Universidade Federal do Espírito Santo - UFES

Profissional em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

Dissertação de Mestrado

Sistemas lineares com ênfase nas operações elementares e no teorema do posto

Pedro Henrique Barcelos Cuzzuol

Vitória - Espírito Santo

Pedro Henrique Barcelos Cuzzuol .

Sistemas lineares com ênfase nas operações elementares e no teorema do posto

Dissertação de Mestrado apresentada à Comissão Acadêmica Institucional do PROFMAT-UFES como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Doutor Alancardek Pereira Araújo.

Vitória - Espírito Santo

"Reservado à ficha catalográfica"

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPIRITO SANTO

Centro de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional - PROFMAT

"Sistemas Lineares com Ênfase nas Operações Elementares e no Teorema do Posto"

Pedro Henrique Barcelos Cuzzuol

Defesa de Dissertação de Mestrado Profissional submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal do Espírito Santo como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Aprovada em 30/06/2022 por:

Prof. Dr. Alancardek Pereira Araújo
Orientador - UFES

Prof. Dr. Moacir Rosado Filho
Membro Interno - UFES

Prof. Dr. Eleonésio Strey
Membro Externo - UFES

UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
ALANCARDEK PEREIRA ARAUJO - SIAPE 1273523
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 04/07/2022 às 08:48

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/506343?tipoArquivo=O

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
MOACIR ROSADO FILHO - SIAPE 297651
Departamento de Matemática - DM/CCE
Em 02/07/2022 às 21:42

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/506183?tipoArquivo=O

PROTOCOLO DE ASSINATURA

O documento acima foi assinado digitalmente com senha eletrônica através do Protocolo Web, conforme Portaria UFES nº 1.269 de 30/08/2018, por
ELEONESIO STREY - SIAPE 1718302
Departamento de Matemática Pura e Aplicada - DMPA/CCENS
Em 02/07/2022 às 21:51

Para verificar as assinaturas e visualizar o documento original acesse o link:
https://api.lepisma.ufes.br/arquivos-assinados/506188?tipoArquivo=O

Dedico este trabalho aos meus pais, que sempre estiveram ao meu lado, a vida inteira. .

Agradecimentos

Para a realização dessa dissertação de mestrado, não poderia deixar de agradecer às várias pessoas que tornaram as minhas aulas, essa pesquisa e a minha vida melhor e mais fácil.

Em primeiro lugar, queria agradecer ao meu orientador, Professor Doutor Alancardek Pereira Araújo, pois a sua sabedoria, paciência, empatia, direcionamento e objetividade deixaram esse processo mais tranquilo e humano. Sempre acreditando em mim, enriqueceu e corrigiu, quando necessário, cada página desse estudo com seu grande conhecimento. Obrigado por tudo.

À minha companheira, Clara, por dividir comigo esse momento sempre com muito carinho, amor e com conselhos que me davam forças para continuar. Sem a sua companhia esse período teria sido ainda mais desafiador. Obrigado por tudo.

Agradeço ao meu irmão Gilberto, que sempre esteve ao meu lado, tanto na ajuda técnica da escrita, quanto me dando confiança, carinho e palavras duras e necessárias de incentivo para a conclusão dessa dissertação. A admiração e inspiração que sinto por você é um dos motivos da minha escolha profissional. Obrigado por tudo.

Aos meus pais Arlindo e Luzia, por sempre estarem ao meu lado quando o assunto era minha formação profissional e, independente de minhas escolhas, estarem sempre apoiando os meus objetivos, seja financeiramente ou com palavras de apoio que, em suas visões de mundo, buscavam o meu melhor. Obrigado por tudo.

Aos meus amigos Luiz, Pedro, Caio e Paulo que me proporcionaram momentos felizes onde eu conseguia repor a minha energia para continuar os estudos do mestrado. Em especial ao meu amigo Jheimys que, durante todo o mestrado, foi um grande companheiro de estudos, conselhos e conversas sobre o futuro e minha amiga Manoela, que sempre esteve ao meu lado me apoiando em qualquer dificuldade. Obrigado por tudo.

À Universidade Federal do Espirito Santo, lugar onde me sinto em casa, tenho um carinho enorme e um orgulho imenso de ter passado por ela, tanto na graduação, quanto no mestrado. Me proporcionou ótimas estruturas e recursos para os estudos, com os professores mais capacitados e incríveis possíveis, entre eles o professor Florêncio Ferreira Guimarães Filho que com sua paixão pela matemática nos inspirava a cada momento e o professor Alcebíades Dal Col Junior que, com muita serenidade, me ajudou na formatação do texto. Obrigado por tudo.

Aos meus alunos, que sempre se mostraram orgulhosos por eu estar me qualificando e torciam por mim a cada prova que eu enfrentava. Obrigado por tudo.

Resumo

Tendo em mente que um conteúdo matemático pode ser representado de várias maneiras diferentes e com a intenção de tornar simples o ensino, nesta dissertação, procuramos apresentar uma perspectiva sobre estudo de sistemas de equações lineares, que se encaixa na competência 3 da BNCC, conteúdo abordado do 7° do ensino fundamental para cima quando no 2° ano do ensino médio o conteúdo de sistema de equações é, pela primeira vez, relacionado com matrizes. Com o intuito de facilitar a leitura, já que, como ressalta a competência citada, é um assunto que requer uma boa interpretação da linguagem para construção dos seus conceitos, logo começamos trazendo uma noção de matrizes para então apresentarmos as operações que podemos realizar com as mesmas. Tudo isso será de grande relevância algumas páginas à frente pois, após esses tópicos, daremos uma ênfase maior as operações elementares sobre linhas, onde utilizaremos as técnicas de escalonamento e a aplicação do Teorema do Posto de uma matriz para a resolução de um sistema em questão. Abordaremos também as representações algébricas e geométricas, onde nos limitares apenas a um sistema linear em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ mostrando, através de gráficos construídos no GeoGebra, a associação de equações do sistema linear com as retas e os planos. Para terminar, citaremos algumas situações problemas do nosso cotidiano envolvendo sistemas de equações lineares com o propósito de apresentar a clara necessidade do mesmo em nosso dia a dia.

Palavras-chave: Sistemas lineares, Matriz, Teorema do Posto, Resolução de problemas.

Abstract

Bearing in mind that mathematical content can be represented in several different ways and with the intention of making teaching simple, in this dissertation, we seek to present a perspective on the study of systems of linear equations, content covered in the 7th and 9th year of teaching. fundamental and in a more complete way in the 2nd year of high school and, in order to make reading easier, we start by bringing a notion of matrices to then present the operations that we can perform with them. All this will be of great relevance a few pages ahead because, after these topics, we will give greater emphasis to elementary operations on lines, where we will use scaling techniques and the application of the Rank Theorem of a matrix to solve a system in question. We will also approach algebraic and geometric representations, where you limit yourself to just a linear system in $\mathbb{R}^2$ and $\mathbb{R}^3$ showing, through graphs built in GeoGebra, the association of equations of the linear system with lines and planes. Finally, we will cite some problem situations in our daily lives involving systems of linear equations with the purpose of presenting the clear need for it in our daily lives.

Keywords: Linear Systems, Matrix, Rank Theorem, Problem Solving

Sumário

Lista de ilustrações

Lista de tabelas

Capítulo *1*

INTRODUÇÃO

É indiscutível a importância da matemática na vida de qualquer cidadão. As descobertas na área nos levaram e continuam nos levando para uma constante evolução. Ela está envolvida nos acontecimentos mais simples do nosso dia a dia, como em um acionamento do despertador ao acordar, no tempo hábil que é estimado pela pessoa a se arrumar e sair de casa, na relação velocidade e tempo de chegada a determinado local... mas também se encontra nas atividades mais complexas, como em exames de ressonância magnética, em um satélite para o funcionamento de um G.P.S., em jogos eletrônicos, na modelagem matemática da evolução da COVID-19, no cálculo de índice de isolamento social, entre outras infinitas possibilidades. Mas, por mais que estejamos constantemente envolvidos com essa ciência, a percepção que os alunos possuem dessa relação da matemática com o cotidiano deixa-se a desejar, pois quando falamos em cotidiano, não nos referimos apenas a atividade vivida diariamente pelo aluno, mas também ao que se refere à relação do aluno com o seu entorno e o futuro mercado de trabalho.

Muitas das vezes, antes mesmo da criança ter tido algum contato com a matemática, ela já ouve de familiares ou pessoas próximas frases do tipo "nunca entendi nada em matemática", "papai é péssimo nessa matéria", "matemática não é pra qualquer um", "a matemática é a mais difícil de todas as matérias", entre outras frases desmotivantes e que amedrontam o aluno, criando, desde cedo, um bloqueio traduzido em medo, em sua cabeça, que não permite que o conteúdo seja absorvido como uma nova linguagem.

De acordo com Marisa Rosani Abreu de Silveira (p. 762) (SILVEIRA, 2011) os ecos destas diferentes vozes interferem no processo de ensino e de aprendizagem da Matemática, pois professor e aluno se filiam ao pré-construído, tornando-se seus porta-vozes. A interferência dessa filiação abala tal processo devido ao fato de afetar os sentimentos em relação à Matemática, pois, para o professor, ensinar uma disciplina considerada difícil lhe confere status profissional e, para o aluno, estudar uma disciplina difícil lhe causa ojeriza.

Nesta dissertação iremos abordar o assunto de sistemas equações lineares, que se encaixam na competência específica 3, da BNCC. Assunto tal que requer um bom entendimento da linguagem para a construção de seus conceitos. Portanto, o bloqueio gerado na cabeça do aluno pode ser crucial,também, no processo de aprendizagem deste tema.

Citando a BNCC, 2018 p.35:

> 1.0 os estudantes precisam construir significados para os problemas próprios da Matemática. Para resolver esses problemas, eles devem, logo no início, identificar os conceitos e procedimentos matemáticos necessários ou os que possam ser utilizados, na chamada formulação matemática do problema. Depois disso, eles devem aplicar esses conceitos, executar procedimentos e, ao final, compatibilizar os resultados com o problema original, comunicando a solução aos colegas por meio de argumentação consistente (BRASIL, 2018).

O conteúdo de sistema de equações é abordado pela primeira vez no 7° ano do ensino fundamental, com aplicações apenas nas equações do 1° grau com duas variáveis. No 9° ano, é introduzido o sistema de equações do 2° grau com duas incógnitas. Já no 2° ano do ensino médio, é passado o conteúdo de sistemas lineares com 3 ou mais variáveis. Mas, não importa em que ano ou em que idade eles entrem em contato com sistemas de equações lineares, há sempre uma grande dificuldade de interpretar o conteúdo, seja a dificuldade de relacionar o conteúdo com situações problemas do cotidiano, seja resolver mecanicamente uma conta algébrica pelos métodos de substituição, adição ou comparação, ou ainda uma dificuldade de interpretá-la graficamente.

Devido a essa grande dificuldade, esse trabalho visou procurar compreender o significado da habilidade EM13MAT301, onde se encaixa o estudo de sistema de equações. Portanto, buscou-se relacionar o conteúdo com alguns problemas do cotidiano, usando técnicas algébricas e o software GeoGebra para facilitar a visualização gráfica como propõe a habilidade.

> 1.0 [...] a matemática subjaz a todo o resto. Para entender qualquer ciência é necessária a matemática: ela é o melhor idioma, a linguagem da natureza. E acho que as pessoas entendem, quando leem sobre a matemática, que ela é um idioma muito poderoso, e que os que a entendem controlam o mundo. Se você perguntar "quais são as potências deste mundo atualmente?", não são os chefes das nações, são os chefes de empresas como o Google, o Facebook e a Apple. São gente que sabe matemática. Os criadores do Google, Sergei Brin e Larry Page, são dois geeks que entenderam que a matemática nos permite navegar numa rede muito complexa. Acredito que as pessoas percebam que os numerati, os que detêm a matemática, têm poder. A tragédia é que parece que a educação nos engana. E é um problema de todos os sistemas educativos. Quando chegamos ao ensino secundário, as disciplinas se tornam estanques. Há aula de matemática, depois de música, depois de história, mas não fazemos as conexões entre elas. Quando fazemos matemática não entendemos que ela é a base da música. As pessoas não notam que a matemática tem uma história. Houve um momento em que não tínhamos o zero, e alguém teve a ideia do conceito de zero. A forma de abordar o problema educativo é contextualizar a matemática.(SAUTOY, 2018)

Podemos enumerar algumas relações de sistemas de equações lineares com áreas profissionais, como engenheiros que precisam do conteúdo para cálculos de estruturas, na robótica, nas estatística, os motoristas de aplicativos que se guiam pelo G.P.S., que nada mais é do que um software capaz de resolver sistemas lineares de grandes ordens que, por ventura, veremos um belo exemplo do seu funcionamento no final desse estudo.

Nesse estudo, no capítulo 2, falaremos sobre as definições de matrizes e as suas possíveis formas. Também apresentaremos algumas operações importantes entre matrizes e as suas propriedades. No capítulo 3 nos aprofundaremos em explicar o funcionamentos das operações elementares que resultam em uma matriz escalonada, ou até mesmo na matriz escalonada reduzida onde fecharemos demonstrando um algoritmo de escalonamento (e também para a forma escalonada reduzida) para qualquer que seja a matriz. No capítulo 4 apresentaremos a representação matricial de um sistema de equações e suas soluções e, em seguida, a definição de Posto e nulidade de uma matriz. No capítulo 5 mostraremos, através de gráficos, as diversas formas de soluções de um sistema de equações lineares. Finalmente, no capítulo 6, estaremos empregando o conteúdo principal em situações problemas do nosso dia a dia.

Capítulo 2

A ÁLGEBRA DAS MATRIZES

2.1 Definições

Uma matriz de números reais é um arranjo retangular ou tabela, formada por números reais distribuídos em linhas (na horizontal) e colunas (na vertical). Precisamente, dado um par ordenado de números naturais (m, n), uma matriz A de ordem $m \times n$ (m por n) é uma tabela de números reais distribuídos em m linhas e n colunas da forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Às vezes, escrevemos $A_{m\times n}$ para evidenciar que A é uma matriz com m linhas e n colunas.

Com relação a uma matriz $A_{m\times n}$, temos:

Se $1 \leq i \leq m$, a i-ésima linha da matriz A é a submatriz $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$.

Por exemplo, a primeira linha da matriz A é a submatriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}$ e a m-ésima linha de A é a submatriz $\begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Se $1 \leq j \leq n$, a j-ésima coluna da matriz A é a submatriz $\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$.

Por exemplo, a primeira coluna da matriz A é a submatriz $\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ e a n-ésima coluna de A

é a submatriz $\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$.

Cada elemento de uma matriz $A_{m\times n}$ é indexado por dois números naturais em ordem ij, com $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$. O primeiro índice i indica a linha a qual o elemento pertence, enquanto que o segundo índice j indica a coluna a qual o elemento pertence. Por exemplo, o elemento a_{25} pertence à segunda linha e à quinta coluna.

Exemplo 2.1.1 $\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{8} & 5 \\ -3 & \dfrac{2}{3} & 7 \\ -4 & \sqrt{4} & 1,2 \end{bmatrix}$*, é a matriz* 3×3*, pois possui 3 linhas e 3 colunas, enquanto* $\begin{bmatrix} -1 & 7 & \sqrt{2} & 8 \\ 7 & 12 & -9 & 5 \end{bmatrix}$*, é a matriz* 2×4*, pois possui 2 linhas e 4 colunas.*

2.1.1 Representação dos elementos.

Cada elemento no interior da matriz é indicado por a_{ij}. Nessa representação temos que os elementos $a \in \mathbb{R}$ e os índices i e j representam, respectivamente, as linhas e colunas dessa matriz, com i sendo a posição das linhas, em ordem crescente e de cima para baixo (numerados de 1 à m) e j sendo a posição das colunas, em ordem crescente e da esquerda para a direita (numerados de 1 à n). A matriz também pode ser indicada por $M = [a_{ij}]$ ou $M = [a_{ij}]_{m\times n}$.

Cada elemento da matriz M é especificado por dois números naturais ordenados ij que indicam a posição do elemento na matriz. O primeiro número i indica que o elemento pertence à $i-$ésima linha de M e o segundo número j indica que o elemento pertence à $j-$ésima coluna de M. O elemento a_{ij} da matriz M ocupa a $i-$ésima linha e a $j-$ésima coluna de M. A primeira linha da matriz M é a linha mais acima, enquanto que a primeira coluna de M é a coluna mais à esquerda.

De maneira genérica, podemos representá-la com o seguinte formato:

$$M_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

ou

$$M_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

2.2 Matrizes especiais

Dependendo dos elementos e da posição ocupada por eles, veremos a seguir algumas matrizes que receberão uma nomenclatura especial devido a algumas características peculiares que as diferenciam uma das outras. Para as matrizes abaixo, tomaremos m

2.2.0.1 Matriz nula $m \times n$.

É denominada assim toda matriz que possui seus elementos igual a 0.

Exemplo 2.2.1 *Exemplos de matrizes nulas:*

(i) $\boldsymbol{0}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(ii) $\boldsymbol{0}_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

2.2.0.2 Matriz linha.

É toda matriz escrita da forma $1 \times n$, ou seja, 1 linha e n colunas.

Exemplo 2.2.2 *Exemplos de matrizes linhas:*

(i) $M_{1\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $M_{1\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 4 \end{bmatrix}$.

2.2.0.3 Matriz coluna.

É toda matriz escrita da forma $n \times 1$, ou seja, n linhas e 1 coluna.

Exemplo 2.2.3 *Exemplo de matrizes colunas:*

(i) $M_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \\ 12 \end{bmatrix}$

(ii) $M_{4\times 1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$

2.2.0.4 Matriz quadrada.

É toda matriz em que o número de linhas é igual ao número de colunas, ou seja, $n = m$.

Exemplo 2.2.4 *Exemplos de matrizes quadradas.*

(i) $M_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 5 \\ 5 & 9 & 8 \\ 4 & 11 & 2 \end{bmatrix}$

(ii) $M_{2\times 2} = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$

As matrizes quadradas possuem características especiais, como:

- Diagonal principal: Conjunto de elementos de uma matriz quadrada que possuem os índices "$i's$" e os índices "$j's$" iguais. a_{ij} só pertencerá a diagonal principal se, e somente se $i = j$, como vemos a seguir:

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

O conjunto de elementos da diagonal principal da matriz acima será dado por $\{a_{ij} | i = j\} = \{\ a_{11},\ a_{22},\ a_{33},\ a_{44},\ ...,\ a_{nn}\}$.

Exemplo 2.2.5 *Nos exemplos abaixo, os destaques nas diagonais principais (D.p.) de cada matriz quadrada citada acima:*

$$(i)\ M_{3\times3} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 7 & 5 \\ 5 & \boxed{9} & 8 \\ 4 & 11 & \boxed{0} \end{bmatrix},\ em\ que\ a\ D.p. = \{a_{ij}|i=j\} = \{\ 1,\ 9,\ 0\}.$$

$$(ii)\ M_{2\times2} = \begin{bmatrix} \boxed{-5} & 4 \\ 2 & \boxed{\sqrt{5}} \end{bmatrix},\ em\ que\ a\ D.p. = \{a_{ij}|i=j\} = \{\ -5,\ \sqrt{5}\}.$$

- *Diagonal secundária: Conjunto de elementos de uma matriz quadrada que possui a soma dos índices i e j iguais a $n+1$:*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(n-2)} & a_{1(n-1)} & \boxed{a_{1n}} \\ a_{21} & \cdots & a_{2(n-2)} & \boxed{a_{2(n-1)}} & a_{2n} \\ a_{31} & \cdots & \boxed{a_{3(n-2)}} & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \boxed{a_{n1}} & \cdots & a_{n(n-2)} & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

O conjunto de elementos da diagonal secundária da matriz acima será dado por $\{a_{ij}|i+j=n+1\} = \{\ a_{1n},\ a_{2(n-1)},\ a_{3(n-2)},\ a_{4(n-3)},\ ...,\ a_{n1}\}$.

Exemplo 2.2.6 *Abaixo, o destaque da diagonal secundária de cada matriz quadrada citada acima:*

$$(i)\ M_{3\times3} = \begin{bmatrix} 1 & 7 & \boxed{5} \\ 5 & \boxed{9} & 8 \\ \boxed{4} & 11 & 2 \end{bmatrix},\ em\ que\ a\ D.s. = \{a_{ij}|i+j=n+1\} = \{\ 5,\ 9,\ 4\}.$$

$$(ii)\ M_{2\times2} = \begin{bmatrix} -5 & \boxed{4} \\ \boxed{2} & \sqrt{5} \end{bmatrix},\ em\ que\ a\ D.s. = \{a_{ij}|i+j=n+1\} = \{\ 4,\ 2\}.$$

2.2.0.5 Matriz identidade

É toda matriz quadrada em que os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e o restante dos elementos dessa matriz iguais a 0, ou seja, $a_{ij} = \begin{cases} 1, & se\ i = j. \\ 0, & se\ i \neq j. \end{cases}$

De maneira geral, temos:

$$I_{n\times n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{2.5}$$

Exemplo 2.2.7 *Exemplos de matrizes identidade quadrada:*

(i) $I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

(ii) $I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$

2.2.0.6 Matriz diagonal

É toda matriz quadrada onde os elementos que não pertencem a diagonal principal são iguais a zero, ou seja, $a_{ij} = 0$, se $i \neq j$.

De modo geral, temos que

$$M_{n\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & ... & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Exemplo 2.2.8 *Exemplos de matrizes diagonal*

(i) $D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$

(ii) $D_{4\times 4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$

(iii) $D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

2.2.0.7 Matriz triangular superior

É uma matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, $\forall\ i > j,\ a_{ij} = 0$. De um modo geral, temos que

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ 0 & \boxed{a_{22}} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & \boxed{a_{33}} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & ... & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Exemplo 2.2.9 *Exemplos de matrizes triangular superior*

(i) $A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 0 & 8 \\ 0 & 6 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(ii) $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 15 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

(iii) $D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

2.2.0.8 Matriz triangular inferior

É toda matriz onde os elementos acima da diagonal principal são iguais a zero, ou seja, $\forall\ i < j,\ a_{ij} = 0$. De um modo geral, temos que

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & \boxed{a_{33}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Exemplo 2.2.10 *Exemplos de matriz triangular inferior*

(i) $A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 14 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & 0 & 13 \end{pmatrix}$

(ii) $B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & 21 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

(iii) $D_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

2.2.0.9 Matriz simétrica

$A = (a_{ij})$ é uma matriz simétrica quando $a_{ij} = a_{ji}$. Veremos também que toda matriz será dita simétrica se coincidir com a sua transposta.

Vejamos um exemplo geral, de uma matriz 4×4, com elementos quaisquer, simétricos.

$$S_{4\times 4} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Exemplo 2.2.11 *Exemplos de matrizes simétricas*

(i) $A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -6 \\ 5 & 9 & 11 & 9 \\ 4 & 11 & 2 & -1 \\ -6 & 9 & -1 & 15 \end{pmatrix}$

$$(ii)\ B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} -21 & 7 & 5 \\ 7 & -6 & 8 \\ 5 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

2.3 Operações com matrizes e propriedades das operações.

As operações com matrizes nos possibilitam resolver diversas situações práticas encontradas em nosso cotidiano e de forma objetiva. Assim, baseamos esse estudo em (LARSON, 2018; BOLDRINI et al., 1980; ANDRADE; DE, 2006).

Vamos analisar o exemplo a seguir em que as tabelas abaixo representam o total de vendas, em reais, nos meses de janeiro e fevereiro, de três funcionários de uma loja que vende eletrodomésticos e móveis planejados.

Tabela 1 – Total de vendas/ Janeiro

Total de vendas/ Janeiro			
Funcionários	**Eletrodomésticos**	**Móveis planejados**	**Total de vendas**
Cíntia	R$ 32500	R$ 34400	R$ 66900
Fernando	R$ 35070	R$ 28250	R$ 63320
Leando	R$ 27050	R$ 30020	R$ 57070

Tabela 2 – Total de vendas/ Fevereiro

Total de vendas/ Fevereiro			
Funcionários	**Eletrodomésticos**	**Móveis planejados**	**Total de vendas**
Cíntia	R$ 31000	R$ 33050	R$ 64050
Fernando	R$ 35200	R$ 28500	R$ 63700
Leando	R$ 28010	R$ 31200	R$ 59210

A loja funciona da seguinte maneira: os funcionários recebem de comissão 5% do total de vendas dos últimos dois meses. Abaixo mostraremos as comissões de três funcionários sendo calculada por operações com matrizes. Para isso, iniciaremos somando elementos correspondentes ao total de vendas (última coluna) das duas tabelas anteriores dos respectivos funcionários.

$$\begin{bmatrix} 66900 \\ 63320 \\ 57070 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 64050 \\ 63700 \\ 59210 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 130950 \\ 127020 \\ 116280 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Somando os elementos das primeiras linhas das duas primeiras matrizes, colocamos o resultado do outro lado da igualdade em uma terceira matriz, representando a venda total de cada funcionário, na mesma ordem em que aparecem nas tabelas acima. Agora, através de uma multiplicação de um número real pela matriz que representa a soma total do dois meses, veremos o quanto de comissão receberá cada um dos três funcionários.

$$5\% \cdot \begin{bmatrix} 130950 \\ 127020 \\ 116280 \end{bmatrix} = \frac{5}{100} \cdot \begin{bmatrix} 130950 \\ 127020 \\ 116280 \end{bmatrix} = 0,05 \cdot \begin{bmatrix} 130950 \\ 127020 \\ 116280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6547,5 \\ 6351 \\ 5814 \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Os valores encontrados na última tabela, são os valores que Cíntia, Fernando e Leandro, respectivamente, vão receber de comissão ao fim de dois meses. Esse valores foram encontrados através de operações de soma e produto com matrizes.

De modo criterioso vamos, a partir de agora, abordar esse conteúdo com os detalhes que as operações com matrizes e as propriedades dessas operações exigem.

2.3.1 Adição entre matrizes

Para realizarmos a operação de adição entre duas matrizes, devemos nos atentar se a ordem delas são iguais, pois essa soma se dará pela adição dos elementos correspondentes entre elas. Ou seja, a soma de uma matriz $A_{m\times n}$ com a matriz $B_{m\times n}$ é valida, pois possuem mesma ordem $(m \times n)$ e resultará em uma matriz também de mesma ordem $(m \times n)$. Ou seja

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n} \tag{2.12}$$

Exemplo 2.3.1 *Sejam A e B duas matrizes de mesma ordem, tal que*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ -7 & 1 & 14 \\ 12 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \quad e\ B = \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 7 & -5 & 10 \\ 4 & 13 & -9 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Então

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 5 & -5 & 7 \\ -7 & 1 & 14 \\ 12 & 4 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} + \begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 7 & -5 & 10 \\ 4 & 13 & -9 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -12 & 7 \\ 0 & -4 & 24 \\ 16 & 17 & -10 \end{bmatrix}_{3\times 3} \end{aligned} \tag{2.13}$$

Veremos agora que as muitas propriedades de soma de números reais também se aplicam em soma entre matrizes.

2.3.1.1 Propriedade da comutatividade da adição entre matrizes

Sejam A e B duas matrizes de ordem $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Então $A + B = B + A$.

Prova.

Da definição de adição de matrizes e pela comutatividade da adição de números reais, temos

$$\begin{aligned}
A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix} \qquad \text{(comutatividade da adição de reais)} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} + a_{11} & b_{12} + a_{12} & \cdots & b_{1n} + a_{1n} \\ b_{21} + a_{21} & b_{22} + a_{22} & \cdots & b_{2n} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} + a_{m1} & b_{m2} + a_{m2} & \cdots & b_{mn} + a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\
&= B + A. \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 2.3.2 *Comutatividade da adição*

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ *matrizes reais, então*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2+7 & 3+(-3) \\ -5+6 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7+2 & -3+3 \\ +6-5 & 12+4 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \\ &= B + A. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.3.1.2 Propriedade da associatividade da adição entre matrizes

Sejam A, B e C matrizes de ordem $m \times n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} e \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}.$$

Então $(A + B) + C = A + (B + C)$.

Prova. Pela definição da adição de matrizes e pela associatividade da adição de números reais, temos

$$
\begin{aligned}
(A+B)+C =& \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11}) & (a_{12}+b_{12}) & \cdots & (a_{1n}+b_{1n}) \\ (a_{21}+b_{21}) & (a_{22}+b_{22}) & \cdots & (a_{2n}+b_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1}) & (a_{m2}+b_{m2}) & \cdots & (a_{mn}+b_{mn}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} (a_{11}+b_{11})+c_{11} & (a_{12}+b_{12})+c_{12} & \cdots & (a_{1n}+b_{1n})+c_{1n} \\ (a_{21}+b_{21})+c_{21} & (a_{22}+b_{22})+c_{22} & \cdots & (a_{2n}+b_{2n})+c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_{m1}+b_{m1})+c_{m1} & (a_{m2}+b_{m2})+c_{m2} & \cdots & (a_{mn}+b_{mn})+c_{mn} \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} a_{11}+(b_{11}+c_{11}) & a_{12}+(b_{12}+c_{12}) & \cdots & a_{1n}+(b_{1n}+c_{1n}) \\ a_{21}+(b_{21}+c_{21}) & a_{22}+(b_{22}+c_{22}) & \cdots & a_{2n}+(b_{2n}+c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1}+(b_{m1}+c_{m1}) & a_{m2}+(b_{m2}+c_{m2}) & \cdots & a_{mn}+(b_{mn}+c_{mn}) \end{bmatrix} \\
=& \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (b_{11}+c_{11}) & (b_{12}+c_{12}) & \cdots & (b_{1n}+c_{1n}) \\ (b_{21}+c_{21}) & (b_{22}+c_{22}) & \cdots & (b_{2n}+c_{2n}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (b_{m1}+c_{m1}) & (b_{m2}+c_{m2}) & \cdots & (b_{mn}+c_{mn}) \end{bmatrix} \\
=& A+(B+C). \qquad \blacksquare
\end{aligned}
$$

EXEMPLO 2.3.3 *Associatividade da adição*

Sejam $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix}$, *matrizes reais, então*

$$
\begin{aligned}
A+(B+C) &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} \right) = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7+1 & -3+4 \\ 6+2 & 12-6 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2+7+1 & 3-3+4 \\ -5+6+2 & 4+12-6 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2+7 & 3-3 \\ -5+6 & 4+12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -6 \end{bmatrix} = \\
&= (A+B)+C \qquad (2.15)
\end{aligned}
$$

2.3.1.3 Propriedade da matriz nula

Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$, em que B é uma matriz nula.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} e \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

Então $A + B = A$

Prova.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} (a_{11}+0) & (a_{12}+0) & \cdots & (a_{1n}+0) \\ (a_{21}+0) & (a_{22}+0) & \cdots & (a_{2n}+0) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (a_{m1}+0) & (a_{m2}+0) & \cdots & (a_{mn}+0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ &= A. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

EXEMPLO 2.3.4 *Propriedade da matriz nula na adição.*

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, *matrizes reais, então*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2+0 & 3+0 \\ -5+0 & 4+0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = A \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.3.2 Multiplicação por escalar

A expressão "multiplicação por escalar" é o termo usado para multiplicar uma matriz por um número real, esse número real será chamado de escalar. Portanto, sendo

$A_{m\times n}$ e k um número real qualquer, podemos multiplicar k por $A_{m\times n}$, da seguinte forma

$$k \cdot A_{m\times n} = k \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} & ... & k \cdot a_{1n} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} & k \cdot a_{23} & ... & k \cdot a_{2n} \\ k \cdot a_{31} & k \cdot a_{32} & k \cdot a_{33} & ... & k \cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k \cdot a_{m1} & k \cdot a_{m2} & k \cdot a_{m3} & ... & k \cdot a_{mn} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

Exemplo 2.3.5 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 8 & 13 & 7 \\ 5 & 9 & 4 \\ 7 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ *e* $k = -3$, *logo*

$$\begin{aligned} k \cdot A &= -3 \cdot \begin{bmatrix} 8 & 13 & 7 \\ 5 & 9 & 4 \\ 7 & -2 & 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -3 \cdot 8 & -3 \cdot 13 & -3 \cdot 7 \\ -3 \cdot 5 & -3 \cdot 9 & -3 \cdot 4 \\ -3 \cdot 7 & -3 \cdot (-2) & -3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} -24 & -39 & -21 \\ -15 & -27 & -12 \\ -21 & 6 & -18 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3.2.1 Propriedades da multiplicação por escalar

Propriedade distributiva 1

$$k \cdot (A + B) = k \cdot A + k \cdot B \quad (2.19)$$

tal que k é um escalar e A e B matrizes de mesma ordem.

Exemplo 2.3.6 *Distributividade de um escalar por uma soma de matrizes*

Seja $k = 3$, $A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & 8 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix}$, *logo*

$$
\begin{aligned}
k \cdot (A+B) &= 3 \cdot \left(\begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & 8 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix} \right) = \\
&= 3 \cdot \begin{bmatrix} (5-6) & (10+4) & (9+1) \\ (1+2) & (-2-8) & (7+8) \\ (-3+8) & (-5+12) & (6+9) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \cdot (5-6) & 3 \cdot (10+4) & 3 \cdot (9+1) \\ 3 \cdot (1+2) & 3 \cdot (-2-8) & 3 \cdot (7+8) \\ 3 \cdot (-3+8) & 3 \cdot (-5+12) & 3 \cdot (6+9) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 + 3 \cdot (-6) & 3 \cdot 10 + 3 \cdot 4 & 3 \cdot 9 + 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-2) + 3 \cdot (-8) & 3 \cdot 7 + 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot (-3) + 3 \cdot 8 & 3 \cdot (-5) + 3 \cdot 12 & 3 \cdot 6 + 3 \cdot 9 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 10 & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \cdot (-6) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-8) & 3 \cdot 8 \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot 12 & 3 \cdot 9 \end{bmatrix} = \\
&= 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 2 & -8 & 8 \\ 8 & 12 & 9 \end{bmatrix} = \\
&= k \cdot A + k \cdot B
\end{aligned} \tag{2.20}
$$

Propriedade distributiva 2

$$
(k_1 + k_2) \cdot A = k_1 \cdot A + k_2 \cdot A \tag{2.21}
$$

tal que k_1 e k_2 são escalares e A uma matriz de qualquer ordem

Exemplo 2.3.7 *Distributividade do produto da soma de escalares por uma matriz.*

Seja $k_1 = 5$, $k_2 = 4$ *e* $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix}$, *logo*

$$\begin{aligned}
(k_1 + k_2) \cdot A &= (5+2) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (5+2) \cdot 2 & (5+2) \cdot 5 \\ (5+2) \cdot 7 & (5+2) \cdot (-3) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 2 \cdot 2 & 5 \cdot 5 + 2 \cdot 5 \\ 5 \cdot 7 + 2 \cdot 7 & 5 \cdot (-3) + 2 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 & 5 \cdot 5 \\ 5 \cdot 7 & 5 \cdot (-3) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \cdot 2 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 7 & 2 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \\
&= 5 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & -3 \end{bmatrix} = \\
&= k_1 \cdot A + k_2 \cdot A
\end{aligned} \tag{2.22}$$

2.3.2.2 **Propriedade de multiplicação pelo elemento nulo**

$$0 \cdot A = 0 \tag{2.23}$$

Exemplo 2.3.8 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}$, *então*

$$\begin{aligned}
0 \cdot A &= 0 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ -8 & 9 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 \cdot 5 & 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot (-8) & 0 \cdot 9 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0
\end{aligned} \tag{2.24}$$

2.3.2.3 **Propriedade da associatividade na multiplicação por escalares**

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot A) = (k_1 \cdot k_2) \cdot A \tag{2.25}$$

Exemplo 2.3.9 *Seja* $k_1 = 3$, $k_2 = 7$ *e* $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$, *então*

$$
\begin{aligned}
k_1 \cdot (k_2 \cdot A) &= 3 \cdot \left(7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\right) = \\
&= 3 \cdot \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 7 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \cdot 7 \cdot 1 & 3 \cdot 7 \cdot 7 \\ 3 \cdot 7 \cdot 2 & 3 \cdot 7 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (3 \cdot 7) \cdot 1 & (3 \cdot 7) \cdot 7 \\ (3 \cdot 7) \cdot 2 & (3 \cdot 7) \cdot (-2) \end{bmatrix} == \\
&= (3 \cdot 7) \cdot \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 & 7 \cdot 7 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\
&= (k_1 \cdot k_2) \cdot A
\end{aligned} \tag{2.26}
$$

2.3.2.4 Propriedade do elemento neutro na multiplicação

O elemento neutro na multiplicação se dá pelo produto do escalar 1 por qualquer uma matriz, tal que o resultado será sempre a matriz em questão, logo

$$
\begin{aligned}
1 \cdot A_{m \times n} &= 1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \cdot a_{11} & 1 \cdot a_{12} & 1 \cdot a_{13} & ... & 1 \cdot a_{1n} \\ 1 \cdot a_{21} & 1 \cdot a_{22} & 1 \cdot a_{23} & ... & 1 \cdot a_{2n} \\ 1 \cdot a_{31} & 1 \cdot a_{32} & 1 \cdot a_{33} & ... & 1 \cdot a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 \cdot a_{m1} & 1 \cdot a_{m2} & 1 \cdot a_{m3} & ... & 1 \cdot a_{mn} \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = A_{m \times n}
\end{aligned} \tag{2.27}
$$

Exemplo 2.3.10 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & (-2) \end{bmatrix} =$ *e* 1 *o escalar, logo*

$$\begin{aligned}
1 \cdot A &= 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 7 \\ 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-2) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = A
\end{aligned} \tag{2.28}$$

2.3.3 Multiplicação de matrizes

Para que duas matrizes A e B possam, nessa ordem, se multiplicar, o número de colunas da 1ª matriz deve ser igual ao número de linhas da 2ª matriz.

- **Caso 1:** Multiplicação de uma matriz linha $A_{1\times n}$ por uma matriz coluna $B_{n\times 1}$.

  Considere a matriz linha $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{1\times n}$ e a matriz coluna $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$.

  Definimos a multiplicação de A por B por $A \cdot B = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} =$ $[a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n]$.

  Assim, a multiplicação $A_{1\times n} \cdot B_{n\times 1} = C_{1\times 1}$ resulta numa matriz $C_{1\times 1}$ que identificamos com o número real $C = [a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n]_{1\times 1}$.

Exemplo 2.3.11 *Se* $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}$*, então* $A \cdot B = [-1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + \frac{1}{3} \cdot 6]_{1\times 1} = [-2 + 0 - 4 + 2]_{1\times 1} = [-4]_{1\times 1}$

- **Caso 2:** Sejam $A_{m\times n}$ e $B_{n\times p}$ matrizes em que o números de colunas de A coincide com o número de linhas de B.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix}$$

Se $1 \leq i \leq m$, denotaremos por $A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$ a matriz-linha formada pelos elementos da i-ésima linha da matriz A, e se $1 \leq j \leq p$, denotamos por $B_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$ a matriz-coluna formada pelos elementos da j-ésima coluna da matriz B.

Nota-se que, pelo Caso 1 da multiplicação de matrizes, está bem definida a multiplicação $A_i\,B_j$.

Define-se a multiplicação da matriz $A_{m\times n}$ pela matriz $B_{n\times p}$ como sendo a matriz $C_{m\times p}$, definida por $C = (c_{ij})$ com

$$
\begin{aligned}
c_{ij} =& A_i\,B_j = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} \\
=& a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}, \quad 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq p.
\end{aligned}
$$

Assim, informalmente podemos afirmar que o elemento ij da matriz multiplicação AB é a multiplicação da linha i da matriz A pela coluna j da matriz B.

Por definição, a matriz multiplicação C tem ordem $m \times p$, ou seja, tem o número de linhas da matriz A e o número de colunas da matriz B. Além disso, a multiplicação da matriz A pela matriz B está definida apenas quando o número de colunas da matriz A coincide com o número de linhas da matriz B.

$$
A_{m\times n} \cdot B_{n\times p} = [A \cdot B]_{m\times p} \tag{2.29}
$$

Exemplo 2.3.12 *a multiplicação da matriz $A_{2\times 2}$ pela matriz $B_{2\times 3}$ é válida, pois o número de colunas da matriz A (duas colunas) é igual ao número de linhas da matriz B (duas linhas).*

Exemplo 2.3.13 *A multiplicação da matriz $A_{2\times 4}$ pela matriz $B_{3\times 3}$ não é valida, pois o número de colunas da matriz A (quatro colunas) é diferente do número de linhas da matriz B (três linhas).*

Exemplo 2.3.14 *A multiplicação entre a matriz $A_{5\times 3}$ pela matriz $B_{3\times 6}$ terá como resultado uma matriz $C_{5\times 6}$.*

2.3.3.1 Processo multiplicativo

Depois de observar os casos acima, vamos ao processo multiplicativo entre duas matrizes, tomando a matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}$ e a matriz $B_{n\times p} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & ... & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & ... & b_{np} \end{bmatrix}$. A 1ª observação é respeitada, pois o número de colunas da matriz A (n) é igual ao número de linhas da matriz B (n), então multiplicando-as, iremos gerar a matriz $C_{m\times p}$ com o mesmo número de linhas da 1ª matriz e o mesmo número de colunas da 2ª matriz, como diz a 2ª observação. Então

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & ... & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & ... & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & ... & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & ... & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & ... & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & ... & b_{np} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & ... & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & ... & c_{2p} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & ... & c_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & ... & c_{mp} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Cada elemento da matriz $C_{m\times p}$, será gerado da seguinte forma

c_{11} : Multiplicar os elementos da 1° linha de A pelos elementos correspondentes da 1° coluna de B e depois somar todos os produtos.

$\rightarrow c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1}$.

c_{12} : Multiplicar os elementos da 1° linha de A pelos elementos correspondentes da 2ª coluna de B e depois somar todos os produtos.

$\rightarrow c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n2}$.

$\vdots$

$\vdots$

$\vdots$

c_{1p} : Multiplicar os elementos da 1ª linha de A pelos elementos correspondentes da p-ésima coluna de B e depois somar todos os produtos.

$\rightarrow c_{1p} = a_{11} \cdot b_{12p} + a_{12} \cdot b_{2p} + a_{13} \cdot b_{3p} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{np}$.

Observe que, no processo acima, foi construída a 1ª linha da matriz $C_{m\times p}$. E assim, nessa mesma lógica, linha por linha, que se constrói o restante da matriz.

Exemplo 2.3.15 *Seja* $M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $N = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$*, logo*

$$
\begin{aligned}
M_{3\times 2} \times N_{2\times 3} &= \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 6 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & 7 & 5 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 3\cdot 4 + 5\cdot(-1) & 3\cdot 7 + 5\cdot(-3) & 3\cdot 5 + 5\cdot 2 \\ 5\cdot 4 + 6\cdot(-1) & 5\cdot 7 + 6\cdot(-3) & 5\cdot 5 + 6\cdot 2 \\ -3\cdot 4 + -3\cdot(-1) & -3\cdot 7 + 1\cdot(-3) & -3\cdot 5 + 1\cdot 2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 12-5 & 21-15 & 15+10 \\ 20-6 & 35-18 & 25+12 \\ -12+3 & -21-3 & -15+2 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 6 & 25 \\ 14 & 17 & 37 \\ -9 & -24 & -13 \end{bmatrix}_{3\times 3} \qquad (2.31)
\end{aligned}
$$

Exemplo 2.3.16 *Seja* $P = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *e* $Q = \begin{bmatrix} 9 & 4 \end{bmatrix}$*, logo*

$$
\begin{aligned}
P_{3\times 1} \times Q_{1\times 2} &= \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & 4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 5\cdot 9 & 5\cdot 4 \\ 2\cdot 9 & 1\cdot 4 \\ 1\cdot 9 & 1\cdot 4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 45 & 20 \\ 18 & 4 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}_{3\times 2} \qquad (2.32)
\end{aligned}
$$

2.3.3.2 Propriedades da multiplicação de matrizes

Depois de verificar as condições para que duas matrizes se multipliquem e existindo essas condições, as seguintes propriedades serão válidas.

(i) $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$ **(Associatividade)**

A multiplicação da matriz A pela matriz B seguida pela multiplicação da matriz C é igual ao produto da matriz A pela multiplicação da matriz B pela matriz C.

Exemplo 2.3.17 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \\ 6 & -4 \end{bmatrix}_{3\times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}_{2\times 2}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix}_{2\times 1}$, *então*

$$
\begin{aligned}
(A\cdot B)\cdot C &= \left(\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\\ 6 & -4\end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\end{bmatrix}_{2\times 2}\right) \times \begin{bmatrix}8\\ 7\end{bmatrix}_{2\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}2\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 4+1\cdot 9\\ 4\cdot 1+5\cdot 2 & 4\cdot 4+5\cdot 9\\ 6\cdot 1+(-4)\cdot 2 & 6\cdot 4+(-4)\cdot 9\end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix}8\\ 7\end{bmatrix}_{2\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}2\cdot 1+1\cdot 2 & 2\cdot 4+1\cdot 9\\ 4\cdot 1+5\cdot 2 & 4\cdot 4+5\cdot 9\\ 6\cdot 1+(-4)\cdot 2 & 6\cdot 4+(-4)\cdot 9\end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix}8\\ 7\end{bmatrix}_{2\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}(2\cdot 1+1\cdot 2)\cdot 8+(2\cdot 4+1\cdot 9)\cdot 7\\ (4\cdot 1+5\cdot 2)\cdot 8+(4\cdot 4+5\cdot 9)\cdot 7\\ [6\cdot 1+(-4)\cdot 2]\cdot 8+[6\cdot 4+(-4)\cdot 9]\cdot 7\end{bmatrix}_{3\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}(2\cdot 1+1\cdot 2)\cdot 8+(2\cdot 4+1\cdot 9)\cdot 7\\ (4\cdot 1+5\cdot 2)\cdot 8+(4\cdot 4+5\cdot 9)\cdot 7\\ [6\cdot 1+(-4)\cdot 2]\cdot 8+[6\cdot 4+(-4)\cdot 9]\cdot 7\end{bmatrix}_{3\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}2\cdot 1\cdot 8+1\cdot 2\cdot 8+2\cdot 4\cdot 7+1\cdot 9\cdot 7\\ 4\cdot 1\cdot 8+5\cdot 2\cdot 8+4\cdot 4\cdot 7+5\cdot 9\cdot 7\\ 6\cdot 1\cdot 8+(-4)\cdot 2\cdot 8+6\cdot 4\cdot 7+(-4)\cdot 9\cdot 7\end{bmatrix}_{3\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}2\cdot 1\cdot 8+2\cdot 4\cdot 7+1\cdot 2\cdot 8+1\cdot 9\cdot 7\\ 4\cdot 1\cdot 8+4\cdot 4\cdot 7+5\cdot 2\cdot 8+5\cdot 9\cdot 7\\ 6\cdot 1\cdot 8+6\cdot 4\cdot 7+(-4)\cdot 2\cdot 8+(-4)\cdot 9\cdot 7\end{bmatrix}_{3\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}2\cdot(1\cdot 8+4\cdot 7)+1\cdot(2\cdot 8+9\cdot 7)\\ 4\cdot(1\cdot 8+4\cdot 7)+5\cdot(2\cdot 8+9\cdot 7)\\ 6\cdot(1\cdot 8+4\cdot 7)+(-4)\cdot(2\cdot 8+9\cdot 7)\end{bmatrix}_{3\times 1}\\
&= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\\ 6 & -4\end{bmatrix}_{3\times 2} \times \begin{bmatrix}1\cdot 8+4\cdot 7\\ 2\cdot 8+9\cdot 7\end{bmatrix}_{2\times 1} =\\
&= \begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 5\\ 6 & -4\end{bmatrix}_{3\times 2} \times \left(\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 9\end{bmatrix}_{2\times 2} \times \begin{bmatrix}8\\ 7\end{bmatrix}_{2\times 1}\right)\\
&= A\cdot(B\cdot C)
\end{aligned}
\tag{2.33}
$$

(ii) $\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ **(Distributividade a esquerda)**

O produto da matriz A pela soma das matrizes B e C é igual a soma dos produtos da matriz A por B e a matriz A por C. Observe que para que a propriedade seja válida as matrizes B e C precisam ter a mesma ordem e certifique-se que a matriz A sempre esteja ao lado esquerdo das outras duas matrizes.

Exemplo 2.3.18 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}_{2\times 1}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}_{2\times 1}$, *logo*

$$\begin{aligned} A\cdot(B+C) = \quad & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \times \left[\begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}\right] = \\ & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2+2 \\ 7+6 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2\cdot(2+2)+1\cdot(7+6) \\ 7\cdot(2+2)+0\cdot(7+6) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2\cdot 2+2\cdot 2+1\cdot 7+1\cdot 6 \\ 7\cdot 2+7\cdot 2+0\cdot 7+0\cdot 6 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 7+2\cdot 2+1\cdot 6 \\ 7\cdot 2+0\cdot 7+7\cdot 2+0\cdot 6 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 7 \\ 7\cdot 2+0\cdot 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\cdot 2+1\cdot 6 \\ 7\cdot 2+0\cdot 6 \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \\ & A\cdot B + A\cdot C \end{aligned} \tag{2.34}$$

(iii) $(\mathbf{B}+\mathbf{C})\cdot\mathbf{A} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}+\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}$ **(Distributividade a direita)** A distributividade a direita é análoga a distributividade a esquerda, desde que se respeite as posições das multiplicações das matrizes, ou seja, a soma das matrizes B e C multiplicada pela matriz a A é igual a soma do produto da matriz B por A com o produto da matriz C por A.

Exemplo 2.3.19 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}_{2\times 3}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$, *logo*

$$
\begin{aligned}
(B+C)\cdot A = \quad & \left(\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}\right) \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 4+9 & 2+0 \\ 7+4 & 7+(-1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} (4+9)\cdot 2 + (2+0)\cdot 7 \\ (7+4)\cdot 2 + [7+(-1)]\cdot 7 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 4\cdot 2 + 9\cdot 2 + 2\cdot 7 + 0\cdot 7 \\ 7\cdot 2 + 4\cdot 2 + 7\cdot 7 + (-1)\cdot 7 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 4\cdot 2 + 2\cdot 7 + 9\cdot 2 + 0\cdot 7 \\ 7\cdot 2 + 7\cdot 7 + 4\cdot 2 + (-1)\cdot 7 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 4\cdot 2 + 2\cdot 7 \\ 7\cdot 2 + 7\cdot 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9\cdot 2 + 0\cdot 7 \\ 4\cdot 2 + (-1)\cdot 7 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \end{bmatrix} = \\
& B\cdot A + C\cdot A
\end{aligned}
\tag{2.35}
$$

(iv) $\mathbf{I}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{I} = \mathbf{A}$ **(Elemento neutro da multiplicação)**

Essa propriedade diz respeito ao produto de uma matriz identidade por uma matriz A que é equivalente ao produto da matriz A pela matriz identidade, em que ambas as multiplicações são iguais a matriz A, ou seja, um produto que não modifica o corpo da matriz A.

Exemplo 2.3.20 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ *e* $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, *logo*

$$
\begin{aligned}
I\cdot A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 1\cdot 9 + 0\cdot 0 & 0\cdot 9 + 1\cdot 0 \\ 1\cdot 4 + 0\cdot 4 & 0\cdot 4 + 1\cdot 4 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 9\cdot 1 + 0\cdot 0 & 9\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 4\cdot 1 + 4\cdot 0 & 4\cdot 0 + 4\cdot 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \\
&= A\cdot I = A
\end{aligned}
\tag{2.36}
$$

(v) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{O} = \mathbf{O}\cdot\mathbf{A} = \mathbf{O}$ **(Elemento nulo da multiplicação)**

A propriedade nos fala do produto de uma matriz nula por uma matriz A ser igual ao produto da matriz A pela matriz nula e ambos os produtos teremos como resultado a matriz nula.

Exemplo 2.3.21 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ *e* $O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$, *logo*

$$A \cdot O = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \cdot 0 & 6 \cdot 0 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O \tag{2.37}$$

e

$$O \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot 6 & 0 \cdot 6 \\ 0 \cdot 2 & 0 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = O \tag{2.38}$$

Então $A \cdot O = O \cdot A = O$.

(vi) **Observação.** O produto de matrizes não é comutativo, ou seja, se A e B são matrizes tais que estão definidas as multiplicações $A\,B$ e $B\,A$, então não necessariamente $A\,B = B\,A$.

De fato, tomando $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, temos

$$A\,B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$
$$B\,A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

assim, $A\,B \neq B\,A$.

2.3.4 A transposta de uma matriz

Dada uma matriz A de ordem $m \times n$, iremos chamar de transposta de A, a matriz A^t (ou A') de ordem $n \times m$, ou seja, dada a matriz A, para se obter a transposta A^t, devemos permutar as linhas com as colunas dessa matriz, da seguinte forma

Seja a matriz $A_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, dizemos que sua transposta é igual a $A^t_{n\times m} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \dots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Exemplo 2.3.22 *Alguns exemplos de matrizes e suas transpostas.*

(i) Observe que quando calculamos a transposta de uma matriz quadrada, a diagonal principal permanece a mesma.

$$M = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix} \text{ e } M^t = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 10 & -2 & -5 \\ 9 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

(ii) Veremos também, alguns autores, usando a seguinte notação para a transposta de uma matriz.

$$\begin{bmatrix} 8 & 9 \\ -9 & -4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 8 & -9 & 1 \\ 9 & -4 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.39}$$

2.3.5 Propriedades da matriz transposta

(i) $\mathbf{(A+B)^t = A^t + B^t}$

É equivalente dizer que a transposta da soma de uma matriz A com a matriz B é igual a soma da transposta da matriz A com a transposta da matriz B.

Exemplo 2.3.23 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 9 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, *logo*

$$
\begin{aligned}
(A+B)^t = & \left(\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 9 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}\right)^t = \\
& \begin{bmatrix} 2+5 & -7+7 \\ 9+(-1) & 1+(-3) \\ -4+2 & 0+4 \end{bmatrix}^t = \\
& \begin{bmatrix} 2+5 & 9+(-1) & -4+2 \\ -7+7 & 1+(-3) & 0+4 \end{bmatrix} = \\
& \begin{bmatrix} 2 & 9 & -4 \\ -7 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 7 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \\
& A^t + B^t
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

(ii) $\mathbf{(a \cdot A)^t = a \cdot A^t}$

Essa propriedade nos diz que a transposta do produto de um escalar real a por uma matriz A é igual ao produto desse escalar pela transposta da matriz A.

Exemplo 2.3.24 *Considerando o número real* 3 *e a matriz* $A = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, *teremos*

$$
\begin{aligned}
(3 \cdot A)^t = & \left(3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 10 & 9 \\ 1 & -2 & 7 \\ -3 & -5 & 6 \end{bmatrix}\right)^t = \\
& \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 10 & 3 \cdot 9 \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot 7 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot (-5) & 3 \cdot 6 \end{bmatrix}^t = \\
& \begin{bmatrix} 3 \cdot 5 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 10 & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot (-5) \\ 3 \cdot 9 & 3 \cdot 7 & 3 \cdot 6 \end{bmatrix} = \\
& 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 1 & -3 \\ 10 & -2 & -5 \\ 9 & 7 & 6 \end{bmatrix} = \\
& 3 \cdot A^t
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

(iii) $\mathbf{(a \cdot A)^t = a \cdot A^t}$

Significa dizer que a transposta do produto de um escalar real a por uma matriz A é equivalente ao produto desse escalar a pela transposta da matriz A.

EXEMPLO 2.3.25 *Dado um número real* 7 *e a matriz* $A = \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$, *então*

$$\begin{aligned}
(a \cdot A)^t &= \left(7 \cdot \begin{bmatrix} 15 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right)^t = \\
&= \begin{bmatrix} 7 \cdot 15 & 7 \cdot 1 \\ 7 \cdot 5 & 7 \cdot 4 \\ 7 \cdot 2 & 7 \cdot (-3) \end{bmatrix}^t = \\
&= \begin{bmatrix} 7 \cdot 15 & 7 \cdot 5 & 7 \cdot 2 \\ 7 \cdot 1 & 7 \cdot 4 & 7 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \\
&= 7 \cdot \begin{bmatrix} 15 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & (-3) \end{bmatrix} = a \cdot A^t
\end{aligned} \tag{2.42}$$

(iv) $\mathbf{(A^t)^t = A}$

É o mesmo que dizer que a transposta da transposta de uma matriz A é a própria matriz A.

EXEMPLO 2.3.26 *Dada uma matriz* $A = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}$, *então*

$$\begin{aligned}
\left(A^t\right)^t &= \left(\begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}^t \right)^t = \\
&= \begin{bmatrix} 7 & 2 & -4 \end{bmatrix}^t = \\
&= \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = A
\end{aligned} \tag{2.43}$$

(v) $\mathbf{(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t}$

A propriedade diz que a transposta do produto de uma matriz A com uma matriz B, é igual ao produto das transposta da matriz B pela transposta da matriz A. Observe que a ordem das multiplicações das matrizes A e B se alteram nessa propriedade.

Exemplo 2.3.27 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$*, logo*

$$\begin{aligned}
(A \cdot B)^t &= \left(\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \right)^t = \\
&= \left(\begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 \\ 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 & 4 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} \right)^t = \\
&= \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 & 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 3 & 2 \cdot 5 + 5 \cdot 3 & 4 \cdot 5 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 \cdot 3 + 4 \cdot 4 & 2 \cdot 2 + 4 \cdot 5 & 2 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 4 & 5 \cdot 2 + 3 \cdot 5 & 5 \cdot 4 + 3 \cdot 1 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} = B^t \cdot A^t
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Capítulo

3

Operações elementares sobre linhas

3.1 Operações elementares sobre linhas

Umas das maneiras de acharmos a solução de um sistema de equação é substituindo-o por um sistema de equações equivalente a ele, porém de fácil resolução. Para construirmos uma nova equação equivalente a antiga, iremos realizar o que chamamos de operações elementares sobre linhas, ou seja, uma sequência de operações sobre as equações do sistema sem alterar sua solução.

1.0 Na matemática ocidental antiga são poucas as aparições de sistemas de equações lineares. No Oriente, contudo, o assunto mereceu atenção bem maior. Com seu gosto especial por diagramas, os chineses representavam os sistemas lineares por meio de seus coeficientes escritos com barras de bambu sobre os quadrados de um tabuleiro. Assim acabaram descobrindo o método de resolução por eliminação — que consiste em anular coeficientes por meio de operações elementares.(DOMINGUES, 1998)

Definição 3.1.1 *Dada uma matriz $A_{m\times n}$, $A = (a_{ij})$, as seguintes operações abaixo chamam-se* ***operações elementares sobre linhas****.*

i) Permuta das i-ésima e j-ésima linhas de A, $(L_i \leftrightarrow L_j)$

ii) Multiplicação da i-ésima linha por um número real $k \neq 0$, $(L_i \rightarrow k \cdot L_i)$

iii) Substituição da i-ésima linha pela i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha $(L_i \rightarrow L_i + k \cdot L_j)$.

Exemplo 3.1.2 *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, dizemos que B é a matriz obtida de A pela operação $L_1 \leftrightarrow L_3$. Logo,* $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Exemplo 3.1.3 *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$, *dizemos que* B *é a matriz obtida de* A *pela operação* $L_2 \to -2L_2$. *Logo,* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & -2\sqrt{3} \end{bmatrix}$.

Exemplo 3.1.4 *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, *dizemos que* B *é a matriz obtida de* A *pela operação* $L_3 \to L_3 - 4L_1$. *Logo,* $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -10 & 1 \end{bmatrix}$.

Definição 3.1.5 *Sejam* A *e* B *matrizes* $m \times n$, *diz-se que a matriz* B *é* ***linha equivalente*** *à matriz* A *quando* B *é obtida de* A *através de uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas de* A.

Se $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, ..., $\mathcal{O}_N$ *denotam operações elementares sobre linhas então podemos representar a relação* B *linha equivalente a* A *pela sequência*

$$A \underset{\mathcal{O}_1}{\rightarrow} A_1 \underset{\mathcal{O}_2}{\rightarrow} A_2 \underset{\mathcal{O}_3}{\rightarrow} A_3 ... A_{N-1} \underset{\mathcal{O}_N}{\rightarrow} B$$

com $A = A_0$, $B = A_N$ *e* A_i *obtida de* A_{i-1} *através da operação elementar* $\mathcal{O}_i, i = 1, 2, 3, ..., N-1$.

Exemplo 3.1.6 *A matriz* $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é linha equivalente à matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Para mostrar essa afirmação, é suficiente mostrar que a matriz B pode ser obtida de A através de uma sequência finita de operações elementares.

Verifica-se que usando as três operações elementares abaixo, obtêm-se B a partir de A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathcal{O}_1]{L_2 \to L_2 + 2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathcal{O}_2]{L_3 \to L_3 + L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathcal{O}_3]{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B \quad (3.1)$$

Seja A uma matriz $m \times n$ e seja $\mathcal{O}$ uma operação elementar sobre linhas de matrizes $m \times n$. Se a matriz B é obtida de A pela aplicação da operação $\mathcal{O}$, denotamos $B = \mathcal{O}(A)$. Introduziremos agora a noção de operação elementar inversa.

Definição 3.1.7 *Seja $\mathcal{O}$ uma operação elementar sobre linhas de matrizes $m \times n$. Uma operação elementar $\mathcal{O}'$ sobre linhas de matrizes $m \times n$ é a* ***operação elementar inversa*** *de $\mathcal{O}$, quando*

$$\mathcal{O}'(\mathcal{O}(A)) = \mathcal{O}(\mathcal{O}'(A)) = A \tag{3.2}$$

para qualquer matriz $A_{m\times n}$.

Intuitivamente a operação elementar inversa de $\mathcal{O}$, "desfaz" a operação elementar $\mathcal{O}$.

O próximo resultado afirma que todas as operações elementares sobre linhas de matrizes $m \times n$ admitem operações elementares inversas.

Teorema 3.1.8 *Dada a matriz $A_{m\times n}$,*

(i) se $\mathcal{O}$ denota a operação elementar permuta das i-ésima e j-ésima linhas de $A(L_i \leftrightarrow L_j)$, então a operação elementar inversa de $\mathcal{O}$ é $\mathcal{O}' = A(L_j \leftrightarrow L_i)$.

(ii) se $\mathcal{O}$ denota a operação elementar multiplicação da i-ésima linha por um número real $k \neq 0$, $(L_i \to kL_i)$, então a operação elementar inversa de $\mathcal{O}$ é $\mathcal{O}'$ $(L_i \leftrightarrow (1/k)L_i)$.

(iii) se $\mathcal{O}$ denota a operação elementar substituição da i-ésima linha mais k vezes a j-ésima linha $(L_i \to L_i + kL_j)$, então a operação elementar inversa de $\mathcal{O}$ é $\mathcal{O}'(L_i \to L_i - kL_j)$.

Demonstração:

(i) Para demonstrar o item (i) em que $\mathcal{O} : L_i \to L_j$ é suficiente provar que $\mathcal{O}(\mathcal{O}(A)) = A$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow L_j}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A. \tag{3.3}$$

(ii) Para demonstrar o item (ii), se $\mathcal{O}$ denota $L_i \to k \cdot L_i$ e $\mathcal{O}'$ denota $L_i \to (1/k) \cdot L_i$, então basta mostrar que, $\mathcal{O}'(\mathcal{O}(A)) = \mathcal{O}(\mathcal{O}'(A)) = A$, de fato, mostrando que $\mathcal{O}'(\mathcal{O}(A)) = A$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow k \cdot L_i} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_i \leftrightarrow (1/k) \cdot L_j}$$
$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A. \text{ A operação } \mathcal{O}(\mathcal{O}'(A)) = A \text{ é similar.} \tag{3.4}$$

(iii) Para demonstrar o item (iii), se $\mathcal{O}$ denota $L_i \to L_i + k \cdot L_j$ e $\mathcal{O}'$ denota $L_i \to L_i - k \cdot L_j$, então basta mostrar que $\mathcal{O}'(\mathcal{O}(A)) = \mathcal{O}(\mathcal{O}'(A)) = A$, de fato, mostrando que $\mathcal{O}'(\mathcal{O}(A)) = A$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_i \to L_i + k \cdot L_j} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} + ka_{j1} & a_{i2} + ka_{j1} & \cdots & a_{in} + ka_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_i \to L_i - k \cdot L_j}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = A. \text{ A operação } \mathcal{O}(\mathcal{O}'(A)) = A \text{ é similar.} \tag{3.5}$$

■

Denotaremos por $\mathcal{M}_{m\times n}$ o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$. Se A, $B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ escrevemos $B \sim A$ quando B é linha equivalente à matriz A. O próximo resultado lista três importantes propriedades da relação linha equivalente.

Teorema 3.1.9 *Seja $\mathcal{M}_{m\times n}$ o conjunto de todas as matrizes de ordem $m \times n$. Então para quaisquer matrizes A, B, $C \in \mathcal{M}_{m\times n}$ as seguintes propriedades são válidas.*

(i) Reflexividade: $A \sim A$.

(ii) Simetria: Se $B \sim A$, então $A \sim B$.

(iii) Transitividade: Se $A \sim B$ e $B \sim C$, então $A \sim C$.

Demonstração:

(i) Considere a operação $L_i \to 1L_i$, então $A \xrightarrow{L_i \to 1 \cdot L_i} A$ e, portanto, $A \sim A$.

(ii) Suponhamos que $B \sim A$, então existem operações elementares $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, ..., \mathcal{O}_N$ tais que

$$A \underset{\mathcal{O}_1}{\to} A_1 \underset{\mathcal{O}_2}{\to} A_2 \underset{\mathcal{O}_3}{\to} A_3 ... A_{N-1} \underset{\mathcal{O}_N}{\to} B$$

Considerando as operações elementares inversas de $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \mathcal{O}_3, ..., \mathcal{O}_N$ denotadas respectivamente por $\mathcal{O}'_1, \mathcal{O}'_2, \mathcal{O}'_3, ..., \mathcal{O}'_N$, temos que

$$B \underset{\mathcal{O}'_N}{\longrightarrow} A_{N-1} \underset{\mathcal{O}'_{N-1}}{\longrightarrow} A_{N-2} \underset{\mathcal{O}'_{N-2}}{\longrightarrow} A_{N-3} \; ... \; A_1 \underset{\mathcal{O}'_1}{\longrightarrow} A, \text{ portanto, } A \sim B.$$

3) Suponhamos que $A \sim B$ e $B \sim C$, então existem operações elementares que $\mathcal{O}_1$, $\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_3$, $\cdots$, $\mathcal{O}_K$, tais que

$$A \underset{\mathcal{O}_1}{\rightarrow} A_1 \underset{\mathcal{O}_2}{\rightarrow} A_2 \underset{\mathcal{O}_3}{\rightarrow} A_3 ... A_{K-1} \underset{\mathcal{O}_K}{\rightarrow} B$$

e existem operações elementares $\hat{\mathrm{O}}_1, \hat{\mathrm{O}}_2, \hat{\mathrm{O}}_3, ..., \hat{\mathrm{O}}_N$ tais que

$$B \underset{\hat{\mathrm{O}}_1}{\rightarrow} B_1 \underset{\hat{\mathrm{O}}_2}{\rightarrow} B_2 \underset{\hat{\mathrm{O}}_3}{\rightarrow} B_3 ... B_{N-1} \underset{\hat{\mathrm{O}}_N}{\rightarrow} C$$

logo, segue que

$$A \underset{\mathcal{O}_1}{\rightarrow} A_1 \underset{\mathcal{O}_2}{\rightarrow} A_2 \underset{\mathcal{O}_3}{\rightarrow} A_3 ... A_{K-1} \underset{\mathcal{O}_K}{\rightarrow} B \underset{\hat{\mathrm{O}}_1}{\rightarrow} B_1 \underset{\hat{\mathrm{O}}_2}{\rightarrow} B_2 \underset{\hat{\mathrm{O}}_3}{\rightarrow} B_3 ... B_{N-1} \underset{\hat{\mathrm{O}}_N}{\rightarrow} C$$

e, portanto, $A \sim C$. ■

O Teorema 3.1.9 está dizendo que a relação linha equivalência é uma relação de equivalência no conjunto $\mathcal{M}_{m \times n}$ de todas as matrizes de ordem $m \times n$.

3.2 As Formas escalonadas de uma matriz

Antes de exibir o algoritmo de escalonamento propriamente dito, necessitamos de uma definição.

Definição 3.2.1 *Uma matriz $A_{m \times n}$ está na **forma escalonada** quando*

*A(s) linha(s) nula(s) está(ão) abaixo das demais e o primeiro elemento não nulo de uma linha, definido como **elemento líder**, está em uma coluna à direita do elemento líder da linha acima (FARIAS; KONZEN; SOUZA, 2020).*

Em uma outra visão, podemos dizer que a matriz está escalonada quando o número de zeros a esquerda do elemento líder de cada linha sempre aumenta de uma linha superior para uma linha inferior e se caso tivermos uma linha nula, ela deve estar abaixo de qualquer linha não nula.

As duas condições da Definição acima implicam que os elementos que estão abaixo de um elemento líder são todos iguais a zero.

Exemplo 3.2.2 *Em relação a matriz abaixo*

$$\begin{bmatrix} 1 & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 2 & a_4 & a_5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & a_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz em forma escalonada. Notamos que os coeficientes a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 e a_6 podem ser quaisquer números reais sem alterar o fato de a matriz estar em forma escalonada.

Definição 3.2.3 *Quando uma matriz A está na forma escalonada, a posição ij do primeiro elemento não nulo da linha i de A chama-se uma* ***posição pivô****. Dizemos também que uma coluna é uma* ***coluna pivô*** *quando a coluna possui uma posição de pivô.*

Observação: Considere a matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nessa matriz as posições pivô ij são 12 e 24, pois A está na forma escalonada e 12 é a posição do elemento líder da linha 1 e 24 é a posição do elemento líder da linha 2. Também as colunas 2 e 4 de A são colunas pivô.

3.3 A forma escada de uma matriz (Formas escalonadas reduzidas)

Definição 3.3.1 *De acordo com (BOLDRINI et al., 1980), uma matriz A de ordem $m \times n$ é* ***linha reduzida a forma escada*** *quando*

(i) o primeiro elemento não nulo de cada linha de A é igual a 1.

(ii) cada coluna de A que contém o primeiro elemento não nulo de alguma linha, tem todos os seus outros elementos iguais a zero.

(iii) toda linha nula de A ocorre abaixo de todas as linhas não nulas.

(iv) se as linhas $1, 2, 3, ..., r$ são as linhas não nulas de A, e se o primeiro elemento não nulo da linha i ocorre na coluna k_i então $k_1 < k_2 < ... < k_r$.

A condição (iv) impõe a forma escada à matriz, ou seja, o número de zeros precedendo o primeiro elemento não nulo de uma linha aumenta a cada linha, até que sobrem somente linhas nulas, quando houver.

Figura 1 – Matriz linha reduzida à forma escada.

A Figura acima ilustra bem a condição (iv) da definição 3.2.1. A parte escura representa as linhas não nulas e a parte clara representa os zeros da matriz.

Observação 1: Toda matriz $A_{m\times n}$ linha reduzida à forma escada (definição 3.2.1), em particular, está na forma escalonada, ou seja, o método se baseia no fato de que todo sistema é equivalente a um sistema escalonado (LIMA, 2004).

Observação 2: É fácil verificar que uma matriz $A_{m\times n}$ é linha reduzida à forma escada se, e somente se, A está na forma escalonada, todos os elementos líder são iguais a 1 e são os únicos elementos não nulos das suas colunas.

Exemplo 3.3.2 *Seguem alguns exemplos de matriz que estão e que não estão em forma escada.*

a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

A matriz não está na forma escada pois viola a condição (ii) da definição 3.2.1.

b) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

A matriz não está na forma escada pois viola as condições (i) *e* (iv) *da definição 3.2.1*

c) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 7 \end{bmatrix}$

Não está na forma escada pois viola as condições (i) e (iii) da definição 3.2.1

d) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Está na forma escada pois satisfaz todas as condições da definição 3.2.1.

Para toda matriz $A_{m \times n}$ é possível aplicar um número finito de operações elementares sobre linhas de forma a obter uma matriz linha reduzida à forma escada, este processo gera um algoritmo chamado de algoritmo de escalonamento que veremos na próxima seção. De fato, vale um resultado ainda mais forte cuja prova se encontra no Apêndice A.

Teorema 3.3.3 *Toda matriz $A_{m \times n}$ é linha equivalente a uma única matriz linha reduzida a forma escada.*

Demonstração: *Ver apêndice A.* ■

3.4 O Algoritmo do escalonamento

De acordo com (FARIAS; KONZEN; SOUZA, 2020), sistematicamente, encontramos a forma escalonada de uma matriz aplicando os seguintes passos:

1º) Analisar a primeira coluna pivô da esquerda para a direita, ou seja, é a primeira coluna que possui algum elemento diferente de zero e, se necessário, aplicar operações elementares para que o elemento da primeira linha (esta é a posição de pivô!) passe a ser diferente de zero;

2º) A partir de operações elementares, eliminar todos elementos que estão abaixo do elemento na posição de pivô que obtivemos no Passo 1;

3º) Desconsiderando por um momento a primeira linha, procuramos pela próxima coluna pivô aquela que tem algum elemento não nulo *abaixo da primeira linha*. Se necessário, aplicar operações elementares para que, na segunda linha, o elemento passe a ser diferente de zero;

4º) A partir de operações elementares, eliminar todos elementos que estão abaixo do elemento na posição de pivô que obtivemos no Passo 3;

5º) Desconsiderando por um momento a primeira e a segunda linhas, procuramos pela próxima coluna pivô, aquela que tem algum elemento não nulo *abaixo da primeira linha e da segunda linha*. Se necessário, aplicar operações elementares para que, na segunda linha, o elemento passe a ser diferente de zero;

6º) A partir de operações elementares, eliminar todos elementos que estão abaixo do elemento na posição de pivô que obtivemos no Passo 5 e assim por diante.

O processo deve ser repetido até se esgotarem as colunas que possuem a posição de pivô. Vamos analisar o algoritmo sendo aplicado na matriz A abaixo.

Exemplo 3.4.1 *Considere a matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

1º Passo. A primeira coluna pivô é a terceira. Escolhemos um elemento não nulo da terceira coluna para ocupar a posição de pivô. Por exemplo, a segunda linha. Trocando a primeira e a segunda linhas de lugar (a operação vai estar descrita abaixo), obtemos a matriz

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

2º Passo. Eliminar os elementos abaixo do 2 que está na posição pivô na primeira linha. Para isso, basta aplicar as seguintes operações elementares à matriz A_1:

$$\begin{gathered} L_3 \to L_3 + \tfrac{3}{2}L_1 \\ L_4 \to L_4 - 3L_1 \\ L_5 \to L_5 + L_1 \end{gathered}$$

após isso, obtemos a matriz

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

3º Passo. A partir de agora, vamos essencialmente repetir o processo já realizado até agora. Notamos que a próxima coluna na matriz A_2 que contém elementos não nulos (sem olhar para a primeira linha!) é a quarta coluna. Portanto, esta é uma coluna pivô e vamos posicionar um elemento não nulo na segunda linha. Por exemplo, podemos trocar a segunda e a terceira linhas da matriz A_2.

$$\begin{aligned} &L_2 \leftrightarrow L_3 \\ A_3 = &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

4º Passo. Multiplicando a linha 2 de A_3 pelo número real 2, temos:

$$\begin{aligned} &L_2 \rightarrow 2L_2 \\ A_4 = &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5º Passo. Prosseguimos como no Passo 2 para eliminar todos os elementos que estão abaixo da posição de pivô da quarta coluna de A_4

$$\begin{aligned} &L_4 \rightarrow L_4 + L_2 \\ &L_5 \rightarrow L_5 - 2L_2 \\ A_5 = &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

6º Passo. Finalmente, identificamos a coluna 5 como coluna pivô e obtemos uma matriz em forma escalonada ao deixar um elemento não nulo na posição de pivô:

$$\begin{aligned} &L_5 \leftrightarrow L_3 \\ A_6 = &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Esse é o formato da matriz escalonada. A partir desse ponto, para obter a forma escalonada reduzida *a partir da forma escalonada* aplicamos outros passos iterativos:

7º passo. Começar pela posição de pivô mais à direita e eliminar os elementos não nulos acima da posição de pivô;

8º passo. Se necessário, dividir a linha pelo valor do elemento líder (que está na posição de pivô) para que o elemento líder fique igual a 1;

9º passo. Repetir os primeiros passos para o elemento líder na próxima (da direita para a esquerda) coluna pivô.

Ao terminar todos os processos acima, teremos a matriz escalonada reduzida, como mostraremos no exemplo abaixo.

Exemplo 3.4.2 *No Exemplo (3.4.1), obtemos a matriz A_6 que é a forma escalonada da matriz A. Agora aplicaremos a A_6 os três passos anteriores para obtermos a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A.*

Identificando novamente as posições de pivô na matriz A_6, temos que o mais da direita é o -1 da quinta coluna. Para eliminar os elementos não nulos acima aplicamos na matriz A_6:

$$
\begin{aligned}
&L_2 \to L_2 + L_3 \\
&L_1 \to L_1 - L_3
\end{aligned}
$$

$$
A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

A próxima posição de pivô mais à direita é o 1 na linha 2, coluna 4. Eliminando o termo não nulo acima, através da operação elementar em A_7

$$
L_1 \to L_1 - L_2
$$

$$
A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

Agora, para obtermos a forma escada de A, basta executar em A_8 as duas operações elementares

$$L_1 \rightarrow (\tfrac{1}{2})L_1$$
$$L_3 \rightarrow (-1)L_3$$

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Com o intuito de agilizar as operações elementares para o escalonamento de uma matriz e sem correr o risco de efetuar alguma operação de maneira equivocada, foi utilizado neste capítulo uma calculadora para escalonar matrizes (PLANETCALC, 2008). A calculadora ainda conta com o passo a passo das operações elementares realizadas por ela até o escalonamento.

Capítulo *4*

Matrizes e sistemas de equações lineares

A fim de tornar a explicação mais simples, vamos iniciá-la com uma situação problema envolvendo um sistema linear com duas incógnita.

Um loja de aluguéis de veículos têm, em seu estacionamento, carros (x_1), motos (x_2) e triciclos (x_3).

1ª info) O estacionamento possui um total de 190 veículos.

2ª info) O estacionamento possui 620 rodas.

3ª info) Se apenas 10 carros forem alugados e retirados, o estacionamento ficará com o número de carros igual a soma do número de motos com o número de triciclos.

Essas informações podem ser transformadas em uma linguagem matemática na forma de equações lineares com 3 incógnitas. O total de veículos, por exemplo, pode ser escrito como:

$$\textbf{1ª info} \;\rightarrow\; x_1 + x_2 + x_3 = 190.$$

E, analogamente, as outras duas informações podem ser escritas na forma

$$\textbf{2ª info} \;\rightarrow\; 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20$$
$$\textbf{3ª info} \;\rightarrow\; x_1 - 10 = x_2 + x_3$$

Portanto, devemos encontrar os x_1, x_2 e x_3 que sejam soluções do sistema criado com as 3 informações dadas anteriormente, como segue abaixo

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 190 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 20 \\ x_1 - 10 = x_2 + x_3 \end{cases} \tag{4.1}$$

Muitos dos problemas que veremos pela frente possuem características similares a esse. Aprenderemos, com algumas táticas de resoluções, a encontrar os valores dessas incógnitas.

4.1 Equações lineares

Definição 4.1.1 *Uma equação linear nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *é uma equação da forma*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b$$

em que os coeficientes $a_1, a_2, \cdots, a_n$ *e o termo independente* b *são números reais conhecidos.*

Exemplo 4.1.2 *(i) Uma equação linear na variável* x*:* $5x = 1$

(ii) Uma equação linear nas variáveis x *e* y*:* $2x - 3y = 10$

(iii) Uma equação linear nas variáveis x*,* y *e* z*:* $x + 2y - \sqrt{2}\,z = 12$

(iv) Uma equação linear nas variáveis x_1*,* x_2*,* x_3*,* x_4*,* x_5*:* $3x_1 - x_2 + 2x_4 - x_5 = 0$
Nesta última equação, pode-se incluir a variáveis ausente x_3 *reescrevendo a equação como* $3x_1 - x_2 + 0\,x_3 + 2x_4 - x_5 = 0$

4.2 Solução de uma equação linear

Definição 4.2.1 *Dada uma equação linear nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \tag{4.2}$$

uma solução da equação linear (4.2) *é uma n-upla ordenada de números reais* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ *tais que*

$$a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + \cdots a_n\hat{x}_n = b \tag{4.3}$$

ou seja, quando se faz $x_1 = \hat{x}_1,\ x_2 = \hat{x}_2, \cdots, x_n = \hat{x}_n$*, a equação* (4.2) *é satisfeita.*

Exemplo 4.2.2 *(i)* $\hat{x} = \dfrac{1}{5}$ *é uma solução da equação linear* $5x = 1$.

De fato, $5\,\dfrac{1}{5} = 1$.

Note que, uma 1-upla é simplesmente um número real.

(ii) O par ordenado $(-1, 1)$ *é uma solução da equação linear* $2x_1 + 2x_2 = 0$

De fato, $2(-1) + 2(1) = -2 + 2 = 0$.
Observe também que $(-2, 2)$, $(-3, 3)$ *também são soluções.*

(iii) A tripla ordenada $(-2, 1, 0)$ *é uma solução da equação linear* $x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

De fato, $-2 + 2\,(1) - 0 = -2 + 2 = 0$.

4.3 O Conjunto solução

Definição 4.3.1 *Dada uma equação linear nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b \tag{4.4}$$

o conjunto solução $\mathcal{S}$ *da equação linear* (4.4) *é o conjunto formado por todas as n-uplas ordenadas* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ *de números reais que são soluções de* (4.4). *Em símbolos*

$$\mathcal{S} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_1\hat{x}_1 + a_2\hat{x}_2 + \cdots + a_n\hat{x}_n = b\}$$

Resolver uma equação linear significa exibir o seu conjunto solução.

4.4 Sistema de equações lineares

Definição 4.4.1 *Um sistema de m equações lineares nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *é uma coleção de m equações lineares nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$ *da forma*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \tag{4.5}$$

Os coeficientes são indexados por um par ordenado de números naturais ij com $1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$.

a_{ij} é o coeficiente multiplicador da variável x_j na i-ésima equação.
b_i é o termo independente da i-ésima equação.

Exemplo 4.4.2 *(i) Um sistema de duas equações lineares nas duas variáveis x, y*

$$\begin{aligned} 3x - 2y =& 4 \\ 6x + 4y =& 0 \end{aligned}$$

(ii) Um sistema de três equações lineares nas três variáveis x, y, z

$$\begin{aligned} x - 2y + z =& \sqrt{2} \\ 6x + 4y - 2z =& 0 \\ x - y + 2z =& -1 \end{aligned}$$

(ii) Um sistema de duas equações lineares nas variáveis x_1, x_2, x_3, x_4

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 - x_4 =& -1 \\ x_2 + 3x_4 =& 0 \end{aligned}$$

4.5 Solução de um sistema de equações lineares

Definição 4.5.1 *Dado um sistema de m equações lineares nas variáveis $x_1, x_2, \cdots, x_n$*

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n =& b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n =& b_2 \\ \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n =& b_m \end{aligned} \tag{4.6}$$

uma solução do sistema linear (4.6) *é uma n-upla ordenada de números reais $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ tais que*

$$\begin{aligned} a_{11}\hat{x}_1 + a_{12}\hat{x}_2 + \cdots + a_{1n}\hat{x}_n =& b_1 \\ a_{21}\hat{x}_1 + a_{22}\hat{x}_2 + \cdots + a_{2n}\hat{x}_n =& b_2 \\ \\ a_{m1}\hat{x}_1 + a_{m2}\hat{x}_2 + \cdots + a_{mn}\hat{x}_n =& b_m \end{aligned}$$

ou seja, quando $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ é solução de cada uma das m equações do sistema.

Exemplo 4.5.2 *(i) O par ordenado* $(1,2)$ *é uma solução do sistema linear*

$$\begin{aligned} 2x + y &= 4 \\ -x + y &= 1 \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} 2(1) + (2) &= 4 \\ -(1) + (2) &= 1 \end{aligned}$$

(ii) A 4-upla $(1,0,0,0)$ *é uma solução do sistema linear*

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 - x_4 &= -1 \\ x_2 + 3x_4 &= 0 \end{aligned}$$

De fato,

$$\begin{aligned} -(1) + 2(0) - 0 &= -1 \\ 0 + 3(0) &= 0 \end{aligned}$$

4.6 O Conjunto solução de um sistema de equações lineares

Definição 4.6.1 *Dado um sistema de* m *equações lineares nas variáveis* $x_1, x_2, \cdots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \end{aligned} \tag{4.7}$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

o conjunto solução $\mathcal{S}$ *do sistema linear* (4.6)*, é o conjunto de todas as n-uplas* $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n)$ *de números reais, tais que*

$$a_{i1}\hat{x}_1 + a_{i2}\hat{x}_2 + \cdots + a_{in}\hat{x}_n = b_i, \quad 1 \le i \le m$$

em símbolos

$$\mathcal{S} = \{(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \cdots, \hat{x}_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, a_{i1}\hat{x}_1 + a_{i2}\hat{x}_2 + \cdots + a_{in}\hat{x}_n = b_i, \quad 1 \le i \le m\}$$

4.7 Sistemas lineares em sua forma matricial

Agora, iremos escrever um sistema linear na forma de equação matricial. Chamando

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

a matriz dos coeficientes,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

a matriz das incógnitas e

$$B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}$$

a matriz dos termos independentes. Então

$$A \times X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

é o formato de um sistema linear na forma de equação matricial.

Podemos também, para efeitos de contas, escrever esse sistema como uma matriz ampliada do sistema, que possui a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}.$$

É com esse formato que faremos operações elementares para a resolução do sistema. Perceba que as variáveis, antes chamada de "x_{ij}", não aparecem nesse novo formato pela fato de que, durante as operações que faremos, só as constantes sofrerão alterações. É importante ressaltar que os sistemas lineares cujas matrizes ampliadas são equivalentes, possuem o mesmo conjunto solução.

Exemplo 4.7.1 *Alguns sistema de equações lineares e a sua escrita na forma de equação matricial.*

$$(i)\begin{cases} 2\cdot x+3\cdot y=11 \\ 3\cdot x-2\cdot y=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$(ii)\begin{cases} 5\cdot a+2\cdot b+7\cdot c=30 \\ 4\cdot a-5b+3\cdot c=11 \\ 8\cdot a+4\cdot b-7\cdot c=-5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 5 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & 3 \\ 8 & 4 & -7 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 11 \\ -5 \end{bmatrix}$$

Exibiremos três exemplos com 3 possíveis soluções diferentes. É importante frisar que, nos exemplos abaixo, por serem compostos de apenas duas equações e duas variáveis, poderiam ser resolvidos por métodos mais simples (método da substituição, adição ou comparação), mas iremos usar o método do escalonamento para estar em sintonia com o estudo apresentado.

Exemplo 4.7.2 *Dado o sistema linear* $\begin{cases} 2x+3y=-1 \\ x-3y=4 \end{cases}$*, vamos analisar a solução.*

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

Voltando para o formato de sistema linear, temos

$$\begin{cases} x+0\cdot y=1 \\ 0\cdot x+y=-1 \end{cases}$$

Logo, observamos que o ponto $(1;-1)$ pertence as duas equações ao mesmo tempo. Isso faz desse ponto a solução do sistema de equações acima.

Exemplo 4.7.3 *Dado o sistema de equação* $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 6x-4y=-2 \end{cases}$*, vamos analisar a solução.*

Inicialmente, vamos transformar o sistema acima em uma matriz ampliada para, em seguida, apresentá-la em sua forma escalonada.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Logo, o sistema de equações equivalente a matriz escalonada, será

$$\begin{cases} x + -\frac{2}{3}y = -\frac{1}{3} \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

Podemos observar nesse sistema que a segunda equação é verdadeira para qualquer que seja o valor de x e y. Diante disso iremos analisar apenas a primeira equação.

Então, colocando y em função de x, na primeira equação, temos

$$x - \frac{2}{3}y = -\frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{1+3x}{2} \tag{4.11}$$

Na equação acima para diferentes valores de x, obtemos diferentes valores para y. Dizemos então que o sistema admite infinitas soluções.

Exemplo 4.7.4 *Dado o sistema de equação* $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 6x + 3y = 10 \end{cases}$, *vamos analisar a solução.*

Nos mesmos moldes em que fizemos anteriormente, iremos, mais uma vez, transformar o sistema em uma matriz e, em seguida, escaloná-la.

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 8 & -4 & 13 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.12}$$

Agora, transformando a matriz escalonada acima para o formato de um sistema de equações, temos

$$\begin{cases} x - \frac{1}{2}y = 0 \\ 0x + 0y = 1 \end{cases} \tag{4.13}$$

Na segunda equação, vemos que não existe valores para x e y que satisfazem a equação. Logo é um sistema que não possui solução e dizemos que ele é um sistema impossível.

4.8 Posto e Nulidade

Definição 4.8.1 *Sejam $A_{m\times n}$ uma matriz e $E_{m\times n}$ a matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente de A. O* ***posto*** *de A, $posto(A)$, é definido pelo número de linhas não nulas de E. Também define-se a* ***nulidade*** *de A por, $nul(A) = n - p$, ou seja, o número de colunas de A menos posto de A.*

Pela definição toda matriz possui um posto e para encontrar o posto dela devemos primeiro escaloná-la no formato reduzido para ai sim contar o número de linhas não nulas dessa matriz escalonada reduzida. Essa quantidade de linhas não nulas será chamado o posto da matriz. Temos também que para o cálculo da nulidade devemos subtrair o número de colunas da matriz A pelo posto de A.

Observação: Devido ao Teorema 3.2.3 os conceitos de posto e nulidade de uma matriz $A_{m\times n}$ estão bem definidos pois existe uma única matriz linha reduzida à forma escada linha equivalente a A.

Exemplo 4.8.2 *Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix}$, vamos determinar o seu posto. Para isso, devemos deixá-la no formato de matriz escalonada reduzida de A, então*

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1:L_1-L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3:L_3-2L_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2:L_2-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = B \tag{4.14}$$

Portanto, como o número de linhas não nulas de B é igual a 3 o diremos que o posto dessa matriz é igual a 3. Também aprendemos a calcular a nulidade da matriz A subtraindo o número de colunas pelo posto encontrado, logo a nulidade será igual a $4 - 3 = 1$.

Exemplo 4.8.3 *Dada a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, vamos determinar o seu posto. Para isso, assim como antes, devemos deixá-la no formato de matriz escalonada reduzida de A, então*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3:L_3-(L_2+L_1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2:L_2-L_1}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1:L_1+2L_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2:-L_2}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Portanto, como o número de linhas não nulas de A é igual a 2, temos que o posto de A é 2. A nulidade dessa matriz será $4 - 2 = 2$.

Exemplo 4.8.4 *Considere a matriz do exemplo (3.4.1)*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 2 & -11 \\ 0 & 0 & 6 & 2 & -4 & 22 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Então o $posto(A) = 3$ e $nul(A) = 3$. De fato, a forma escada de A é a matriz

$$A_9 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica-se que o número de linhas não nulas de A_9 é 3 (posto) e o número de colunas é 6, assim a nulidade de A vale $6 - 3 = 3$.

Exemplo 4.8.5 *Mostre que no conjunto das matrizes $m \times n$, $posto(A) = 0$ se, e somente se, $A = 0_{m\times n}$.*

Se $posto(A) = 0$, e E é a forma escada de A, então todas as linhas de E são nulas e portanto $E = 0_{m\times n}$. Assim, a matriz nula $0_{m\times n}$ é linha equivalente à matriz A, e pelo teorema (3.1.9) a matriz A é linha equivalente à matriz nula $0_{m\times n}$. Isso significa que a matriz A é obtida da matriz nula $0_{m\times n}$ por uma sequência finita de operações elementares, mas qualquer operação elementar aplicada à matriz nula resulta na própria matriz nula e, portanto $A = 0_{m\times n}$. Reciprocamente, se $A = 0_{m\times n}$ então A está na forma escada e, obviamente, $posto(A) = 0$.

Os conceitos de posto e nulidade de matrizes desempenharão um papel fundamental na caracterização dos sistemas de equações lineares quanto à existência e o número de soluções.

Teorema 4.8.6 *Vamos considerar, antes de enunciar o teorema, um sistema linear com m equações e n incógnitas. Chamaremos de A a matriz ampliada e de C a matriz dos coeficientes e tomando p_A o posto da matriz ampliada e p_C o posto da matriz dos coeficientes. Caso as matrizes tenham o mesmo posto, para tornar a escrita mais simples, chamaremos apenas de p. Então, temos que:*

i) Um sistema de m equações e n incógnitas admite solução, ou seja, é possível se, e somente se, o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes, ou seja, $p_A = p_C$

ii) Se as duas matrizes têm o mesmo posto p e $p = n$, a solução será única, ou seja, $p_A = p_C = n$

iii) Se as duas matrizes possuem o mesmo posto, ou seja, $p_A = p_C = p$ e $p < n$, podemos escolher $n - p$ incógnitas para serem livres, e as outras p incógnitas serão dadas em função destas, podendo essas incógnitas assumirem qualquer valor real.

Vamos, inicialmente, apresentar alguns exemplos sobre as situações que o teorema descreve para, em seguida, demonstrar os três passos citados. Nos exemplos, apresentaremos as matrizes principais e logo depois, de maneira direta, a sua forma escalonada reduzida por linha.

Exemplo 4.8.7 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ *escalonando-a, temos* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Observe que $p_A = p_C = 3$ e o número de incógnitas da matriz também é 3, logo a solução do sistema é única e teremos um sistema P.D. (possível e determinado). E essa solução será igual a $(x, y, z) = (5, -1, -1)$.

Exemplo 4.8.8 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ *escalonando-a, temos* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Aqui temos que $p_A = p_C = 2$ e o número de incógnitas é 3, então p<n. Logo, de acordo com o teorema, o sistema será P.I. (possível e indeterminado) e escolhendo a incógnita z como a variável livre, temos como possíveis solução $(x, y, z) = (1-2z, 1-z, z)$.

Exemplo 4.8.9 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 13 \\ 2 & 1 & 2 & 7 \\ 5 & 3 & 3 & 21 \end{bmatrix}$ *escalonando-a, temos* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Agora, como o teorema diz que o sistema só possuirá solução se tiver o posto da matriz ampliada igual ao da matriz dos coeficientes e vemos que $p_C = 2 < p_A = 3$ e $n = 3$, portanto o sistema é impossível.

Exemplo 4.8.10 *Considere o sistema linear abaixo, no qual a e b são números reais.*

$$\begin{cases} x + y + 3z = 2 \\ x + 2y + 4z = 3 \\ x + 3y + az = b \end{cases}$$

(a) Para que valores de a e b o sistema não admite solução?

(b) Para que valores de a e b o sistema admite infinitas soluções?

Antes de efetuarmos a solução dos itens a e b, vamos escalonar a matriz proveniente do sistema acima

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2:L_2-L_1]{L_3:L_3-L_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a-3 & b-2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1:L_1-L_2]{L_3:L_3-2L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-5 & b-4 \end{bmatrix} \tag{4.16}$$

Analisando a matriz escalonada, podemos ver que se $a \neq 5$, então $p_c = p_a = 3 = n$ e o sistema possuirá uma única solução. Feito o cálculo da solução única a título de curiosidade, vamos as perguntas de fato. Logo

- **Solução do item (a):** Se $a = 5$ e $b \neq 4$, então $p_a = 3 \neq p_c$, então de acordo com o teorema, sempre que o posto da matriz ampliada for diferente da matriz dos coeficientes então o sistema será impossível, ou seja, não admite solução.

- **Solução do item (b):** Se $a = 5$ e $b = 4$, então no sistema temos $p_c = p_a = 2 < n = 3$ e, quando os postos das matrizes são iguais mas o número de incógnitas é maior, temos que o sistema é possível e indeterminado, ou seja, apresenta infinitas soluções.

Demonstração do teorema 4.3.6

Quando temos uma matriz ampliada com o posto maior do que a matriz dos coeficientes (menor não pode ser) , ou seja, $p_A > p_C$, dizemos que o sistema não admite solução pois para isso acontecer devemos ter, em sua forma escalonada reduzida em linha, uma das linhas com os coeficientes iguais a $0\ 0\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ K_n$, uma vez que K_n é um número real diferente de zero na n-ésima coluna. Mas como uma linha de uma matriz representa uma equação linear, então essa equação terá o formato igual a $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + \cdots + 0x_{n-1} = K_n$, o que gera um absurdo, pois $K_n \neq 0$. Logo, um sistema impossível.

Agora vamos para o caso em que o posto da matriz ampliada é igual ao posto da matriz dos coeficientes, ou seja, $p_A = p_C$. Essa situação iremos dividir em dois outros subcasos que são:

- Subcaso 1: $p_A = p_C = n$ (Quando os postos das matrizes são iguais ao número de incógnitas).

Analisando a matriz $A_{m\times n}$, com $i \leq m$ e $j \leq n$ na sua forma escalonada reduzida, temos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & k_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & k_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & k_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & k_i \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nesse caso a solução do sistema será igual a

$$\begin{cases} x_1 = k_1 \\ x_2 = k_2 \\ x_3 = k_3 \\ \vdots \\ x_{i-1} = k_{i-1} \\ x_i = k_i \end{cases}$$

Logo uma única solução, sendo esse sistema um sistema possível e determinado.

- Subcaso 2: $p_A = p_C < n$ (Quando os postos das matrizes são menores que o número de incógnitas).

Agora temos que considerar infinitos formatos que serão analisados de duas formas para então deduzirmos as outras infinitas possibilidades. Vamos primeiro analisar a matriz que possui o formato igual a

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1j} & \cdots & c_{1(n-1)} & k_{1n} \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{2j} & \cdots & c_{2(n-1)} & k_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{3j} & \cdots & c_{3(n-1)} & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{(i-1)j} & \cdots & c_{(i-1)(n-1)} & k_{(i-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{ij} & \cdots & c_{i(n-1)} & k_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Teremos agora as variáveis livres e deixaremos todas as soluções em função das mesmas. Daí temos que a solução desse sistema será dada por

$$\begin{cases} x_1 = k_{1n} - [c_{1j}x_j + \cdots + c_{1(n-1)}x_{(n-1)}] \\ x_2 = k_{2n} - [c_{2j}x_j + \cdots + c_{2(n-1)}x_{(n-1)}] \\ x_2 = k_{3n} - [c_{3j}x_j + \cdots + c_{3(n-1)}x_{(n-1)}] \\ \vdots \\ x_i = k_{in} - [c_{ij}x_j + \cdots + c_{i(n-1)}x_{(n-1)}] \end{cases}$$

Vale ressaltar que o índice "i" é exatamente igual ao valor do posto da matriz acima.

Daqui em diante será apresentado mais um formato de matriz para considerarmos e o restante iremos constatar por analogia. No próximo caso o nosso sistema linear terá a primeira coluna nula. Logo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{1(j+1)} & \cdots & c_{1(n-1)} & k_{1n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & c_{2(j+1)} & \cdots & c_{2(n-1)} & k_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{3(j+1)} & \cdots & c_{3(n-1)} & k_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & c_{(i-1)(j+1)} & \cdots & c_{(i-1)(n-1)} & k_{(i-1)n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & c_{i(j+1)} & \cdots & c_{i(n-1)} & k_{in} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O conjunto solução nesse caso também será dado em função das variáveis livres desse sistema, da forma

$$\begin{cases} x_1 = k_{1n} - [c_{1(j+1)}x_{(j+1)} + \cdots + c_{1(n-1)}x_{(n-1)}] \\ x_2 = k_{2n} - [c_{2(j+1)}x_{(j+1)} + \cdots + c_{2(n-1)}x_{(n-1)}] \\ x_2 = k_{3n} - [c_{3(j+1)}x_{(j+1)} + \cdots + c_{3(n-1)}x_{(n-1)}] \\ \vdots \\ x_i = k_{in} - [c_{i(j+1)}x_{(j+1)} + \cdots + c_{i(n-1)}x_{(n-1)}] \end{cases}$$

Pronto, agora é fácil notar que mesmo o primeiro número não nulo em relação as colunas vir aparecer na terceira coluna ou numa coluna de maior posição, teremos sempre como respostas soluções em funções das variáveis livres.

Capítulo

5

A GEOMETRIA DAS SOLUÇÕES DE SISTEMAS LINEARES

Nesse capítulo estudaremos as representações geométricas de um sistema linear onde, primeiramente, veremos essas representações nos $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$ e, em seguida, no $\mathbb{R}^3$.

Teremos como software auxiliar o Geogebra (HOHENWARTER, 2002), ferramenta de grande importância em diversas áreas, sobretudo na geometria. Desenvolvida por Markus Horenwarter, na Universidade de Salzburg, este software nos ajudará a analisar a relação entre sistemas de equações apresentados e gráficos no plano cartesiano. Nesse sentido, o artigo apresentado no Encontro Nacional de Educação Matemática expõe que:

> 1.0 [...] as dificuldades apresentadas por alunos em relação ao conteúdo da geometria pode estar relacionada pela não articulação de métodos didáticos e o conteúdo a ser explorado. Neste sentido, acredita-se que o software GeoGebra possa ser uma metodologia matemática alternativa. (HESPANHOL et al., 2016)

Temos que a equação que apresenta apenas duas incógnitas, ou seja, na forma $ax + by = c$ é representada por uma reta no plano cartesiano onde os pontos de coordenadas $(x; y) \in \mathbb{R}^2$ que pertencem a essa plano serão determinados como os pontos que fazem parte do conjunto solução dessa reta. Por exemplo, na reta $x + 2y = 5$ os pontos $(0; 2,5), (1; 2), (3; 1)$ e $(5; 0)$ são alguns dos infinitos pontos que pertencem a essa reta, que está representada abaixo

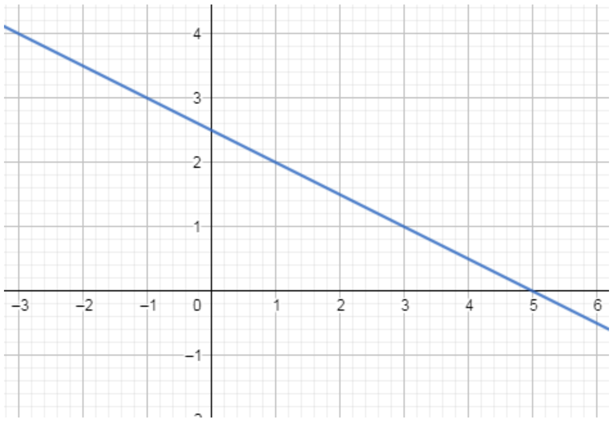

Figura 2 – Geogebra: Representação no plano cartesiano da equação: $x + 2y = 5$.

Agora, em uma equação linear com três incógnitas, ou seja, na forma $ax+by+cz = d$, o conjunto solução será representado pelos infinitos pontos, de três coordenadas, que fazem parte de um mesmo plano no espaço. No exemplo abaixo, vemos o conjunto solução da equação $2x + 3y + z = 1$.

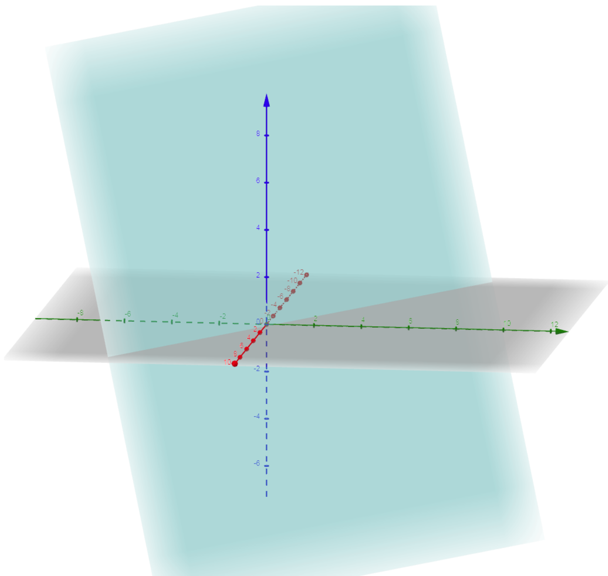

Figura 3 – Geogebra: Representação no plano cartesiano da equação: $2x + 3y + z = 1$

5.1 Sistema de 1 equação com 1 incógnita

Sendo $a \cdot x = b$ uma equação com apenas uma incógnita, já vimos na seção sobre soluções de um sistema de equações lineares que um sistema de uma equação e uma incógnita possui três possíveis casos. Neste capítulo iremos analisar os significados geométricos dessas possibilidades.

(i) Quando $a \neq 0$, temos uma única solução que será quando $x = \frac{b}{a}$. Isso, geometricamente, corresponde a dizer que o gráfico será uma reta vertical passando pelo ponto

$x = \frac{b}{a}$.

Exemplo 5.1.1 *Represente graficamente o sistema* $3 \cdot x = 9$.

Para essa representação, vamos apenas isolar o valor de x para analisarmos por onde essa reta vertical irá passar. Logo

$$\begin{aligned} 3 \cdot x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned} \tag{5.1}$$

A seguir, a representação geométrica do sistema acima

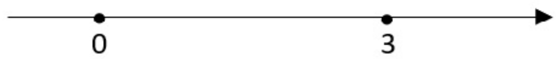

Figura 4 – Sistema de 1 equação com 1 incógnita.

Os próximos dois possíveis casos para esse sistema não possuem uma representação geométrica. Neles temos que:

(ii) Quando $a = 0$ e $b = 0$, teremos infinitas soluções reais para a incógnita x.

(iii) Quando $a = 0$ e $b \neq 0$, temos um sistema impossível.

5.2 Soluções de um sistema de equações lineares

Vamos aqui analisar todas as possíveis soluções de um sistema de equações com uma, duas ou mais incógnitas. No próximo capítulo analisaremos essas soluções geometricamente.

5.2.1 Sistema de uma equação e uma incógnita

Seja $a \cdot x = b$ uma equação com uma única incógnita. Teremos então, três possíveis soluções para a mesma. São elas:

(i) Se $a \neq 0$ teremos uma única solução para a equação, na forma

$$a \cdot x = b \Rightarrow x = \tfrac{b}{a} \textbf{ (única solução)}$$

(ii) Se $a = 0$ e $b = 0$, não importa qual será o valor da incógnita x, o produto pelo coeficiente a será sempre zero, tendo assim infinitas soluções reais.

$$0 \cdot x = 0 \ \textbf{(infinitas soluções)}$$

(iii) Se $a = 0$ e $b \neq 0$ o produto da incógnita pelo coeficiente a será igual a zero e como o coeficiente $b \neq 0$ temos um absurdo acontecendo. Logo, a equação não admite uma solução real.

$$0 \cdot x = b \ \textbf{(Absurdo!)}$$

Agora vamos analisar os sistemas de equações do 1° grau com duas incógnitas. Aqui teremos três possíveis tipos de resoluções dependendo do sistema.

Vamos analisar alguns sistemas para tirarmos algumas conclusões.

5.3 Sistemas de 2 equações com 2 incógnitas

Vamos agora, algebricamente, interpretar as posições entre duas retas no sistema linear em $\mathbb{R}^2$ e em seguida observar o significado dessa posição graficamente. Observando o sistema genérico de duas retas, temos

$$\begin{cases} ax + by = \alpha & (r_1) \\ cx + dy = \beta & (r_2) \end{cases} \tag{5.2}$$

Transformando esse sistema em uma matriz e, usando as operações elementares, vamos criar uma solução que servirá para qualquer que seja esse sistema

$$\begin{bmatrix} ax & by & \alpha \\ cx & dy & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[-b \cdot L_2 \to L_2]{d \cdot L_1 \to L_1} \begin{bmatrix} dax & dby & d\alpha \\ -bcx & -bdy & -b\beta \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} dax & dby & d\alpha \\ dax - bcx & 0 & d\alpha - b\beta \end{bmatrix} \tag{5.3}$$

Voltando com a matriz acima para o formato de um sistema, temos

$$\begin{cases} dax + dby = d\alpha \\ dax - bcx + 0 = d\alpha - b\beta \end{cases} \tag{5.4}$$

Analisando a segunda equação do sistema acima, vamos colocar a variável x em evidência

$$dax - bcx + 0 = d\alpha - b\beta \Rightarrow x\,(da - bc) = d\alpha - b\beta \tag{5.5}$$

Repare que para descobrir o valor de x em um sistema, basta substituir, na equação (5.4) os coeficientes e isolar a variável x.

Caso queira descobrir a variável y primeiro, faremos as seguintes operações

$$\begin{aligned}
&\begin{bmatrix} ax & by & \alpha \\ cx & dy & \beta \end{bmatrix} \xrightarrow[-a\cdot L_2 \to L_2]{c\cdot L_1 \to L_1} \\
&\begin{bmatrix} cax & cby & c\alpha \\ -acx & -ady & -a\beta \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + L_2 \to L_2} \\
&\begin{bmatrix} cax & cby & c\alpha \\ 0 & cby - ady & c\alpha - a\beta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Voltando com a matriz acima para o formato de um sistema, temos

$$\begin{cases} cax + cby = c\alpha \\ 0 + cby - ady = c\alpha - a\beta \end{cases} \tag{5.7}$$

Analisando a segunda equação do sistema acima, vamos colocar a variável y em evidência

$$0 + cby - ady = c\alpha - a\beta \Rightarrow y \cdot (cb - ad) = c\alpha - a\beta \tag{5.8}$$

Temos então, duas equações que nos ajudam a encontrar as variáveis dos determinados sistemas.

5.3.1 Possíveis posições entre duas retas em um plano.

Quando estamos trabalhando com um sistema de equações com duas equações e duas variáveis, teremos, em qualquer que seja esse sistema, três possíveis posições entre essas duas retas representadas pelas equações. São as posições: Concorrentes, paralelas e coincidentes.

Faremos uma breve explicação, com exemplos, sobre cada uma dessas possíveis posições usando o método prático representado, logo acima, tal que

$$x \cdot (da - bc) = d\alpha - b\beta \tag{5.9}$$

$$y \cdot (cb - ad) = c\alpha - a\beta \tag{5.10}$$

5.3.1.1 **Retas concorrentes.**

Diremos que duas retas em um sistema de equações lineares são concorrentes quando estas possuem um único ponto em comum. Sendo concorrentes, chamaremos de um sistema possível e determinado, ou seja, existe um ponto de coordenada $(x; y)$ que pertence as duas retas desse sistema. Quando duas retas são concorrentes as suas inclinações são diferentes e podemos fazer essa observação isolando a variável y em cada uma delas e observando o coeficiente da variável x, ele será o coeficiente angular das retas. Essa proposta apenas nos permite verificar se as retas são ou não concorrentes, mas não nos permite verificar qual é esse ponto de intersecção, portanto não faremos essa abordagem nesse estudo.

Exemplo 5.3.1 *Represente, graficamente, o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$

Usando as equações (5.8) e (5.9) uma analogia com o nosso exemplo, temos que $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 11$, $c = 1$, $d = -2$ e $\beta = -5$. Logo

Variável x:

$$\begin{aligned} &x \cdot (-2 \cdot 2 - 3 \cdot 1) = -2 \cdot 11 - 3 \cdot (-5) \\ &x \cdot (-4 - 3) = -22 + 15 \\ &x \cdot (-7) = -7 \\ &x = 1 \end{aligned} \tag{5.11}$$

Variável y:

$$\begin{aligned} &y \cdot [1 \cdot 3 - 2 \cdot (-2)] = 1 \cdot 11 - 2 \cdot (-5) \\ &y \cdot (3 + 4) = 11 + 10 \\ &y \cdot 7 = 21 \\ &y = 3 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Portanto o conjunto solução desse sistema de equações é o ponto de coordenadas $(1;3)$. Isso quer dizer que as retas $r_1 : 2x + 3y - 11 = 0$ e a reta $r_2 : x - 2y + 5 = 0$ se interceptam no plano cartesiano no ponto $(1;3)$, como mostra a imagem abaixo.

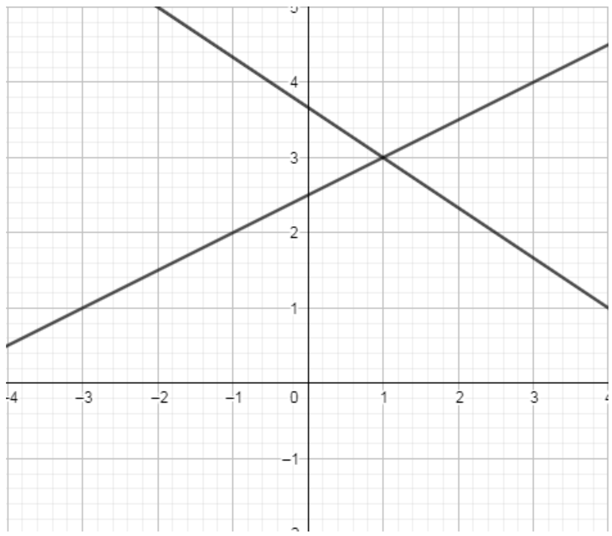

Figura 5 – Geogebra: Intersecção das retas r_1 e r_2 no ponto $(1;3)$

5.3.1.2 **Retas paralelas.**

Duas retas no mesmo plano são chamadas de paralelas quando em toda a sua extensão a distância entre elas se mantiver a mesma, logo não haverá uma intersecção, ou seja, não teremos uma solução. Quando duas retas são paralelas os coeficientes angulares de cada uma delas serão iguais, pois as retas terão a mesma inclinação. Como não possui solução, o chamaremos de sistema impossível.

Exemplo 5.3.2 *Represente, graficamente, o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 4x + 6y = 14 \end{cases}$$

Usando as equações (5.8) e (5.9) uma analogia com o nosso exemplo, temos que $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 11$, $c = 4$, $d = 6$ e $\beta = 14$. Logo

$$\begin{aligned} x \cdot (6 \cdot 2 - 3 \cdot 4) &= 6 \cdot 11 - 3 \cdot 14. \\ x \cdot (12 - 12) &= 66 - 42. \\ x \cdot (12 - 12) &= 66 - 42. \\ x \cdot 0 &= 24 \quad (Impossível!) \end{aligned} \tag{5.13}$$

Já não precisamos continuar a nossa conta devido ao fato de ser impossível de se encontrar um valor para a coordenada x. Logo diremos que o conjunto solução desse sistema é vazio, ou seja, não se interceptam. Observe a imagem das retas $r_1 : 2x + 3y = 11$ e $r_2 : 4x + 6y = 14$ no plano cartesiano.

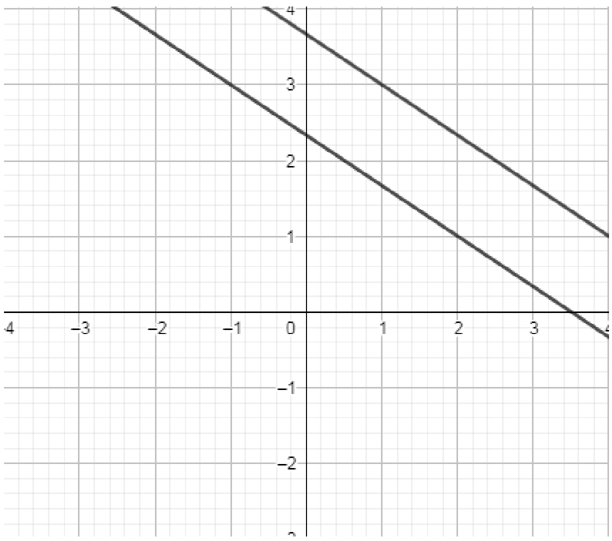

Figura 6 – Geogebra: O paralelismo entre as retas r_1 e r_2.

5.3.1.3 **Retas coincidentes.**

Diremos que duas retas no mesmo plano são coincidentes quando todos os seus pontos forem comuns, ou seja, uma reta em cima da outra. Nesse caso as inclinações também serão iguais e todos os pontos que pertencem a uma reta também pertencerão a outra, ou seja, como não teremos uma só solução, o chamaremos de sistema possível e indeterminado.

Exemplo 5.3.3 *Represente, graficamente, o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ 6x + 9y = 33 \end{cases}$$

Usando as equações (5.8) e (5.9) uma analogia com o nosso exemplo, temos que $a = 2$, $b = 3$, $\alpha = 11$, $c = 6$, $d = 9$ e $\beta = 33$. Logo

Variável x:

$$\begin{aligned} x \cdot (9 \cdot 2 - 3 \cdot 6) &= 9 \cdot 11 - 3 \cdot 33 \\ x \cdot (18 - 18) &= 99 - 99 \\ x \cdot 0 &= 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Variável y:

$$
\begin{aligned}
y \cdot (6 \cdot 3 - 2 \cdot 9) &= 6 \cdot 11 - 2 \cdot 33 \\
y \cdot (18 - 18) &= 66 - 66 \\
y \cdot 0 &= 0
\end{aligned} \tag{5.15}
$$

Repare que independente do valor das variáveis x e y as equações $r_1 : 2x + 3y = 11$ e $r_2 : 6x + 9y = 33$ acima sempre terão uma solução, ou seja, o sistema é possível, pois existem infinitos valores para x e y que resolvem a equação, porém como não existe uma única solução, diremos que o sistema é indeterminado.

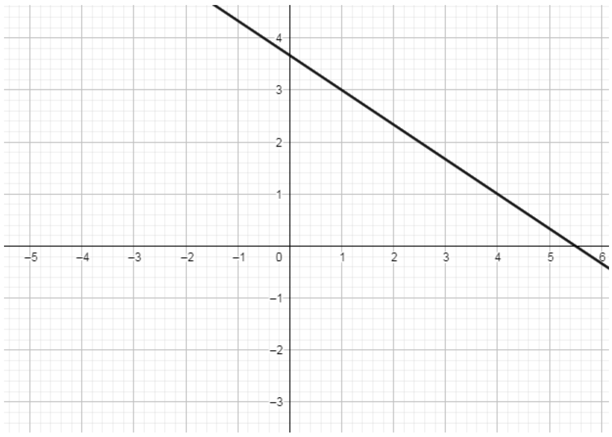

Figura 7 – Geogebra: As retas coincidentes r_1 e r_2.

5.4 Sistemas de 3 equações com 3 incógnitas

Vamos agora analisar as possíveis posições entre planos em um sistema de equações lineares com três equações com três incógnitas cada. Nesse estudo cada plano é representado por uma das equações de três incógnitas, como no exemplo do sistema genérico abaixo

$$
\begin{cases}
ax + by + cz = \alpha \\
dx + ey + fz = \beta \\
gx + hy + iz = \gamma
\end{cases} \tag{5.16}
$$

Aqui teremos oito possíveis posições entre os três planos do sistema e classificaremos a solução do sistema, assim como fizemos no sistema $\mathbb{R}^2$, em Sistema possível e determinado, sistema possível e indeterminado e sistema impossível. Nessa seção iremos resolver, pelo método de escalonamento, apenas o sistema que é possível e determinado, nos outros casos iremos apenas apresentar a solução.

5.4.1 Sistema possível e determinado.

O sistema linear com três equações e três incógnitas só será classificado como possível e determinado, caso a intersecção entre os três planos gere um único ponto com coordenadas (x, y, z). Esse ponto será a solução desse sistema.

Exemplo 5.4.1 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + 3y + 2z = 4 \\ 3x - 2y + z = -5 \end{cases}$$

Vamos, inicialmente, transformar no formato de uma matriz o sistema de equações acima para, em seguida, escalonarmos.

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}\cdot L_1 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 3 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{3}\cdot L_3 \to L_3} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 1 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_1 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_1 \to L_3} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{19}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{2}{5}L_2 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{7}{6} & \frac{5}{6} & \frac{-19}{6} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{6}{7}L_3 \to L_3} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{7} & \frac{19}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2 \to L_3} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{12}{7} & \frac{12}{7} \end{bmatrix} \xrightarrow{-\frac{7}{12}\cdot L_3 \to L_3} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_2 - L_3 \to L_2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 + \frac{1}{2}L_3 \to L_1} \\
\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 - \frac{1}{2}L_2 \to L_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
\end{gathered} \tag{5.17}$$

Logo, temos o seguinte sistema linear reduzido

$$\begin{cases} x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + z = -1 \end{cases} \tag{5.18}$$

dado que o conjunto solução é o ponto de coordenadas $(0, 2, -1)$. Isso quer dizer que o ponto citado é comum, ou seja, pertence as três equações presentes no sistema.

Abaixo temos a representação gráfica do sistema

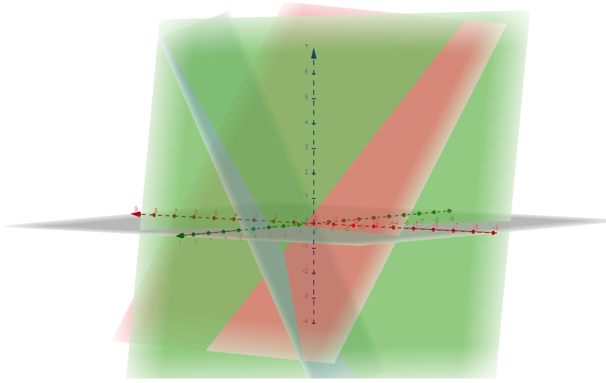

Figura 8 – Geogebra: O sistema possível e determinado entre três planos.

5.4.2 Sistema possível e indeterminado.

No sistema possível e indeterminado iremos achar uma solução que digamos ser genérica. Nela as variáveis estarão em função de outra variável que ficou livre no sistema, podendo ser qualquer valor. A solução aqui não será apenas um ponto. Como o sistema é indeterminado esses infinitos pontos que pertencem aos planos do sistema formarão uma reta ou um próprio plano.Vamos estudar as 3 possíveis posições entre três planos que tornam um sistema possível e indeterminado.

- 1° **Caso:** Três planos concorrentes formam uma reta como solução.

A intersecção de três planos concorrentes geram ao se tocarem uma reta no qual os seus infinitos pontos representam a solução desse sistema.

Exemplo 5.4.2 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ 4x + 3y + z = 0 \end{cases} \tag{5.19}$$

Vamos, inicialmente, transformar o sistema acima em uma matriz e, como combinado anteriormente, vamos apenas colocar o resultado final do escalonamento do sistema transformado em matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.20}$$

Então, a matriz reduzida acima terá o seguinte formato de sistema de equações

$$\begin{cases} x + 0y + z = 0 \ : \pi_1 \\ 0x + y - z = 0 \ : \pi_2 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \ : \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -z \ : \pi_1 \\ y = z \ : \pi_2 \\ 0z = 0 \ : \pi_3 \end{cases} \tag{5.21}$$

No sistema acima, observamos que a variável x, quando isolada em (π_1), é igual a $-z$. Na equação (π_2) a variável y, quando isolada é igual a z e a variável z é uma variável livre, ou seja, ela pode ser qualquer valor real. Logo, o nosso conjunto solução será a coordenadas $(-z, z, z)$

Na imagem abaixo, a representação gráfica do sistema.

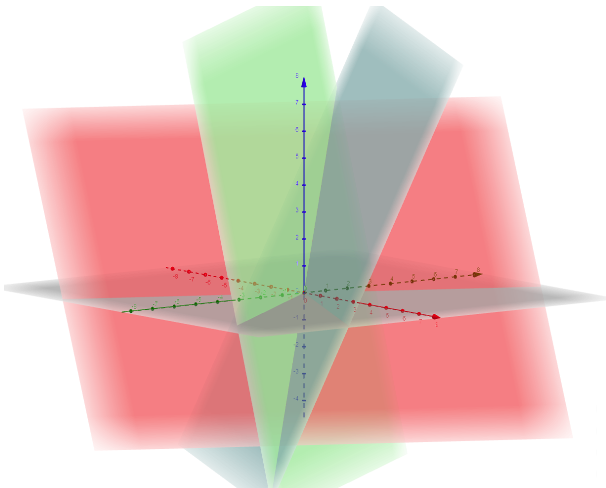

Figura 9 – Geogebra: Sistema possível e indeterminado: Três planos concorrentes.

- 2° **Caso:** Três planos coincidentes formam um plano como solução.

Nessa posição dos três planos o conjunto solução é indeterminado e seus infinitos pontos que formam esse conjunto solução é representado por um plano.

Exemplo 5.4.3 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 3x - 6y + 3z = 3 \\ -x + 2y - z = -1 \end{cases} \tag{5.22}$$

Transformando o sistema acima em uma matriz e escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

Então, a matriz acima no formato de um sistema, será igual a

$$\begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \tag{5.24}$$

Repare que a matriz escalona reduzida acima se resumiu a uma só equação com três variáveis. Isso quer dizer que os três planos estão perfeitamente sobrepostos um ao outro, logo são coincidentes e podemos escrever o conjunto solução com cada coordenada em função de duas variáveis na forma $(1 + 2y - z; \frac{1-x-z}{2}; 1 - x + 2y)$.

Na imagem abaixo, a representação gráfica do sistema.

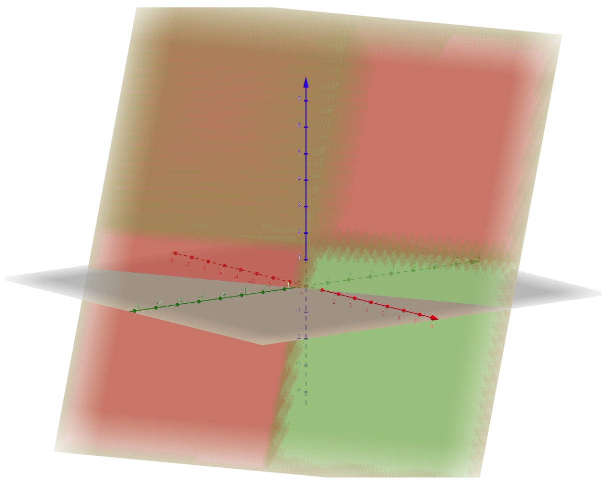

Figura 10 – Sistema possível e indeterminado: Três planos coincidentes.

- 3° **Caso:** Dois planos coincidentes e um concorrente formam uma reta como conjunto solução.

O conjunto solução em um plano concorrente a dois outros planos coincidentes é também indeterminado, mas por suas intersecções formarem uma reta o conjunto solução é possível.

Exemplo 5.4.4 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 4 \\ 3x - 6y + 9z = 12 \\ -x + 4y - 2z = 3 \end{cases} \tag{5.25}$$

Transformando o sistema acima em uma matriz e escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 3 & -6 & 9 & 12 \\ -1 & 4 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 11 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.26}$$

Então, a matriz acima no formato de um sistema, será igual a

$$\begin{cases} x + 0y + 4z = 11 \\ 0x + y + \frac{1}{2}z = \frac{7}{2} \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \tag{5.27}$$

Na matriz escalonada reduzida acima, temos que o conjunto solução, formado por uma reta, tera como conjunto solução as coordenadas $(11 - 4z; \frac{7}{2} - \frac{1}{2}z; z)$.

Na imagem abaixo, a representação gráfica do sistema.

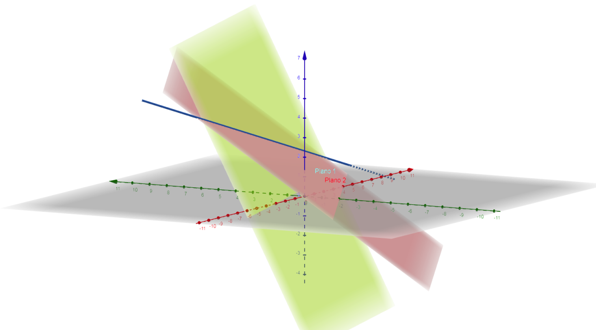

Figura 11 – Geogebra: Sistema possível e indeterminado: Dois plano coincidentes e um concorrente.

5.4.3 Sistema impossível.

O sistema receberá o nome de impossível, quando não houver uma intersecção entre os três planos seja essa intersecção um ponto, uma reta ou um plano. Veremos todos os quatro possíveis casos de sistemas impossíveis.

- 1° **Caso:** Três planos paralelos.

Como os três planos são paralelos, não haverá nenhuma intersecção entre eles.

Exemplo 5.4.5 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 4x - 6y + 2z = 20 \\ 8x - 12y + 4z = 25 \end{cases} \tag{5.28}$$

Transformando o sistema acima em uma matriz e escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 20 \\ 8 & -12 & 4 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.29}$$

Voltando a matriz escalonada reduzida acima para o formato de sistema, temos

$$\begin{cases} x - \frac{3}{2}y + \frac{1}{2}z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases} \tag{5.30}$$

Observamos que na segunda equação desse sistema, aparece uma solução impossível, pois os coeficientes das três variáveis são nulos e o resultado dessa soma de nulidades é igual a 1. Logo, um sistema sem solução.

Na imagem abaixo, a representação gráfica do sistema.

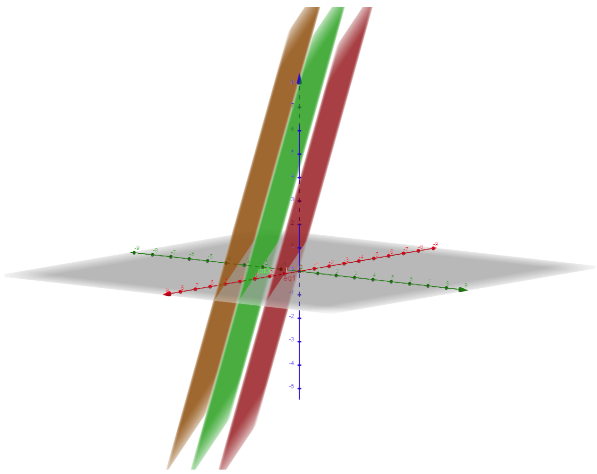

Figura 12 – Geogebra: Sistema impossível: Três planos paralelos.

- 2° **Caso:** Dois planos paralelos e um concorrente.

Aqui teremos um plano interceptando outros dois plano paralelos entre si e por mais que haja intersecções entre o plano concorrente e cada um dos outros dois paralelos o paralelismo entre esses dois não possui solução, não tendo assim um ponto, reta ou plano comum aos três planos.

Exemplo 5.4.6 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 4x - 6y + 2z = 20 \\ 12x + 15y + 2z = -20 \end{cases} \tag{5.31}$$

Transformando sistema acima em uma matriz e escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 20 \\ 12 & 15 & 2 & -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{22} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.32}$$

Voltando a matriz escalonada reduzida acima para o formato de sistema, temos

$$\begin{cases} x + 0y + \frac{7}{22}z = 0 \\ 0x + y - \frac{4}{33}z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases} \tag{5.33}$$

Observando a terceira equação, temos uma soma onde os coeficientes das variáveis são nulos e o resultado dessa soma dando 1, logo, um absurdo ou seja um sistema impossível, sem solução.

Na imagem abaixo, a representação gráfica do sistema.

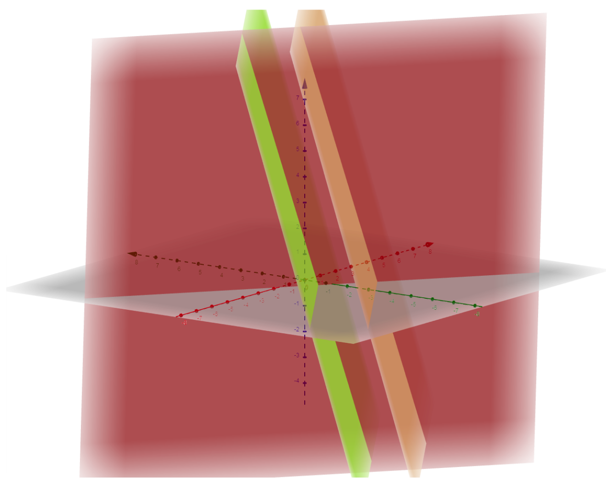

Figura 13 – Geogebra: Sistema impossível: Dois planos paralelos e um concorrente..

- 3° **Caso:** Três planos concorrentes dois a dois.

Nessa posição os planos se interceptam entre si, não havendo uma ponto, reta ou plano comum aos três. É interessante notar que, dois a dois, as suas intersecções formam uma reta e as três retas formadas por todas as intersecções são paralelas entre si.

Exemplo 5.4.7 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 5 \\ 4x - y + 2z = 7 \\ 6x + 2y + 3z = -2 \end{cases} \tag{5.34}$$

Transformando sistema acima em uma matriz e escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 7 \\ 6 & 2 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.35}$$

Voltando a matriz escalonada reduzida acima para o formato de sistema, temos

$$\begin{cases} x + 0y + \frac{1}{2}z = 0 \\ 0x + y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 1 \end{cases} \tag{5.36}$$

Na terceira equação também temos 3 variáveis com coeficientes nulos e as suas somas resultando em 1, o que torna o sistema impossível, sem solução.

Na imagem abaixo, a representação gráfica do sistema.

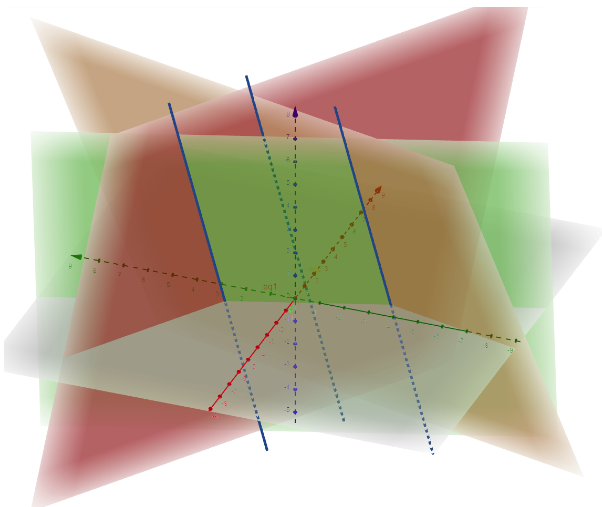

Figura 14 – Geogebra: Sistema impossível: Três planos concorrentes dois a dois.

- 4° **Caso:** Dois planos coincidentes e um paralelo.

Nesse caso, por mais que os dois planos coincidentes tem um plano como infinitas soluções, o paralelo aos dois coincidentes não possuirá intersecções.

Exemplo 5.4.8 *Represente graficamente o sistema abaixo.*

$$\begin{cases} 2x+3y+z=5 \\ 6x+9y+3z=15 \\ 10x+15y+5z=25 \end{cases} \tag{5.37}$$

Transformando sistema acima em uma matriz e escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 9 & 3 & 15 \\ 10 & 15 & 5 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.38}$$

Voltando a matriz escalonada reduzida acima para o formato de sistema, temos

$$\begin{cases} x+\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}z=0 \\ 0x+0y+0z=1 \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases} \tag{5.39}$$

Observamos que na equação 2 os coeficientes das variáveis são nulos e a suas somas esta tendo um como resultado, o que torna o sistema impossível, logo sem solução.

Na imagem abaixo, a representação gráfica do sistema.

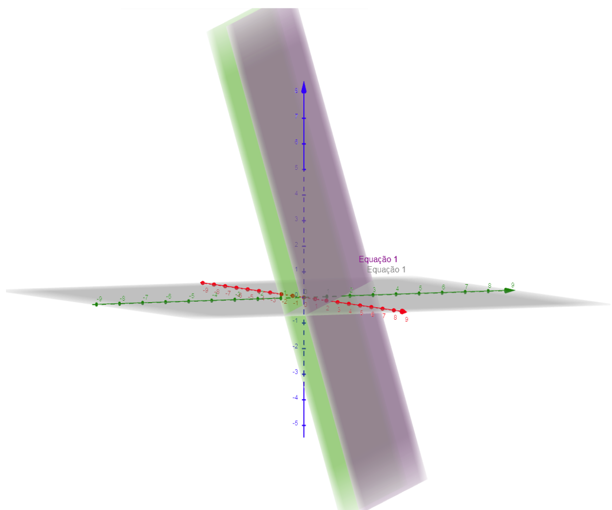

Figura 15 – Geogebra: Sistema impossível: Dois planos coincidentes e um paralelo.

Capítulo

6

Situações problemas

Nesse capítulo, teremos como objetivo apresentar alguns exemplos de situações problemas que envolvem sistemas de equações lineares, no qual o mesmo possa colocar em prática os conceitos e resolução de problemas em uma prova.

6.1 Sistemas lineares no tráfego de veículos

Exemplo 6.1.1 *(LARSON, 2018) Considere quatro cruzamentos A, B, C e D, como na imagem, tal que as setas indicam o sentido do tráfego.*

Do cruzamento A saem 40 carros por hora, do cruzamento B saem 55 carros por hora, do cruzamento C para D passam 30 carros por hora, e de D para B passam 20 carros por hora.

Descubra a quantidade de carros que circulam no restante das ruas, considerando que nenhum carro fica parado.

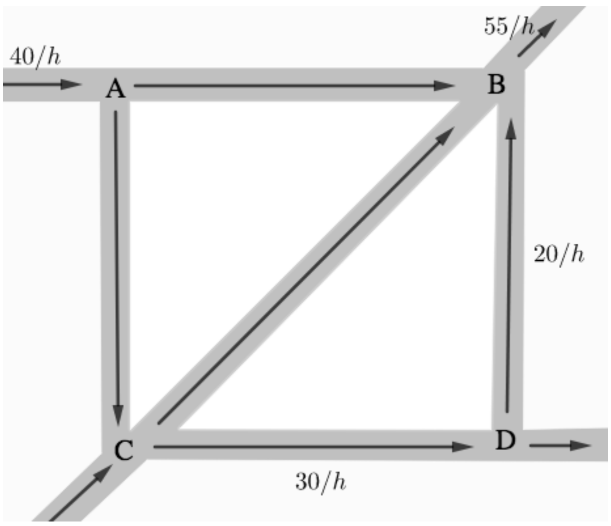

Figura 16 – Cruzamentos A, B, C e D.

Solução:

Vamos atribuir incógnitas, as ruas que não possuímos informações, logo

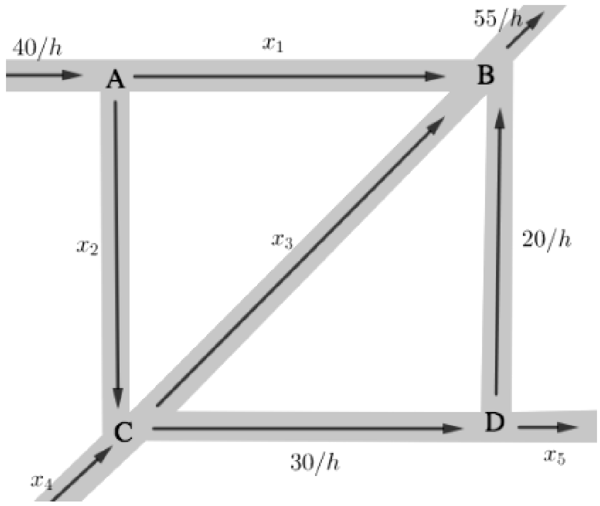

Figura 17 – Cruzamentos com incógnitas.

Como os carros não podem parar nos cruzamentos, a quantidade de veículos que vai em direção a A é a mesma quantidade de veículos que sai, então podemos afirmar que $x_1 + x_2 = 40$.

Agora, vamos montar uma tabelas com o mesmo raciocínio anterior, mas em cada um dos outros cruzamentos.

Tabela 3 – Tabela de entrada e saída dos veículos

ENTRADA	**SAÍDA**
$40 + x_4$	$55 + x_5$
40	$x_1 + x_2$
$x_1 + x_3 + 20$	55
$x_2 + x_4$	$x_3 + 30$
30	$20 + x_5$

Vamos agora, com essas informações, montar um sistema de equações e organizá-lo

$$\left\{\begin{array}{c} 40 + x_4 = 55 + x_5 \\ 40 = x_1 + x_2 \\ x_1 + x_3 + 20 = 55 \\ x_2 + x_4 = x_3 + 30 \\ 30 = 20 + x_5 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} x_4 - x_5 = 15 \\ x_1 + x_2 = 40 \\ x_1 + x_3 = 35 \\ x_2 - x_3 + x_4 = 30 \\ x_5 = 10 \end{array}\right. \tag{6.1}$$

Vamos transformar o sistema acima em uma matriz e, em seguida, escaloná-la

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 15 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 40 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 35 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 25 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.2}$$

Voltando a matriz acima para o formato de sistema linear, temos

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 35 \\ x_2 - x_3 = 5 \\ x_4 = 25 \\ x_5 = 10 \\ 0 = 0 \end{cases} \tag{6.3}$$

Observe que não possuímos uma única solução para o sistema acima. Para isso deveríamos ter o valor de x_3. Logo o sistema é possível e indeterminado.

Exemplo 6.1.2 *(LEON, 1999) Em uma certa seção do centro de determinada cidade, dois conjuntos de ruas de mão única se cruzam, como ilustra a Figura abaixo. A média do número de veículos por hora que entram e saem dessa seção durante o horário de rush é dada no diagrama. Determine a quantidade de veículos entre cada um dos quatro cruzamentos.*

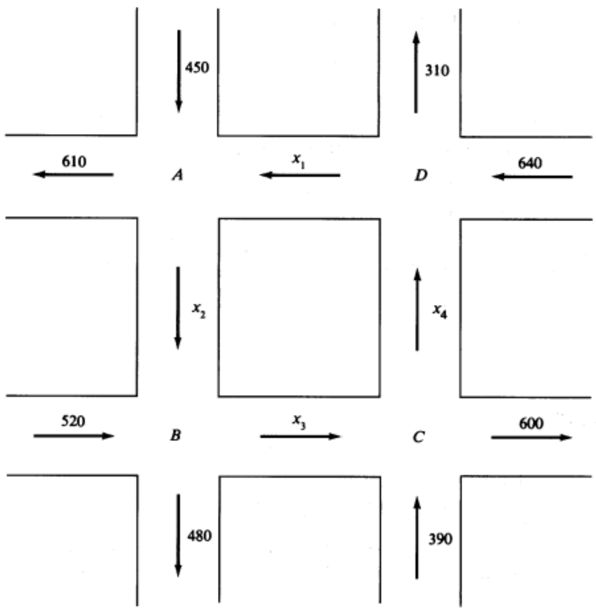

Figura 18 – Cruzamento do centro da cidade.

Solução: Em cada cruzamento, o número de veículos que entra tem que ser igual ao de veículos que sai. Por exemplo, no cruzamento A, o número de veículos que entra é $x_1 + 450$ e o número de veículos que sai é $x_2 + 610$. Logo,

$$x_1 + 450 = x_2 + 610 \text{ (cruzamento A).}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} x_2 + 520 &= x_3 + 480 \text{ (cruzamento B).} \\ x_3 + 390 &= x_4 + 600 \text{ (cruzamento C).} \\ x_4 + 640 &= x_1 + 310 \text{ (cruzamento D).} \end{aligned}$$

A matriz aumentada para esse sistema é

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 160 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -40 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & -330 \end{bmatrix}$$

A forma escada reduzida por linhas dessa matriz é

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 330 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 170 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 210 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O sistema é compatível, e, como tem uma variável livre, existem muitas soluções possíveis. O diagrama de fluxo do tráfego não contém informação suficiente para determinar x_1, x_2, x_3, x_4. Se o número de veículos entre dois dos cruzamentos fosse conhecido, o tráfego nos outros cruzamentos estaria determinado. Por exemplo, se uma média de 200 carros trafega por hora entre os cruzamentos C e D, então $x_4 = 200$. Podemos, então, resolver para x_1, x_2, x_3 em termos de x_4, obtendo

$$\begin{aligned} x_1 &= x_4 + 330 = 530 \\ x_2 &= x_4 + 170 = 370 \\ x_3 &= x_4 + 210 = 410 \end{aligned}$$

6.2 Sistemas lineares em circuitos elétricos

Exemplo 6.2.1 *(BOLDRINI et al., 1980) Deseja-se construir um circuito como mostrado na figura*

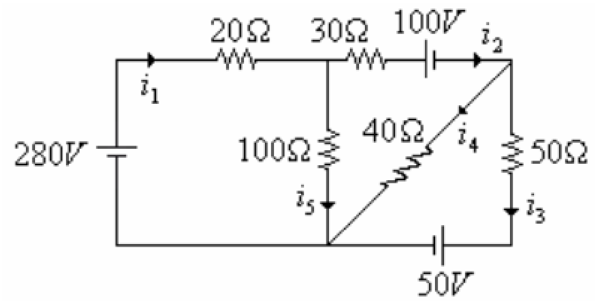

Figura 19 – Circuito.

Onde $V_1 = 280\ V$, $V_2 = 100\ V$, $V_3 = 50\ V$, $R_1 = 20\ \Omega$, $R_2 = 30\ \Omega$, $R_3 = 50\ \Omega$, $R_4 = 40\ \Omega$ *e* $R_5 = 100\ \Omega$.

Dispõe-se de uma tabela de preços de vários tipos de resistências; assim como as correntes máximas que elas suportam sem queimar.

		Resistências				
		$R_1 = 20\Omega$	$R_2 = 30\Omega$	$R_3 = 50\Omega$	$R_4 = 40\Omega$	$R_5 = 100\Omega$
Corrente máxima	0,5 A	\$10,00	\$10,00	\$15,00	\$15,00	\$20,00
	1,0 A	\$15,00	\$20,00	\$15,00	\$15,00	\$25,00
	3,0 A	\$20,00	\$22,00	\$20,00	\$20,00	\$28,00
	5,0 A	\$30,00	\$30,00	\$34,00	\$34,00	\$37,00

Figura 20 – Tabela de preços.

De que tipo devemos escolher cada resistência para que o circuito funcione com segurança e a sua fabricação seja a de menor custo possível?

Solução:

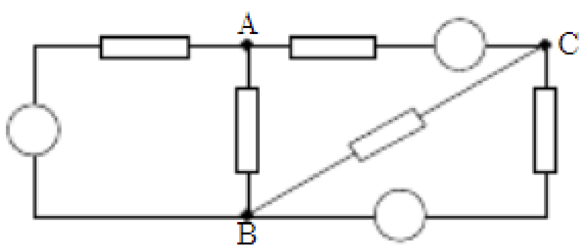

Figura 21 – Circuito.

Usando as leis dos nós obtemos as seguintes equações

$$\begin{cases} i_1 - i_2 - i_5 = 0 \\ i_2 - i_4 - i_3 = 0 \\ i_1 - i_4 - i_3 - i_5 = 0 \end{cases} \tag{6.4}$$

Já aplicando a lei das malhas

$$\begin{cases} i_1 + 5i_5 - 14 = 0 \\ 3i_2 + 10 + 4i_4 - 10i_5 = 0 \\ 5i_3 + 5 - 4i_4 = 0 \end{cases} \tag{6.5}$$

Usando as três equações do sistema acima e duas do sistema formado pela lei dos nós, chegamos a um terceiro sistema que nos dará a solução das correntes.

$$\begin{cases} i_1 + 5i_5 = 14 \\ 3i_2 + 4i_4 - 10i_5 = -10 \\ 5i_3 - 4i_4 = -5 \\ i_1 - i_2 - i_5 = 0 \\ -i_1 + i_4 + i_3 + i_5 = 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

Transformando o sistema acima em uma matriz e em seguida escalonando-a, teremos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 14 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & -10 & -10 \\ 0 & 0 & 5 & -4 & 0 & -5 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{114}{31} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{50}{31} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{5}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{45}{31} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{64}{31} \end{bmatrix} \tag{6.7}$$

Logo, a solução do sistema acontece para

$$\begin{cases} i_1 = \frac{114}{31} \cong 3,68\ A \\ i_2 = \frac{50}{31} \cong 1,61\ A \\ i_3 = \frac{5}{31} \cong 0,161\ A \\ i_4 = \frac{45}{31} \cong 1,45\ A \\ i_5 = \frac{64}{31} \cong 2,06\ A \end{cases}$$

Então, de acordo com a tabela, i_1 custa R$30,00, i_2 custa R$22,00, i_3 custa R$15,00, i_4 custa R$20,00 e i_5 custa R$28,00, dando assim um total de R$115,00.

6.3 Sistemas lineares em problemas do rotineiros.

Exemplo 6.3.1 *Três pessoas Antônio, Beto e Carla são arquitetos e foram contratados para fazer uma visita a uma casa que ia ser construída. Ao terminar a visita eles foram a pastelaria lanchar por conta da empresa, desde que informassem na nota o preço individual* *de cada produto consumido. Ao terminar o lanche e pagar, não perceberam que o dono do restaurante só havia informado o valor total do que cada um consumiu. Logo sentaram para fazer as contas. Eram apenas 3 tipos de lanche, pastel, caldo de cana e bombom. Antônio consumiu 3 pastéis, 2 caldos de cana e 4 bombons no valor total de R$ 29,00, Beto consumiu 4 pastéis, 3 caldos de cana e 2 bombons e Carla consumiu 2 pastéis, 2 caldos de cana e 5 bombons. levantada essas informações, qual o valor de cada produto consumido pelos três na pastelaria?*

Solução: Ao interpretar a situação acima, temos que observar, antes de tudo, que são sempre os mesmos três produtos que queremos descobrir o preço. Para cada produto iremos dar o nome de uma variável, que será a primeira letra de seu nome. A quantidade de produto consumido por eles serão os nossos coeficientes e o valor total será o coeficiente no membro direito resultante da nossa equação. Logo, vamos agora transformar cada situação em uma equação para daí criarmos o sistema desejado.

- **Antônio:** Consumiu 3 pastéis, 2 caldos de cana e 4 bombons no valor de R$29,00. Logo:

  3p+2c+4b=29

- **Beto:** Consumiu 4 pastéis, 3 caldos de cana e 2 bombons no valor de R$35,00. Logo:

  4p+3c+2b=35

- **Carla:** Consumiu 2 pastéis, 2 caldos de cana e 5 bombons no valor de R$25,50. Logo:

  2p+2c+5b=25,50

Portanto, podemos formar o seguinte sistema

$$\begin{cases} 3p + 2c + 4b = 29 \\ 4p + 3c + 2b = 35 \\ 2p + 2c + 5b = \frac{51}{2} \end{cases} \tag{6.8}$$

A partir daí, vamos transformar o sistema acima em uma matriz e, em seguida escalona-lá.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 29 \\ 4 & 3 & 2 & 35 \\ 2 & 2 & 5 & \frac{51}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \tag{6.9}$$

Pronto, algebricamente o ponto solução do sistema é o de coordenada igual a $(5; 4; \frac{3}{2})$ e interpretando o valor da coordenada solução, temos que o pastel custa R$ 5,00, o caldo de cana custa R$ 4,00 e o bombom custa R$ 1,50.

6.4 Sistemas lineares em problemas nutricionais

Exemplo 6.4.1 *(BOLDRINI et al., 1980) - Modificado:*

Foram estudados três tipos de alimentos. Fixada a mesma quantidade (1g) determinou-se que:

- *O alimento I tem 1 unidade de vitamina A, 3 unidades de vitamina B e 4 unidades de vitamina C.*
- *O alimento II tem 2, 3 e 5 unidades respectivamente, das vitaminas A, B e C.*
- *O alimento III tem 3 unidades de vitamina A, 3 de vitamina C e não contém vitamina B.*

Se são necessárias 11 unidades de vitamina A, 9 de vitamina B e 20 de vitamina C, responda:

i) *Encontre todas as possíveis quantidades inteiras dos alimentos I, II, III, que fornecem a quantidade de vitaminas desejada.*

ii) *Se o alimento I custa R$ 0,60 por grama e os outros dois custam R$ 0,10, existe uma solução custando exatamente R$ 1,00?*

Resolução:

i) Se pegarmos x gramas do alimento I, y gramas do alimento II, e z gramas do alimento III.

Em relação ao:

Alimento I: $x \cdot (1A + 3B + 4C) \Rightarrow 1Ax + 3Bx + 4Cx$

Alimento II: $y \cdot (2A + 3B + 5C) \Rightarrow 2Ay + 3By + 5Cy$

Alimento III: $z \cdot (3A + 0B + 3C) \Rightarrow 3Az + 0Bz + 3Cz$

De acordo com a quantidade de vitamina que quer o exercício, teremos:

- Vitamina A: $1Ax + 2Ay + 3Az = 11A$

- Vitamina B: $3Bx + 3By + 0Bz = 9B$

- Vitamina C: $4Cx + 5Cy + 3Cz = 20C$

Agora, com essas informações, podemos construir um sistema. Repare que nesse sistema, já não colocaremos as letras A, B e C que representam as vitaminas, pois elas já foram simplificadas. Então

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 3x + 3y + 0z = 9 \\ 4x + 5y + 3z = 20 \end{cases} \tag{6.10}$$

Agora, transformando o sistema acima em uma matriz e escalonando-a, temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 11 \\ 3 & 3 & 0 & 9 \\ 4 & 5 & 3 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.11}$$

Ficando, portando, com as seguintes relações.

$$\begin{cases} x = 3z - 5 \\ y = 8 - 3z \\ z = z \end{cases} \tag{6.12}$$

Algebricamente, temos um sistema possível e indeterminado, já que temos infinitos valores de z que são soluções para o sistema apresentado, mas temos algumas restrições nesse sistema, devido os valores de x, y e z serem números naturais. Isso fará com que o sistema tenha uma única solução.

Na primeira equação, note que o valor de z tem de ser maior que $\frac{5}{3}$ e ao mesmo tempo menor do que $\frac{8}{3}$. Para que z seja natural e respeite a restrição, temos que z será igual a 2. Para esse valor de z, temos que x é igual a 1 e y é igual a 2.

Portanto a única solução possível para o sistema, será a coordenada $(1, 2, 2)$ o que significa dizer que tomaremos 1g do alimento 1, 2g do alimento 2 e 2g gramas do alimento 3.

ii) Para solucionar essa questão, temos que $0,6x + 0,1y + 0,1z = 1 \Rightarrow 6x + y + z = 10$ e como temos que $x = 3z - 5$ e $y = 8 - 3z$, faremos essa substituição para ficarmos apenas com a variável z.

$$
\begin{aligned}
&6(3z-5)+8-3z+z=10\\
&18z-30+8-3z+z=10\\
&18z-3z+z=10+30-8\\
&16z=32\\
&z=2
\end{aligned}
\tag{6.13}
$$

Temos que é possível sim efetuar uma compra com essa quantidade de R$ 1,00, basta comprar 1g do alimento 1, 2g do alimento 2 e 2g do alimento 3.

6.5 Sistema lineares no G.P.S.

(NORD; JABON; NORD, 1997) Esse sistema, cujo as siglas significam sistema de posicionamento global, é um sistema de navegação por satélites, que com a ajuda de um aparelho móvel receptor nos permite localizar a nossa posição no planeta terra. Esse sistema conta com 24 satélites espalhados pela orbita terrestre.

Quatro é a quantidade de satélites necessários para determinar a sua localização. Três satélites para determinar a posição e mais um para determinar a sua altura em relação ao nível do mar. Os satélites se comunicarão com o aparelho receptor e, através de sistemas lineares, calcularão a diferença de tempo de resposta de chegada desse sinal no receptor para cada satélite. Esses tempos indicarão a sua localização.

Localização para resgate: o serviço usa o GPS para guiar helicópteros de socorro até o lugar do acidente.

O exemplo abaixo, retrata uma situação real para a localização de um resgate em que um usuário do GPS é detectado por quatro satélites. o serviço usa o GPS para guiar helicópteros de socorro até o lugar do acidente.

A tabela a seguir indica as efemérides (em metros) de cada satélite tomadas em relação ao nosso fixado sistema ortogonal de coordenadas cartesianas.

	x	**y**	**z**
Satélite 1	$1,877191188 \cdot 10^6$	$-1,064608026 \cdot 10^7$	$2,428036099 \cdot 10^7$
Satélite 2	$1,098145713 \cdot 10^7$	$-1,308719098 \cdot 10^7$	$2,036005484 \cdot 10^7$
Satélite 3	$2,459587359 \cdot 10^7$	$-4,336916128 \cdot 10^6$	$9,090267461 \cdot 10^6$
Satélite 4	$3,855818937 \cdot 10^6$	$7,251740720 \cdot 10^6$	$2,527733606 \cdot 10^7$

Tabela 4 – Efemérides de cada satélite

O receptor GPS registra os seguintes lapsos de tempo (em segundos) entre a transmissão e a recepção do sinal de cada satélite.

Satélite 1	**Satélite 2**	**Satélite 3**	**Satélite 4**
0,08251731391	0,07718558331	0,06890629029	0,07815826940

Tabela 5 – Registro de tempo do G.P.S.

Multiplicando-se cada lapso de tempo pela velocidade da luz $(2,99792458 \cdot 10^8 m/s)$, obtemos a distância entre o receptor e cada satélite. Isso permite escrever as equações reduzidas das imaginárias superfícies esféricas centradas em cada satélite e raios iguais às distâncias calculadas.

$$\text{S1}: \ (x - 1,8 \cdot 10^6)^2 + (y + 10,6 \cdot 10^6)^2 + (z - 24,2 \cdot 10^6)^2 = 611,9 \cdot 10^{12}$$

$$\text{S2}: \ (x - 10,9 \cdot 10^6)^2 + (y + 13 \cdot 10^6)^2 + (z - 20,3 \cdot 10^6)^2 = 535,4 \cdot 10^{12}$$

$$\text{S3}: \ (x - 24,5 \cdot 10^6)^2 + (y + 4,3 \cdot 10^6)^2 + (z - 9 \cdot 10^6)^2 = 426,7 \cdot 10^{12}$$

$$\text{S4}: \ (x - 3,8 \cdot 10^6)^2 + (y - 7,2 \cdot 10^6)^2 + (z - 25,2 \cdot 10^6)^2 = 549 \cdot 10^{12}$$

Desenvolvendo os quadrados, obtemos as respectivas equações gerais, e o sistema linear é dado por

$$18,2x - 4,88y - 7,84z - 76,52 \cdot 10^6 = 0$$
$$45,43x + 12,61y - 30,38z - 185,23 \cdot 10^6 = 0$$
$$3,95x + 35,79y + 1,99z - 62,95 \cdot 10^6 = 0$$

cuja única solução é $x = 0,5660 \cdot 10^7$, $y = 0,0978 \cdot 10^7$ e $z = 0,2775 \cdot 10^7$.

O ponto P com essas coordenadas cartesianas pertence simultaneamente às quatro imaginárias superfícies esféricas e suas coordenadas geográficas, calculadas como no parágrafo anterior (considerando o raio da Terra medindo $6,378164 \cdot 10^6$ metros), são

Latitude: $\theta = 26°$ Norte; Longitude : $\varphi = 10°$ Leste; Elevação : 919,71 metros.

Consultando um atlas geográfico ou um globo terrestre, identificamos a posição desse usuário do GPS como sendo a cidade de Djanet, localizada nos Montes Tássili, na fronteira entre Argélia e Líbia.

Apêndice

$\mathcal{A}$

Apêndice 1

Demonstração: Vamos primeiro mostrar que sempre existirá uma matriz-linha assumindo à forma escada para qualquer que seja a matriz $A_{m\times n}$. Em um segundo passo, iremos mostrar que existe uma única matriz matriz-linha reduzida à forma escada para qualquer que seja $A_{m\times n}$.

Vimos, anteriormente, na definição 3.1.5, alguns requisitos para que uma matriz esteja no formato de matriz escalonada reduzida e mostraremos como serão aplicadas cada uma das operações elementares para que cada um dos requisitos acima sejam verificados ao escalonar a matriz.

Para o cumprimento do requisito i, tomemos a linha L_p que contém o primeiro elemento não nulo na menor coluna dessa matriz. Essa coluna chamaremos de k_1. É importante frisar o quão delicado é esse nome, pois esse índice não trata-se necessariamente da coluna 1 e sim da primeira coluna com elemento não nulo. Agora trocaremos de lugar a linha L_p com a linha L_1. Vale salientar duas coisas, a primeira é que se caso, na matriz, contenha uma outra linha com o primeiro elemento não nulo nessa mesma coluna, fica a sua escolha qual será trocada por L_1, aqui, caso necessário, trocaremos sempre a de menor linha. A segunda observação é que se esse elemento já estiver na linha L_1 é claro que o processo de troca não se faz necessário.

Agora sendo a_{pk_1} (lembre-se que chamamos a linha desse elemento de p, pois ele estava na linha p e foi trocado pela linha 1) esse primeiro elemento não nulo da nova L_1, multiplicaremos L_1 pelo inverso de a_{pk_1}, ou seja, $(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a_{pk_1}}} \cdot \mathbf{L_1})$, deixando assim, esse elemento igual a 1. Então, para todas as linhas com elementos abaixo de a_{pk_1} diferentes de zero subtrairemos a elas $(-\mathbf{a_{ik_1}} \cdot \mathbf{L_1})$, onde $1 \leqslant i \leqslant m$, ficando assim com os elementos abaixo de a_{pk_1}, das linhas abaixo de L_1, iguais a zero.

Perceba que agora a próxima linha depois de L_1 que tenha, na menor coluna, o primeiro elemento não nulo, terá uma coluna maior que a coluna k_1 e chamaremos essa coluna de k_2 e diremos que ele se encontra na linha L_q onde $1 < q \leqslant m$, então repetiremos todo o processo acima, porém agora, depois de colocar a linha que contém k_2 no local da L_2, e deixar o primeiro elemento não nulo igual a 1, anularemos os elementos abaixo de k_2

e acima de k_2 também. Faremos isso analogicamente como o processo descrito acima, ou seja, iremos subtrair as linhas acima e abaixo de k_2 por $(-\mathbf{a_{ik_2}} \cdot \mathbf{L_2})$.

Depois de repetir o processo, de maneira análoga, para todas as outras linhas, teremos uma matriz-linha reduzida a forma escada. Nesse processo as linhas nulas automaticamente vão parar abaixo das linhas não nulas.

Podemos tomar operações elementares arbitrárias em uma matriz $A_{m\times n}$ para ainda assim chegarmos a uma mesma matriz-linha reduzida a forma escada e observe que qualquer que seja esse formato será um formato único a ponto de que qualquer outra operação elementar feita sobre ela, fará com que essa matriz perca a condição de matriz-linha reduzida na forma escada. Caso esteja em dúvida quanto a isso, experimente fazer uma operação elementar que mantenha o formato de matriz-linha reduzida.

A segunda parte da prova desse teorema é mostrar que essa matriz-linha reduzida na forma escada é única para toda matriz $A_{m\times n}$.

Para essa segunda parte, vamos supor que fazendo operações elementares com a matriz $A_{m\times n}$, consigamos chegar em duas resultados diferentes para uma matriz-linha reduzida e a essas matrizes daremos o nome de $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$. Mas, como vimos anteriormente, as operações elementares não precisam ser feitas em ordem fixa, mas seja qual for o seu caminho, mais curto ou mais demorado, o seu destino final será a mesma matriz-linha reduzida na forma escada, mostrando assim que as matrizes $B_{m\times n}$ e $C_{m\times n}$ serão equivalentes e como são provenientes de uma mesma matriz, podemos dizer que $B_{m\times n} = C_{m\times n}$. ■

Referências

ANDRADE, D.; DE, L. J. F. *Geometria Analitica*. 2ª. ed. [S.l.]: UFSC, 2006. Citado na página 25.

BOLDRINI, J. L. et al. Álgebra linear. *Núcleo*, v. 15, p. 19, 1980. Citado 4 vezes nas páginas 25, 54, 97 e 101.

BRASIL. *Base Nacional Comum Curricular*. [S.l.]: Ministério da Educação, 2018. Citado na página 15.

DOMINGUES, H. h. Somatematica, 1998. Disponível em: <https://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php>. Citado na página 48.

FARIAS, D. M.; KONZEN, P. H. d. A.; SOUZA, R. R. *Formas escalonadas e formas escalonadas reduzidas*. UFRGS, 2020. Disponível em: <https://www.ufrgs.br/reamat/AlgebraLinear/livro/s1-formas_escalonadas_e_formas_escalonadas_reduzidas.html>. Citado 2 vezes nas páginas 53 e 56.

HESPANHOL, L. L. et al. A utilizaçao do software geogebra para o ensino da geometria. *Artigo apresentado no Encontro Nacional de Educaçao Matemática. Sao Paulo–SP*, 2016. Citado na página 76.

HOHENWARTER, M. *GeoGebra: Ein Softwaresystem für dynamische Geometrie und Algebra der Ebene*. Dissertação (Mestrado) — Paris Lodron University, Salzburg, Austria, fev. 2002. (In German.). Citado na página 76.

LARSON, R. *Elementos de álgebra linear*. [S.l.]: Cengage Learning, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 25 e 94.

LEON, S. J. Álgebra linear com aplicações, 4a edição. *Livros Técnicos e*, 1999. Citado na página 96.

LIMA, E. L. *A Matemática do Ensino Médio: Volume 3*. [S.l.]: Sociedade Brasileira de Matematica, 2004. Citado na página 55.

NORD, G. D.; JABON, D.; NORD, J. Activities: The mathematics of the global positioning system. *The Mathematics Teacher*, National Council of Teachers of Mathematics, v. 90, n. 6, p. 455–460, 1997. Citado na página 103.

PLANETCALC, P. T. . *Calculadora de Forma escalonada reduzida por Linhas de Uma Matriz (RREF)*. 2008. Disponível em: <https://pt.planetcalc.com/8328/>. Citado na página 60.

SAUTOY, M. d. El país, 2018. Disponível em: <https://brasil.elpais.com/brasil/2018/04/11/cultura/1523463125_415011.html>. Citado na página 16.

SILVEIRA, M. R. A. da. A dificuldade da matemática no dizer do aluno: ressonâncias de sentido de um discurso. *Educação & Realidade*, v. 36, n. 3, 2011. Citado na página 14.