórmulas comuns:** Para ambos os casos, serão utilizadas as seguintes fórmulas

   a) **Escolha do novo intervalo (a partir da 5ª linha considerando a linha imediatamente anterior):**

$$\begin{cases} Para\ a \rightarrow Se\ f(a)f(m) >= 0,\ então\ a = m,\ senão\ a = a \\ Para\ b \rightarrow Se\ f(a)f(m) <= 0,\ então\ b = m,\ senão\ a = b \end{cases}$$

	B	···	**F**
3	**a**	···	**b**
5	=SE((C4*H4)>=0;G4;B4)	···	=SE((C4*H4)<=0;G4;F4)

b) **Cálculo do erro (sempre considerando $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ na mesma linha:**

$$|b - a|$$

	I
3	Erro $|b - a|$
4	= ABS(F4 - B4)

c) **Verificação da precisão (sempre considerando o erro e o valor de $f(x)$ da linha:**

$$\text{Se erro} \leqslant \text{precisão e } f(x) \leqslant \text{precisão,} \quad \text{então "Sim",} \quad \text{senão} \quad \text{"Não"}$$

	J
3	$0,0000001$
4	=SE(E(I4 <= $J$3;H4<= $J$3);"Sim";"Não")

7.2 8º Ano do Ensino Fundamental II

Como vimos, o 8º Ano é marcado pela formalização dos números irracionais e pelas equações de 1º grau com uma incógnita e pelos sistemas de equações com duas incógnitas. Os números irracionais trabalhados são apenas as raízes quadradas, através do processo de aproximação por falta e excesso. Então falaremos de cada um separadamente.

7.2.1 Aproximação para $\sqrt{x}$

Junto com o conceito $\sqrt{a} = b$, se $b^2 = a$, é apresentado o conceito de falta e excesso para a aproximação de raízes não exatas. A aproximação utilizada é realizando uma casa decimal por vez, aumentando a precisão até que chegue no solicitado pelo exercício.

Como exemplo prático, realizaremos a aproximação de $\sqrt{2}$, que é o exemplo trazido nos livros, mas a planilha permitirá trocar o 2 por qualquer outro número. Implementaremos os três métodos, o ensinado no 8º Ano, o da bissecção e o da posição falsa, para depois discutirmos sobre os resultados obtidos.

A primeira planilha (Figura 35) a ser criada segue o conceito da verificação utilizado nos livros didáticos, cujo procedimento é sempre escolher intervalos com números em sequência, de acordo com a quantidade de casas decimais utilizadas (ex: 1 e 2, 1,2 e 1,3, 1,34 e 1,35), que nesse método é considerada como a precisão do resultado. Outro ponto do método, é a inserção de cada nova casa decimal após a obtenção do intervalo anterior, logo, o aluno teria que digitar o intervalo em cada um dos passos.

Acrescentaremos a coluna "Erro $|b - a|$", tomando como referência uma das formas para encontrar o "erro absoluto", de modo a familiarizar o aluno a trabalhar com esse conceito.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Cálculo da aproximação de raiz quadrada de 2 pela escolha de intervalos						
2	Casas	Aproximação por falta		Raiz de	Aproximação por excesso		Erro |b - a|
3	decimais	a	a²	2	b²	b	
4	0						

Figura 35 – Cabeçalho para o método apresentado no 8º ano

Teremos, então, as seguintes fórmulas construídas a partir da 4ª linha, mudando apenas o valor da quantidade de casas decimais utilizadas em cada linha:

	A	B	C	D	E	F	G
4	0		= B4^2		=F4^2		=ABS(E4 - C4)

Gerando o resultado da figura 36 para uma aproximação com 7 casas decimais.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Cálculo da aproximação de raiz quadrada de 2 pela escolha de intervalos						
2	Casas	Aproximação por falta		Raiz de	Aproximação por excesso		Erro |b - a|
3	decimais	a	a²	2	b²	b	
4	0	1	1		4	2	1
5	1	1,4	1,96		2,25	1,5	0,1
6	2	1,41	1,9881		2,0164	1,42	0,01
7	3	1,414	1,999396		2,002225	1,415	0,001
8	4	1,4142	1,99996164		2,00024449	1,4143	0,0001
9	5	1,41421	1,9999899241		2,0000182084	1,41422	0,00001
10	6	1,414213	1,999998409369		2,000001237796	1,414214	0,000001
11	7	1,4142135	1,99999982358225		2,00000010642496	1,4142136	0,0000001

Figura 36 – Tabela com a sequência de aproximações para a $\sqrt{2}$ com 7 casas decimais

Embora as fórmulas facilitem por efetuarem o cálculo automaticamente, esse processo pode ser demorado devido ao aluno ter que escolher o intervalo apenas com o critério “estarem em sequência”.

As planilhas com os métodos da bissecção e da posição falsa (figura 37) terão a mesma estrutura estabelecida no início do capítulo, mudando apenas os rótulos "$f(a)$", "$f(b)$"e "$f(m)$", para "a^2", "b^2"e "m^2"respectivamente. Como para este conteúdo só é considerada a raiz positiva, o processo de escolha do novo intervalo, que é feito com base no Teorema de Bolzano, será adaptado para atender o conteúdo, conforme tabela 12.

Tabela 12 – Teste para obtenção do intervalo

Teorema de Bolzano	Teste apresentado
$f(a)f(\bar{x}) > 0$	$a^2 < x < b^2$

Onde $a_1 > a$ com $a_1^2 < 2$ e $b_1 < b$ com $b_1^2 > 2$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz quadrada de 2 pelo método da ____									
2	Passo	Aproximação por falta		Raiz de	Aproximação por excesso		___(m)	m²	Erro |b - a|	Precisão
3		a	a²	2	b²	b				0,0000001
4	1									

Figura 37 – Cabeçalho para os métodos da bissecção e da posição falsa no 8º ano

Então, a partir da 5ª linha, as fórmulas de comparação serão construídas assim:

	B	...	F
3	**a**	...	**b**
5	=SE(E(H4>C4;H4<$D$3);G4;B4)	...	=SE(E(H4<E4;H4>$D$3);G4;F4)

Obtendo como resultado do método da bissecção (figura 38) a aproximação $1,41421356797218$ no 25º passo, e como resultado do método da posição falsa (figura 39) a aproximação $1,41421354924151$ no 25º passo.

G32

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz quadrada de 2 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta		Raiz de	Aproximação por excesso		Ponto médio (m)	m²	Erro |b - a|	Precisão
3		a	a²	2	b²	b				0,0000001
4	1	1,00000000000000	1,00000000000000		4,00000000000000	2,00000000000000	1,50000000000000	2,25000000000000	1,00000000000000	Não
5	2	1,00000000000000	1,00000000000000		2,25000000000000	1,50000000000000	1,25000000000000	1,56250000000000	0,50000000000000	Não
6	3	1,25000000000000	1,56250000000000		2,25000000000000	1,50000000000000	1,37500000000000	1,89062500000000	0,25000000000000	Não
7	4	1,37500000000000	1,89062500000000		2,25000000000000	1,50000000000000	1,43750000000000	2,06640625000000	0,12500000000000	Não
8	5	1,37500000000000	1,89062500000000		2,06640625000000	1,43750000000000	1,40625000000000	1,97753906250000	0,06250000000000	Não
9	6	1,40625000000000	1,97753906250000		2,06640625000000	1,43750000000000	1,42187500000000	2,02172851562500	0,03125000000000	Não
10	7	1,40625000000000	1,97753906250000		2,02172851562500	1,42187500000000	1,41406250000000	1,99957275390625	0,01562500000000	Não
23	20	1,41421318054199	1,99999892001870		2,00000431481748	1,41421508789062	1,41421413421630	2,00000161741718	0,00000190734863	Não
24	21	1,41421318054199	1,99999892001870		2,00000161741718	1,41421413421630	1,41421365737915	2,00000026871771	0,00000095367432	Não
25	22	1,41421318054199	1,99999892001870		2,00000026871771	1,41421365737915	1,41421341896057	1,99999959436815	0,00000047683716	Não
26	23	1,41421341896057	1,99999959436815		2,00000026871771	1,41421365737915	1,41421353816986	1,99999993154292	0,00000023841858	Não
27	24	1,41421353816986	1,99999993154292		2,00000026871771	1,41421365737915	1,41421359777450	2,00000010013031	0,00000011920929	Não
28	25	1,41421353816986	1,99999993154292		2,00000010013031	1,41421359777450	1,41421356797218	2,00000001583661	0,00000005960464	Sim

Figura 38 – Tabela utilizando o método da bissecção para a aproximação da $\sqrt{2}$

E23 =F23^2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz quadrada pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta		Raiz de	Aproximação por excesso		Média ponderada (m)	m²	Erro |b - a|	Precisão
3		a	a²	2	b²	b				0,0000001
4	1	1,00000000000000	1,00000000000000		4,00000000000000	2,00000000000000	1,20000000000000	1,44000000000000	1,00000000000000	Não
5	2	1,20000000000000	1,44000000000000		4,00000000000000	2,00000000000000	1,41176470588235	1,99307958477509	0,80000000000000	Não
6	3	1,41176470588235	1,99307958477509		4,00000000000000	2,00000000000000	1,60739030023095	2,58370357727653	0,58823529411765	Não
7	4	1,41176470588235	1,99307958477509		2,58370357727653	1,60739030023095	1,49695497261566	2,24087419003874	0,19562559434859	Não
8	5	1,41176470588235	1,99307958477509		2,24087419003874	1,49695497261566	1,45186693431425	2,10791759495507	0,08519026673330	Não
9	6	1,41176470588235	1,99307958477509		2,10791759495507	1,45186693431425	1,43125433957112	2,04848898454116	0,04010222843190	Não
10	7	1,41176470588235	1,99307958477509		2,04848898454116	1,43125433957112	1,42137592250620	2,02030951308035	0,01948963368877	Não
23	20	1,41421307575722	1,99999862364269		2,00000521672571	1,41421540676295	1,41421424125816	2,00000192017741	0,00000233100574	Não
24	21	1,41421307575722	1,99999862364269		2,00000192017741	1,41421424125816	1,41421365850721	2,00000027190835	0,00000116550095	Não
25	22	1,41421307575722	1,99999862364269		2,00000027190835	1,41421365850721	1,41421336713209	1,99999944777509	0,00000058274999	Não
26	23	1,41421336713209	1,99999944777509		2,00000027190835	1,41421365850721	1,41421351281962	1,99999985984161	0,00000029137512	Não
27	24	1,41421351281962	1,99999985984161		2,00000027190835	1,41421365850721	1,41421358566341	2,00000006587495	0,00000014568759	Não
28	25	1,41421351281962	1,99999985984161		2,00000006587495	1,41421358566341	1,41421354924151	1,99999996285828	0,00000007284379	Sim

Figura 39 – Tabela utilizando o método da posição falsa para a aproximação da $\sqrt{2}$

Comparando os resultados, a utilização dos métodos de aproximação não parecem ter grandes utilidades, mas analisando o trabalho concluído, um aluno, com sorte, realizaria 14 cálculos para encontrar a precisão desejada. Com a aplicação dos métodos numéricos, não seria necessário avançar uma casa de cada vez, o algoritmo já realizaria todos os cálculos com apenas a entrada do 1º intervalo.

7.2.2 Introduzindo a forma $b^2 - a = 0$

Partindo do conceito de equação do 1º grau e do conceito de raiz, partindo da igualdade $b^2 = a$, alguns autores já introduzem a forma da equação do 2º grau $x^2 + b = 0$, onde x seria a raiz procurada.

Por ser uma forma simples, não necessitaria de definições adicionais para ser implementada. Outro benefício de introdução desta forma é trabalhar com a questão das raízes negativas de um número real, pois mostra de forma prática essa relação.

Como exemplo, utilizaremos a equação $x^2 - 15 = 0$, proveniente da igualdade $\sqrt{15} = x$. As fórmulas construídas para os cálculos serão:

	...	C	...	E	...	H
4	...	= B4^2 - 15	...	=F4^2 - 15	...	=G4^2 - 15

Agora aplicando os testes numéricos:

1. **Escolha do intervalo - Figura 40**:

Escolha do intervalo para aproximação da raiz de f(x) = x² - 15

1ª escolha a = -10 b= 10 k = 0,9524

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-10,00	-9,05	-8,10	-7,14	-6,19	-5,24	-4,29	-3,33	-2,38	-1,43	-0,48	0,48	1,43	2,38	3,33	4,29	5,24	6,19	7,14	8,10	9,05	10,00
f(x)	85,00	66,86	50,53	36,02	23,32	12,44	3,37	-3,89	-9,33	-12,96	-14,77	-14,77	-12,96	-9,33	-3,89	3,37	12,44	23,32	36,02	50,53	66,86	85,00

2ª escolha a = -4,29 b= 4,29 k = 0,4086

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-4,29	-3,88	-3,47	-3,06	-2,66	-2,25	-1,84	-1,43	-1,02	-0,61	-0,20	0,20	0,61	1,02	1,43	1,84	2,25	2,66	3,06	3,47	3,88	4,29
f(x)	3,40	0,07	-2,94	-5,61	-7,95	-9,95	-11,62	-12,96	-13,96	-14,62	-14,96	-14,96	-14,62	-13,96	-12,96	-11,62	-9,95	-7,95	-5,61	-2,94	0,07	3,40

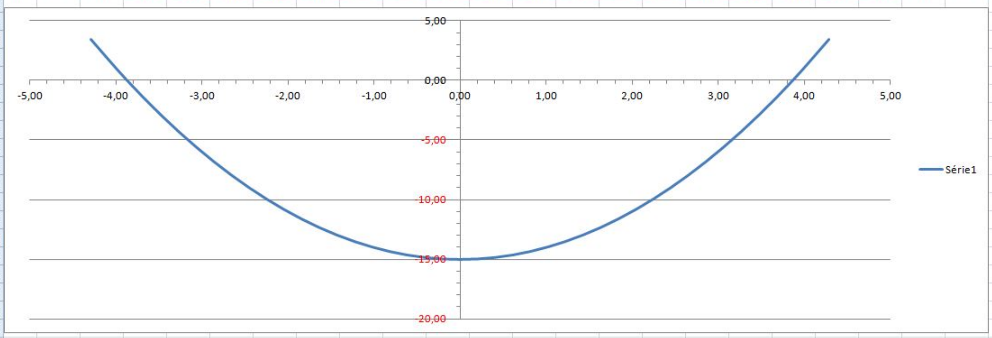


Figura 40 – Tabela de escolha do intervalo para $x^2 - 15 = 0$

Então escolhemos o intervalo $[-3,88; -3,47]$, que contém a aproximação negativa x_1, e o intervalo $[3,47; 3,88]$, que contém a aproximação positiva x_2, para aplicar nos métodos de aproximação.

2. **Aplicação dos métodos da bissecção** (Figura 41: (a) e (b)):

Cálculo da aproximação de raiz de f(x) = x² - 15 pelo método da bissecção

Passo	a	f(a)		f(b)	b	Ponto médio (m)	f(m)	Erro |b - a|	Precisão 0,0000001
1	-3,88000000000000	0,05440000000000		-2,95910000000000	-3,47000000000000	-3,67500000000000	-1,49437500000000	0,41000000000000	Não
2	-3,88000000000000	0,05440000000000		-1,49437500000000	-3,67500000000000	-3,77750000000000	-0,73049375000000	0,20500000000000	Não
3	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,73049375000000	-3,77750000000000	-3,82875000000000	-0,34067343750000	0,10250000000000	Não
4	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,34067343750000	-3,82875000000000	-3,85437500000000	-0,14379335937500	0,05125000000000	Não
5	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,14379335937500	-3,85437500000000	-3,86718750000000	-0,04486083984375	0,02562500000000	Não
6	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,04486083984375	-3,86718750000000	-3,87359375000000	0,00472854003906	0,01281250000000	Não
7	-3,87359375000000	0,00472854003906		-0,04486083984375	-3,86718750000000	-3,87039062500000	-0,02007640991211	0,00640625000000	Não
22	-3,87298338890076	0,00000033070119		-0,00000118366034	-3,87298319339752	-3,87298329114914	-68,09474771548880	0,00000019550323	Não
23	-3,87298338890076	0,00000033070119		-0,00000042647958	-3,87298329114914	-3,87298334002495	-68,09474991490010	0,00000009775162	Sim

(a) 1º Intervalo

Cálculo da aproximação de raiz de f(x) = x² - 15 pelo método da bissecção

Passo	a	f(a)		f(b)	b	Ponto médio (m)	f(m)	Erro |b - a|	Precisão 0,0000001
1	3,47000000000000	-2,95910000000000		0,05440000000000	3,88000000000000	3,67500000000000	-1,49437500000000	0,41000000000000	Não
2	3,67500000000000	-1,49437500000000		0,05440000000000	3,88000000000000	3,77750000000000	-0,73049375000000	0,20500000000000	Não
3	3,77750000000000	-0,73049375000000		0,05440000000000	3,88000000000000	3,82875000000000	-0,34067343750000	0,10250000000000	Não
4	3,82875000000000	-0,34067343750000		0,05440000000000	3,88000000000000	3,85437500000000	-0,14379335937500	0,05125000000000	Não
5	3,85437500000000	-0,14379335937500		0,05440000000000	3,88000000000000	3,86718750000000	-0,04486083984375	0,02562500000000	Não
6	3,86718750000000	-0,04486083984375		0,05440000000000	3,88000000000000	3,87359375000000	0,00472854003906	0,01281250000000	Não
7	3,86718750000000	-0,04486083984375		0,00472854003906	3,87359375000000	3,87039062500000	-0,02007640991211	0,00640625000000	Não
22	3,87298299789429	-0,00000269802178		-0,00000118366034	3,87298319339752	3,87298309564590	48,09473891784390	0,00000019550323	Não
23	3,87298299789429	-0,00000269802178		-0,00000194084107	3,87298309564590	3,87298304677010	48,09473671843280	0,00000009775162	Sim

(b) 2º Intervalo

Figura 41 – Tabela utilizando o método da bissecção para a aproximação do zero de $x^2 - 15 = 0$

Pelo método da bissecção, chegamos à precisão $\epsilon = 10^{-7}$ no 23º passo nos dois intervalos. Então podemos escolher como $\sqrt{15}$: $x_1 \approx -3,87298334002495$ e $x_2 \approx 3,87298334002495$.

3. **Aplicação do método da posição falsa** (Figura 42): (a) e (b)):

A10 | fx 7

Cálculo da aproximação de raiz de f(x) = x² - 15 pelo método da posição falsa									
Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	f(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	f(a)		f(b)	b	(m)			0,0000001
1	-3,88000000000000	0,05440000000000		-2,95910000000000	-3,47000000000000	-3,87259863945578	-0,00297977768523	0,41000000000000	Não
2	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,00297977768523	-3,87259863945578	-3,87298299802041	-0,00000269704481	0,00740136054422	Não
3	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,00000269704481	-3,87298299802041	-3,87298334589230	-0,00000000244089	0,00701700197959	Não
4	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,00000000244089	-3,87298334589230	-3,87298334620713	-0,00000000000221	0,00701665410770	Não
5	-3,88000000000000	0,05440000000000		-0,00000000000221	-3,87298334620713	-3,87298334620742	0,00000000000000	0,00701665379287	Não
6	-3,87298334620742	0,00000000000000		0,00000000000000	-3,87298334620742	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	Sim

(a) 1º Intervalo

A10 | fx 7

Cálculo da aproximação de raiz de f(x) = x² - 15 pelo método da posição falsa									
Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	f(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	f(a)		f(b)	b	(m)			0,0000001
1	3,47000000000000	-2,95910000000000		0,05440000000000	3,88000000000000	3,87259863945578	-0,00297977768523	0,41000000000000	Não
2	3,87259863945578	-0,00297977768523		0,05440000000000	3,88000000000000	3,87298299802041	-0,00000269704481	0,00740136054422	Não
3	3,87298299802041	-0,00000269704481		0,05440000000000	3,88000000000000	3,87298334589230	-0,00000000244089	0,00701700197959	Não
4	3,87298334589230	-0,00000000244089		0,05440000000000	3,88000000000000	3,87298334620713	-0,00000000000221	0,00701665410770	Não
5	3,87298334620713	-0,00000000000221		0,05440000000000	3,88000000000000	3,87298334620742	0,00000000000000	0,00701665379287	Não
6	3,87298334620742	0,00000000000000		0,00000000000000	3,87298334620742	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	Sim

(b) 2º Intervalo

Figura 42 – Tabela utilizando o método da posição falsa para a aproximação do zero de $x^2 - 15 = 0$

O método da posição falsa produziu o erro # DIV/0!, encontrando os resultados $x_1 \approx -3,87298334620742$, no 16º passo, e $x_2 \approx 3,87298334620742$ para $\sqrt{15}$ no 6º passo.

7.2.3 Aproximação para equações do 1º Grau com uma incógnita

Os problemas propostos para esta etapa são aqueles que requerem a aplicação de conceitos de propriedades matemáticas para a redução das equações à forma $ax + b = 0$.

Problema 1 *No Colégio do Bairro há turmas de 6º, 7º, 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Nesse colégio um terço dos alunos cursa o 6º ano; um quarto cursa o 7º ano; três décimos dos alunos estudam no 8º ano; e 140 alunos estão no 9º ano. Quantos alunos estudam nas turmas de 6º ao 9º ano dessa escola?*

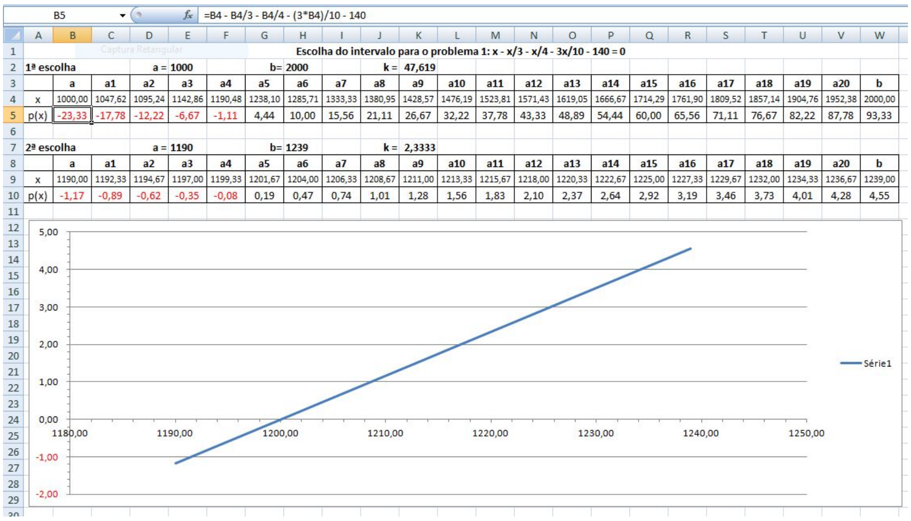
Interpretando o problema temos:

- Quantidade de alunos da escola: x
- 6º Ano: $\dfrac{1}{3}x$
- 7º Ano: $\dfrac{1}{4}x$
- 8º Ano: $\dfrac{3}{10}x$
- 9º Ano: 140

Que gera a equação: $x = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{10}x + 140.$
A resolução formal dessa equação é:

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + \frac{3}{10}x + 140 \\
\frac{60x}{60} &= \frac{20x}{60} + \frac{15x}{60} + \frac{18x}{60} + \frac{8400}{60} \\
60x &= 20x + 15x + 18x + 8400 \\
60x - 20x - 15x - 18x &= 8400 \\
7x &= 8400 \\
x &= \frac{8400}{7} x = 1200
\end{aligned}
$$

Lembrando aos alunos que, se todas as turmas forem embora, não sobraria ninguém na escola e teríamos a equação $x - \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x - \frac{3}{10}x - 140 = 0$, que pode ser escrita diretamente em uma planilha. Para a escolha do intervalo (figura 43), por se tratar do número de alunos, podemos auxiliar na escolha, lembrando que, se temos $\frac{3}{10}$, quer dizer que a quantidade de alunos é um múltiplo de 10. E, trabalhando com a lógica de uma escola, como são quatro níveis, teriam pelo menos 100 alunos.


B5 =B4 - B4/3 - B4/4 - (3*B4)/10 - 140

Escolha do intervalo para o problema 1: x - x/3 - x/4 - 3x/10 - 140 = 0

1ª escolha a = 1000 b= 2000 k = 47,619

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
x	1000,00	1047,62	1095,24	1142,86	1190,48	1238,10	1285,71	1333,33	1380,95	1428,57	1476,19
p(x)	-23,33	-17,78	-12,22	-6,67	-1,11	4,44	10,00	15,56	21,11	26,67	32,22

	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1523,81	1571,43	1619,05	1666,67	1714,29	1761,90	1809,52	1857,14	1904,76	1952,38	2000,00
p(x)	37,78	43,33	48,89	54,44	60,00	65,56	71,11	76,67	82,22	87,78	93,33

2ª escolha a = 1190 b= 1239 k = 2,3333

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
x	1190,00	1192,33	1194,67	1197,00	1199,33	1201,67	1204,00	1206,33	1208,67	1211,00	1213,33
p(x)	-1,17	-0,89	-0,62	-0,35	-0,08	0,19	0,47	0,74	1,01	1,28	1,56

	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1215,67	1218,00	1220,33	1222,67	1225,00	1227,33	1229,67	1232,00	1234,33	1236,67	1239,00
p(x)	1,83	2,10	2,37	2,64	2,92	3,19	3,46	3,73	4,01	4,28	4,55

Figura 43 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Ao realizar a escolha do intervalo, verificamos que a quantidade de alunos da escola pode ser 1200 ou 1201. Pegando os dois números decimais que delimitam o esse intervalo, temos a aplicação dos métodos de aproximação na figura 44.

K1 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de x - x/3 - x/4 - 3x/10 - 140 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	1199,33000000000000	-0,07816666666668		0,19483333333341	1201,67000000000000	1200,50000000000000	0,05833333333328	2,34000000000015	Não
5	2	1199,33000000000000	-0,07816666666668		0,05833333333328	1200,50000000000000	1199,91500000000000	-0,00991666666658	1,17000000000007	Não
28	25	1199,99999989033000	-0,00000001279517		0,00000000347700	1200,00000002980000	1199,99999996006000	-0,00000000465911	0,00000013947488	Não
29	26	1199,99999996006000	-0,00000000465911		0,00000000347700	1200,00000002980000	1199,99999999493000	-0,00000000059111	0,00000006973755	Sim

(a) Método da bissecção

K1 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de x - x/3 - x/4 - 3x/10 - 140 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	1199,33000000000000	-0,07816666666668		0,19483333333341	1201,67000000000000	1200,00000000000000	0,00000000000000	2,34000000000015	Não
5	2	1200,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	1200,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	Sim

(b) Método da posição falsa

Figura 44 – Aplicação dos processos de aproximação

Enquanto o método da bissecção induz ao resultado 1200 pela margem de erro escolhida no 26º passo, o método da posição falsa, usando todas as casas decimais disponibilizadas no programa, chega exatamente em 1200 na passagem do 1º para o 2º passo.

Esse fato pode ser verificado pelo erro **#DIV/0!**, que na linguagem de máquina representa uma **divisão por 0**. O intervalo do 2º passo é [a=1200, b=1200], ou seja, ao calcular a média ponderada para o 3º passo, obtivemos uma divisão por zero.

Problema 2 *Em uma colônia de férias A, 128 crianças são distribuídas em x grupos de atividades, e, na colônia B, 224 crianças são distribuídas em $(x+6)$ grupos de atividades. Sabendo que a quantidade de crianças, em todos os grupos, é a mesma para ambas as colônias de férias, qual é a quantidade de grupos de atividades na colônia de férias B?*

Interpretando o problema temos $\dfrac{128}{x} = \dfrac{224}{x+6}$. Neste caso os alunos trabalhariam com frações algébricas, e antes de resolver, devem utilizar o conceito de *múltiplo comum* para transformá-la em uma equação sem frações algébricas.

$$\begin{aligned}
\frac{128}{x} &= \frac{224}{x+6} \\
\frac{128\cdot(x+6)}{x\cdot(x+6)} &= \frac{224\cdot x}{x\cdot(x+6)} \\
128x + 768 &= 224x \\
224x - 128x &= 768 \\
96x &= 768 \\
x &= \frac{768}{96} \\
x &= 8
\end{aligned}$$

Aplicando a equação $\dfrac{128}{x} - \dfrac{224}{x+6} = 0$ para os processos de aproximação, novamente podemos induzir à escolha do intervalo, lembrando que pelo menos 1 grupo será formado na colônia de férias A (figura 45).

I10 =128/I9 - 224/(I9+6)

Escolha do intervalo para o problema 2: 128/x - 224/(x + 6) = 0

1ª escolha a = 1 b= 10 k = 0,4286

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1,00	1,43	1,86	2,29	2,71	3,14	3,57	4,00	4,43	4,86	5,29	5,71	6,14	6,57	7,00	7,43	7,86	8,29	8,71	9,14	9,57	10,00
p(x)	96,00	59,45	40,41	28,97	21,45	16,23	12,44	9,60	7,42	5,72	4,37	3,28	2,39	1,66	1,05	0,55	0,13	-0,23	-0,53	-0,79	-1,01	-1,20

2ª escolha a = 7,86 b= 8,29 k = 0,0205

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	7,86	7,88	7,90	7,92	7,94	7,96	7,98	8,00	8,02	8,04	8,06	8,09	8,11	8,13	8,15	8,17	8,19	8,21	8,23	8,25	8,27	8,29
p(x)	0,12	0,10	0,09	0,07	0,05	0,03	0,01	-0,00	-0,02	-0,04	-0,05	-0,07	-0,09	-0,11	-0,12	-0,14	-0,16	-0,17	-0,19	-0,20	-0,22	-0,24

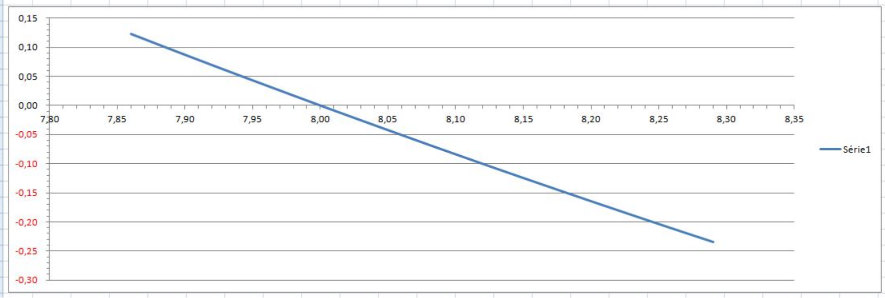


Figura 45 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Pelos cálculos do intervalo, pode-se verificar que o valor 8,00 gera um "*zero negativo*", neste ponto deve ser lembrado que os valores que vemos são aproximações de acordo com a quantidade de casas escolhidas. Então, para ter certeza, usaremos os valores antes e depois do 8,00 nos métodos numéricos na figura 46.

G5 =(B5+F5)/2

Cálculo da aproximação de raiz de 128/x - 224/(x + 6) = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
1	7,98000000000000	0,01721040799423		-0,01707571299995	8,02000000000000	8,00000000000000	0,00000000000000	0,04000000000000	Não
2	8,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	8,00000000000000	8,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	Sim

(a) Método da bissecção

G10 =(B10*ABS(E10)+F10*ABS(C10))/(ABS(C10)+ABS(E10))

Cálculo da aproximação de raiz de 128/x - 224/(x + 6) = 0 pelo método da posição falsa

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
1	7,98000000000000	0,01721040799423		-0,01707571299995	8,02000000000000	8,00007857114796	-0,00006734565886	0,04000000000000	Não
2	7,98000000000000	0,01721040799423		-0,00006734565886	8,00007857114796	8,00000030839285	-0,00000026433672	0,02007857114796	Não
3	7,98000000000000	0,01721040799423		-0,00000026433672	8,00000030839285	8,00000000121044	-0,00000000103752	0,02000030839285	Não
4	7,98000000000000	0,01721040799423		-0,00000000103752	8,00000000121044	8,00000000000475	-0,00000000000407	0,02000000121044	Não
5	7,98000000000000	0,01721040799423		-0,00000000000407	8,00000000000475	8,00000000000002	-0,00000000000002	0,02000000000475	Não
6	7,98000000000000	0,01721040799423		-0,00000000000002	8,00000000000002	8,00000000000000	0,00000000000000	0,02000000000002	Não
7	8,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	8,0000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 46 – Aplicação dos processos de aproximação

Os dois métodos chegaram ao resultado exato 8. Neste momento pode ser introduzida a discussão sobre decimais pares e decimais ímpares, mostrando que eles seguem a mesma regra para a divisão por 2, e esse é o motivo de obter exatamente o número 8, pois ele é o ponto central do intervalo [a=7,98 ; b=8,02]. Já o método da posição falsa também chegou no mesmo resultado, mas com uma quantidade maior de passos.

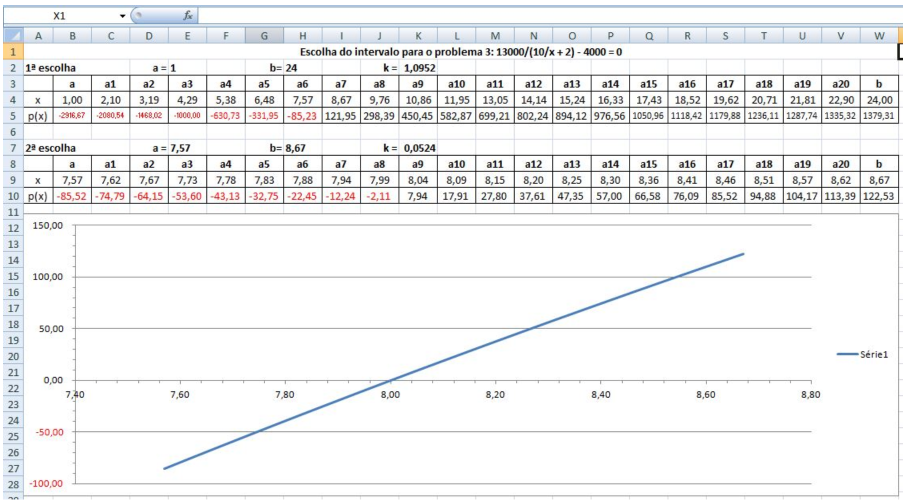
Além disso, cabe a observação de que o número 8 é apenas a raiz da equação, e não a resposta do problema. A resposta do problema seria 14, pois se refere à quantidade de grupos da colônia B. Nesta observação, pode-se mostrar que conseguiríamos transformar a equação com foco no acampamento A em uma equação com foco no acampamento B, dizendo que A têm seis grupos a menos do que B $\left(\dfrac{128}{y-6} = \dfrac{224}{y}\right)$.

Problema 3 *Segundo pesquisa realizada em um grupo de pessoas, foi constatado que, ao longo de x meses, a quantidade de pessoas que contrairá certo tipo de gripe é dada pela expressão matemática* $\dfrac{13000}{\dfrac{10}{x}+2}$. *Após quantos meses a quantidade de pessoas infectadas por esse tipo de gripe será de 4000?*

A resolução do problema requer a utilização dos conceitos de operações com fração que, visualmente, costumam confundir os alunos e causar insegurança.

$$
\begin{aligned}
\frac{13000}{\dfrac{10}{x}+2} = 4000 \quad &\Rightarrow \quad \frac{13000}{\dfrac{10+2x}{x}} = 4000 \\
13000 \cdot \frac{x}{10+2x} = 4000 \quad &\Rightarrow \quad 13000x = 4000 \cdot (10+2x) \\
13000x = 40000 + 8000x \quad &\Rightarrow \quad 13000x - 8000x = 40000 \\
5000x = 40000 \quad &\Rightarrow \quad x = \frac{40000}{5000} \\
x \quad &= \quad 8
\end{aligned}
$$

Para a aplicação dos processos, teremos a equação $\dfrac{13000}{\dfrac{10}{x}+2} - 4000 = 0$. Como o problema já deixa claro na pergunta que estamos trabalhando com uma contagem inteira, pelo menos um mês será necessário para a análise. Com isso, temos a escolha do intervalo da figura 47.


Escolha do intervalo para o problema 3: 13000/(10/x + 2) - 4000 = 0

1ª escolha a = 1 b= 24 k = 1,0952

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
x	1,00	2,10	3,19	4,29	5,38	6,48	7,57	8,67	9,76	10,86	11,95
p(x)	-2916,67	-2080,54	-1468,02	-1000,00	-630,73	-331,95	-85,23	121,95	298,39	450,45	582,87

	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	13,05	14,14	15,24	16,33	17,43	18,52	19,62	20,71	21,81	22,90	24,00
p(x)	699,21	802,24	894,12	976,56	1050,96	1118,42	1179,88	1236,11	1287,74	1335,32	1379,31

2ª escolha a = 7,57 b= 8,67 k = 0,0524

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
x	7,57	7,62	7,67	7,73	7,78	7,83	7,88	7,94	7,99	8,04	8,09
p(x)	-85,52	-74,79	-64,15	-53,60	-43,13	-32,75	-22,45	-12,24	-2,11	7,94	17,91

	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	8,15	8,20	8,25	8,30	8,36	8,41	8,46	8,51	8,57	8,62	8,67
p(x)	27,80	37,61	47,35	57,00	66,58	76,09	85,52	94,88	104,17	113,39	122,53

Figura 47 – Escolha do intervalo que contém a raiz

A própria escolha do intervalo leva a considerar que o resultado procurado, as aproximações (figura 48), servem para confirmá-lo.

C4 =13000/(10/B4+2) - 4000

Cálculo da aproximação de raiz da equação 13000/(10/x + 2) - 4000 = 0 pelo método da bissecção

	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	7,99000000000000	-1,92455735180920		7,66871165644170	8,04000000000000	8,01500000000000	2,88129081828674	0,05000000000000	Não
5	2	7,99000000000000	-1,92455735180920		2,88129081828674	8,01500000000000	8,00250000000000	0,48067679292490	0,02500000000000	Não
22	19	7,99999984741211	-0,00002934382519		0,00000733595652	8,00000003814697	7,99999994277954	-0,00001100393411	0,0000019073486	Não
23	20	7,99999994277954	-0,00001100393411		0,00000733595652	8,00000003814697	7,99999999046326	-0,00000183398879	0,0000009536743	Sim

(a) Método da bissecção

C37

Cálculo da aproximação de raiz da equação 13000/(10/x + 2) - 4000 = 0 pelo método da posição falsa

	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	7,99000000000000	-1,92455735180920		7,66871165644170	8,04000000000000	8,00003076923077	0,00591714575830	0,05000000000000	Não
5	2	7,99000000000000	-1,92455735180920		0,00591714575830	8,00003076923077	8,00000002366864	0,00000455166128	0,01003076923077	Não
6	3	7,99000000000000	-1,92455735180920		0,00000455166128	8,00000002366864	8,00000000001821	0,00000000350201	0,01000002366864	Não
7	4	7,99000000000000	-1,92455735180920		0,00000000350201	8,00000000001821	8,00000000000001	0,00000000000000	0,01000000001821	Não
8	5	8,00000000000001	0,00000000000000		0,00000000000000	8,00000000000001	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	Sim

(b) Método da posição falsa

Figura 48 – Aplicação dos processos de aproximação

Problema 4 *Qual o conjunto solução da equação* $\dfrac{16x+7}{9-x^2} + \dfrac{6}{x+3} - \dfrac{7}{3-x} = 0$*? (com* $x \neq -3$ *e* $x \neq 3$*)*

Este tipo de equação necessita dos conceitos de expressões algébricas e produtos notáveis para determinar o denominador comum; assim, transformar uma equação de 2º grau em uma equação do 1º grau. Esse é um ponto importante a ser destacado, pois permite discutir as perguntas "*tem equação sem ser do 1º grau?*", "*não tem outro jeito de resolver não?*" e "*só tem essa resposta?*".

Pela resolução formal ensinada, temos:

$$\frac{16x+7}{9-x^2} + \frac{2}{x+3} - \frac{1}{3-x} = 0 \Rightarrow \frac{16x+7}{(3+x)(3-x)} + \frac{6}{3+x} - \frac{7}{3-x} = 0$$
$$\frac{16x+7+6\cdot(3-x)-7\cdot(3+x)}{(3+x)(3-x)} = 0 \Rightarrow 16x+7+18-6x-21-7x = 0$$
$$3x = -4 \Rightarrow x = \frac{-4}{3}$$

Diferente dos outros problemas, que direcionavam para respostas inteiras e positivas, trabalhar com equações prontas não possuem a mesma "facilidade". Ao montar o intervalo (figura 49), verificamos que existe mais de uma possibilidade de raiz para esta equação.

E7 f_x -2,14

Escolha do intervalo para aproximação da raiz da equação (16x + 7)/(9 - x 2) + 6/(x + 3) - 7/(3 - x) = 0

1ª escolha a = -5 b= 5 k = 0,4762

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-5,00	-4,52	-4,05	-3,57	-3,10	-2,62	-2,14	-1,67	-1,19	-0,71	-0,24	0,24	0,71	1,19	1,67	2,14	2,62	3,10	3,57	4,05	4,52	5,00
p(x)	0,69	0,83	1,10	1,79	9,11	-1,80	-0,55	-0,16	0,06	0,22	0,37	0,53	0,72	1,00	1,45	2,37	5,54	-22,89	-3,92	-2,19	-1,53	-1,19

2ª escolha a = -2,14 b= 2,14 k = 0,2038

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-2,14	-1,94	-1,73	-1,53	-1,32	-1,12	-0,92	-0,71	-0,51	-0,31	-0,10	0,10	0,31	0,51	0,71	0,92	1,12	1,32	1,53	1,73	1,94	2,14
p(x)	0,69	0,83	1,10	1,79	9,11	-1,80	-0,55	-0,16	0,06	0,22	0,37	0,53	0,72	1,00	1,45	2,37	5,54	-22,89	-3,92	-2,19	-1,53	-1,19

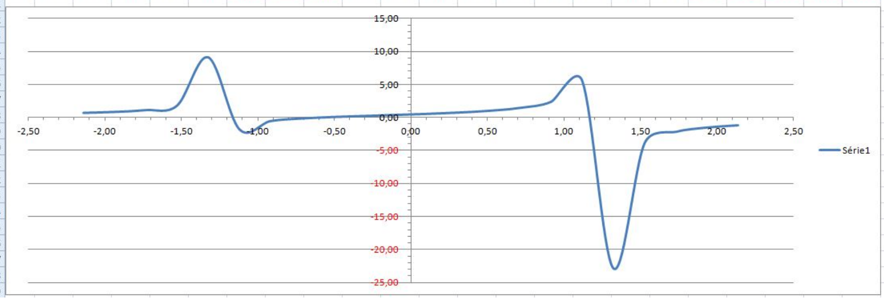


Figura 49 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Para encontrar as três possíveis raízes, temos o intervalo [-3,10 ; -2,8], o número aproximado -1,33 e o intervalo [2,8 ; 3,10]. Vamos verificar cada um deles separadamente.

Ao analisar os dois intervalos (figuras 50 e 51) com mais precisão, podemos constatar que os resultados se afastam de zero quando os valores de x se aproximam de -3 e de $+3$, que são raízes das equações $x + 3 = 0$ e $3 - x$ respectivamente, assim como os dois valores são raízes da equação $9 - x^2 = 0$.

H9 f_x =G9+$K$7

Escolha do intervalo para aproximação da raiz da equação (16x + 7)/(9 - x²) + 6/(x + 3) - 7/(3 - x) = 0

1ª escolha a = -3,1 b= -2,8 k = 0,0143

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-3,10	-3,09	-3,07	-3,06	-3,04	-3,03	-3,01	-3,00	-2,99	-2,97	-2,96	-2,94	-2,93	-2,91	-2,90	-2,89	-2,87	-2,86	-2,84	-2,83	-2,81	-2,80
p(x)	8,69	10,08	12,02	14,94	19,80	29,53	58,69	[illegible]	-57,97	-28,80	-19,08	-14,22	-11,30	-9,36	-7,97	-6,92	-6,11	-5,46	-4,93	-4,49	-4,11	-3,79

2ª escolha a = -3,01 b= -2,99 k = 0,001

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-3,01	-3,01	-3,01	-3,01	-3,01	-3,01	-3,00	-3,00	-3,00	-3,00	-3,00	-3,00	-3,00	-3,00	-3,00	-3,00	-2,99	-2,99	-2,99	-2,99	-2,99	-2,99
p(x)	83,69	92,47	103,30	117,03	134,98	159,45	194,81	250,36	350,36	583,69	1750,36	-1749,64	-582,97	-349,64	-249,64	-194,08	-158,73	-134,25	-116,31	-102,58	-91,74	-82,97

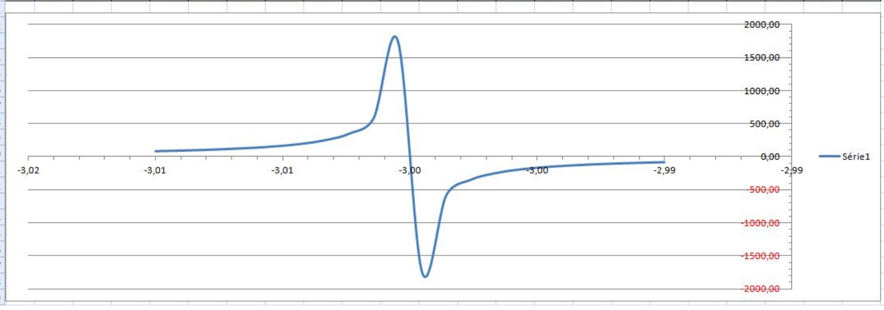
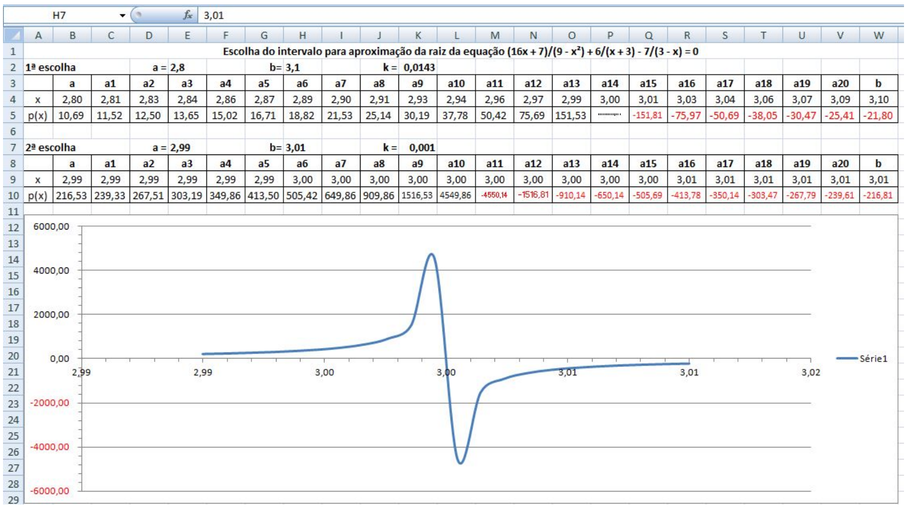


Figura 50 – Verificação do primeiro candidato à raiz



Escolha do intervalo para aproximação da raiz da equação (16x + 7)/(9 - x²) + 6/(x + 3) - 7/(3 - x) = 0

1ª escolha a = 2,8 b= 3,1 k = 0,0143

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	2,80	2,81	2,83	2,84	2,86	2,87	2,89	2,90	2,91	2,93	2,94	2,96	2,97	2,99	3,00	3,01	3,03	3,04	3,06	3,07	3,09	3,10
p(x)	10,69	11,52	12,50	13,65	15,02	16,71	18,82	21,53	25,14	30,19	37,78	50,42	75,69	151,53	########	-151,81	-75,97	-50,69	-38,05	-30,47	-25,41	-21,80

2ª escolha a = 2,99 b= 3,01 k = 0,001

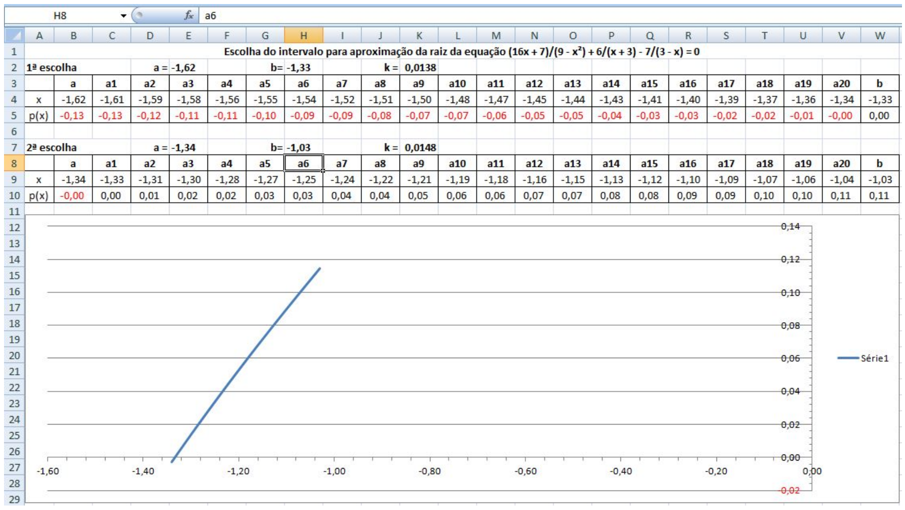
	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	2,99	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,00	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01	3,01
p(x)	216,53	239,33	267,51	303,19	349,86	413,50	505,42	649,86	909,86	1516,53	4549,86	-4550,14	-1516,81	-910,14	-650,14	-505,69	-413,78	-350,14	-303,47	-267,79	-239,61	-216,81

Figura 51 – Verificação do terceiro candidato à raiz

Mas por que eles se afastam? A resposta dessa pergunta pode ser respondida com as definições de divisão por fração e de valor numérico de expressões algébricas. Neste caso, chegará é um valor de x tal que $x + 3 < 1$ ou $3 - x < 1$ ou $9 - x^2 < 1$, que podem ser transformados em frações decimais do tipo $\dfrac{a}{10^n}$, com $n \in \mathbb{N}$, onde $a < 10^n$. Logo, aplicando a regra da divisão de frações, o denominador seria multiplicado pela fração $\dfrac{10^n}{a}$, que é maior do que 1, fazendo com que o resultado se afaste de zero ao invés de se aproximar.

Neste ponto, devemos lembrar também que o gráfico gerado pelas planilhas eletrônicas leva em consideração os pontos calculados, por isso dá a impressão que o gráfico passa pelos pontos -3 e 3.

Sobra então a análise de $x = -1,33$ que gera o resultado $f(-1,33) = 0$ (figura 52). Para uma análise menos tendenciosa, utilizaremos os pontos vizinhos a ele como os limites do intervalo (figura 53).



Escolha do intervalo para aproximação da raiz da equação (16x + 7)/(9 - x²) + 6/(x + 3) - 7/(3 - x) = 0

1ª escolha a = -1,62 b= -1,33 k = 0,0138

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-1,62	-1,61	-1,59	-1,58	-1,56	-1,55	-1,54	-1,52	-1,51	-1,50	-1,48	-1,47	-1,45	-1,44	-1,43	-1,41	-1,40	-1,39	-1,37	-1,36	-1,34	-1,33
p(x)	-0,13	-0,13	-0,12	-0,11	-0,11	-0,10	-0,09	-0,09	-0,08	-0,07	-0,07	-0,06	-0,05	-0,05	-0,04	-0,03	-0,03	-0,02	-0,02	-0,01	-0,00	0,00

2ª escolha a = -1,34 b= -1,03 k = 0,0148

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-1,34	-1,33	-1,31	-1,30	-1,28	-1,27	-1,25	-1,24	-1,22	-1,21	-1,19	-1,18	-1,16	-1,15	-1,13	-1,12	-1,10	-1,09	-1,07	-1,06	-1,04	-1,03
p(x)	-0,00	0,00	0,01	0,02	0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,05	0,06	0,06	0,07	0,07	0,08	0,08	0,09	0,09	0,10	0,10	0,11	0,11

Figura 52 – Verificação do segundo candidato à raiz

A nova escolha dos intervalos já nos encaminha para o número -1,33, mesmo com várias casas decimais.

J4 =SE(E(I4<=$J$3;ABS(H4)<=$J$3);"Sim";"Não")

	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz da equação (16x + 7)/(9 - x²) + 6/(x + 3) - 7/(3 - x) = 0 pelo método da bissecção								
2	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3	a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	-1,34000000000000	-0,00277608128366		0,00551146384480	-1,32000000000000	-1,33000000000000	0,00138291546238	0,02000000000000	Não
5	-1,34000000000000	-0,00277608128366		0,00138291546238	-1,33000000000000	-1,33500000000000	-0,00069273425675	0,01000000000000	Não
6	-1,33500000000000	-0,00069273425675		0,00138291546238	-1,33000000000000	-1,33250000000000	0,00034604740330	0,00500000000000	Não
25	-1,33333333969116	-0,00000000264094		0,00000000132047	-1,33333333015442	-1,33333333492279	-0,00000000066024	0,00000000953674	Sim

(a) Método da bissecção

F9 =SE((C8*H8)<=0;G8;F8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz da equação (16x + 7)/(9 - x²) + 6/(x + 3) - 7/(3 - x) = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	-1,34000000000000	-0,00277608128366		0,00551146384480	-1,32000000000000	-1,33330059446885	0,00001359905624	0,02000000000000	Não
5	2	-1,34000000000000	-0,00277608128366		0,00001359905624	-1,33330059446885	-1,33333325254488	0,00000003355828	0,00669940553115	Não
6	3	-1,34000000000000	-0,00277608128366		0,00000003355828	-1,33333325254488	-1,33333333313397	0,00000000008281	0,00666674745512	Não
7	4	-1,34000000000000	-0,00277608128366		0,00000000008281	-1,33333333313397	-1,33333333333284	0,00000000000020	0,00666666686603	Não
8	5	-1,34000000000000	-0,00277608128366		0,00000000000020	-1,33333333333284	-1,33333333333333	0,00000000000000	0,00666666666716	Não
9	6	-1,33333333333333	0,00000000000000		0,00000000000000	-1,33333333333333	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 53 – Aplicação dos processos de aproximação

Os dois métodos nos levam admitir que a raiz é dízima periódica $x = -1,333333...$, que corresponde a fração $-\frac{4}{3}$.

7.3 9º Ano do Ensino Fundamental II

O 9º ano também é marcado pelo aprofundamento sobre radiciação. Como os métodos são os mesmos do 8º ano, vamos apenas trabalhar com problemas que envolvem equações do 2º grau com uma incógnita e suas variações.

Vale destacar que a variedade de métodos resolutivos acaba se tornando um problema para os alunos, pois são várias fórmulas e formatos para lembrar e usar.

7.3.1 Aproximação para equações do 2º Grau com uma incógnita

Problema 5 *Uma pessoa distribui 240 balas para um número x de crianças. Se cada criança receber uma bala a menos, o número de balas que cada criança vai receber será igual ao número de crianças. Qual é o valor de x?*

Novamente temos um problema cuja resolução necessita de aplicações de fração algébrica, visto que pela interpretação do problema, teríamos a equação $\frac{240}{x} - 1 = x$. E, em se tratando do número de crianças, o resultado negativo é descartado.

$$\frac{240}{x} - 1 = x \qquad\qquad x = \frac{-(+1) \pm \sqrt{961}}{2 \cdot 1}$$
$$240 - 1 \cdot x = x \cdot x \qquad\qquad x = \frac{-1 \pm 31}{2}$$
$$240 - x = x^2$$
$$x^2 + x - 240 = 0 \qquad\qquad x_1 = \frac{-1+31}{2} = \frac{30}{2} = 15$$
$$\Delta = (+1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-240) \qquad\qquad x_2 = \frac{-1-31}{2} = \frac{-32}{2} = -16$$
$$\Delta = 1 + 960 = 961$$

Aplicando a fórmula $\dfrac{240}{x} - 1 - x = 0$ nos processos de aproximação, inciaríamos pelo intervalo da figura 54.

K9 =J9+$K$7

Escolha do intervalo para aproximação da raiz da equação 240/x - 1 - x = 0

1ª escolha a = 1 b= 20 k = 0,9048

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1,00	1,90	2,81	3,71	4,62	5,52	6,43	7,33	8,24	9,14	10,05	10,95	11,86	12,76	13,67	14,57	15,48	16,38	17,29	18,19	19,10	20,00
p(x)	238,00	123,10	81,61	59,90	46,34	36,92	29,90	24,39	19,89	16,11	12,84	9,96	7,38	5,04	2,89	0,90	-0,97	-2,73	-4,40	-6,00	-7,53	-9,00

2ª escolha a = 14,57 b= 15,48 k = 0,0433

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	14,57	14,61	14,66	14,70	14,74	14,79	14,83	14,87	14,92	14,96	15,00	15,05	15,09	15,13	15,18	15,22	15,26	15,31	15,35	15,39	15,44	15,48
p(x)	0,90	0,81	0,72	0,63	0,54	0,44	0,35	0,26	0,17	0,08	-0,01	-0,10	-0,19	-0,27	-0,36	-0,45	-0,54	-0,63	-0,71	-0,80	-0,89	-0,98

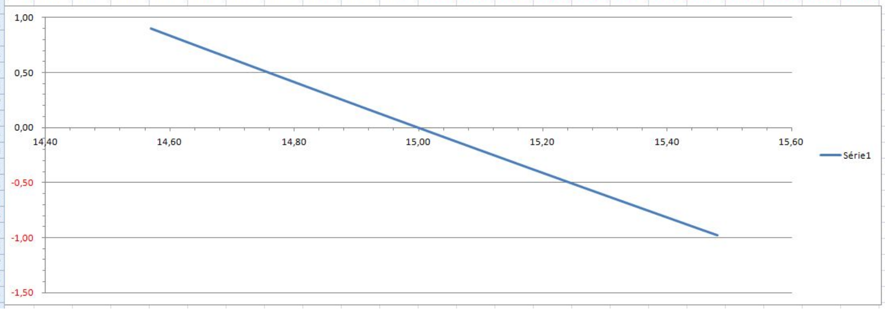


Figura 54 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Os resultados do intervalo nos levam para o resultado de 15 crianças, mas seu resultado é um zero negativo. Para os métodos de aproximação (figura 55), usaremos os pontos vizinhos.

C4 =240/B4-1-B4

Cálculo da aproximação de raiz de 240/x - 1 - x = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta: a	p(a)	Aproximação por excesso: p(b)	b	Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão 0,0000001
1	14,96000000000000	0,08278074866310	-0,10315614617940	15,05000000000000	15,00500000000000	-0,01033155614795	0,09000000000000	Não
2	14,96000000000000	0,08278074866310	-0,01033155614795	15,00500000000000	14,98250000000000	0,03618846988153	0,04500000000000	Não
3	14,98250000000000	0,03618846988153	-0,01033155614795	15,00500000000000	14,99375000000000	0,01291944560233	0,02250000000000	Não
20	14,99999984741210	0,00000031534830	-0,00000003941854	15,00000001907350	14,99999993324280	0,00000013796488	0,00000017166138	Não
21	14,99999993324280	0,00000013796488	-0,00000003941854	15,00000001907350	14,99999997615810	0,00000004927317	0,00000008583069	Sim

(a) Método da bissecção

C4 =240/B4-1-B4

Cálculo da aproximação de raiz de 240/x - 1 - x = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta: a	p(a)	Aproximação por excesso: p(b)	b	Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão 0,0000001
1	14,96000000000000	0,08278074866310	-0,10315614617940	15,05000000000000	15,00500000000000	-0,01033155614795	0,09000000000000	Não
2	14,96000000000000	0,08278074866310	-0,01033155614795	15,00500000000000	14,98250000000000	0,03618846988153	0,04500000000000	Não
3	14,98250000000000	0,03618846988153	-0,01033155614795	15,00500000000000	14,99375000000000	0,01291944560233	0,02250000000000	Não
20	14,99999984741210	0,00000031534830	-0,00000003941854	15,00000001907350	14,99999993324280	0,00000013796488	0,00000017166138	Não
21	14,99999993324280	0,00000013796488	-0,00000003941854	15,00000001907350	14,99999997615810	0,00000004927317	0,00000008583069	Sim

(b) Método da posição falsa

Figura 55 – Aplicação dos processos de aproximação

Temos então a confirmação do resultado 15, como o número de crianças.

Problema 6 *A tela de um quadro tem a forma retangular e mede 50 cm e 30 cm. Nessa tela foi colocada uma moldura, também retangular, de largura x. Calcule essa largura, sabendo que o quadro todo passou a ocupar uma área de 2400 cm².*

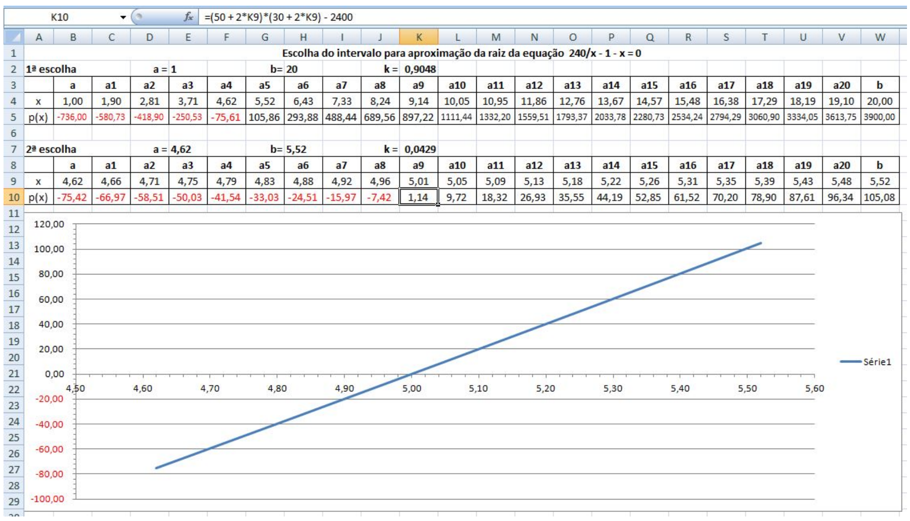
Problemas de área são sempre utilizados nas questões que envolvem equações de 2º grau, e também são alguns dos mais próximos da realidade, pois são de utilização prática.

Para este problema, temos que resolver a equação $(50 - x)(30 - x) = 2400$ e, por se tratar de uma medida de comprimento, a raiz negativa não deve ser considerada.

$$\begin{aligned}
(50 + 2x)(30 + 2x) &= 2400 \\
1500 + 100x + 60x + 4x^2 - 2400 &= 0 \\
4x^2 + 160x - 900 &= 0 \\
\Delta &= (+160)^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-900) \\
\Delta &= 25600 + 14400 \\
\Delta &= 400000
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x &= \frac{-(+160) \pm \sqrt{400000}}{2 \cdot 4} \\
x &= \frac{-160 \pm 200}{8} \\
x_1 &= \frac{-160 + 200}{8} = \frac{40}{8} = 5 \\
x_2 &= \frac{-160 - 200}{8} = \frac{-360}{8} = -45
\end{aligned}$$

Para a escolha do intervalo (figura 56), podemos considerar apenas os valores positivos, visto que as raízes negativas não atenderiam à situação descrita.



K10 =(50 + 2*K9)*(30 + 2*K9) - 2400

Escolha do intervalo para aproximação da raiz da equação 240/x - 1 - x = 0

1ª escolha a = 1 b= 20 k = 0,9048

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1,00	1,90	2,81	3,71	4,62	5,52	6,43	7,33	8,24	9,14	10,05	10,95	11,86	12,76	13,67	14,57	15,48	16,38	17,29	18,19	19,10	20,00
p(x)	-736,00	-580,73	-418,90	-250,53	-75,61	105,86	293,88	488,44	689,56	897,22	1111,44	1332,20	1559,51	1793,37	2033,78	2280,73	2534,24	2794,29	3060,90	3334,05	3613,75	3900,00

2ª escolha a = 4,62 b= 5,52 k = 0,0429

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	4,62	4,66	4,71	4,75	4,79	4,83	4,88	4,92	4,96	5,01	5,05	5,09	5,13	5,18	5,22	5,26	5,31	5,35	5,39	5,43	5,48	5,52
p(x)	-75,42	-66,97	-58,51	-50,03	-41,54	-33,03	-24,51	-15,97	-7,42	1,14	9,72	18,32	26,93	35,55	44,19	52,85	61,52	70,20	78,90	87,61	96,34	105,08

Figura 56 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Como estamos trabalhando com uma unidade de medida, não podemos considerar que o número 5 é a raiz procurada, pois a medida pode não ser exata. Para confirmar, utilizamos os métodos de aproximação (figura 57).

B33

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de (50 +2x)(30+2x) - 2400 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	4,96000000000000	-7,99359999999979		2,00039999999944	5,01000000000000	4,98500000000000	-2,99910000000000	0,05000000000000	Não
5	2	4,98500000000000	-2,99910000000000		2,00039999999944	5,01000000000000	4,99750000000000	-0,49997500000018	0,02500000000000	Não
28	25	4,99999999761581	-0,00000047683761		0,00000011920929	5,00000000059604	4,99999999910593	-0,00000017881439	0,00000000298023	Não
29	26	4,99999999910593	-0,00000017881439		0,00000011920929	5,00000000059604	4,99999999985099	-0,00000002980323	0,00000000149012	Sim

(a) Método da bissecção

B39

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de (50 +2x)(30+2x) - 2400 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	4,96000000000000	-7,99359999999979		2,00039999999944	5,01000000000000	4,99999199519712	-0,00160096031959	0,05000000000000	Não
5	2	4,99999199519712	-0,00160096031959		2,00039999999944	5,01000000000000	4,99999999839936	-0,00000032012804	0,01000800480288	Não
6	3	4,99999999839936	-0,00000032012804		2,00039999999944	5,01000000000000	4,99999999999968	-0,00000000006412	0,01000000160064	Não
7	4	4,99999999999968	-0,00000000006412		2,00039999999944	5,01000000000000	5,00000000000000	0,00000000000000	0,01000000000032	Não
8	5	5,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	5,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 57 – Aplicação dos processos de aproximação

Chegamos, então, ao resultado de 5 cm; sem a necessidade de reduzir a equação, criar uma equação equivalente reduzindo seus coeficientes[1] ou errando cálculos por necessitar trabalhar com valores altos.

Problema 7 *Resolva a equação* $4x^4 - 37x^2 + 9 = 0$.

A equação em questão é uma equação biquadrada, e sua resolução depende da substituição do termo x^2 por y.

$$\begin{aligned} 4x^4 - 37x^2 + 9 &= 0 \\ 4(x^2)^2 - 37x^2 + 9 &= 0 \\ 4y^2 - 37y + 9 &= 0 \\ \Delta &= (-37)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 \\ \Delta &= 1369 - 144 \\ \Delta &= 1225 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{-(-37) \pm \sqrt{1225}}{2 \cdot 4} \\ y &= \frac{+37 \pm 35}{8} \\ y_1 &= \frac{+37 + 35}{8} = \frac{72}{8} = 9 \\ y_2 &= \frac{+37 - 35}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

$$x^2 = y \Rightarrow x = \sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{9} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = +3 \end{cases}$$

ou

$$x = \sqrt{\frac{1}{4}} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = -\frac{1}{2} \\ x_2 = +\frac{1}{2} \end{cases}$$

Lembrando aos alunos que a equação biquadrada pode ter até quatro raízes diferentes, a escolha do intervalo inicial (figura 58) tem que ter uma amplitude que permita mostrar a possibilidade de conter a raiz.

[1] Transformar uma equação em uma equivalente reduzindo os coeficientes é utilizar o mesmo método de simplificação de fração, dividindo todos os coeficientes por um mesmo valor: $4x^2 + 160x - 900 \overset{\div 4}{=} x^2 + 40x - 225 = 0$

Escolha do intervalo para aproximação da raiz da equação 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0

1ª escolha a = -10 b= 10 k = 0,9524

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-10,00	-9,05	-8,10	-7,14	-6,19	-5,24	-4,29	-3,33	-2,38	-1,43	-0,48	0,48	1,43	2,38	3,33	4,29	5,24	6,19	7,14	8,10	9,05	10,00
p(x)	36309,00	23784,05	14762,52	8533,57	4465,39	2005,10	678,85	91,72	-72,20	-49,85	0,82	0,82	-49,85	-72,20	91,72	678,85	2005,10	4465,39	8533,57	14762,52	23784,05	36309,00

2ª escolha a = -3,33 b= 3,33 k = 0,3171

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-3,33	-3,01	-2,70	-2,38	-2,06	-1,74	-1,43	-1,11	-0,79	-0,48	-0,16	0,16	0,48	0,79	1,11	1,43	1,74	2,06	2,38	2,70	3,01	3,33
p(x)	90,57	2,73	-48,64	-72,30	-76,00	-66,55	-49,77	-30,52	-12,68	0,83	8,07	8,07	0,83	-12,68	-30,52	-49,77	-66,55	-76,00	-72,30	-48,64	2,73	90,57

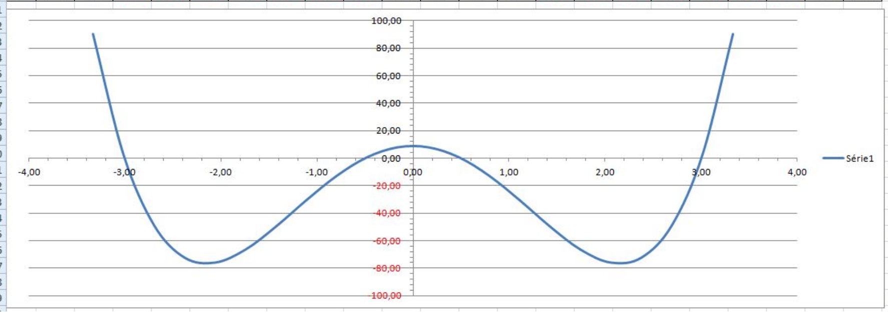


Figura 58 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Pela análise dos resultados, conseguimos verificar as quatro mudanças de sinal, logo, deveremos ter quatro aplicações nos métodos de aproximação (figuras 59, 60, 61 e 62).

C4 =4*B4^4-37*B4^2+9

Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
1	-3,01000000000000	2,11794803999993		-48,15360000000000	-2,70000000000000	-2,85500000000000	-26,83109079750000	0,31000000000000	Não
2	-3,01000000000000	2,11794803999993		-26,83109079750000	-2,85500000000000	-2,93250000000000	-13,37411046234370	0,15500000000000	Não
24	-3,00000000953674	0,00000200271592		-0,00000575780871	-2,99999997258186	-2,99999999105930	-0,00000187754637	0,00000003695488	Não
25	-3,00000000953674	0,00000200271592		-0,00000187754637	-2,99999999105930	-3,00000000029802	0,00000006258483	0,00000001847744	Sim

(a) Método da bissecção

B4 -3,01

Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da posição falsa

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
1	-3,01000000000000	2,11794803999993		-48,15360000000000	-2,70000000000000	-2,99693965238792	-0,64099790875747	0,31000000000000	Não
2	-3,01000000000000	2,11794803999993		-0,64099790875747	-2,99693965238792	-2,99997401973780	-0,00545573424347	0,01306034761208	Não
3	-3,01000000000000	2,11794803999993		-0,00545573424347	-2,99997401973780	-2,99999977983322	-0,00004623501593	0,01002598026220	Não
4	-3,01000000000000	2,11794803999993		-0,00004623501593	-2,99999977983322	-2,99999999813425	-0,00000039180759	0,01000022016678	Não
5	-3,01000000000000	2,11794803999993		-0,00000039180759	-2,99999999813425	-2,99999999998419	-0,00000000332028	0,01000000186575	Não
6	-3,01000000000000	2,11794803999993		-0,00000000332028	-2,99999999998419	-2,99999999999987	-0,00000000002814	0,01000000001581	Não
7	-3,01000000000000	2,11794803999993		-0,00000000002814	-2,99999999999987	-3,00000000000000	-0,00000000000023	0,01000000000013	Não
8	-3,01000000000000	2,11794803999993		-0,00000000000023	-3,00000000000000	-3,00000000000000	0,00000000000000	0,01000000000000	Não
9	-3,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	-3,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 59 – Aplicação dos processos de aproximação - 1º intervalo

C36

Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
1	-0,79000000000000	-12,53369676000000		0,68753664000000	-0,48000000000000	-0,63500000000000	-5,26896339750000	0,31000000000000	Não
2	-0,63500000000000	-5,26896339750000		0,68753664000000	-0,48000000000000	-0,55750000000000	-2,11342914984375	0,15500000000000	Não
23	-0,50000005483627	-0,00000191926966		0,00000066757201	-0,49999998092651	-0,50000001788139	-0,00000062584878	0,00000007390976	Não
24	-0,50000001788139	-0,00000062584878		0,00000066757201	-0,49999998092651	-0,49999999940395	0,00000002086163	0,00000003695488	Sim

(a) Método da bissecção

C36

Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da posição falsa

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
1	-0,79000000000000	-12,53369676000000		0,68753664000000	-0,48000000000000	-0,49612076210681	0,13530635706864	0,31000000000000	Não
2	-0,79000000000000	-12,53369676000000		0,13530635706864	-0,49612076210681	-0,49925942493055	0,02590312218806	0,29387923789319	Não
19	-0,79000000000000	-12,53369676000000		0,00000000000008	-0,50000000000000	-0,50000000000000	0,00000000000000	0,29000000000000	Não
20	-0,50000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	-0,50000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 60 – Aplicação dos processos de aproximação - 2º intervalo

B33

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	0,48000000000000	0,68753664000000		-12,53369676000000	0,79000000000000	0,63500000000000	-5,26896339750000	0,31000000000000	Não
5	2	0,48000000000000	0,68753664000000		-5,26896339750000	0,63500000000000	0,55750000000000	-2,11342914984375	0,15500000000000	Não
26	23	0,49999998092651	0,00000066757201		-0,00000191926966	0,50000005483627	0,50000001788139	-0,00000062584878	0,0000007390976	Não
27	24	0,49999998092651	0,00000066757201		-0,00000062584878	0,50000001788139	0,49999999940395	0,00000002086163	0,0000003695488	Sim

(a) Método da bissecção

B33

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	0,48000000000000	0,68753664000000		-12,53369676000000	0,79000000000000	0,49612076210681	0,13530635706864	0,31000000000000	Não
5	2	0,49612076210681	0,13530635706864		-12,53369676000000	0,79000000000000	0,49925942493055	0,02590312218806	0,29387923789319	Não
22	19	0,50000000000000	0,00000000000008		-12,53369676000000	0,79000000000000	0,50000000000000	0,00000000000000	0,29000000000000	Não
23	20	0,50000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	0,50000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 61 – Aplicação dos processos de aproximação - 3º intervalo

C35

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	2,70000000000000	-48,15360000000000		2,11794803999993	3,01000000000000	2,85500000000000	-26,83109079750000	0,31000000000000	Não
5	2	2,85500000000000	-26,83109079750000		2,11794803999993	3,01000000000000	2,93250000000000	-13,37411046234370	0,15500000000000	Não
6	3	2,93250000000000	-13,37411046234370		2,11794803999993	3,01000000000000	2,97125000000000	-5,89068323592778	0,07750000000000	Não
27	24	2,99999997258186	-0,00000575780871		0,00000200271592	3,00000000953674	2,99999999105930	-0,00000187754637	0,0000003695488	Não
28	25	2,99999999105930	-0,00000187754637		0,00000200271592	3,00000000953674	3,00000000029802	0,0000006258483	0,0000001847744	Sim

(a) Método da bissecção

C38

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 4x^4 - 37x^2 + 9 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	2,70000000000000	-48,15360000000000		2,11794803999993	3,01000000000000	2,99693965238792	-0,64099790875747	0,31000000000000	Não
5	2	2,99693965238792	-0,64099790875747		2,11794803999993	3,01000000000000	2,99997401973780	-0,00545573424347	0,01306034761208	Não
6	3	2,99997401973780	-0,00545573424347		2,11794803999993	3,01000000000000	2,99999977983322	-0,00004623501593	0,01002598026220	Não
7	4	2,99999977983322	-0,00004623501593		2,11794803999993	3,01000000000000	2,99999999813425	-0,00000039180759	0,01000022016678	Não
8	5	2,99999999813425	-0,00000039180759		2,11794803999993	3,01000000000000	2,99999999998419	-0,00000000332028	0,01000000186575	Não
9	6	2,99999999998419	-0,00000000332028		2,11794803999993	3,01000000000000	2,99999999999987	-0,00000000002814	0,01000000001581	Não
10	7	2,99999999999987	-0,00000000002814		2,11794803999993	3,01000000000000	3,00000000000000	-0,00000000000023	0,01000000000013	Não
11	8	3,00000000000000	-0,00000000000023		2,11794803999993	3,01000000000000	3,00000000000000	0,00000000000000	0,01000000000000	Não
12	9	3,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	3,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 62 – Aplicação dos processos de aproximação - 4º intervalo

Problema 8 *Determine os números reais x que fazem com que as expressões $\sqrt{x + \sqrt{x-1}}$ e $\sqrt{7}$ tenham o mesmo valor numérico.*

Este problema trabalha com o conceito de equações irracionais, o qual traz a dificuldade para os alunos das constantes análises para retirar as raízes através da aplicação das potências necessárias.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x+\sqrt{x-1}} &= \sqrt{7}\\
\left(\sqrt{x+\sqrt{x-1}}\right)^2 &= (\sqrt{7})^2\\
x+\sqrt{x-1} &= 7\\
\sqrt{x-1} &= 7-x\\
(\sqrt{x-1})^2 &= (7-x)^2\\
x-1 &= 49-14x+x^2\\
x^2-14x+49-x+1 &= 0\\
x^2-15x+50 &= 0
\end{aligned}
$$

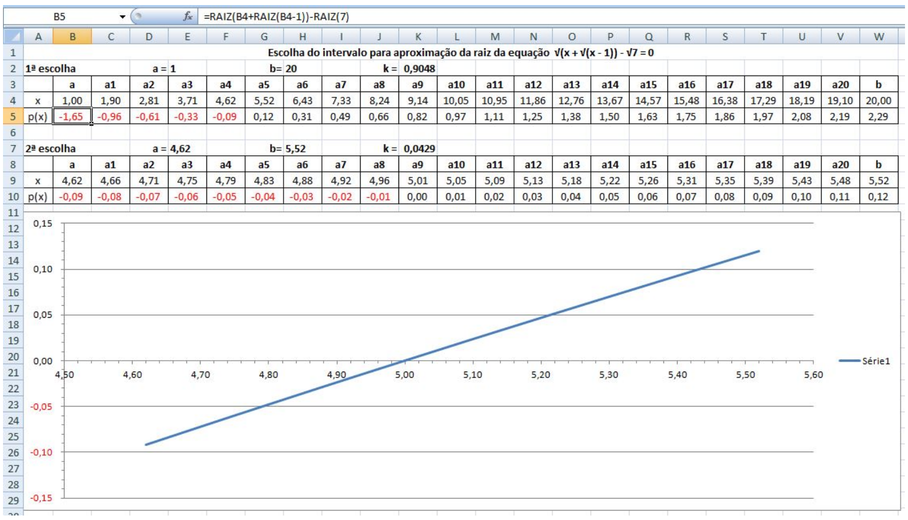
$$
\begin{aligned}
\Delta &= (-15)^2-4\cdot 1\cdot 50\\
\Delta &= 225-200\\
\Delta = 25x &= \frac{-(-15)\pm\sqrt{25}}{2\cdot 1}\\
x &= \frac{+15\pm 5}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{+15+5}{2}\\
x_1 &= \frac{20}{2} = 10\\
x_2 &= \frac{+15-5}{2}\\
x_2 &= \frac{10}{2} = 5
\end{aligned}
$$

Inicialmente pode se pensar que temos duas raízes para o problema, mas, ao verificar os números encontrados, apenas o 5 satisfaz a condição.

$$
\begin{array}{c|c}
\sqrt{5+\sqrt{5-1}} & \sqrt{10+\sqrt{10-1}}\\
\sqrt{5+\sqrt{4}} & \sqrt{10+\sqrt{9}}\\
\sqrt{5+2} & \sqrt{10+3}\\
\sqrt{7} & \sqrt{13}
\end{array}
$$

O intervalo (figura 63) para a aplicação dos métodos numéricos pode ser realizado de acordo com $\sqrt{x-1}$, logo, o valor que procuramos tem que ser maior ou igual à 1.



	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1,00	1,90	2,81	3,71	4,62	5,52	6,43	7,33	8,24	9,14	10,05	10,95	11,86	12,76	13,67	14,57	15,48	16,38	17,29	18,19	19,10	20,00
p(x)	-1,65	-0,96	-0,61	-0,33	-0,09	0,12	0,31	0,49	0,66	0,82	0,97	1,11	1,25	1,38	1,50	1,63	1,75	1,86	1,97	2,08	2,19	2,29

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	4,62	4,66	4,71	4,75	4,79	4,83	4,88	4,92	4,96	5,01	5,05	5,09	5,13	5,18	5,22	5,26	5,31	5,35	5,39	5,43	5,48	5,52
p(x)	-0,09	-0,08	-0,07	-0,06	-0,05	-0,04	-0,03	-0,02	-0,01	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10	0,11	0,12

Figura 63 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Pela escolha dos intervalos, temos apenas uma única mudança de sinais, que será aplicado nos processos de aproximação (figura 64).

B5 f_x =SE((C4*H4)>=0;G4;B4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de √(x + √(x - 1)) - √7 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	4,96000000000000	-0,00947081115316		0,00236092965522	5,01000000000000	4,98500000000000	-0,00354645947422	0,05000000000000	Não
5	2	4,98500000000000	-0,00354645947422		0,00236092965522	5,01000000000000	4,99750000000000	-0,00059065388076	0,02500000000000	Não
6	3	4,99750000000000	-0,00059065388076		0,00236092965522	5,01000000000000	5,00375000000000	0,00088566449068	0,01250000000000	Não
22	19	4,99999996185303	-0,00000000901138		0,00000003604550	5,00000015258789	5,00000005722046	0,00000001351706	0,00000019073486	Não
23	20	4,99999996185303	-0,00000000901138		0,00000001351706	5,00000005722046	5,00000000953674	0,00000000225284	0,00000009536743	Sim

(a) Método da bissecção

B5 f_x =SE((C4*H4)>=0;G4;B4)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de √(x + √(x - 1)) - √7 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	4,96000000000000	-0,00947081115316		0,00236092965522	5,01000000000000	5,00002289817934	0,00000540917935	0,05000000000000	Não
5	2	4,96000000000000	-0,00947081115316		0,00000540917935	5,00002289817934	5,00000005246377	0,00000001239340	0,04002289817934	Não
6	3	4,96000000000000	-0,00947081115316		0,00000001239340	5,00000005246377	5,00000000012020	0,00000000002840	0,04000005246377	Não
7	4	4,96000000000000	-0,00947081115316		0,00000000002840	5,00000000012020	5,00000000000028	0,00000000000006	0,04000000012020	Não
8	5	4,96000000000000	-0,00947081115316		0,00000000000006	5,00000000000028	5,00000000000000	0,00000000000000	0,04000000000028	Não
9	6	5,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	5,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 64 – Aplicação dos processos de aproximação

Com os processos de aproximação chegamos ao valor 5, descartando a possibilidade do 10 logo na obtenção dos intervalos.

7.4 1º Ano do Ensino Médio

Ao chegar no 1º ano do ensino médio as equações de 1º e 2º graus são trabalhadas na aplicação das funções afim e quadrática. Além delas, como vimos, temos também as vinculadas à função às equações modulares, logarítmicas e exponenciais.

As aplicações dos métodos numéricos para as funções afim e quadrática seguem os mesmos princípios das aplicações feitas no 8º e 9º anos, portanto, partiremos dos problemas com equações exponenciais.

7.4.1 Funções exponenciais

A função exponencial é utilizada principalmente nos cálculos de juros compostos e proliferação de vírus e bactérias. Então, sua aplicabilidade prática é bastante extensa.

A resolução padrão é tentar transformar a equação em uma igualdade de potências de mesma base, podendo, assim, trabalhar apenas com os expoentes. Esse procedimento requer que o aluno lembre e tenha domínio de todas as propriedades de potências e raízes, visto que ele pode se deparar com uma transformação em um expoente fracionário.

Problema 9 *(FMJ-SP) O número de bactérias de uma cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão* $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$*. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38400 bactérias?*

Neste problema, a resolução padrão é:

$$
\begin{aligned}
38400 &= 1200 \cdot 2^{0,4t} \\
\frac{38400}{1200} &= 2^{0,4t} \\
32 &= 2^{0,4t} \\
2^5 &= 2^{0,4t} \\
5 &= 0,4t \\
t = \frac{5}{0,4} t &= 12,5
\end{aligned}
$$

Ao implementar os métodos de aproximação, levamos em consideração que a quantidade de bactérias cresce, logo o expoente não pode ser negativo, pois teríamos o inverso da potência dada. Assim direcionamos o intervalo trabalhado (figura 65) e o aplicamos nos métodos de aproximação (figura 66).

P9 =O9+$K$7

Escolha do intervalo para o problema 9: 1200*2^(0,4t) - 38400 = 0

1ª escolha a = 1 b= 20 k = 0,9048

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1,000	1,905	2,810	3,714	4,619	5,524	6,429	7,333	8,238	9,143	10,048	10,952	11,857	12,762	13,667	14,571	15,476	16,381	17,286	18,190	19,095	20,000
p(x)	-36816,59	-36365,13	-35784,94	-35039,33	-34081,13	-32849,73	-31267,23	-29233,52	-26619,96	-23261,22	-18944,83	-13397,74	-6269,05	2892,17	14665,45	29795,56	49239,58	74227,50	106340,03	147608,52	200643,55	268800,00

2ª escolha a = 11,857 b= 12,762 k = 0,0431

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	11,857	11,900	11,943	11,986	12,029	12,072	12,116	12,159	12,202	12,245	12,288	12,331	12,374	12,417	12,460	12,503	12,547	12,590	12,633	12,676	12,719	12,762
p(x)	-6270,33	-5884,12	-5493,27	-5097,73	-4697,43	-4292,32	-3882,33	-3467,43	-3047,53	-2622,58	-2192,53	-1757,31	-1316,86	-871,11	-420,01	36,52	498,54	966,10	1439,29	1918,17	2402,80	2893,26

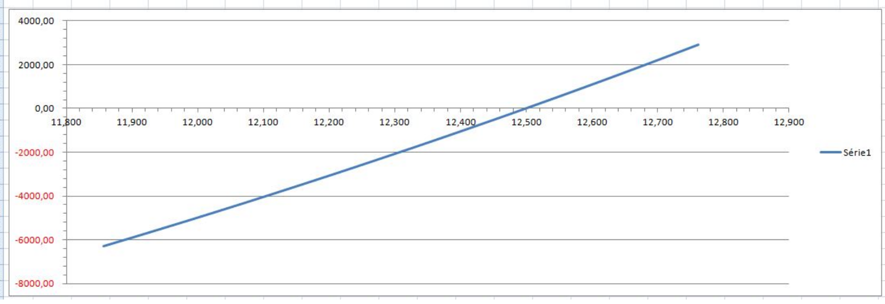


Figura 65 – Escolha do intervalo que contém a raiz

K1

Cálculo da aproximação de raiz de 1200*2^(0,4t) - 38400 = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
1	12,46000000000000	-423,51681097220700		31,95350932890140	12,50300000000000	12,48150000000000	-196,46042094365100	0,04300000000000	Não
2	12,48150000000000	-196,46042094365100		31,95350932890140	12,50300000000000	12,49225000000000	-82,42365448853520	0,02150000000000	Não
30	12,49999999993110	-0,00000073377305		0,00000011896191	12,50000000001120	12,49999999997110	-0,00000030739466	0,00000000008009	Não
31	12,49999999997110	-0,00000030739466		0,00000011896191	12,50000000001120	12,49999999999120	-0,00000009421638	0,00000000004005	Sim

(a) Método da bissecção

K1

Cálculo da aproximação de raiz de 1200*2^(0,4t) - 38400 = 0 pelo método da posição falsa

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
1	12,46000000000000	-423,51681097220700		31,95350932890140	12,50300000000000	12,49998333603770	-0,17741647550429	0,04300000000000	Não
2	12,49998333603770	-0,17741647550429		31,95350932890140	12,50300000000000	12,49999999307060	-0,00007377544534	0,00301666396228	Não
3	12,49999999307060	-0,00007377544534		31,95350932890140	12,50300000000000	12,49999999999710	-0,00000003069727	0,00300000692939	Não
4	12,49999999999710	-0,00000003069727		31,95350932890140	12,50300000000000	12,50000000000000	0,00000000000000	0,00300000000288	Não
5	12,50000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	12,50000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 66 – Aplicação dos processos de aproximação

Analisando apenas o método da bissecção, a utilização dos métodos de aproximação parece desnecessária, mas em uma situação fora da sala de aula, nenhum conhecimento sobre potências seria necessário.

Problema 10 *Analistas do mercado imobiliário de um município estimam que o valor ($\boldsymbol{v}$), em reais, de um apartamento seja dado pela lei $v(t) = 250000 \cdot (1,05)^t$, sendo t o número de anos (t = 0, 1, 2, ...) contados a partir da data de entrega do apartamento. Depois de quantos anos da data da entrega o apartamento estará valendo 1,525 milhão de reais? (Use as aproximações da tabela seguinte).*

$\mathbf{t}$	*35*	*36*	*37*	*38*	*40*
$\mathbf{1,05^t}$	*5,5*	*5,8*	*6,1*	*6,4*	*7,0*

Usando a tabela, a resolução seria a seguinte

$$\begin{aligned} 250000 \cdot (1,05)^t &= 1525000 \\ (1,05)^t &= \frac{1525000}{250000} \\ (1,05)^t &= 6,1 \end{aligned}$$

Pela tabela, o resultado seria $t = 37$. E se não tivéssemos a tabela? Como seria feito o cálculo sem a aplicação de outros conceitos matemáticos?

Novamente, como temos uma contagem de tempo, podemos partir apenas de intervalos positivos (figura 67).

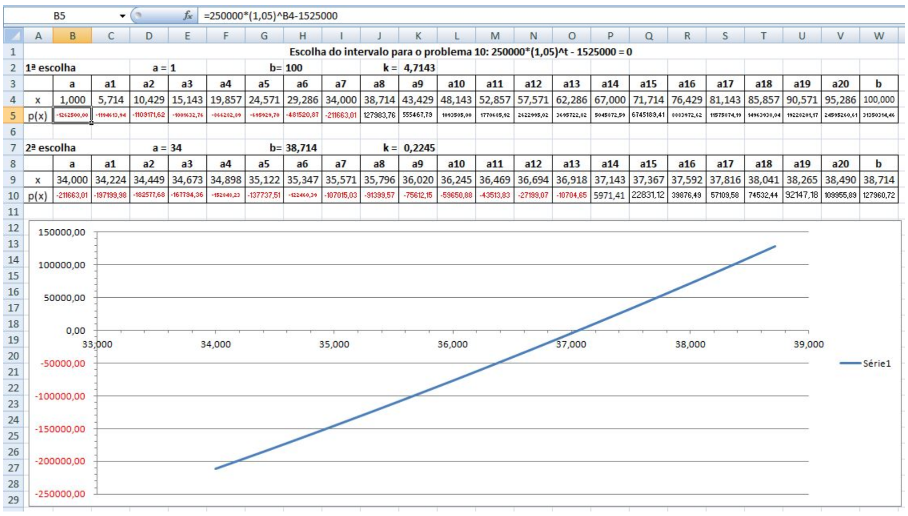


Figura 67 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Mesmo com vários passos no processo da bissecção, os métodos de aproximação (figura 68) se mostram mais eficazes para este tipo de problema, quando não se tem uma tabela com valores prévios para serem usados.

C4 f_x =250000*(1,05)^B4-1525000

	Cálculo da aproximação de raiz de 250000*(1,05)^t - 1525000 = 0 pelo método da bissecção								
	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b				0,0000001
4	1	36,91800000000000	-10718,72616211340000	5996,31021755514000	37,14300000000000	37,03050000000000	-2384,14467819733000	0,22500000000000	Não
5	2	37,03050000000000	-2384,14467819733000	5996,31021755514000	37,14300000000000	37,08675000000000	1800,33284526970000	0,11250000000000	Não
6	3	37,03050000000000	-2384,14467819733000	1800,33284526970000	37,08675000000000	37,05862500000000	-293,34142569778400	0,05625000000000	Não
38	35	37,06256787534440	-0,00000075506978	0,00000021955930	37,06256787535750	37,06256787535090	-0,00000026798807	0,00000000001310	Não
39	36	37,06256787535090	-0,00000026798807	0,00000021955930	37,06256787535750	37,06256787535420	-0,00000002421439	0,00000000000655	Sim

(a) Método da bissecção

C4 f_x =250000*(1,05)^B4-1525000

	Cálculo da aproximação de raiz de 250000*(1,05)^t - 1525000 = 0 pelo método da posição falsa								
	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média ponderada (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b				0,0000001
4	1	36,91800000000000	-10718,72616211340000	5996,31021755514000	37,14300000000000	37,06228406446120	-21,11680341418830	0,22500000000000	Não
5	2	37,06228406446120	-21,11680341418830	5996,31021755514000	37,14300000000000	37,06256731883840	-0,04140758095309	0,08071593553879	Não
6	3	37,06256731883840	-0,04140758095309	5996,31021755514000	37,14300000000000	37,06256787426330	-0,00008119433187	0,08043268116159	Não
7	4	37,06256787426330	-0,00008119433187	5996,31021755514000	37,14300000000000	37,06256787535240	-0,00000015902333	0,08043212573673	Não
8	5	37,06256787535240	-0,00000015902333	5996,31021755514000	37,14300000000000	37,06256787535450	0,00000000000000	0,08043212464762	Não
9	6	37,06256787535450	0,00000000000000	0,00000000000000	37,06256787535450	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 68 – Aplicação dos processos de aproximação

7.4.2 Função logarítmica

A função dos logaritmos é facilitar o trabalho com potências quando a base e o expoente são positivos e o expoente é diferente de 1. Como há muitos cálculos envolvidos, sempre é recomendado utilizar uma tábua de logaritmos ou uma calculadora com as funções "log" ou "10^x", além das propriedades.

Suas aplicações são semelhantes às aplicações das funções exponenciais.

Problema 11 *Em quantos anos 500g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use $Q = Q_0 \cdot {}^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.*

A resolução do problema seria a seguinte:

$$
\begin{aligned}
Q &= Q_0 \cdot {}^{-rt} \\
100 &= 500 \cdot {}^{-0{,}03t} \\
\frac{100}{500} &= {}^{-0{,}03t} \\
\ln\left(\frac{1}{5}\right) &= \ln {}^{0{,}03t} \\
\ln 1 - \ln 5 &= -0,03t \cdot \ln \\
-\ln 5 &= -0,03t \\
t = \frac{-\ln 5}{-0,03} &= \frac{1,6094}{0,03} \\
t &\simeq 53,6
\end{aligned}
$$

Sem a aplicação das propriedades, ou a tábua de logaritmos, os cálculos se tornam massivos. Ao levar o problema para os modelos de aproximação, iniciamos com o intervalo da figura 69.

B5 =500*EXP(-0,03*B4) - 100

Escolha do intervalo para o problema 11: 500*e^(-0,03t) - 100 = 0

1ª escolha a = 1 b= 100 k = 4,7143

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1,000	5,714	10,429	15,143	19,857	24,571	29,286	34,000	38,714	43,429	48,143	52,857	57,571	62,286	67,000	71,714	76,429	81,143	85,857	90,571	95,286	100,000
p(x)	385,22	321,23	265,68	217,45	175,58	139,24	107,69	80,30	56,52	35,88	17,96	2,40	-11,10	-22,83	-33,01	-41,84	-49,51	-56,17	-61,95	-66,97	-71,32	-75,11

2ª escolha a = 52,857 b= 57,571 k = 0,2245

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	52,857	53,081	53,306	53,530	53,755	53,979	54,204	54,428	54,653	54,877	55,102	55,326	55,551	55,775	56,000	56,224	56,449	56,673	56,898	57,122	57,347	57,571
p(x)	2,40	1,71	1,03	0,35	-0,32	-0,99	-1,65	-2,31	-2,97	-3,62	-4,27	-4,91	-5,55	-6,18	-6,81	-7,44	-8,06	-8,68	-9,29	-9,90	-10,50	-11,10

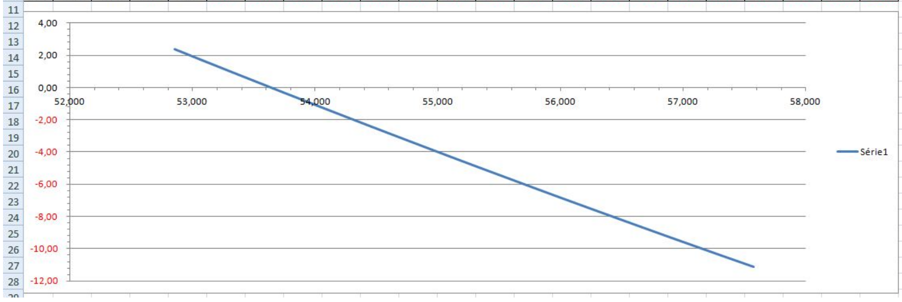


Figura 69 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Novamente, analisando os resultados dos métodos de aproximação (figura 70), eles se tornam eficazes por não necessitarem da utilização de conhecimentos prévios.

B4 53,53

Cálculo da aproximação de raiz da equação 500*e^(-0,03t) - 100 = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)	p(b)	b				0,0000001
1	53,53000000000000	0,35441782334003	-0,32069343316572	53,75500000000000	53,64250000000000	0,01629257050517	0,22500000000000	Não
2	53,64250000000000	0,01629257050517	-0,32069343316572	53,75500000000000	53,69875000000000	-0,15234259726685	0,11250000000000	Não
22	53,64793040037150	0,00000004229544	-0,00000027956965	53,64793050765990	53,64793045401570	-0,00000011863710	0,0000010728836	Não
23	53,64793040037150	0,00000004229544	-0,00000011863710	53,64793045401570	53,64793042719360	-0,00000003817084	0,0000005364419	Sim

(a) Método da bissecção

A10 7

Cálculo da aproximação de raiz da equação 500*e^(-0,03t) - 100 = 0 pelo método da posição falsa

Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média ponderada (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)	p(b)	b				0,0000001
1	53,53000000000000	0,35441782334003	-0,32069343316572	53,75500000000000	53,64811980541440	-0,00056817121899	0,22500000000000	Não
2	53,53000000000000	0,35441782334003	-0,00056817121899	53,64811980541440	53,64793074929710	-0,00000100448118	0,11811980541437	Não
3	53,53000000000000	0,35441782334003	-0,00000100448118	53,64793074929710	53,64793041506190	-0,00000000177582	0,11793074929707	Não
4	53,53000000000000	0,35441782334003	-0,00000000177582	53,64793041506190	53,64793041447100	-0,00000000000310	0,11793041506195	Não
5	53,53000000000000	0,35441782334003	-0,00000000000310	53,64793041447100	53,64793041447000	0,00000000000000	0,11793041447105	Não
6	53,64793041447000	0,00000000000000	0,00000000000000	53,64793041447000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 70 – Aplicação dos processos de aproximação

Problema 12 *A expressão $M = A(1+i)^n$ nos permite calcular o montante M, resultante da aplicação do capital A a juros compostos à taxa anual i, ao completar um período de n anos. Nessas condições, se o capital de R\$ 800 000,00 for aplicado a juros compostos e à taxa anual de 12%, após quanto tempo da aplicação serão obtidos juros no valor de R\$ 700 000,00?*

Antes de iniciar a resolução, devemos lembrar que o montante é igual ao capital inicial mais os juros da operação, logo, M = 1500000.

$$M = A(1+i)^n$$
$$1500000 = 800000 \cdot (1+0,12)^n$$
$$\frac{1500000}{800000} = (1,12)^n$$
$$\log \frac{15}{8} = \log(1,12)^n$$
$$\log 15 - \log 8 = n \cdot \log 1,12$$
$$n = \frac{1,1761 - 0,9031}{0,0492}$$
$$n = \frac{0,2730}{0,0492}$$
$$n \simeq 5,54$$

Fazendo a aplicação para o cálculo, o tempo para o intervalo não pode ser zero (figura 71).

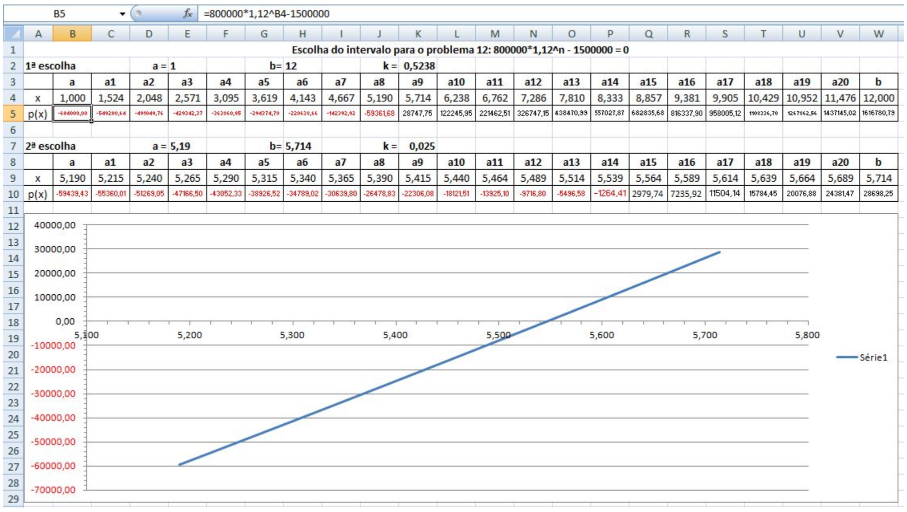


Figura 71 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Este é um problema bem próximo da realidade, então a sua aplicação em uma planilha eletrônica (figura 72) é de grande importância, principalmente para se verificar resultados.

B4 f_x 5,539

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz da equação 800000*1,12^n - 1500000 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	5,53900000000000	-1321,02521602786000		2931,07845384883000	5,56400000000000	5,55150000000000	803,52072754153000	0,02500000000000	Não
5	2	5,53900000000000	-1321,02521602786000		803,52072754153000	5,55150000000000	5,54525000000000	-259,12845047540000	0,01250000000000	Não
37	34	5,54677447920118	-0,00000010011718		0,00000039464794	5,54677447920409	5,54677447920264	0,00000014738180	0,00000000000291	Não
38	35	5,54677447920118	-0,00000010011718		0,00000014738180	5,54677447920264	5,54677447920191	0,00000002374873	0,00000000000146	Sim

(a) Método da bissecção

A30 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz da equação 800000*1,12^n - 1500000 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	5,53900000000000	-1321,02521602786000		2931,07845384883000	5,56400000000000	5,54676689209971	-1,28975389851257	0,02500000000000	Não
5	2	5,54676689209971	-1,28975389851257		2931,07845384883000	5,56400000000000	5,54677447179861	-0,00125848501921	0,01723310790029	Não
6	3	5,54677447179861	-0,00125848501921		2931,07845384883000	5,56400000000000	5,54677447919454	-0,00000122794881	0,01722552820139	Não
7	4	5,54677447919454	-0,00000122794881		2931,07845384883000	5,56400000000000	5,54677447920176	0,00000000000000	0,01722552080546	Não
8	5	5,54677447920176	0,00000000000000		0,00000000000000	5,54677447920176	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

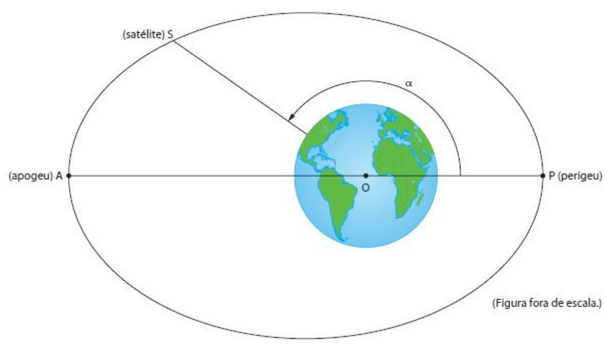
(b) Método da posição falsa

Figura 72 – Aplicação dos processos de aproximação

7.5 2º Ano do Ensino Médio

Em termos de equação, o 2º ano é marcado pelas equações trigonométricas e pelos sistemas lineares. Nesta seção, aplicaremos os métodos numéricos nas equações trigonométricas, pois a resolução dos sistemas lineares requerem um processo não comportado pela aplicação de planilhas eletrônicas.

Problema 13 *(Vunesp/modificado) A figura abaixo mostra a órbita elíptica de um satélite S em torno do planeta Terra. Na elipse estão assinalados dois pontos: o ponto* ***A*** *(apogeu), que é o ponto da órbita mais afastado do centro da Terra, e o ponto* ***P*** *(perigeu), que é o ponto da órbita mais próximo do centro da Terra. O ponto* ***O*** *indica o centro da Terra e o ângulo $P\hat{O}S$ tem a medida α, com $0° \leqslant \alpha \leqslant 360°$. A altura* ***H****, em km, do satélite à superfície da Terra, dependendo do ângulo a, é dada aproximadamente pela função:* $H = \left(-64 + \dfrac{7980}{100 + 5 \cdot \cos\alpha}\right) \cdot 10^2$.



Determine os valores de α, quando a altura ***H*** *do satélite é de 1.580 km.*

A solução do problema seria a seguinte:

$$
\begin{aligned}
H &= \left(-64 + \frac{7980}{100 + 5 \cdot \cos\alpha}\right) \cdot 10^2 \\
1580 &= \left(-64 + \frac{7980}{100 + 5 \cdot \cos\alpha}\right) \cdot 10^2 \\
\frac{1580}{100} &= -64 + \frac{7980}{100 + 5 \cdot \cos\alpha} \\
15,80 + 64 &= \frac{7980}{100 + 5 \cdot \cos\alpha} \\
79,80 \cdot (100 + 5 \cdot \cos\alpha) &= 7980 \\
100 + 5 \cdot \cos\alpha &= \frac{7980}{79,80} \\
5 \cdot \cos\alpha &= 100 - 100 \\
\cos\alpha &= 0
\end{aligned}
$$

Então, pelas condições do problema, teríamos $\alpha = 90$ž ou $\alpha = 270$ž.

Para aplicar os métodos numéricos, precisamos mudar a unidade dos ângulos de graus para radianos, usando a função "pi()", da planilha eletrônica. Esse processo nos permitira trabalhar com intervalos reais (figura 73).

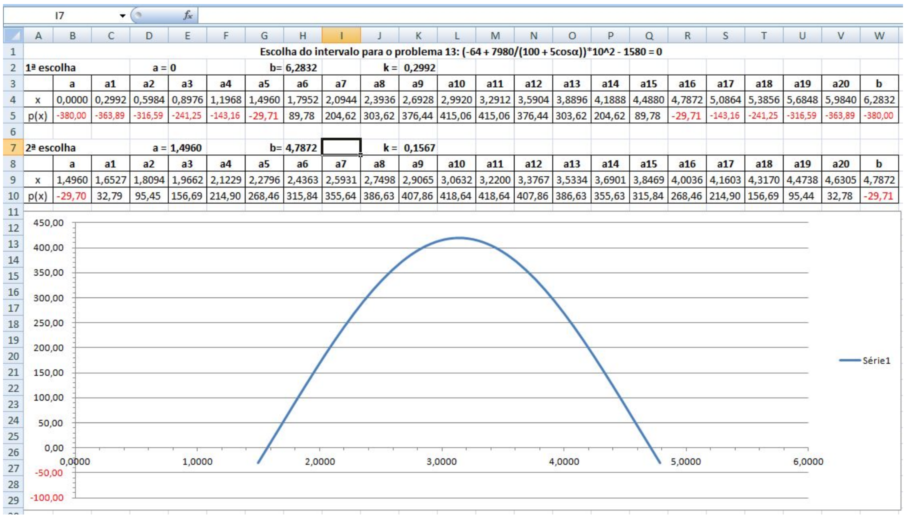


Figura 73 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Este é um problema de aplicação prática, que pode ser trabalhado juntamente com a disciplina de física. Como fizemos a conversão graus $\Rightarrow$ radianos para a aplicação, devemos utilizar os valores aproximados (figuras 74 e 75) e convertê-los novamente para grau, fazendo a multiplicação por $\dfrac{360}{2\pi} = 57,2957805$ (com $\pi = 3,1415926$, visto que a precisão é de 7 casas decimais).

(I) Método da bissecção:

- Resultado do intervalo 1: $1,5707960 \cdot 57,2957805 = 90,0000000$
- Resultado do intervalo 2: $4,7123890 \cdot 57,2957805 = 270,0000000$

(II) Método da posição falsa:

- Resultado do intervalo 1: $1,5707963 \cdot 57,2957805 = 90,0000000$
- Resultado do intervalo 2: $4,7123889 \cdot 57,2957805 = 270,0000000$

B4 | 1,496

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de (-64 + 7980/(100 + 5cosα))*10^2 - 1580 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	1,49600000000000	-29,70492800465810		32,77711925596780	1,65270000000000	1,57435000000000	1,41816460860696	0,15670000000000	Não
5	2	1,49600000000000	-29,70492800465810		1,41816460860696	1,57435000000000	1,53517500000000	-14,18464538633410	0,07835000000000	Não
6	3	1,53517500000000	-14,18464538633410		1,41816460860696	1,57435000000000	1,55476250000000	-6,39209850898123	0,03917500000000	Não
26	23	1,57079629859924	-0,00001125006611		0,00000365665028	1,57079633595943	1,57079631727934	-0,00000379670723	0,0000003736019	Não
27	24	1,57079631727934	-0,00000379670723		0,00000365665028	1,57079633595943	1,57079632661939	-0,00000007002859	0,0000001868010	Sim

(a) Método da bissecção

D34

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de (-64 + 7980/(100 + 5cosα))*10^2 - 1580 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	1,49600000000000	-29,70492800465810		32,77711925596780	1,65270000000000	1,57049759446764	-0,11919241647183	0,15670000000000	Não
5	2	1,57049759446764	-0,11919241647183		32,77711925596780	1,65270000000000	1,57079543647050	-0,00035523941938	0,08220240553236	Não
6	3	1,57079543647050	-0,00035523941938		32,77711925596780	1,65270000000000	1,57079632414504	-0,00000105729350	0,08190456352950	Não
7	4	1,57079632414504	-0,00000105729350		32,77711925596780	1,65270000000000	1,57079632678701	-0,00000000314662	0,08190367585496	Não
8	5	1,57079632678701	-0,00000000314662		32,77711925596780	1,65270000000000	1,57079632679487	-0,00000000001023	0,08190367321299	Não
9	6	1,57079632679487	-0,00000000001023		32,77711925596780	1,65270000000000	1,57079632679490	0,00000000000000	0,08190367320513	Não
10	7	1,57079632679490	0,00000000000000		0,00000000000000	1,57079632679490	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 74 – Aplicação dos processos de aproximação

C33

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de (-64 + 7980/(100 + 5cosα))*10^2 - 1580 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	4,63050000000000	32,77122837767590		-29,71073059966510	4,78720000000000	4,70885000000000	1,41230013057884	0,15670000000000	Não
5	2	4,70885000000000	1,41230013057884		-29,71073059966510	4,78720000000000	4,74802500000000	-14,19048328739220	0,07835000000000	Não
6	3	4,70885000000000	1,41230013057884		-14,19048328739220	4,74802500000000	4,72843750000000	-6,39795079896180	0,03917500000000	Não
29	26	4,71238897681534	0,00000142417048		-0,00000043916975	4,71238898148537	4,71238897915035	0,00000049249957	0,0000000467002	Não
30	27	4,71238897915035	0,00000049249957		-0,00000043916975	4,71238898148537	4,71238898031786	0,00000002666502	0,0000000233501	Sim

(a) Método da bissecção

C37

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de (-64 + 7980/(100 + 5cosα))*10^2 - 1580 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	4,63050000000000	32,77122837767590		-29,71073059966510	4,78720000000000	4,71268774780484	-0,11920641811571	0,15670000000000	Não
5	2	4,63050000000000	32,77122837767590		-0,11920641811571	4,71268774780484	4,71238987071414	-0,00035524143436	0,08218774780484	Não
6	3	4,63050000000000	32,77122837767590		-0,00035524143436	4,71238987071414	4,71238898303427	-0,00000105717982	0,08188987071414	Não
7	4	4,63050000000000	32,77122837767590		-0,00000105717982	4,71238898303427	4,71238898039258	-0,00000000314662	0,08188898303427	Não
8	5	4,63050000000000	32,77122837767590		-0,00000000314662	4,71238898039258	4,71238898038471	-0,00000000000887	0,08188898039258	Não
9	6	4,63050000000000	32,77122837767590		-0,00000000000887	4,71238898038471	4,71238898038469	-0,00000000000182	0,08188898038471	Não
10	7	4,63050000000000	32,77122837767590		-0,00000000000182	4,71238898038469	4,71238898038469	0,00000000000000	0,08188898038469	Não
11	8	4,71238898038469	0,00000000000000		0,00000000000000	4,71238898038469	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 75 – Aplicação dos processos de aproximação

Problema 14 *(Vunesp/modificado) Uma equipe de agrônomos coletou dados da temperatura (em ºC) do solo em uma determinada região, durante três dias. A medição da temperatura começou a ser feita às 3 horas da manhã do primeiro dia e terminou 72 horas depois. Os dados puderam ser aproximados pela função* $H(t) = 15 + 5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right)$, *em que* $\boldsymbol{t}$ *indica o tempo (em horas) decorrido após o início da observação de H(t) à temperatura (em ºC) no instante* $\boldsymbol{t}$*. Após quantas horas do início a temperatura registrada foi de 12,5º?*

Como queremos a temperatura de 20º temos:

$$
\begin{aligned}
H(t) &= 15 + 5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) \\
12,5 &= 15 + 5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) \\
12,5 - 15 &= 5 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) \\
\frac{-2,5}{5} &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right) \\
-0,5 &= \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2}\right)
\end{aligned}
$$

Da equação anterior, podemos definir que $\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$. Então:

$$
\begin{aligned}
\frac{\pi}{12}t + \frac{3\pi}{2} &= -\frac{\pi}{6} + 2k\pi) \\
\frac{\pi}{12}t + \frac{6 \cdot 3\pi}{12} &= -\frac{2 \cdot \pi}{6} + \frac{12 \cdot 2k\pi}{12} \\
\pi \cdot t + 18\pi &= -2\pi + 24k\pi \\
t &= \frac{-2\pi + 24k\pi - 18\pi}{\pi} \\
t &= 24k - 20, \quad \text{com } k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Como a contagem se inicia às 3 horas, podemos considerá-la como hora zero ($t = 0$), então, $t \in [0, 72]$, portanto, temos que a temperatura se registra após 4, 20, 28, 44, 52, e 68 horas após o início do experimento.

Como parte de um experimento, a fórmula seria registrada para estudo, logo, poderiam ser aplicados os métodos numéricos (figura 76). Podemos observar que essa temperatura é registrada em 6 momentos do período observado.

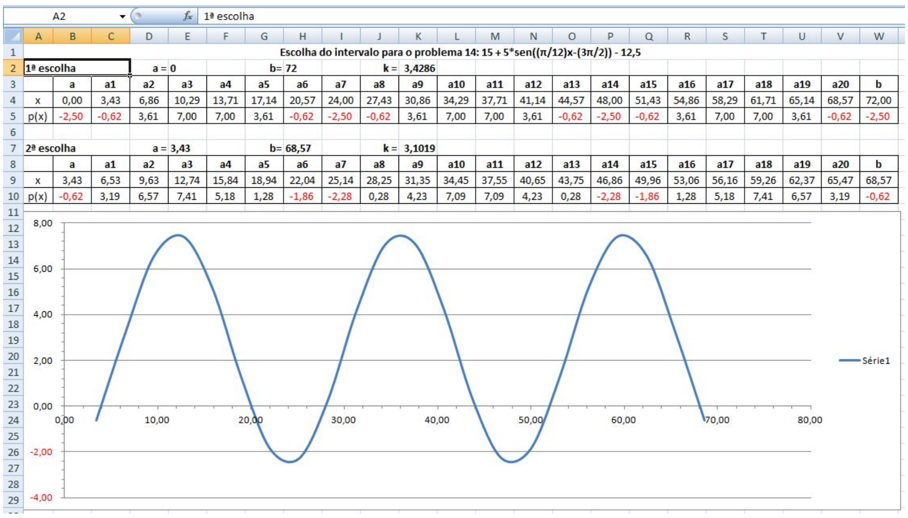


Figura 76 – Escolha do intervalo que contém a raiz

A31

Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da bissecção

	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b				0,0000001
4	1	3,43000000000000	-0,61598676984725	3,19154438081359	6,53000000000000	4,98000000000000	1,18063475017313	3,10000000000000	Não
5	2	3,43000000000000	-0,61598676984725	1,18063475017313	4,98000000000000	4,20500000000000	0,23588106845168	1,55000000000000	Não
6	3	3,43000000000000	-0,61598676984725	0,23588106845168	4,20500000000000	3,81750000000000	-0,20395486123143	0,77500000000000	Não
28	25	3,99999982595444	-0,00000019730233	0,00000001216247	4,00000001072884	3,99999991834164	-0,00000009256993	0,00000018477440	Não
29	26	3,99999991834164	-0,00000009256993	0,00000001216247	4,00000001072884	3,99999996453524	-0,00000004020373	0,00000009238720	Sim

(a) Método da bissecção

C33

Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da posição falsa

	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	3,43000000000000	-0,61598676984725	3,19154438081359	6,53000000000000	3,93152156632916	-0,07722294058760	3,10000000000000	Não
5	2	3,93152156632916	-0,07722294058760	3,19154438081359	6,53000000000000	3,99290927795603	-0,00803390481537	2,59847843367084	Não
6	3	3,99290927795603	-0,00803390481537	3,19154438081359	6,53000000000000	3,99927972541794	-0,00081647653495	2,53709072204397	Não
17	14	3,99999999999992	-0,00000000000009	3,19154438081359	6,53000000000000	3,99999999999999	0,00000000000000	2,53000000000008	Não
18	15	3,99999999999999	0,00000000000000	0,00000000000000	3,99999999999999	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 77 – Aplicação dos processos de aproximação

C30

Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da bissecção

	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b				0,0000001
4	1	18,94000000000000	1,28192494106989	-1,85606905560094	22,04000000000000	20,49000000000000	-0,53341175501000	3,10000000000000	Não
5	2	18,94000000000000	1,28192494106989	-0,53341175501000	20,49000000000000	19,71500000000000	0,32973893842656	1,55000000000000	Não
6	3	19,71500000000000	0,32973893842656	-0,53341175501000	20,49000000000000	20,10250000000000	-0,11528252223908	0,77500000000000	Não
28	25	19,99999991297720	0,00000009865116	-0,00000011081364	20,00000009775160	20,00000000536440	-0,00000000608123	0,00000018477440	Não
29	26	19,99999991297720	0,00000009865116	-0,00000000608123	20,00000000536440	19,99999995917080	0,00000004628496	0,00000009238720	Sim

(a) Método da bissecção

E38

Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da posição falsa

	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	18,94000000000000	1,28192494106989	-1,85606905560094	22,04000000000000	20,20640373484870	-0,23022147513477	3,10000000000000	Não
5	2	18,94000000000000	1,28192494106989	-0,23022147513477	20,20640373484870	20,01359612519610	-0,01539703232360	1,26640373484867	Não
6	3	18,94000000000000	1,28192494106989	-0,01539703232360	20,01359612519610	20,00085434283130	-0,00096844151122	1,07359612519615	Não
15	12	18,94000000000000	1,28192494106989	-0,00000000000023	20,00000000000020	20,00000000000000	0,00000000000000	1,06000000000021	Não
16	13	20,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	20,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 78 – Aplicação dos processos de aproximação

D38

Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da bissecção

	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b				0,0000001
4	1	25,14000000000000	-2,27896507399165	0,28855654890499	28,25000000000000	26,69500000000000	-1,30627719698554	3,11000000000000	Não
5	2	26,69500000000000	-1,30627719698554	0,28855654890499	28,25000000000000	27,47250000000000	-0,57228668460309	1,55500000000000	Não
6	3	27,47250000000000	-0,57228668460309	0,28855654890499	28,25000000000000	27,86125000000000	-0,15560665534118	0,77750000000000	Não
28	25	27,99999996364120	-0,00000004121728	0,00000016892321	28,00000014901160	28,00000005632640	0,00000006385297	0,00000018537045	Não
29	26	27,99999996364120	-0,00000004121728	0,00000006385297	28,00000005632640	28,00000000998380	0,00000001131784	0,00000009268522	Sim

(a) Método da bissecção

B31

Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da posição falsa

	Passo	Aproximação por falta		Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
		a	p(a)	p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	25,14000000000000	-2,27896507399165	0,28855654890499	28,25000000000000	27,90047582887260	-0,11196172910462	3,11000000000000	Não
5	2	27,90047582887260	-0,11196172910462	0,28855654890499	28,25000000000000	27,99818255715920	-0,00206001485202	0,34952417112736	Não
6	3	27,99818255715920	-0,00206001485202	0,28855654890499	28,25000000000000	27,99996754720080	-0,00003678920132	0,25181744284082	Não
12	9	27,99999999999990	-0,00000000000007	0,28855654890499	28,25000000000000	28,00000000000000	0,00000000000000	0,25000000000006	Não
13	10	28,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000000	28,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 79 – Aplicação dos processos de aproximação

E39

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	43,85000000000000	0,17192739837444		-2,27896507399165	46,86000000000000	45,35500000000000	-1,34839098417964	3,01000000000000	Não
5	2	43,85000000000000	0,17192739837444		-1,34839098417964	45,35500000000000	44,60250000000000	-0,64914448532721	1,50500000000000	Não
6	3	43,85000000000000	0,17192739837444		-0,64914448532721	44,60250000000000	44,22625000000000	-0,25194834517631	0,75250000000001	Não
28	25	43,99999984085560	0,00000018041000		-0,00000002297355	44,00000002026560	43,99999993056060	0,00000007871822	0,00000017940998	Não
29	26	43,99999993056060	0,00000007871822		-0,00000002297355	44,00000002026560	43,99999997541310	0,00000002787233	0,00000008970499	Sim

(a) Método da bissecção

B44

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	43,85000000000000	0,17192739837444		-2,27896507399165	46,86000000000000	44,06114817354980	-0,06899577777737	3,01000000000000	Não
5	2	43,85000000000000	0,17192739837444		-0,06899577777737	44,06114817354980	44,00067938556090	-0,00077012863852	0,21114817354981	Não
6	3	43,85000000000000	0,17192739837444		-0,00077012863852	44,00067938556090	44,00000744478640	-0,00000843958826	0,15067938556089	Não
11	8	43,85000000000000	0,17192739837444		-0,00000000000012	44,00000000000010	44,00000000000000	0,00000000000000	0,15000000000011	Não
12	9	44,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	44,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 80 – Aplicação dos processos de aproximação

E32

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	49,96000000000000	-1,85606905560095		1,28192494106988	53,06000000000000	51,51000000000000	-0,53341175501001	3,10000000000000	Não
5	2	51,51000000000000	-0,53341175501001		1,28192494106988	53,06000000000000	52,28500000000000	0,32973893842657	1,55000000000000	Não
6	3	51,51000000000000	-0,53341175501001		0,32973893842657	52,28500000000000	51,89750000000000	-0,11528252223908	0,77500000000000	Não
28	25	51,99999990224840	-0,00000011081365		0,00000009865117	52,00000008702280	51,99999999463560	-0,00000000608124	0,00000018477439	Não
29	26	51,99999999463560	-0,00000000608124		0,00000009865117	52,00000008702280	52,00000004082920	0,00000004628496	0,00000009238720	Sim

(a) Método da bissecção

A33

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	49,96000000000000	-1,85606905560095		1,28192494106988	53,06000000000000	51,79359626515130	-0,23022147513478	3,10000000000000	Não
5	2	51,79359626515130	-0,23022147513478		1,28192494106988	53,06000000000000	51,98640387480390	-0,01539703232362	1,26640373484867	Não
6	3	51,98640387480390	-0,01539703232362		1,28192494106988	53,06000000000000	51,99914565716870	-0,00096844151121	1,07359612519615	Não
18	15	52,00000000000000	-0,00000000000002		0,00000000000001	52,00000000000000	52,00000000000000	0,00000000000000	0,00000000000001	Sim
19	16	52,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	52,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 81 – Aplicação dos processos de aproximação

E41

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	65,47000000000000	3,19154438081362		-0,61598676984723	68,57000000000000	67,02000000000000	1,18063475017316	3,09999999999999	Não
5	2	67,02000000000000	1,18063475017316		-0,61598676984723	68,57000000000000	67,79500000000000	0,23588106845172	1,55000000000000	Não
6	3	67,79500000000000	0,23588106845172		-0,61598676984723	68,57000000000000	68,18250000000000	-0,20395486123142	0,77500000000001	Não
28	25	67,99999998927110	0,00000001216251		-0,00000019730230	68,00000017404550	68,00000008165830	-0,00000009256991	0,00000018477439	Não
29	26	67,99999998927110	0,00000001216251		-0,00000009256991	68,00000008165830	68,00000003546480	-0,00000004020370	0,00000009238720	Sim

(a) Método da bissecção

A29

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 15 + 5*sen((π/12)x-(3π/2)) - 12,5 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	65,47000000000000	3,19154438081362		-0,61598676984723	68,57000000000000	68,06847843367090	-0,07722294058762	3,09999999999999	Não
5	2	65,47000000000000	3,19154438081362		-0,07722294058762	68,06847843367090	68,00709072204400	-0,00803390481535	2,59847843367086	Não
6	3	65,47000000000000	3,19154438081362		-0,00803390481535	68,00709072204400	68,00072027458210	-0,00081647653497	2,53709072204397	Não
17	14	65,47000000000000	3,19154438081362		-0,00000000000009	68,00000000000010	68,00000000000000	0,00000000000000	2,53000000000009	Não
18	15	68,00000000000000	0,00000000000000		0,00000000000000	68,00000000000000	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 82 – Aplicação dos processos de aproximação

7.6 3º Ano do Ensino Médio

Além do estudo sobre equações polinomiais de grau n, o 3º ano E.M., também é contemplado com o aprofundamento da matemática financeira.

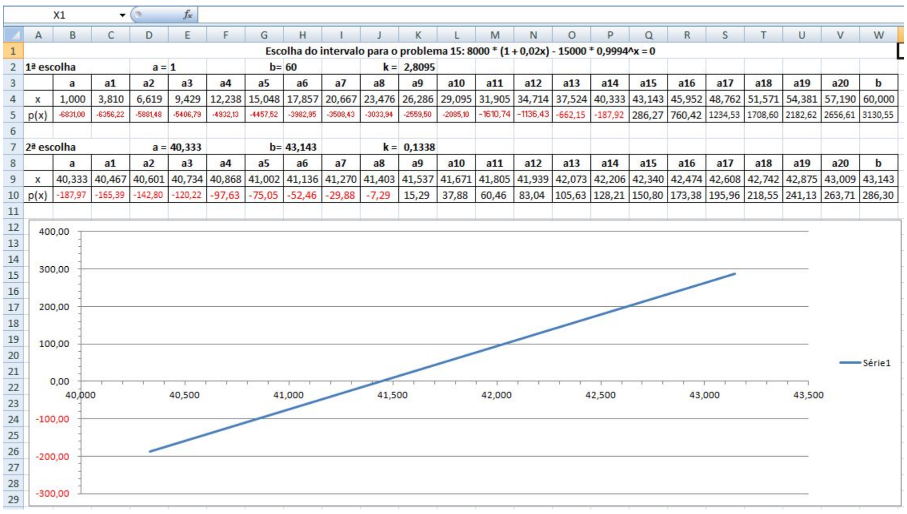
Problema 15 *Arnaldo analisa a possibilidade de aplicar um capital de R\$ 8.000,00,na modalidade de juros simples, com uma taxa de 2% ao mês. Ele deseja obter, ao final da aplicação, um montante suficiente para comprar uma moto, que atualmente custa R\$ 15.500,00. Sabendo que o valor da moto sofre uma desvalorização de 0,06%*[2] *ao mês, durante quanto tempo, no mínimo, Arnaldo deve manter o dinheiro aplicado para conseguir comprar a moto?*

De acordo com o problema, temos a seguintes equações:

- Montante da aplicação: $M = 8000 \cdot (1 + 0,02 \cdot t)$
- Montante da depreciação: $M = 15000 \cdot \underbrace{0,9994}_{1-0,0006}{}^{t}$
- Equação resultante $8000 \cdot (1 + 0,02 \cdot t) = 15000 \cdot 0,9994^t$

Este é um problema com uma resolução complexa, do ponto de vista da utilização das equações exponenciais. E dificilmente é tratado nos livros didáticos, pois envolve dois momentos distintos: aplicação e depreciação.

Utilizaremos os métodos numéricos, mesmo sabendo que o resultado é um número inteiro, por se tratar do tempo em meses, para que os alunos possam se habituar com eles.


Escolha do intervalo para o problema 15: 8000 * (1 + 0,02x) - 15000 * 0,9994^x = 0

1ª escolha a = 1 b= 60 k = 2,8095

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	1,000	3,810	6,619	9,429	12,238	15,048	17,857	20,667	23,476	26,286	29,095	31,905	34,714	37,524	40,333	43,143	45,952	48,762	51,571	54,381	57,190	60,000
p(x)	-6831,00	-6356,22	-5881,48	-5406,79	-4932,13	-4457,52	-3982,95	-3508,43	-3033,94	-2559,50	-2085,10	-1610,74	-1136,43	-662,15	-187,92	286,27	760,42	1234,53	1708,60	2182,62	2656,61	3130,55

2ª escolha a = 40,333 b= 43,143 k = 0,1338

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	40,333	40,467	40,601	40,734	40,868	41,002	41,136	41,270	41,403	41,537	41,671	41,805	41,939	42,073	42,206	42,340	42,474	42,608	42,742	42,875	43,009	43,143
p(x)	-187,97	-165,39	-142,80	-120,22	-97,63	-75,05	-52,46	-29,88	-7,29	15,29	37,88	60,46	83,04	105,63	128,21	150,80	173,38	195,96	218,55	241,13	263,71	286,30

Figura 83 – Escolha do intervalo que contém a raiz

[2] Esta é uma taxa fictícia, visto que o verdadeiro cálculo da depreciação necessita da análise de diversas variáveis

K1 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 8000 * (1 + 0,02x) - 15000 * 0,9994^x = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	40,33300000000000	-187,97367283090000		286,29807899455600	43,14300000000000	41,73800000000000	49,16740421371470	2,81000000000000	Não
5	2	40,33300000000000	-187,97367283090000		49,16740421371470	41,73800000000000	41,03550000000000	-69,40183347733180	1,40500000000000	Não
6	3	41,03550000000000	-69,40183347733180		49,16740421371470	41,73800000000000	41,38675000000000	-10,11688949254680	0,70250000000000	Não
32	29	41,44669067829100	-0,00000141085548		0,00000035595804	41,44669068875910	41,44669068352510	-0,00000052744690	0,00000001046806	Não
33	30	41,44669068352510	-0,00000052744690		0,00000035595804	41,44669068875910	41,44669068614210	-0,00000008574352	0,00000000523403	Sim

(a) Método da bissecção

K1 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de 8000 * (1 + 0,02x) - 15000 * 0,9994^x = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	40,33300000000000	-187,97367283090000		286,29807899455600	43,14300000000000	41,44672017966870	0,00497787641689	2,81000000000000	Não
5	2	40,33300000000000	-187,97367283090000		0,00497787641689	41,44672017966870	41,44669068716300	0,00000008657662	1,11372017966869	Não
6	3	40,33300000000000	-187,97367283090000		0,00000008657662	41,44669068716300	41,44669068665010	0,00000000000000	1,11369068716304	Não
7	4	41,44669068665010	0,00000000000000		0,00000000000000	41,44669068665010	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 84 – Aplicação dos processos de aproximação

Como resposta do problema, teríamos o prazo de 42 meses, embora a raiz da equação não seja esse número.

Para a aplicação dos métodos numéricos nas equações polinomiais com coeficientes reais, deve-se aplicar antes a *regra de sinais de Descartes* (definição 42), para um direcionamento da quantidade de raízes reais que devem ser procuradas. Embora a regra fale das raízes positivas, podemos aplicar $p(-x)$ para estimar a quantidade de raízes negativas.

Definição 42 (Regra de sinais de Descartes) *Dado um polinômio com coeficientes reais, o número de zeros reais positivos,* ***p****, desse polinômio, não excede o número* ***v*** *de variações de sinal dos coeficientes. Ainda mais,* ***v - p*** *é inteiro, par, não negativo.*

Com relação às limitações das planilhas eletrônicas, essa é a única definição específica sobre aproximação de polinômios que podemos aplicar.

Problema 16 *Resolva a equação* $x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0$.

Diferente das equações apresentadas nos livros didáticos, a única coisa que sabemos a respeito das suas raízes é que existem até 5 raízes ou nenhuma raiz real. Então, iniciaremos com a contagem das raízes reais positivas e negativas:

- Positivas: $x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0$, temos 2 variações de sinais, então ou possui 2 raízes, ou nenhuma, raiz real positiva.
- Negativa: $-x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 - 5x - 1 = 0$, temos 2 variações de sinais, então ou possui 2 raízes, ou nenhuma, raiz real negativa.

Com essa base, temos como refinar os intervalos (figura 85) com crescimento/decrescimento, ou vice versa, para encontrar essas variações.

Escolha do intervalo para o problema 16: x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0

1ª escolha — a = -5 — b= 5 — k = 0,4762

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
x	-5,0000	-4,5238	-4,0476	-3,5714	-3,0952	-2,6190	-2,1429	-1,6667	-1,1905	-0,7143	-0,2381
p(x)	-1751,0000	-967,5723	-488,1431	-216,2079	-77,7692	-18,3978	-0,2949	0,6461	-2,2220	-3,3621	-2,1146

	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	0,2381	0,7143	1,1905	1,6667	2,1429	2,6190	3,0952	3,5714	4,0476	4,5238	5,0000
p(x)	0,2409	3,4238	11,0907	33,7737	91,8185	218,3227	462,0741	890,4887	1592,5491	2681,7427	4299,0000

2ª escolha — a = -2,1429 — b= 0,2381 — k = 0,1134

	a	a1	a2	a3	a4	a5	a6	a7	a8	a9	a10
x	-2,1429	-2,0295	-1,9161	-1,8028	-1,6894	-1,5760	-1,4626	-1,3492	-1,2359	-1,1225	-1,0091
p(x)	-0,2955	0,8300	1,2567	1,1783	0,7587	0,1339	-0,5857	-1,3129	-1,9818	-2,5451	-2,9722

	a11	a12	a13	a14	a15	a16	a17	a18	a19	a20	b
x	-0,8957	-0,7823	-0,6689	-0,5556	-0,4422	-0,3288	-0,2154	-0,1020	0,0113	0,1247	0,2381
p(x)	-3,2468	-3,3647	-3,3314	-3,1601	-2,8694	-2,4808	-2,0169	-1,4985	-0,9432	-0,3623	0,2409

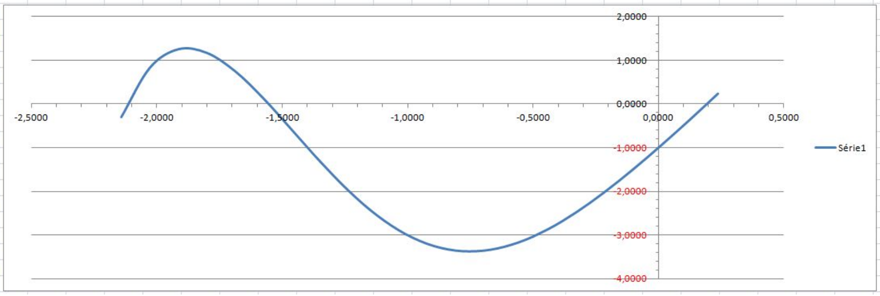


Figura 85 – Escolha do intervalo que contém a raiz

Pela análise dos intervalos, verificamos que a equação possui duas raízes reais negativas, e uma positiva. Aplicando os métodos numéricos, como mostra as figuras 86, 87, 88, chegamos às aproximações desejadas para as raízes da equação.

Cálculo da aproximação de raiz de x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0 pelo método da bissecção

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
1	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,83014720435311	-2,02950000000000	-2,08620000000000	0,36806095892125	0,11340000000000	Não
2	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,36806095892125	-2,08620000000000	-2,11455000000000	0,06323918828317	0,05670000000000	Não
3	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,06323918828317	-2,11455000000000	-2,12872500000000	-0,10916879371829	0,02835000000000	Não
23	-2,11988149552345	-0,00000026948700		0,00000005608523	-2,11988146848679	-2,11988148200512	-0,00000010670088	0,00000002703667	Não
24	-2,11988148200512	-0,00000010670088		0,00000005608523	-2,11988146848679	-2,11988147524595	-0,00000002530783	0,00000001351833	Sim

(a) Método da bissecção

Cálculo da aproximação de raiz de x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0 pelo método da posição falsa

Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
	a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
1	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,83014720435311	-2,02950000000000	-2,11312912537613	0,07976998848213	0,11340000000000	Não
2	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,07976998848213	-2,11312912537613	-2,11945706542760	0,00510454717571	0,02977087462387	Não
3	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,00510454717571	-2,11945706542760	-2,11985511991644	0,00031731872676	0,02344293457240	Não
4	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,00031731872676	-2,11985511991644	-2,11987983800761	0,00001969002384	0,02304488008356	Não
5	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,00001969002384	-2,11987983800761	-2,11988137169389	0,00000122165300	0,02302016199239	Não
6	-2,14290000000000	-0,29552154502391		0,00000122165300	-2,11988137169389	-2,11988146684993	0,00000007579602	0,02301862830611	Sim

(b) Método da posição falsa

Figura 86 – Aplicação dos processos de aproximação

E46 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	-1,57600000000000	0,13392370050662		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,51930000000000	-0,22004092433775	0,11340000000000	Não
5	2	-1,57600000000000	0,13392370050662		-0,22004092433775	-1,51930000000000	-1,54765000000000	-0,04089768654474	0,05670000000000	Não
6	3	-1,57600000000000	0,13392370050662		-0,04089768654474	-1,54765000000000	-1,56182500000000	0,04714426666623	0,02835000000000	Não
24	21	-1,55421136646271	0,00000056706187		-0,00000010503353	-1,55421125831604	-1,55421131238937	0,00000023101418	0,0000010814667	Não
25	22	-1,55421131238937	0,00000023101418		-0,00000010503353	-1,55421125831604	-1,55421128535271	0,0000006299033	0,0000005407333	Sim

(a) Método da bissecção

B38 f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	-1,57600000000000	0,13392370050662		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55489817664387	0,00426749418554	0,11340000000000	Não
5	2	-1,55489817664387	0,00426749418554		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55423062784164	0,00012026901527	0,09229817664387	Não
6	3	-1,55423062784164	0,00012026901527		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421181845302	0,00000337602986	0,09163062784164	Não
7	4	-1,55421181845302	0,00000337602986		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421129046423	0,00000009475673	0,09161181845302	Sim
8	5	-1,55421129046423	0,00000009475673		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421127564490	0,00000000265958	0,09161129046423	Sim
9	6	-1,55421127564490	0,00000000265958		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421127522896	0,00000000007465	0,09161127564490	Sim
10	7	-1,55421127522896	0,00000000007465		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421127521729	0,00000000000209	0,09161127522896	Sim
11	8	-1,55421127521729	0,00000000000209		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421127521696	0,00000000000006	0,09161127521729	Sim
12	9	-1,55421127521696	0,00000000000006		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421127521695	0,00000000000000	0,09161127521696	Sim
13	10	-1,55421127521695	0,00000000000000		-0,58577465831025	-1,46260000000000	-1,55421127521695	0,00000000000000	0,09161127521695	Sim
14	11	-1,55421127521695	0,00000000000000		0,00000000000000	-1,55421127521695	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 87 – Aplicação dos processos de aproximação

A26 f_x 23

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0 pelo método da bissecção									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média aritmética (m)	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b				0,0000001
4	1	0,12470000000000	-0,36237524250420		0,24088645373901	0,23810000000000	0,18140000000000	-0,06370115641724	0,11340000000000	Não
5	2	0,18140000000000	-0,06370115641724		0,24088645373901	0,23810000000000	0,20975000000000	0,08779421405812	0,05670000000000	Não
6	3	0,18140000000000	-0,06370115641724		0,08779421405812	0,20975000000000	0,19557500000000	0,01185611190424	0,02835000000000	Não
24	21	0,19335528964996	-0,00000039124791		0,00000018618729	0,19335539779663	0,19335534372330	-0,00000010253032	0,0000010814667	Não
25	22	0,19335534372330	-0,00000010253032		0,00000018618729	0,19335539779663	0,19335537075996	0,0000004182849	0,0000005407333	Sim

(a) Método da bissecção

B11 f_x =SE((C10*H10)>=0;G10;B10)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Cálculo da aproximação de raiz de x^5 + 2x^4 - x^3 + x^2 + 5x - 1 = 0 pelo método da posição falsa									
2	Passo	Aproximação por falta			Aproximação por excesso		Média ponderada	p(m)	Erro |b - a|	Precisão
3		a	p(a)		p(b)	b	(m)			0,0000001
4	1	0,12470000000000	-0,36237524250420		0,24088645373901	0,23810000000000	0,19281861710413	-0,00286561428899	0,11340000000000	Não
5	2	0,19281861710413	-0,00286561428899		0,24088645373901	0,23810000000000	0,19335095711216	-0,00002352425742	0,04528138289588	Não
6	3	0,19335095711216	-0,00002352425742		0,24088645373901	0,23810000000000	0,19335532674439	-0,00000019318703	0,04474904288784	Não
7	4	0,19335532674439	-0,00000019318703		0,24088645373901	0,23810000000000	0,19335536262886	-0,00000000158650	0,04474467325562	Sim
8	5	0,19335536262886	-0,00000000158650		0,24088645373901	0,23810000000000	0,19335536292355	-0,00000000001303	0,04474463737114	Sim
9	6	0,19335536292355	-0,00000000001303		0,24088645373901	0,23810000000000	0,19335536292597	-0,00000000000011	0,04474463707645	Sim
10	7	0,19335536292597	-0,00000000000011		0,24088645373901	0,23810000000000	0,19335536292599	0,00000000000000	0,04474463707403	Sim
11	8	0,19335536292599	0,00000000000000		0,00000000000000	0,1933536292599	#DIV/0!	#DIV/0!	0,00000000000000	#DIV/0!

(b) Método da posição falsa

Figura 88 – Aplicação dos processos de aproximação

8 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Um dos objetivos da matemática é tornar os alunos cidadãos conscientes. Através do conhecimento matemático eles podem entender e tomar decisões em diversas situações do cotidiano, principalmente no que diz respeito às aproximações de cálculos.

Com o avanço tecnológico, a matemática amplia sua área de atuação no dia a dia. O conhecimento na área da computação se faz cada vez mais necessário, visto que as empresas, e até pequenos negócios, têm processos de controle informatizados, diminuindo o risco do erro de cálculo.

> Em continuidade a essas aprendizagens, no Ensino Médio o foco é a construção de uma visão integrada da Matemática, aplicada à realidade, em diferentes contextos. Consequentemente, quando a realidade é a referência, é preciso levar em conta as vivências cotidianas dos estudantes do Ensino Médio – impactados de diferentes maneiras pelos avanços tecnológicos, pelas exigências do mercado de trabalho, pelos projetos de bem viver dos seus povos, pela potencialidade das mídias sociais, entre outros. Nesse contexto, destaca-se ainda a importância do recurso a tecnologias digitais e aplicativos tanto para a investigação matemática como para dar continuidade ao desenvolvimento do pensamento computacional, iniciado na etapa anterior. (BNCC[9], 2018, p. 258)

A inserção da base dos métodos numéricos de aproximação de raízes reais cumpre esse papel. Para a utilização desses processos, o aluno tem que rever e consolidar os conhecimentos sobre aritmética e álgebra, aplicando as propriedades destas duas áreas na confecção das fórmulas necessárias.

Além dos conhecimentos matemáticos, utilizá-los permitirá a todo aluno que não possui condições de acesso a cursos de informática, ter o contato com os comandos básicos das planilhas eletrônicas, que são bastante usadas na organização de dados e como ferramentas de cálculos dinâmicos.

Outro ponto importante, é que colaboram para que o aluno tenha uma “outra visão” sobre a resolução de equações, voltando um pouco ao passado, quando a álgebra e a aritmética eram uma só. Essa nova visão permite ao aluno a resolução de problemas sem a necessidade de lembrar de todas as fórmulas, relações e propriedades de cada tipo de equação, bem como a resolução de problemas que levam a equações sem métodos conhecidos.

Essas colocações nos levam novamente ao proposto pela BNCC[9] como competências específicas da área de matemática:

1. Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral.

2. Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões éticas e socialmente responsáveis, com base na análise de problemas sociais, como os voltados a situações de saúde, sustentabilidade, das implicações da tecnologia no mundo do trabalho, entre outros, mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática.
3. Utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente.
4. Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas.
5. Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando estratégias e recursos, como observação de padrões, experimentações e diferentes tecnologias, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas.

Esta última competência nos leva à concepção sobre os números reais. Como seu estudo não é aprofundado, toda dízima é tratada de forma igualitária, com suas aproximações mais utilizadas se tornando a "forma decimal finita".

Fazer com que o aluno entenda que escolher uma aproximação gera um erro e que esse erro deve ser considerado, se torna de suma importância na formação de um cidadão consciente, permitindo que ele possa refletir sobre essas escolhas. Com o mesmo nível de importância, temos que faze-lo entender que para realizar uma aproximação neste nível, deve-se avançar casa por casa, sempre considerando o resultado anterior.

Finalizamos então, deixando esta pequena proposta de trabalho para o ensino básico, permitindo o desenvolvimento do aluno tanto no campo do uso de recursos tecnológicos, quanto na fixação dos conceitos matemáticos que circundam os números reais e a resolução de equações.

9 REFERÊNCIAS

1 SANTOS, E. de J. Movimento da matemática moderna no brasil:: uma renovação do ensino de matemática nas décadas de 1960 à 1980. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática*, v. 7, n. 20, p. 370–379, 2020. 15

2 D'AMBRóSIO, U. *Educação matemática*: da teoria à prática. 17. ed. São Paulo: Papirus, 2007. 15

3 GARNICA, A. V. M.; SOUZA, M. A. de. *lementos da história da educação Matemática.* São Paulo: Cultura Acadêmica, 2012. 15

4 LORENZATO, S. *Para aprender matemática.* São Paulo: Autores Associados, 2010. 16, 22

5 CASTEJON, M.; ROSA, R. *Os olhares sobre o ensino da matemática*: educação básica. Minas Gerais: IFTM, 2017. 16

6 MINISTéRIO DA EDUCAçãO - BRASIL. *Parâmetros curriculares nacionais*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental. Brasília, 1998. 18

7 MINISTéRIO DA EDUCAçãO - BRASIL. Lei nº 9.394 de 20 de dezembro de 1996. In: _____. Brasília, 1996. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/leis/l9394.htm>. Acesso em: 20 out. 2019. 18

8 MINISTéRIO DA EDUCAçãO - BRASIL. *Diretrizes curriculares nacionais gerais da educação básica.* Brasília, 2013. 18

9 MINISTéRIO DA EDUCAçãO - BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular.* Brasília, 2018. 18, 19, 116

10 SECRETARIA ESTADUAL DE EDUCAçãO DO ESPíRITO SANTO. *Currículo Básico Escola Estadual*: Ensino médio - área de ciências da natureza. Vitória: SEDU, 2009. v. 2. 19

11 EVES, H. *Introdução à história da matemática (Tradução: Hygino H. Domingues).* 5. ed. São Paulo: Universidade Estadual de Campinas, 2011. 20, 24

12 ABOOE, A. *Episódios da história antiga da matemática.* 2. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002. 23

13 BUENO, F. da S. *Minidicionário escolar da língua portuguesa.* São Paulo: DLC, 2010. 30

14 ANDRINI Álvaro; VASCONCELOS, M. J. *Coleção Praticando matemática.* 8. ed. São Paulo: Editora Brasil, 2012. 31, 35

15 DANTE, L. R. *Coleção Tudo é matemática.* 3. ed. São Paulo: Ática, 2009. 31

16 IEZZI, O. D. G. et al. *Matemática*: ciência e aplicações. 9. ed. São Paulo: Ática, 2009. 31

17 DANTE, L. R. *Matemática*: contexto e aplicações. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013. 31

18 LIMA, E. L. *Números e funções reais*. 1. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013. 55

19 RUGGIERO, M. A. G.; LOPES, V. L. da R. *Cálculo numérico*: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed. São Paulo: MAKRON Books, 1996. 73