UNIVERSIDADE FEDERAL DO ESPÍRITO SANTO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL – PROFMAT

**EVALDO FERNANDES DE SOUZA**

# DESENVOLVENDO O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Vitória – ES
2021

**EVALDO FERNANDES DE SOUZA**

# DESENVOLVENDO O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

Monografia apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT) do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva

Vitória – ES

2021

**EVALDO FERNANDES DE SOUZA**

**DESENVOLVENDO O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL**

Dissertação apresentada ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (PROFMAT), do Centro de Ciências Exatas da Universidade Federal do Espírito Santo, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Vitória, 18 de novembro de 2021.

**COMISSÃO EXAMINADORA**

Prof. Dr. Domingos Sávio Valério da Silva (Orientador)
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Valmecir Antônio dos Santos Bayer
Universidade Federal do Espírito Santo

Prof. Dr. Pedro Matos da Silva
Instituto Federal do Espírito Santo

**AGRADECIMENTOS**

Ao meu pai, Nero Fernandes de Souza e em especial a minha mãe, Rita Honória de Souza que sempre me apoiou e incentivou nos estudos.

A minha esposa Flávia e ao meu filho Eduardo, por todo carinho, amor e paciência e compreensão.

Agradeço também a todos os professores que de forma significativa contribuíram para minha formação.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Domingos Sávio Valério Silva, pelos conselhos e orientação essenciais para a conclusão desse trabalho.

A todos que, direta ou indiretamente, colaboraram e me incentivaram nesse período de desafio, superação e aprendizado.

A CAPES pelo apoio financeiro.

## RESUMO

Considerando que a proporcionalidade é um conceito com aplicações em diversas áreas do conhecimento e de uso cotidiano, apresentaremos uma sequência didática para favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional, através de uma série de atividades que envolvam comparar e determinar a equivalência de razões e resolver proporções em contextos variados sem a utilização de regras, nomenclaturas ou fórmulas.



**Palavras chaves**: Proporcionalidade. Raciocínio proporcional

## ABSTRACT

Considering that proportionality is a concept with applications in several areas of knowledge and daily use, we will present a didactic sequence to favor the development of proportional reasoning, through a series of activities that involve comparing and determining the equivalence of reasons and resolving proportions in varied contexts without the use of rules, nomenclatures or formulas.

**Key words**: Proportionality. Proportional Reasoning,

## LISTA DE FIGURAS

## LISTA DE QUADROS

## LISTA DE GRÁFICOS

## LISTA DE TABELA

## LISTA DE SIGLAS

BNCC - Base Nacional Comum Curricular

PCN - Parâmetros Curriculares Nacionais

UFES – Universidade Federal do Espirito Santo

IFES – Instituto Federal de Educação do Espírito Santo

## SUMÁRIO

# 1 INTRODUÇÃO

O presente estudo buscou contribuir com a solução de um dos problemas mais identificados durante a Educação Básica na disciplina de Matemática: o Ensino de Proporcionalidade.

A escolha do tema foi por sua relevância social e sua contribuição para o desenvolvimento intelectual do aluno.

As atividades foram elaboradas com base na literatura existente sobre o tema de raciocínio proporcional.

Adotaremos uma metodologia que valorize os conhecimentos prévios dos alunos, adquiridos na vivência fora da escola, permitindo que eles participem do processo de construção do conceito em estudo, criando suas próprias estratégias para resolver os problemas propostos.

Com isso, trabalharemos uma sequência didática, com base em situações-problema, que favoreça o estabelecimento das relações de covariação[1] e invariância[2] (exemplo na figura 1) de grandezas. Essa opção metodológica de oferecer situações diversificadas antes da apresentação formal do conteúdo contribui para o desenvolvimento do raciocínio proporcional dos alunos.

---

[1] Compreensão que as grandezas se relacionam e variam em conjunto.
[2] Compreensão da relação constante entre duas grandezas.

Figura 1- Exemplo covariação e invariância

| Se 3 litros de gasolina custam R$ 21,00, quanto custam 12 litros? | | |
|---|---|---|
| $\overbrace{\frac{3}{21} = \frac{12}{x}}^{\times 4}$ <br> $\underbrace{\phantom{\frac{3}{21} = \frac{12}{x}}}_{\times 4}$ | $\overbrace{\frac{3}{21} = \frac{12}{x}}^{:4}$ <br> $\underbrace{\phantom{\frac{3}{21} = \frac{12}{x}}}_{:4}$ | **Covariação:** se a quantidade de gasolina é multiplicada/dividida por 4, o valor a pagar também será. |
| $\times 7 \left( \frac{3}{21} = \frac{12}{x} \right) \times 7$ | $:7 \left( \frac{3}{21} = \frac{12}{x} \right) :7$ | **Invariânçia**: o valor a pagar será 7 vezes a quantidade de litros ou a quantidade de litros será 1/7 do valor a pagar. |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

A Base Nacional Comum Curricular destaca que:

> [...] os diferentes campos que compõem a Matemática reúnem um conjunto de ideias fundamentais que produzem articulações entre eles: equivalência, ordem, proporcionalidade, interdependência, representação, variação e aproximação. Essas ideias fundamentais são importantes para o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos e devem se converter, na escola, em objetos de conhecimento. A proporcionalidade, por exemplo, deve estar presente no estudo de: operações com os números naturais; representação fracionária dos números racionais; áreas; funções; probabilidade etc. Além disso, essa noção também se evidencia em muitas ações cotidianas e de outras áreas do conhecimento, como vendas e trocas mercantis, balanços químicos, representações gráficas etc. (BRASIL, 2018, p.268).

Os parâmetros curriculares nacionais explicam o papel da matemática no Ensino Fundamental:

> [...] pela proposição de objetivos que evidenciam a importância de o aluno valorizá-la como instrumental para compreender o mundo a sua volta e de vê-la como área do conhecimento que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas. Destacam a importância de o aluno desenvolver atitudes de segurança com relação à própria capacidade de construir conhecimentos matemáticos, de cultivar a autoestima, de respeitar o trabalho dos colegas e de perseverar na busca de soluções (BRASIL, 1998, p. 15 e 16).

Ademais percebe-se que,

> As necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado (BRASIL 1998, p. 37).

Os PCN’s recomendam que o professor atue como mediador ao promover a análise das respostas dos alunos e sua comparação, bem como ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar e contestar.

São objetivos da matemática para o 6º e 7º anos, também segundo os PCN’s, observar a variação entre grandezas, estabelecendo relação entre elas e construir estratégias de solução para resolver situações que envolvam proporcionalidade.

> Segundo Lobato et al. (2010), é importante proporcionar aos alunos, deste nível de ensino (7º ano do Ensino Fundamental), tarefas que lhes permitam desenvolver o seu raciocínio proporcional, interligando conhecimentos e compreensões essenciais como as noções de razão, razões equivalentes, proporção e constante de proporcionalidade. Além disso, é também fundamental promover nos alunos flexibilidade no uso de estratégias de resolução de problemas, levando-os a realizar comparações de natureza multiplicativa, sem recorrer sistematicamente à regra de três simples ((LOBATO e ELLIS, 2010 apud SOEIRO, 2017 p. 4).

Destarte, quando o ensino é focado no treino de procedimentos e na verbalização de regras, sem a compreensão da estrutura matemática da relação proporcional, cria-se nos discentes a ilusão de que todas as relações são proporcionais (SILVESTRE E PONTE, 2009). Para Silvestre e Ponte (2009), esta forma de abordar os problemas de proporcionalidade não garante a compreensão das relações envolvidas.

Tanto os livros didáticos quanto os profissionais, ao trabalharem proporcionalidade, priorizam o ensino do algoritmo da regra de três, deixando de focalizar nas relações existentes entre as grandezas. Quanto a isso, observa-se que os alunos, desde cedo, relacionam de forma intuitiva grandezas proporcionais, por relações aditivas de dobros e metades.

Em uma entrevista concedida por Terezinha Nunes para a Revista Nova Escola em 2002, a psicóloga chefe do Departamento de Psicologia da Oxford Brookes University, que, há mais de dez anos estuda como nasce nas pessoas o pensamento matemático, afirma que a proporcionalidade como conceito central da Matemática é essencial para o ensino das operações. Segundo ela, “Na Universidade Federal de Pernambuco, trabalhou com operários que mal sabiam escrever, mas entendiam muito de escala”. Segue excerto do que foi abordado por ela:

> **Qual é a principal falha do ensino da Matemática hoje?**
>
> É a proporcionalidade, questão central que envolve tanto frações como multiplicação, está presente em todas as ciências e faz parte do dia-a-dia de qualquer pessoa, seja no trabalho, seja em casa. O conceito, bastante simples na sua origem, nada mais é do que a relação entre duas variáveis. Para compreendê-lo, fazemos uma relação com a multiplicação — mas a escola não. Lá no início da escolarização, as primeiras noções de proporção deveriam aparecer junto com os conceitos de multiplicação. Mas muitos professores ensinam essa operação básica apenas como uma "adição repetida" de parcelas. E não fazem relação com a noção de proporção. A adição repetida de parcelas não mostra o sentido de proporção que existe por trás dessa conta. Depois, só na 5ª série a proporção aparece, num capítulo isolado.
>
> **Como é, na prática, a relação entre a proporção e a multiplicação?**
>
> Quando dizemos que uma manga custa 1,10 real, temos uma relação entre duas variáveis, a quantidade de mangas e o preço. Se variar a quantidade de mangas, o preço total varia proporcionalmente. Essa é a relação. Fácil, não? No nível mais simples, essa é a origem do raciocínio multiplicativo. Na prática, uma criança resolve problemas desse tipo a partir dos 6 anos de idade. Cabe à escola trabalhar com uma representação que ela consiga compreender e na qual possa enxergar esse conceito de proporção.
>
> [...]
>
> **De que forma, então, se constrói o raciocínio proporcional?**
>
> Ele nasce quando se ensina a multiplicação usando o raciocínio de correspondência e se estimula na mente do aluno uma representação para a relação entre duas variáveis. Essa prática torna mais fácil perceber a relação fixa entre as variáveis e, ao mesmo tempo, é uma maneira de resolver o problema. Eles podem se enganar, mas ao comparar com os colegas vão perceber que o raciocínio estava correto e que o erro só ocorreu na conta.
>
> [...]
>
> **Por que se ensina que a multiplicação é a adição repetida?**
>
> As pessoas (professores inclusive) pensam assim. Receberam a informação e passam para a frente, perpetuando uma ideia insuficiente. Para multiplicar você pode, sim, somar parcelas iguais, mas o conceito vai muito além. Como a escola brasileira tem se concentrado no ensino das contas, e não no dos conceitos, isso é aceito.
>
> **O raciocínio proporcional se desenvolve independentemente da educação formal?**
>
> No Recife fizemos um estudo com mestres-de-obras, muitos sem escolaridade, que mal assinavam o nome. Mas o raciocínio proporcional é tão essencial nos

> afazeres deles, como preparação da massa e cálculo de área, que todos o utilizavam corretamente. Analisei em detalhes um dos problemas comuns: como pegar uma planta baixa e saber o tamanho real da parede. Aqueles homens não tinham a menor dificuldade porque sabiam que a escala é uma proporção exata entre o tamanho do desenho e o da parede (NUNES, 2003)

Diante da relevância do tema, os tópicos relativos à razão e proporção deveriam ocupar uma parte central tanto no currículo para as escolas quanto nos cursos de formação inicial de professores de Matemática.

> Entretanto, as pesquisas têm consistentemente mostrado que poucos alunos, com habilidades razoáveis, usam o raciocínio proporcional de modo adequado (POST; BEHR; LESH, 1988, p. 78), ou finalizam com sucesso atividades que o envolvem (BEN-CHAIM et al., 1998). Tal assunto é também um problema para muitos alunos de níveis escolares mais elevados (LAWTON, 1993), e "há evidências de que um amplo segmento de nossa sociedade nunca adquire fluência no pensamento proporcional" (HOFER, 1988, p. 285). Além disso, resultados de pesquisas recentes, desenvolvidas em todo mundo, indicam que há, por parte dos professores em atuação e dos professores em formação, muitas lacunas quanto a temas matemáticos ensinados nos níveis elementar e médio, incluindo os tópicos "razão" e "proporção". Frequentemente, o conhecimento é técnico, esquemático, desconectado e incoerente[...] (BEM-CHAIM; BET-SHEVA; KERET, 2008, p. 131).

## 2 O RACIOCÍNIO PROPORCIONAL

O raciocínio proporcional é considerado a pedra fundamental do currículo elementar e uma base do pensamento algébrico (LESH, POST E BEHR, 1987, tradução nossa). Os pensadores proporcionais, em geral, possuem algumas das seguintes características:

> ● Senso de covariação, isto é, eles compreendem relações em que duas quantidades variam juntas e são capazes de perceber como a variação de uma coincide com a variação da outra.
>
> ● Reconhecem relações proporcionais como distintas de relações não proporcionais em contextos do mundo real.
>
> ● Desenvolvem uma ampla variedade de estratégias para resolver proporções ou comparar razões, a maioria baseadas em estratégias informais ao invés de algoritmos prescritos.
>
> ● Compreendem razões como entidades distintas representando uma relação diferente das quantidades que elas comparam (VAN DE WALLE, 2009 p. 384).

Segundo Van de Walle (2009), trata-se do desenvolvimento da capacidade de pensar e comparar as relações multiplicativas entre quantidades ao longo do tempo por meio do raciocínio.

> Estima-se que mais da metade da população adulta não pode ser considerada pensador proporcional (Lamon, 1999). Isso significa que não adquirimos os hábitos e habilidades de raciocínio proporcional simplesmente crescendo. Por outro lado, as pesquisas de Lamon e de outros indicam que o ensino pode ter um efeito positivo, especialmente se as regras e algoritmos formais para o cálculo de frações, para comparar razões e para resolver proporções forem retardadas para o momento certo(VAN DE WALLE 2009, p. 384).

De acordo com Post, Behr e Lesh (1995), o raciocínio com proporções envolve a capacidade de armazenar e processar mentalmente várias informações, de modo a interpretar o significado de duas taxas, guardar essa informação, e por meio delas, comparar as interpretações através de critérios preestabelecidos.

Lamon (2005, tradução nossa) aduz que o Raciocínio Proporcional é a condição para que haja a compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade. Envolve a capacidade de pensar, analisar e explorar relações entre quantidades e implica muito mais que o emprego de algoritmos ou cálculos mecânicos.

A essência do Raciocínio Proporcional é a consideração do número em termos relativos ao invés de termos absolutos (VAN DE WALLE, 2009). Raciocinando proporcionalmente é que somos capazes de perceber que um desconto de R$25,00 num produto que custa R$100,00 é maior que um desconto de R$30,00 num produto que custa R$150,00, pois apesar de, em termos absolutos, R$30,00 ser maior do que R$25,00, em termos relativos R$ 25,00 representa um desconto de 25%, enquanto R$30,00 representa um desconto de 20%.

Muitos aspectos do nosso mundo operam de acordo com as regras proporcionais, o que faz com que a capacidade de Raciocínio Proporcional seja extremamente útil na interpretação de fenômenos do mundo real (POST, BEHR E LESH, 1988, tradução nossa).

Os livros didáticos associam o raciocínio proporcional ao uso eficiente da regra de três simples numa abordagem voltada ao procedimento (SILVESTRE; PONTE, 2013), mas ser capaz de realizar operações mecânicas com proporções não significa, necessariamente, que as ideias subjacentes ao Raciocínio Proporcional foram compreendidas.

O raciocínio proporcional integra três aspetos principais, quais sejam:

> (i) Capacidade para distinguir situações que têm subjacentes relações de proporcionalidade direta de situações que não o têm; (ii) Compreensão da natureza multiplicativa das relações proporcionais; (iii) Capacidade para resolver vários tipos de problemas, revelando a flexibilidade mental para realizar diferentes abordagens sem ser afetado pelo contexto, dados e estrutura numérica, grandezas e as representações (texto, gráficos, tabelas, razões) (SILVESTRE, 2013, p. 12).

É preciso compreender as dificuldades dos alunos para melhor apoiar o desenvolvimento do seu raciocínio proporcional, usando progressivamente estratégias de um nível mais avançado, (SILVESTRE E PONTE, 2013).

O Raciocínio Proporcional é uma forma complexa de pensar. É preciso vivenciar inúmeras situações para desenvolver essa capacidade. Portanto, é de suma importância oferecer aos alunos uma variedade de experiências de natureza proporcional e estimulá-los a conjecturar, elaborar normas e pensar de forma geral para o que foi aprendido (VAN DE WALLE, 2009).

Entretanto, há diferença entre o raciocínio proporcional e a definição de proporcionalidade. Isto porque,

> [...] a proporcionalidade tem suas aplicações em situações dominadas por princípios físicos, ou seja, está relacionada com os cálculos, enquanto que o raciocínio proporcional é um pré-requisito necessário à compreensão de contextos e aplicações baseadas na proporcionalidade (SOUZA, 2013 apud MATULLE, 2019, p. 17)
> O raciocínio proporcional não se limita a resolver situações utilizando apenas algoritmos, mas envolve o raciocínio com proporções, covariação, comparações múltiplas, capacidade de processar informações e a compreensão que ao comparar grandezas estas se relacionam entre si e variam em conjunto (LESH; POST; BEHR, 1988 apud MATULLE, 2019, p. 17).

Segundo Maranhão e Machado (2011) os descritores do pensamento proporcional são:

> 1 - Distinguir situações proporcionais e não proporcionais;
> 2 - Diferenciar variáveis diretamente proporcionais das inversamente proporcionais;
> 3 - Usar multiplicação e divisão para resolver problemas envolvendo proporcionalidade;
> 4 - Fazer comparações numéricas envolvendo os racionais e também não numéricas, ao trabalhar com proporcionalidade;
> 5 - Usar ideia de covariação

Cramer, Post e Currier (1993 apud SOEIRO, 2017 p. 4 e 5) destacam os aspectos essenciais que caracterizam situações proporcionais:

> (i) existe sempre uma relação multiplicativa que relaciona as duas quantidades, os espaços de medida estão sempre relacionados por uma multiplicação;
> (ii) uma proporção pode ser vista como uma relação multiplicativa entre as quantidades de dois espaços de medida;
> (iii) todos os pares (razões) de uma proporção podem-se reduzir sempre à mesma fração, a razão unitária;
> (iv) existe um fator constante que relaciona as quantidades e que se pode considerar numa regra de funcionamento, em que é o referido fator constante;

> (v) graficamente uma situação proporcional é representada por uma linha que se inclina para a direita e passa pela origem.

Raciocinar proporcionalmente requer a capacidade de lidar com situações onde existe uma relação invariante (constante) entre duas quantidades ligadas, mas que variam juntas, bem como saber argumentar e explicar relações.

Para Lobato e Ellis (2010, tradução nossa), aprender a raciocinar de forma proporcional leva tempo e decorre das mudanças que os alunos efetuam na sua forma de pensar, aumentando a sua adaptação à construção e relacionamento de razões e proporções.

O raciocínio proporcional é de grande importância para compreensão de relações, para a capacidade de tomar decisões e resolver problemas dentro de várias áreas do conhecimento ou até mesmo em situações da vida quotidiana. O raciocínio proporcional é usado em muitas outras áreas como a Ciência, a Música, a Geografia, e em diversas atividades do dia-a-dia.

Raciocinar proporcionalmente envolve também a capacidade de distinguir situações de natureza proporcional de relações que não o são, bem como compreender que as relações proporcionais são de natureza multiplicativa e não aditiva.

> A compreensão da proporcionalidade desenvolve-se ao longo dos anos, mas a maturidade não garante o desenvolvimento do raciocínio proporcional, muitos adultos não aplicam raciocínio proporcional. A complexidade do raciocínio proporcional destaca-se pelo facto de apesar de se aplicar a regra de três simples não garante habilidade no raciocínio proporcional (LOBATO e Ellis, 2010, p. 48, tradução nossa).

## 3 A ABORDAGEM DO TEMA PROPORÇÃO NOS LIVROS DIDÁTICOS

Apresentaremos a abordagem inicial do tema proporção em três livros aprovados no PNLD 2020 para serem usados no 7º ano do Ensino Fundamental.

Quadro 1 -Livros didáticos utilizados na pesquisa

| Livro | Título | Autores | Editora |
|---|---|---|---|
| LD 1 | A CONQUISTA DA MATEMÁTICA | JOSE RUY GIOVANNI JUNIOR e CASTRUCCI, BENEDICTO | FTD |
| LD 2 | ARARIBÁ MAIS - MATEMÁTICA | GAY, MARA REGINA GARCIA; SILVA, WILLIAN RAPHAEL (Ed.) – (OBRA COLETIVA) | MODERNA |
| LD 3 | MATEMÁTICA - BIANCHINI | EDWALDO ROQUE BIANCHINI | MODERNA |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Estes livros foram escolhidos por serem aprovados no PNLD do ano de 2020. O LD 1 é utilizado por escolas municipais do município de Serra/Espírito Santo e, o LD 2 e o LD 3, pela disponibilidade.

Livro didático 1 (LD 1) – A conquista da matemática dos autores José Ruy Giovanni Júnior e Benedicto Castrucci.

O tema é abordado na Unidade 7 – Grandezas Proporcionais, que é dividida em três capítulos:

1 – Razão
2 - Proporção
3 - Regra de três

No capítulo 1 há a apresentação de exemplos e definição de razão (não há menção às razões especiais).

No capítulo 2 inicia-se o tema proporção, com um exemplo (Figura 2), seguido da definição (Figura 3) e da imediata apresentação da propriedade fundamental das proporções (Figura 4).

Após, temos os exercícios (Figura 5), dos quais boa parte destina-se a verificar se uma sequência de números forma uma proporção ou calcular um valor desconhecido numa proporção utilizando a propriedade fundamental.

Figura 2 – Proporção LD 1

A Organização Mundial da Saúde (OMS), órgão da ONU que trata dos temas ligados à saúde, recomenda **1 médico** para cada grupo de **1000 habitantes**. Nessas condições, quantos médicos deveria ter uma cidade com 50 000 habitantes?

De acordo com a situação apresentada, organizamos a tabela:

**Médicos por habitantes**

| Nº de habitantes | Nº de médicos |
|---|---|
| 1 000 | 1 |
| 2 000 | 2 |
| 3 000 | 3 |
| 4 000 | 4 |
| 5 000 | 5 |
| 6 000 | 6 |
| ⋮ | ⋮ |
| 10 000 | 10 |
| ⋮ | ⋮ |
| 50 000 | 50 |

Fonte: Organização Mundial da Saúde (OMS).

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{1}{1000}$

razão entre o número de médicos e o número de habitantes: $\frac{50}{50\,000} = \frac{1}{1\,000}$

De acordo com a OMS, a cidade deveria ter 50 médicos.

Observe que as razões $\frac{1}{1000}$ e $\frac{50}{50\,000}$ são iguais.

Uma sentença matemática que expressa uma igualdade entre duas razões é chamada **proporção**.

Proporção é uma igualdade entre duas razões.

Então, a sentença $\frac{1}{1\,000} = \frac{50}{50\,000}$ é uma proporção.

Note que essas razões são dadas por frações equivalentes.

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

Figura 3 - Definição dos termos de uma proporção LD 1

Dessa forma, no exemplo dado, lemos: 6 está para 9, assim como 12 está para 18.

Na proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:

- Os números *a*, *b*, *c* e *d* são denominados **termos** da proporção.
- O primeiro e o quarto termos são denominados **extremos**, enquanto o segundo e o terceiro são denominados **meios**.

extremos

$a : b = c : d$

meios

extremo — meio

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

meio — extremo

- Na proporção $\frac{1}{1000} = \frac{50}{50\,000}$, temos:

**extremos**: 1 e 50 000

**meios**: 1 000 e 50

- Na proporção $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$, temos:

**extremos**: 6 e 18

**meios**: 9 e 12

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

Figura 4 - Propriedade fundamental das proporções LD 1

## Propriedade fundamental das proporções

Voltando à proporção $\frac{1}{1000} = \frac{50}{50\,000}$, temos:

- produto dos extremos: $1 \cdot 50\,000 = 50\,000$
- produto dos meios: $1\,000 \cdot 50 = 50\,000$

$1 \cdot 50\,000 = 1\,000 \cdot 50$

Como vemos, nessa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Vamos, agora, considerar a proporção $\frac{6}{9} = \frac{12}{18}$, na qual temos:

- produto dos extremos: $6 \cdot 18 = 108$
- produto dos meios: $9 \cdot 12 = 108$

$6 \cdot 18 = 9 \cdot 12$

Também, nessa proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

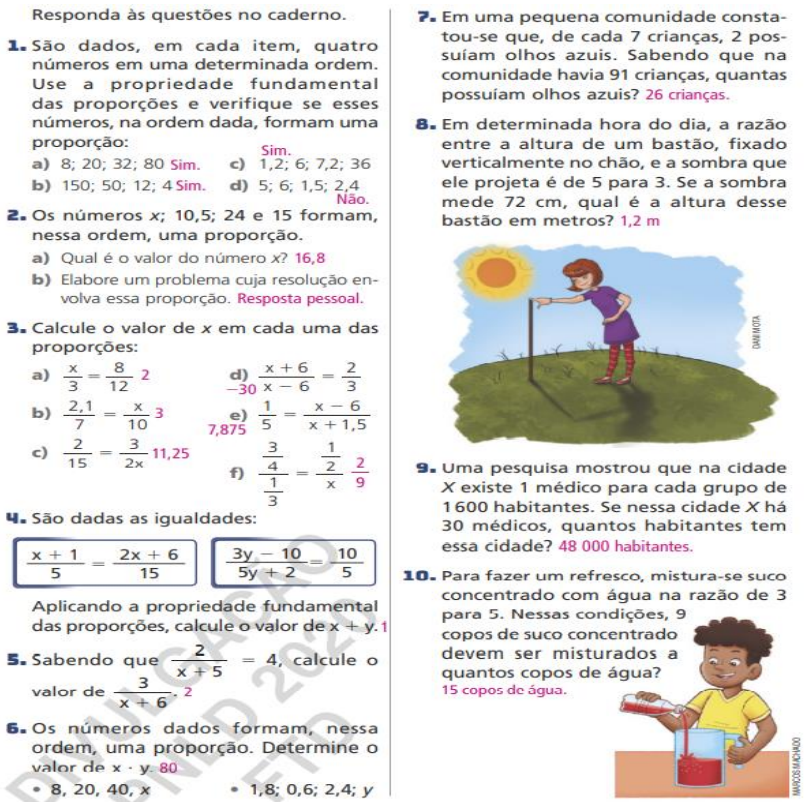
Esse fato se repetirá sempre que tivermos uma proporção, que é conhecida como a **propriedade fundamental das proporções**:

De modo geral, em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \underbrace{a \cdot d}_{\text{produto dos extremos}} = \underbrace{b \cdot c}_{\text{produto dos meios}}$$

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

Figura 5 - Lista de exercícios LD 1



Responda às questões no caderno.

**1.** São dados, em cada item, quatro números em uma determinada ordem. Use a propriedade fundamental das proporções e verifique se esses números, na ordem dada, formam uma proporção:

a) 8; 20; 32; 80 Sim.
b) 150; 50; 12; 4 Sim.
c) 1,2; 6; 7,2; 36 Sim.
d) 5; 6; 1,5; 2,4 Não.

**2.** Os números *x*; 10,5; 24 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

a) Qual é o valor do número *x*? 16,8
b) Elabore um problema cuja resolução envolva essa proporção. Resposta pessoal.

**3.** Calcule o valor de *x* em cada uma das proporções:

a) $\frac{x}{3} = \frac{8}{12}$ 2
b) $\frac{2,1}{7} = \frac{x}{10}$ 3
c) $\frac{2}{15} = \frac{3}{2x}$ 11,25
d) $\frac{x+6}{x-6} = \frac{2}{3}$ −30
e) $\frac{1}{5} = \frac{x-6}{x+1,5}$ 7,875
f) $\frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{2}}{x}$ $\frac{2}{9}$

**4.** São dadas as igualdades:

$\boxed{\frac{x+1}{5} = \frac{2x+6}{15}}$ $\boxed{\frac{3y-10}{5y+2} = \frac{10}{5}}$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções, calcule o valor de x + y. 1

**5.** Sabendo que $\frac{2}{x+5} = 4$, calcule o valor de $\frac{3}{x+6}$. 2

**6.** Os números dados formam, nessa ordem, uma proporção. Determine o valor de x · y. 80

- 8, 20, 40, *x*
- 1,8; 0,6; 2,4; *y*

**7.** Em uma pequena comunidade constatou-se que, de cada 7 crianças, 2 possuíam olhos azuis. Sabendo que na comunidade havia 91 crianças, quantas possuíam olhos azuis? 26 crianças.

**8.** Em determinada hora do dia, a razão entre a altura de um bastão, fixado verticalmente no chão, e a sombra que ele projeta é de 5 para 3. Se a sombra mede 72 cm, qual é a altura desse bastão em metros? 1,2 m

**9.** Uma pesquisa mostrou que na cidade *X* existe 1 médico para cada grupo de 1600 habitantes. Se nessa cidade *X* há 30 médicos, quantos habitantes tem essa cidade? 48 000 habitantes.

**10.** Para fazer um refresco, mistura-se suco concentrado com água na razão de 3 para 5. Nessas condições, 9 copos de suco concentrado devem ser misturados a quantos copos de água? 15 copos de água.

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

Continuando o capítulo de proporções, há duas seções: Números diretamente proporcionais (Figura 6) e Números inversamente proporcionais (Figura 7), para as quais são apresentadas as respectivas definições, exemplos e lista de exercícios.

Figura 6 - Números diretamente proporcionais LD 1

Os números racionais *x*, *y* e *z* são **diretamente proporcionais** aos números racionais *a*, *b* e *c*, quando se tem: $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

Figura 7 - Números inversamente proporcionais LD 1

Os números racionais *x*, *y* e *z* são **inversamente proporcionais** aos números racionais *a*, *b* e *c*, quando se tem: $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c$.

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

E, finalizando o capítulo, temos as seções que trabalham a relação entre grandezas (Figuras 8 e 9). As definições apresentadas são as que permitem, com maior efetividade, aos alunos identificar se a relação entre as grandezas é de proporção direta ou inversa ou se não há proporcionalidade.

Figura 8 - Grandezas diretamente proporcionais LD 1

## Grandezas diretamente proporcionais

Considere a seguinte situação:

Jaime trabalha organizando churrascos e a quantidade de carne, em quilogramas, que ele compra varia de acordo com a quantidade de convidados. Acompanhe na tabela a seguir.

**Quantidade de carne**

| Número de convidados | Carne comprada (em kg) |
|---|---|
| 50 | 10 |
| 100 | 20 |
| 150 | 30 |

Fonte: Dados fictícios.

Analisando a tabela, você pode notar que:

- se o número de convidados duplica, a quantidade de carne também duplica;
- se o número de convidados triplica, a quantidade de carne também triplica.

As duas grandezas aqui envolvidas (o número de convidados e a quantidade de carne) são chamadas **grandezas diretamente proporcionais**.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando, dobrando uma delas, a outra também dobra; triplicando uma delas, a outra também triplica, e assim por diante.

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

Figura 9 - Grandezas inversamente proporcionais LD 1

## Grandezas inversamente proporcionais

Considere a seguinte situação:

Uma escola tem 48 livros para distribuir igualmente entre os vencedores de uma gincana escolar. Se os vencedores forem dois alunos, cada um deles receberá 24 livros. Se forem quatro alunos, cada um receberá 12 livros. E se forem seis alunos, cada um receberá 8 livros. Vamos colocar esses dados na tabela seguinte:

**Distribuição dos livros**

| Número de alunos vencedores | Número de livros distribuídos a cada aluno |
|---|---|
| 2 | 24 |
| 4 | 12 |
| 6 | 8 |

Fonte: Dados fictícios.

Analisando a tabela, você pode notar que:

- se o número de alunos vencedores duplica, o número de livros distribuídos para cada aluno cai para a metade;
- se o número de vencedores triplica, o número de livros distribuídos para cada aluno cai para a terça parte.

As duas grandezas aqui envolvidas (o número de alunos vencedores e o número de livros que serão distribuídos a cada aluno) são chamadas **grandezas inversamente proporcionais**.

Duas grandezas são **inversamente proporcionais** quando, dobrando uma delas, a outra se reduz para a metade; triplicando uma delas, a outra se reduz para a terça parte, e assim por diante.

Fonte: Giovanni Junior e Castrucci (2018)

A Unidade é finalizada com o capítulo 3, onde são apresentadas as seções de regra de três simples e regra de três composta.

Destarte, em relação ao LD 1, ressaltamos que:

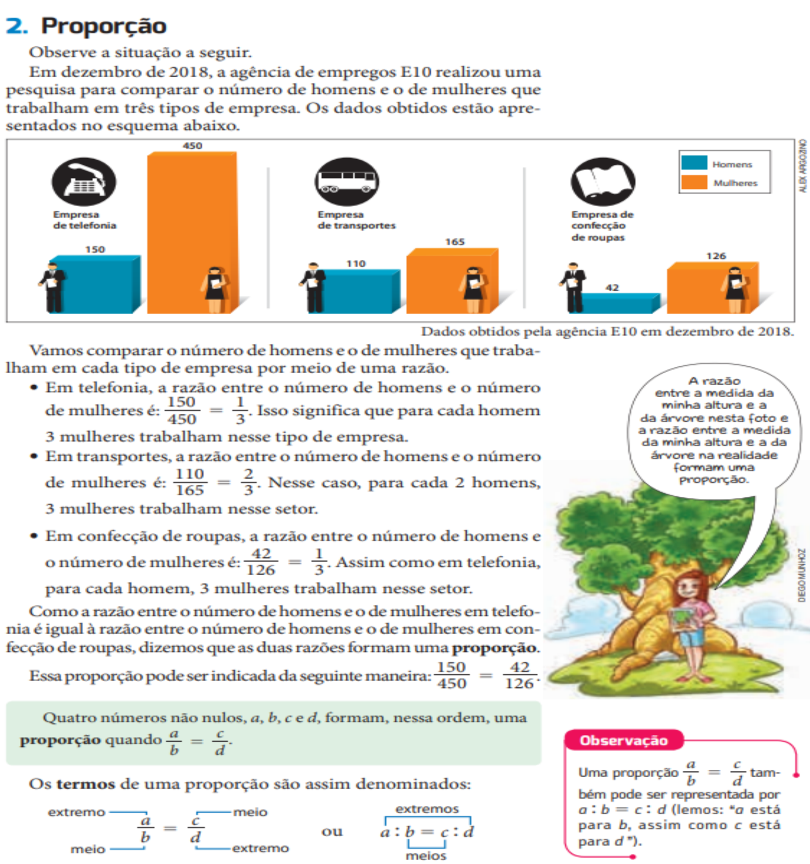
- “Não explora situações de não-proporcionalidade” conforme apontam Silvestre e Ponte (2013);
- Explora minimamente a relação multiplicativa envolvida no raciocínio proporcional, dando mais ênfase à propriedade fundamental das proporções;
- Os exercícios propostos tem foco apenas na aplicação imediata do conceito, visando a prática do aluno em procedimentos e algoritmos;
- Tem apenas uma atividade de representação gráfica.
- O livro carece de atividades mais abertas que favoreçam a reflexão e o uso da argumentação.

Livro didático 2 (LD 2) – Araribá mais matemática dos editores GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael (Ed.) – obra coletiva da Editora Moderna.

O tema é abordado na Unidade 4, capítulo 11- Proporções e Aplicações, que é dividido em três seções: 1 – Razão, 2 – Proporção e 3 - Grandezas e medidas no nosso cotidiano. A seção 1, inicia-se com um exemplo, segue com a definição de razão e traz a lista de exercícios ao final. Porém, não menciona as razões especiais.

A seção 2, sobre proporções, também tem início com um exemplo, traz a definição de proporção (Figura 10) e a propriedade fundamental das proporções (Figura 11), finalizando coma lista de exercícios (Figura 12).

Figura 10 - Proporções LD 2



## 2. Proporção

Observe a situação a seguir.

Em dezembro de 2018, a agência de empregos E10 realizou uma pesquisa para comparar o número de homens e o de mulheres que trabalham em três tipos de empresa. Os dados obtidos estão apresentados no esquema abaixo.



Dados obtidos pela agência E10 em dezembro de 2018.

Vamos comparar o número de homens e o de mulheres que trabalham em cada tipo de empresa por meio de uma razão.

- Em telefonia, a razão entre o número de homens e o número de mulheres é: $\frac{150}{450} = \frac{1}{3}$. Isso significa que para cada homem 3 mulheres trabalham nesse tipo de empresa.
- Em transportes, a razão entre o número de homens e o número de mulheres é: $\frac{110}{165} = \frac{2}{3}$. Nesse caso, para cada 2 homens, 3 mulheres trabalham nesse setor.
- Em confecção de roupas, a razão entre o número de homens e o número de mulheres é: $\frac{42}{126} = \frac{1}{3}$. Assim como em telefonia, para cada homem, 3 mulheres trabalham nesse setor.

Como a razão entre o número de homens e o de mulheres em telefonia é igual à razão entre o número de homens e o de mulheres em confecção de roupas, dizemos que as duas razões formam uma **proporção**.

Essa proporção pode ser indicada da seguinte maneira: $\frac{150}{450} = \frac{42}{126}$.

Quatro números não nulos, *a*, *b*, *c* e *d*, formam, nessa ordem, uma **proporção** quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Os **termos** de uma proporção são assim denominados:

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{extremo / meio}} = \underbrace{\frac{c}{d}}_{\text{meio / extremo}} \quad \text{ou} \quad \overbrace{a : \underbrace{b = c}_{\text{meios}} : d}^{\text{extremos}}$$

**Observação**

Uma proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ também pode ser representada por $a : b = c : d$ (lemos: "*a* está para *b*, assim como *c* está para *d*").

Fonte: GAY e SILVA (Ed.) (2018)

Figura 11 - Propriedade Fundamental das proporções LD 2

## Propriedade fundamental das proporções

Podemos escrever a propriedade fundamental das proporções desta forma:

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios. Ou seja, dados os números $a$, $b$, $c$ e $d$ não nulos, com $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos: $a \cdot d = b \cdot c$

Os números 1,5; 7; 4,5 e 21, por exemplo, formam, nessa ordem, uma proporção. Repare que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios:

$$\frac{1{,}5}{7} = \frac{4{,}5}{21} \qquad \underbrace{1{,}5 \cdot 21}_{31{,}5} = \underbrace{7 \cdot 4{,}5}_{31{,}5}$$

produto dos extremos — produto dos meios

Usando a propriedade fundamental das proporções, podemos resolver muitos problemas.

Fonte: GAY e SILVA (Ed.) (2018)

Figura 12 - Lista de exercícios LD 2

**1** Copie no caderno apenas as razões que formam proporções. alternativas **a**, **c**, **d** e **e**

a) $\frac{4}{10}$ e $\frac{2}{5}$

b) $\frac{8}{32}$ e $\frac{2}{7}$

c) $\frac{9}{0{,}25}$ e $\frac{81}{2{,}25}$

d) $\frac{1{,}5}{6}$ e $\frac{0{,}5}{2}$

e) $\frac{35}{28}$ e $\frac{5}{4}$

f) $\frac{148}{93}$ e $\frac{37}{24}$

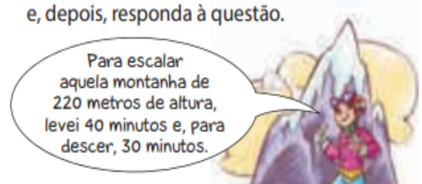
**2** Descubra todas as proporções com os termos 2, 3, 10 e 15.

**3** Sabendo que 42 está para $x$, assim como 252 está para 186, calcule o valor de $x$. 31

**4** Para animar o acampamento das crianças, o cozinheiro inventou uma brincadeira. A cada 15 biscoitos, 4 seriam recheados.

Se, no final da brincadeira, a garotada encontrou 12 biscoitos recheados, quantos biscoitos foram feitos? 45 biscoitos

**5** Leia atentamente o que a garota está dizendo e, depois, responda à questão.




DIEGO MUNHOZ

- As razões entre a distância e o tempo, na subida e na descida, formam uma proporção? Justifique sua resposta. não, pois: $\frac{220}{40} \neq \frac{220}{30}$

**6** Considerando que, em um mesmo instante do dia, as razões entre a altura de um objeto e o comprimento da sombra projetada por ele formam uma proporção, resolva o problema a seguir.

Em certo horário do dia, Eduardo, que tem 1,80 m de altura, projeta uma sombra de 3 m de comprimento. No mesmo instante, uma árvore projeta uma sombra de 7 m de comprimento. Qual é a medida da altura da árvore? 4,2 m

Fonte: GAY e SILVA (Ed.) (2018)

Finalizando a seção 2, temos a definição de sequência de números diretamente proporcionais (Figura 13) e inversamente proporcionais (Figura 14).

Figura 13 - Sequências de números diretamente proporcionais LD 2

Os números $a, b, c, d, \ldots$ são diretamente proporcionais aos números não nulos $A, B, C, D, \ldots$, nessa ordem, quando:

$$\frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C} = \frac{d}{D} = \ldots = k$$

sendo $k$ a constante de proporcionalidade.

Fonte: GAY e SILVA (Ed.) (2018)

Figura 14 - Sequências de números inversamente proporcionais LD 2

Os números não nulos $a, b, c, d, \ldots$ são inversamente proporcionais aos números não nulos $A, B, C, D, \ldots$, nessa ordem, quando:

$$\frac{a}{\frac{1}{A}} = \frac{b}{\frac{1}{B}} = \frac{c}{\frac{1}{C}} = \frac{d}{\frac{1}{D}} = \ldots = k$$

Fonte: GAY e SILVA (Ed.) (2018)

Nessa seção há uma atividade já resolvida de divisão em partes diretamente proporcionais e outra atividade, ainda a ser feita, de divisão em partes inversamente proporcionais.

A seção 3 – Grandezas e medidas em nosso cotidiano, inicia-se com grandezas diretamente proporcionais (Figura 15) e grandezas inversamente proporcionais (Figura 16), abordando exemplos, definições e atividades. Há ainda as subseções que tratam da Regra de três, Porcentagem e Juro simples.

Em relação ao LD 2, ressaltamos os seguintes pontos:

- Nas tabelas dos exemplos, ele ilustra bem a natureza multiplicativa da proporcionalidade;
- “Explora situações de não-proporcionalidade”, conforme apontam Silvestre e Ponte (2013);
- Carece de atividades mais abertas que favoreçam a reflexão e o uso da argumentação;
- Há mais atividades com resolução de problemas em relação aos outros livros.

Figura 15 - Grandezas diretamente proporcionais LD 2

## 4. Grandezas diretamente proporcionais

Neste tópico e no seguinte, você vai aprender o que são grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais.

**Situação 1**

Um funcionário de uma indústria automobilística decidiu testar se a velocidade indicada no velocímetro de um automóvel era precisa. Para isso, verificou a distância percorrida pelo veículo durante 1 minuto, mantendo a mesma velocidade média. Primeiro, ele manteve a velocidade média do veículo em 60 km/h e registrou a distância percorrida em 1 minuto. Em seguida, testou outras velocidades. Veja os resultados do teste no quadro abaixo.

×2 :4 ×3

| Velocidade média (km/h) | 60 | 120 | 30 | 90 |
|---|---|---|---|---|
| Distância percorrida em 1 minuto (km) | 1 | 2 | 0,5 | 1,5 |

×2 :4 ×3

Observe que a razão entre o valor da velocidade média e o valor correspondente à distância percorrida será sempre a mesma:

$$\frac{60}{1} = \frac{120}{2} = \frac{30}{0{,}5} = \frac{90}{1{,}5} = \ldots = 60$$

Nesse caso, podemos dizer que as grandezas velocidade média e distância percorrida são **diretamente proporcionais**.

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando variam sempre na mesma razão. Ou seja, duas grandezas são diretamente proporcionais quando, se o valor de uma dobra, o valor da outra também dobra; se é reduzido pela metade o valor de uma, o valor da outra também se reduz pela metade; e assim por diante.

**Observação**

A razão entre a distância percorrida por um corpo móvel e o tempo que esse corpo gasta para percorrê-la é definida como **velocidade média**.

Exemplo: Se um carro percorre 120 km em 2 horas, a velocidade média desse carro é $\frac{120\,\text{km}}{2\,\text{h}}$ ou $\frac{60\,\text{km}}{\text{h}}$, que costumamos indicar 60 km/h.

Fonte: GAY e SILVA (Ed.) (2018)

Figura 16 - Grandezas inversamente proporcionais LD 2

LUKAS GOJDA/SHUTTERSTOCK

## 5. Grandezas inversamente proporcionais

Agora, vamos observar algumas situações que envolvem grandezas inversamente proporcionais.

**Situação 1**

No quadro abaixo, está representado o tempo gasto por uma moto para percorrer certa distância variando a velocidade média.

× 2 : 4 : 2

| Velocidade média (km/h) | 30 | 60 | 15 | 7,5 |
|---|---|---|---|---|
| Tempo (h) | 2 | 1 | 4 | 8 |

: 2 × 4 × 2

A razão entre o valor da velocidade média e o inverso do valor correspondente ao tempo gasto é sempre a mesma:

$$\frac{30}{\frac{1}{2}} = \frac{60}{\frac{1}{1}} = \frac{15}{\frac{1}{4}} = \frac{7{,}5}{\frac{1}{8}} = 60$$

Nesse caso, podemos dizer que as grandezas velocidade média e tempo são **inversamente proporcionais**.

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma varia sempre na razão inversa da outra. Ou seja, duas grandezas são inversamente proporcionais se, quando o valor de uma dobra, o valor da outra se reduz pela metade; se o valor de uma é dividido por 3, o valor da outra é multiplicado por 3; e assim por diante.

**Observação**

Nesse caso, quando a velocidade dobrou, o tempo reduziu-se à metade; quando a velocidade foi dividida por 4, o tempo foi multiplicado por 4; quando a velocidade foi reduzida à metade, o tempo dobrou.

Fonte: GAY e SILVA (Ed.) (2018)

Livro didático 3 (LD 3) - Matemática – Bianchini do autor Edwaldo Roque Bianchini

O tema é abordado no capítulo 9 - Razões, proporções e porcentagem.

A seção 1 - O conceito de razão inicia-se com exemplos e definição de razão (Figura 17). A seção 2 - Razão entre grandezas de mesma natureza apresenta exemplos e atividades envolvendo razão entre grandezas de mesma natureza e a razão especial escala.

Figura 17 - Escala LD 3

**Escala** é a razão entre um comprimento em um desenho (ou outra representação qualquer) e o comprimento real correspondente, expressos em uma mesma unidade de medida.

$$\text{escala} = \frac{\text{número que expressa o comprimento no desenho}}{\text{número que expressa o comprimento real}}$$

Fonte: Bianchini (2018)

A seção 3 - Proporção apresenta um exemplo (Figura 18), a definição de proporção e a nomenclatura dos termos de uma proporção (Figura 19).

Figura 18 - Exemplo proporção LD3

Juliana coleciona gibis. A cada 5 gibis de sua coleção, 1 é de histórias em quadrinhos feitas no estilo japonês (mangá).

Dessa maneira, a cada 10 gibis, 2 são mangás; a cada 15 gibis, 3 são mangás; a cada 20 gibis, 4 são mangás; e assim por diante.

Podemos, então, obter as razões:

$$\frac{1}{5} \qquad \frac{2}{10} \qquad \frac{3}{15} \qquad \frac{4}{20}$$

Fonte: Bianchini (2018)

Figura 19 - Proporção LD 3

Observe que todas essas razões são iguais a $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{5} = \frac{2}{10} \qquad \frac{1}{5} = \frac{3}{15} \qquad \frac{1}{5} = \frac{4}{20}$$

Sentenças como essas, que representam uma igualdade entre duas razões, são chamadas de **proporção**.

**Proporção** é uma igualdade entre duas razões.

A proporção $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ também pode ser indicada assim: $1:5 = 2:10$.

Em ambos os casos, essa proporção é lida: "um está para cinco assim como dois está para dez".

De modo geral, podemos dizer que os números *a*, *b*, *c* e *d*, não nulos, formam, nessa ordem, uma proporção quando $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

- Os números *a*, *b*, *c* e *d* são os **termos** da proporção.
- Os termos *a* e *d* são chamados de **extremos** da proporção.
- Os termos *b* e *c* são chamados de **meios** da proporção.

Por exemplo, na proporção $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ os extremos são 1 e 10, e os meios, 5 e 2.

Agora, vamos verificar se os números 4, 6, 10 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \qquad \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

As razões são iguais; logo, $\frac{4}{6} = \frac{10}{15}$.

Portanto, os números 4, 6, 10 e 15 formam, nessa ordem, uma proporção.

Fonte: Bianchini (2018)

A seção 4 - Propriedade Fundamental das proporções apresenta a definição (Figura 20), exemplos e atividades acerca do tema (Figura 21).

Figura 20 - Propriedade Fundamental das proporções LD 3

Considere a proporção $\frac{6}{5} = \frac{18}{15}$.

- Os extremos dessa proporção são 6 e 15, e seu produto é 90.
- Os meios são 5 e 18, e seu produto também é 90.

Perceba que, nessa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Considere estas outras proporções:

a) $\frac{0{,}9}{0{,}6} = \frac{15}{10}$

$$\underbrace{0{,}9 \cdot 10}_{9} = \underbrace{0{,}6 \cdot 15}_{9}$$

produto dos extremos produto dos meios

b) $\frac{8}{12} = \frac{12}{18}$

$$\underbrace{8 \cdot 18}_{144} = \underbrace{12 \cdot 12}_{144}$$

produto dos extremos produto dos meios

Isso acontece em todas as proporções.

Em toda proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

Essa é a **propriedade fundamental das proporções**.

Fonte: Bianchini (2018)

Figura 21 - Lista de exercícios LD 3

**29** Aplicando a propriedade fundamental das proporções, verifique se o par de razões $\frac{9}{6}$ e $\frac{12}{8}$ forma uma proporção. sim

**30** Em uma proporção, o produto dos extremos é 24 e um dos meios é 8. Calcule o outro meio. 3

**31** Uma proporção tem meios 6 e 10. Um dos extremos é 4, qual é o outro extremo? 15

**32** Calcule o valor de $x$ nas proporções.

a) $\frac{6}{x} = \frac{9}{12}$ $x = 8$

b) $\frac{2x}{3} = \frac{-24}{15}$ $x = -\frac{12}{5}$

c) $\frac{3}{4} = \frac{5x}{20}$ $x = 3$

d) $\frac{x+5}{3} = \frac{x-1}{5}$ $x = -14$

**33** Para que valor de $x$ os números 8, 6, 4 e $x$ formam, nessa ordem, uma proporção? $x = 3$

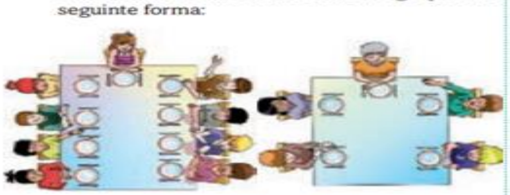
**34** Douglas e Eduardo participaram do sorteio de um prêmio em dinheiro. Eles combinaram que, se um dos dois fosse sorteado, eles dividiriam o prêmio na razão de 5 para 3, de modo que o amigo sorteado ficaria com a maior parte. Eduardo foi sorteado e ficou com R$ 6.250,00.

a) Com quanto Douglas ficou? R$ 3.750,00

b) Qual foi o valor total do prêmio? R$ 10.000,00

**35** A miniatura de um carro, construída na escala 1 : 96, tem 5,5 cm de comprimento. Qual é o comprimento real do carro? 5,28 m

**36** Luciana foi a uma pizzaria comemorar seu aniversário. Como havia muitos convidados, não foi possível acomodá-los na mesma mesa. Então, eles foram divididos em dois grupos da seguinte forma:



a) Sabendo que os convidados da mesa menor comeram 2 *pizzas* e meia e os da mesa maior comeram proporcionalmente a mesma quantidade de *pizzas* da mesa menor, quantas eles comeram? 4 *pizzas* e meia

b) Ao dividir a conta, os convidados da mesa menor pagaram R$ 90,00 no total, e os da mesa maior, R$ 120,00. Essa divisão foi justa? Justifique sua resposta.

**37** Calcule $x$ e $y$ na proporção $\frac{x}{y} = \frac{8}{3}$, sabendo que $x + y = 132$. $x = 96$ e $y = 36$

**38** Um marceneiro dividiu uma ripa de madeira com 14 cm em dois pedaços na razão de 3 para 4. Quantos centímetros tem o pedaço maior? 8 cm

**39** Um prêmio de R$ 10.000,00 foi dividido entre os dois primeiros colocados em uma prova de atletismo na razão de 5 para 3.


a) Indique por $x$ a parte que coube ao primeiro colocado e por $y$ a parte que coube ao segundo. Escreva o sistema associado a essa situação.

b) Qual é o valor de $x$? E de $y$? R$ 6.250,00; R$ 3.750,00

a) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \\ x + y = 10.000 \end{cases}$

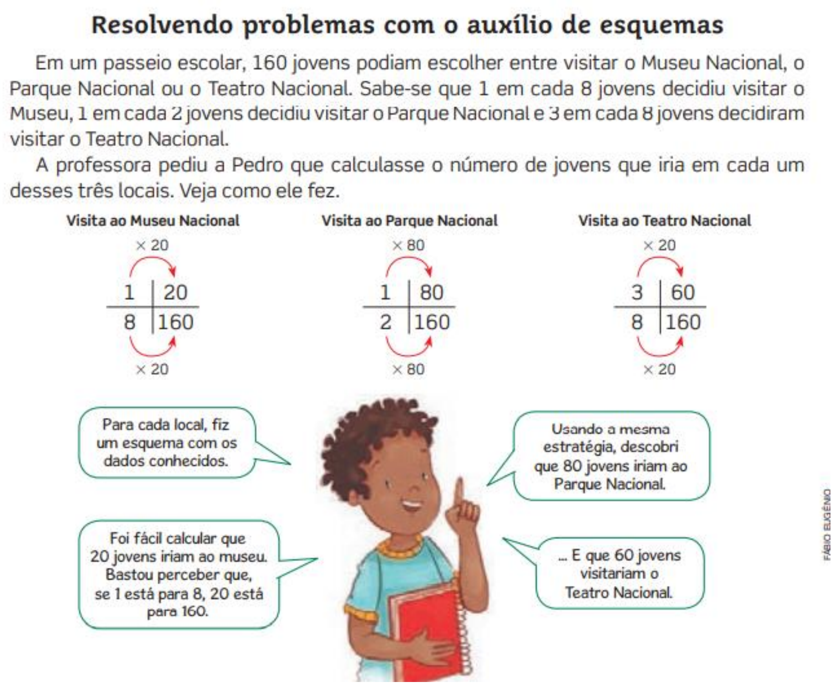
**40** Ao preparar a ração para as cabras que cria, Raimundo mistura semente de soja com feno na razão de 1 para 2. Para 60 kg dessa mistura, quantos quilogramas de semente de soja serão utilizados? 20 kg

Fonte: Bianchini (2018)

Finalizando o capítulo temos as seções 5 - Porcentagem e 6 - Acréscimos e descontos. Em relação ao LD 3, ressaltamos:

- Explora a relação multiplicativa envolvida no raciocínio proporcional, na Seção “Para saber mais” (Figura 22).

Figura 22 - Fator multiplicativo LD 3




Fonte: Bianchini (2018)

- Boa parte dos exercícios destina-se a verificar ou calcular um valor dada uma sequência de números usando a propriedade fundamental;
- “Os exercícios não exploram diferentes contextos e representações como gráficos e tabelas” conforme sugerem Silvestre e Ponte (2013);
- Não é apresentado o conceito de proporcionalidade inversa;
- Com relação ao raciocínio proporcional, carecem de atividades mais abertas que favoreçam a reflexão e o uso da argumentação.

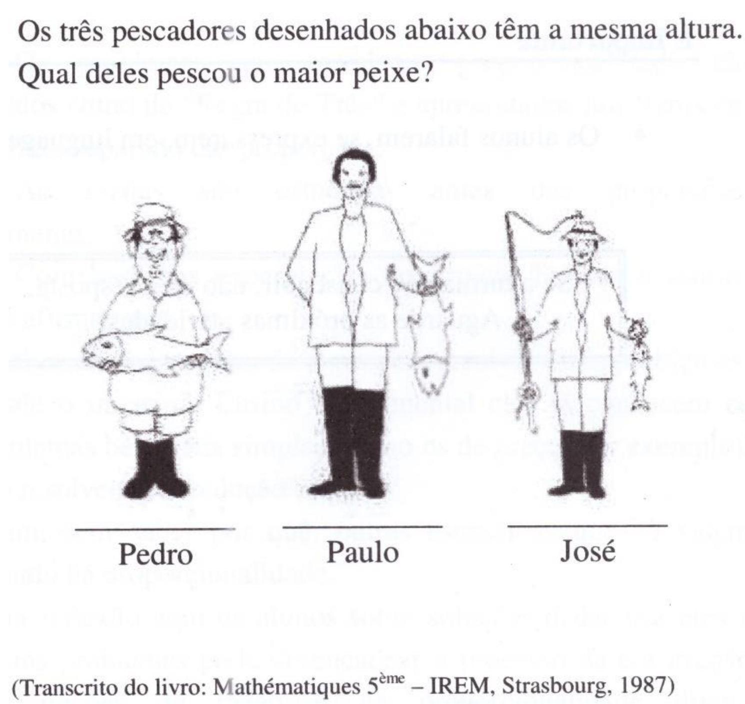
# 4 A SEQUÊNCIA DIDÁTICA

ATIVIDADE 1 (adaptado do livro Razões e proporções, Tinoco, 2011)

DESAFIO INICIAL

Os três pescadores desenhados abaixo têm a mesma altura. Qual deles pescou o maior peixe?

Figura 23 – Desafio




Fonte: Tinoco (2011)

Sugestões:

- Deixe os alunos discutirem bastante até concluírem a resposta.
- Não incentive o uso de contas e nem nomenclaturas.

Objetivos:

Começar a pensar em proporcionalidade, informalmente. É importante permitir que os alunos falem, se expressem em linguagem natural.

ATIVIDADE 2 - Adaptado do livro Matemática no Ensino Fundamental, Van de Walle, 2009.

Há duas semanas, duas flores foram medidas e tinham 10 centímetros e 20 centímetros, respectivamente. Hoje estão com 15 centímetros e 25 centímetros de altura. Qual cresceu mais, a flor de 15 centímetros ou a de 25 centímetros?

Antes de continuar a leitura, encontre e defenda duas respostas diferentes para esse problema.

Uma resposta é que as duas cresceram a mesma quantidade, ou seja, 5 centímetros.

Essa resposta é correta e está baseada em raciocínio aditivo. Isto é, uma quantidade única foi adicionada às medidas, resultando em duas novas medidas.

Um segundo caminho para encarar o problema é comparar a quantidade de crescimento à altura original da flor. A primeira flor cresceu 5/10 = 1/2 ao passo que a segunda cresceu 5/20 = 1/4. Baseado nessa visão multiplicativa, a primeira flor cresceu mais. Essa é uma visão proporcional dessa situação de mudança.

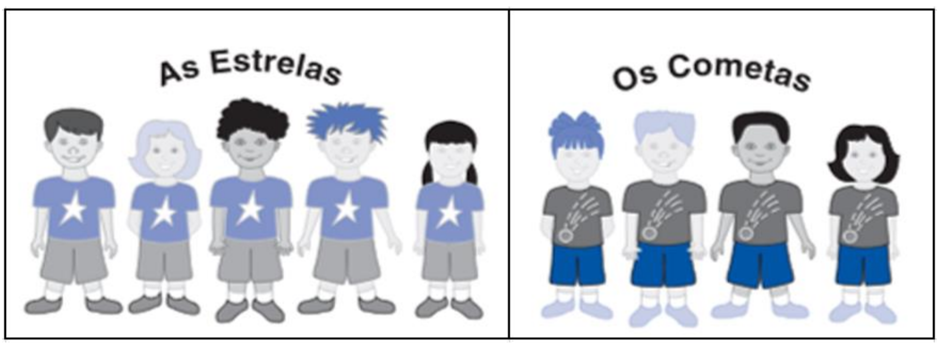
Aqui, ambos os raciocínios, aditivo ou multiplicativo, produzem respostas válidas, embora diferentes. O valor em comparações desse tipo é que a discussão enfocará a natureza da comparação e, desse modo, destacará a distinção entre comparações aditivas e multiplicativas. A habilidade de compreender a diferença entre essas situações é uma indicação de raciocínio proporcional.

ATIVIDADE 3 – parte adaptado do livro Matemática no Ensino Fundamental, Van de Walle, 2009.

Nas atividades seguintes, duas razões são consideradas em vez de uma, e é exigida uma comparação. Como ocorre com o problema anterior, do crescimento da flor, as escolhas podem ser feitas usando raciocínio aditivo ou multiplicativo, fornecendo à turma uma distinção útil entre os dois tipos de relações sem que seja preciso definir a relação para eles.

a ) Qual time tem mais meninas?

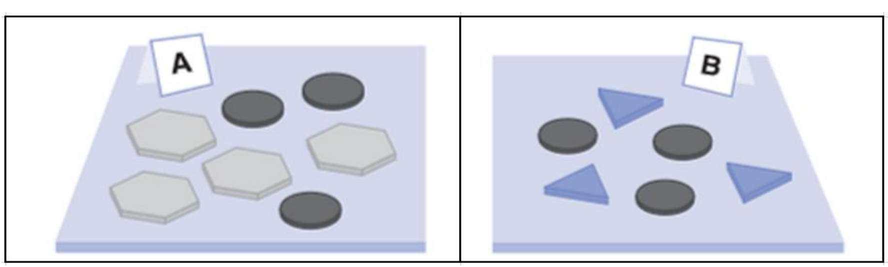
Figura 24 - Atividade 3ª




Fonte: Van de Walle (2019)

b) Que conjunto possui mais círculos?

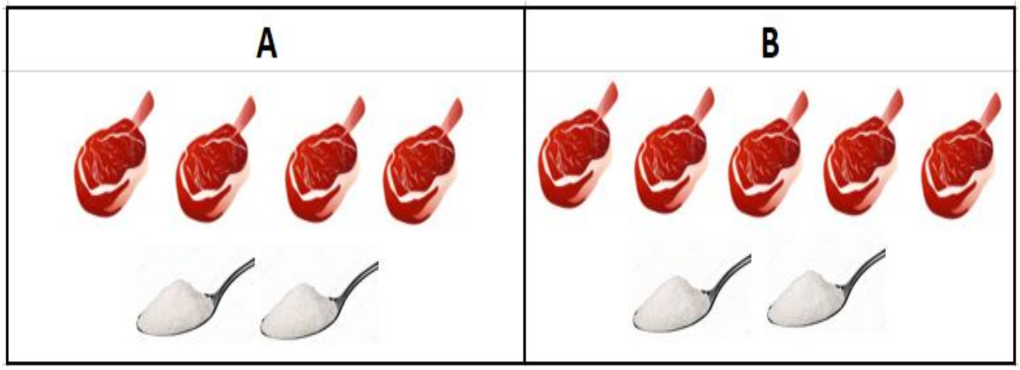
Figura 25 - atividade 3b




Fonte: Van de Walle (2019)

c) Qual carne ficará mais salgada?

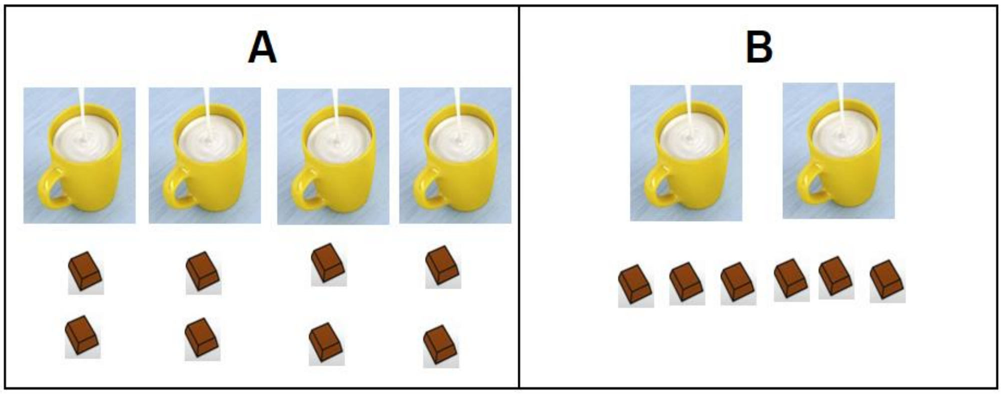
Figura 26 - Atividade 3c




Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

d) Laura e Poliana prepararam uma jarra de bebida usando os ingredientes abaixo. Em qual bebida o sabor do chocolate é mais intenso?

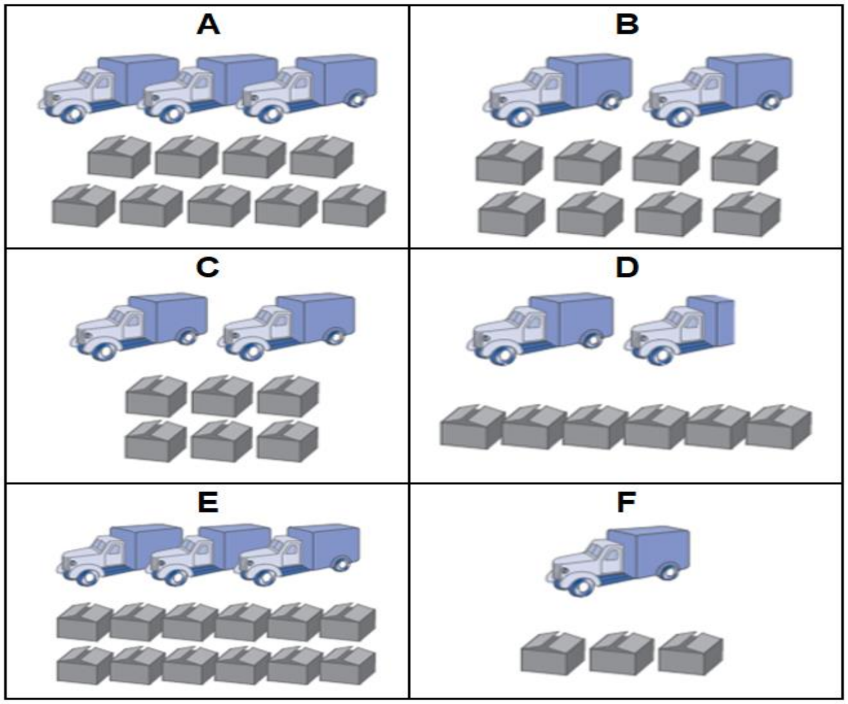
Figura 27 - Atividade 3d




Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

e) Em quais cartões a taxa de caminhões para caixas é a mesma?

Figura 28 - Atividade 3e



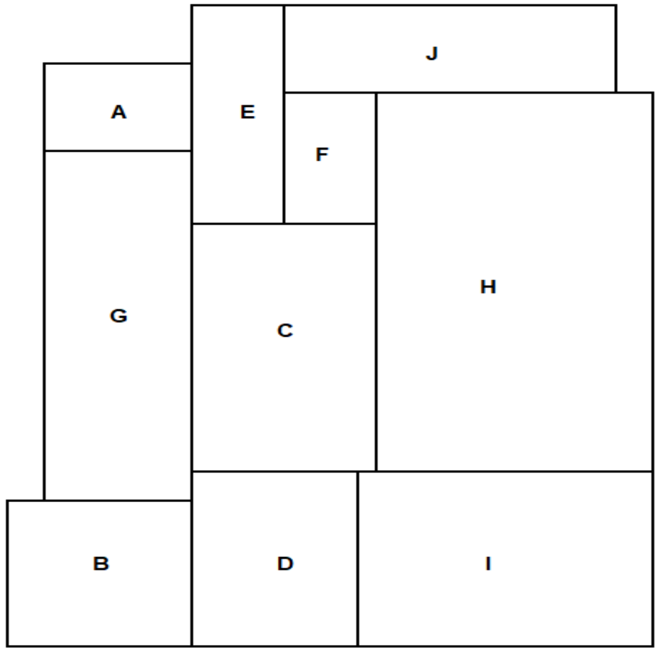

Fonte: Van de Walle (2019)

ATIVIDADE 4 - Retângulos parecidos (adaptado de Van de Walle, 2019)

Forneça aos grupos de alunos uma cópia da ficha-modelo mostrada na Figura 5 e peça que eles recortem os dez retângulos. Três dos retângulos (A, I e D) possuem lados na razão de 3 para 4. Os retângulos C, F e H têm lados na razão de 5 para 8. J, E e G têm lados na razão de 1 para 3. O retângulo B é um quadrado, assim seus lados estão na razão de 1 para 1.

A tarefa é agrupar os retângulos em três conjuntos de três conjuntos de retângulos “parecidos” e um com o “esquisito”. Se os alunos já conhecerem o termo semelhante da geometria, você pode usá-lo em vez de “parecidos”. Para explicar o que “parecido” quer dizer, desenhe três retângulos no quadro com dois que sejam semelhantes e um que seja claramente diferente aos outros dois, como no exemplo seguinte. Faça-os usarem sua linguagem para explicar por que os retângulos 1 e 3 são semelhantes.

Figura 29 - Atividade 4 retângulos




Fonte: Van de Walle (2019)

Quadro 2 - Agrupamento dos retângulos

**Retângulos parecidos**
**Três grupos e um esquisito**

| **Retângulos Grupo 1** | **Medidas em centímetros** | | **Razão entre os lados** |
|---|---|---|---|
| Letra | Lado menor | Lado maior | Lado menor/lado maior |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| **Retângulos Grupo 2** | **Medidas em centímetros** | | **Razão entre os lados** |
|---|---|---|---|
| Letra | Lado menor | Lado maior | Lado menor/lado maior |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| **Retângulos Grupo 3** | **Medidas em centímetros** | | **Razão entre os lados** |
|---|---|---|---|
| Letra | Lado menor | Lado maior | Lado menor/lado maior |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

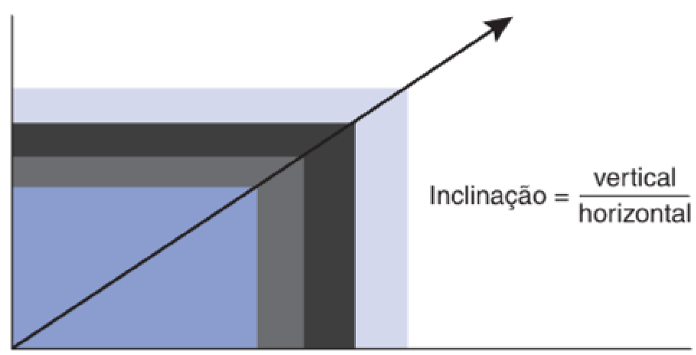
| **Retângulo esquisito** | **Medidas em centímetros** | | **Razão entre os lados** |
|---|---|---|---|
| Letra | Lado menor | Lado maior | Lado menor/lado maior |
| | | | |

Fonte: Van de Walle (2019)

Após os alunos organizarem seus agrupamentos, pare e discuta as razões que eles apresentaram para terem classificado os retângulos do modo como fizeram. Esteja preparado para alguns estudantes que tentarão combinar lados ou procurar por retângulos que tenham a mesma diferença entre eles. Não julgue qualquer razão oferecida. A seguir, faça-os medir e registrar os lados de cada retângulo com meio centímetro de precisão e calcule as razões entre os lados maiores e menores de cada retângulo. O modelo de ficha de trabalho pode ser usado para registrar os dados. Discuta esses resultados e peça aos alunos que apresentem explicações. Se os grupos formados forem retângulos proporcionais (semelhantes), todas as razões dentro de cada grupo serão as mesmas.

Outra característica dos retângulos proporcionais pode ser observada empilhando retângulos alinhados em um canto, como na Figura 29. Coloque uma régua através das diagonais e você verá que os cantos opostos também estão alinhados. Se os retângulos forem colocados em um eixo de coordenadas com o canto comum na origem, a inclinação da reta que passa pelo canto é a razão dos lados. Tem-se aqui uma conexão entre o raciocínio proporcional e a álgebra.

Figura 30 - Atividade 4 retângulos empilhados




Fonte: Van de Walle (2019)

A inclinação de uma reta atravessando uma pilha de retângulos proporcionais é igual à razão entre os dois lados.

ATIVIDADE 5 - Bolo de laranja

Ingredientes para um bolo de laranja. Rendimento 8 porções.

- 4 ovos
- 2 xícaras de açúcar
- 3 xícaras de farinha de trigo
- 1 xícara de suco de laranja
- 200g de manteiga
- 2 colheres de fermento

a) Caso disponha de apenas 2 ovos e os utilize, qual a quantidade dos outros ingredientes? (utilize o quadro ao final da atividade)

b) Caso precise fazer um bolo maior, que renda 24 porções idênticas à original, indique a quantidade de cada ingrediente a ser utilizada. (utilize o quadro ao final da atividade).

c) Ao comparar as quantidades de cada ingrediente da receita dada com a nova receita, o que pode ser observado? Há alguma relação entre estes valores? Ela pode ser escrita em forma de fração?

d) Caso queira fazer um bolo maior, usando 6 ovos, qual a quantidade dos outros ingredientes?

e) Utilize o quadro para facilitar a resposta

Quadro 3 - Atividade 5

| ovos | xícaras de açúcar | Xícaras de farinha de trigo | Xícaras de suco de laranja | Gramas de manteiga | Colheres de fermento | Porções |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **4** | **2** | **3** | **1** | **200** | **2** | **8** |
| 2 | | | | | | |
| | | | | | | 24 |
| 6 | | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

ATIVIDADE 6 (adaptado de Tinoco, 2011)

Com R$ 35,00 uma professora comprou 7 cadernos idênticos.

a) Quantos cadernos ela pode comprar com R$ 120,00?

Sugestões para reflexão

- Por que você sabe que o preço de um caderno é 35:7?
- O que você faria se quisesse o preço de um outro número de cadernos, por exemplo, 10 cadernos?
- Por que você pode somar 7 + 7 + 7 e saber que o preço desse total de cadernos é 35 + 35 + 35?

Todas essas perguntas enfatizam o fato de que há uma constante no problema, que é o quociente entre o preço pago e o número de cadernos comprados – o preço de um caderno.

b) Complete a o quadro abaixo:

Quadro 4 - Atividade 6

| Quantidade de cadernos | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Preço | | | | | | | 35 | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

c) Quando se dobra a quantidade de cadernos, o que acontece com o preço? E quando se triplica a quantidade de cadernos, o que acontece com o preço? De um modo geral quando se multiplica a quantidade de cadernos por um certo número, o que acontece com o preço total dessa quantidade?

d) Quando se soma dois números da linha quantidade de cadernos, o que acontece com os preços correspondentes?

ATIVIDADE 7 (adaptado de Tinoco, 2011)

Priscila foi ao supermercado com sua mãe. Como o estacionamento de lá estava lotado, ela precisou deixar o carro em um estacionamento rotativo, que tinha oa quadro de preços abaixo.

a) complete o quadro.

Quadro 5 - Atividade 7

| Tempo (h) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| R$ | 5 | 8 | 11 | | |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

Observação: as duas grandezas crescem juntas, mas não são proporcionais.

b) Quando o tempo dobra, o preço também dobra? Sabendo apenas o preço de 3 horas seria possível saber o preço de 1 hora?

c) Qual a diferença entre esse problema e o anterior?

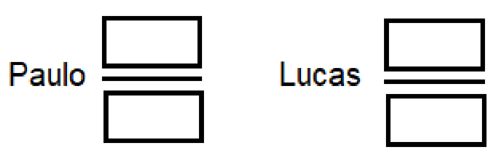
Espera-se que os alunos percebam que a constante é o número 3, que é adicionado ao preço a cada hora, e que, por sua vez, é diferente do preço da primeira hora.

ATIVIDADE 8

Paulo e Lucas foram treinar juntos no campo da escola. No treino, Paulo cobrou 10 pênaltis e fez 3 gols. Lucas cobrou 20 pênaltis e fez 5 gols.

a) Quem fez mais gols neste treino?

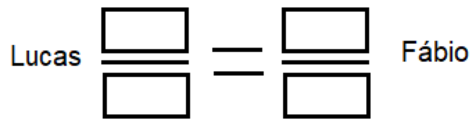
b) Escreva a razão entre o número de gols e o número de cobranças de pênaltis.




c) Quem obteve o melhor desempenho neste treino?

d) Existe alguma diferença entre a pergunta do item **a** e a pergunta do item **c**? Por que o melhor desempenho é diferente de marcar mais gols? Que operações aritméticas você efetua e como justifica a resposta?

e) Fábio também participou do treino e fez 12 cobranças de pênaltis. Se ele teve um desempenho igual ao de Lucas, quantos gols ele fez?




ATIVIDADE 9 (Adaptado de Soeiro, 2017)

Catarina, Inês e Rui são amigos, mas moram em bairros diferentes. Cada um pertence ao grupo desportivo de seu bairro. Os grupos desportivos são formados por rapazes e moças. O Grupo Desportivo Gym, ao qual Catarina pertence, é composto por 18 moças. O grupo de Rui, Grupo Desportivo Templários, por 40 moças.

a) Indique qual grupo possui mais moças?

b) Sabendo que o grupo Desportivo Gym é formado por 30 jovens e o Grupo desportivo dos Templários por 100 jovens, escreva a razão entre o número de moças e o número total de jovens de cada grupo.

Possivelmente será necessário ajudar os alunos que apresentem alguma dificuldade na representação da razão. Convide-os a apresentar as ideias sobre como interpretaram o que era pedido no enunciado.

c) Agora com estes dados, compare os elementos de cada grupo. Qual grupo possui mais moças? O que você pode concluir? (Comparação em termos relativos entre duas quantidades representadas por razões)

d) Escreva a razão entre o número de rapazes e de moças de cada grupo.

e) Indique a fração de rapazes de cada grupo.

f) Qual a porcentagem de rapazes do grupo Desportivo Templários? Indique como chegou a este resultado.

g) Qual a porcentagem de moças de cada grupo? Indique como chegou ao resultado.

h) A porcentagem de moças de cada grupo corresponde à razão que indicou entre o número de moças e o número total de jovens de cada grupo?

ATIVIDADE 10 (Adaptado de Soeiro, 2017)

Apesar de pertencerem a Grupos Desportivos diferentes, os amigos Catarina, Rui e Inês, as vezes treinam juntos.

1ª parte. Hoje combinaram de treinar no campo dos Templários.

a) Quando Inês chegou, Catarina já tinha dado 3 voltas na pista de corrida. Sabendo que a seguir correram lado a lado, quando Catarina completou 9 voltas, quantas voltas fez Inês? Escreva como chegou a esta resposta.

b) Catarina, para dar 9 voltas, correu durante 45 minutos, sempre na mesma velocidade. Se Inês a acompanhou, quanto tempo demorou para correr 6 voltas? Escreva como chegou a esta resposta.

c) Rui deu 8 voltas na pista em 32 minutos. Rui foi mais rápido que as amigas? Escreva como chegou a esta resposta.

d) No dia anterior, Rui havia treinado com Catarina na pista de treinos do Grupo Gim. Ele deu 9 voltas em 36 minutos e Catarina deu 4 voltas em 16 minutos. Qual dos amigos foi mais rápido? Escreva como chegou a esta resposta

2ª parte. Nos treinos desportivos, o tempo gasto na corrida de atletismo é registrado. Observe as tabelas elaboradas a partir dos registros das corridas de Rui e Inês:

Tabela 1 - atividade 10

| Rui | |
|---|---|
| **Minutos** | **Metros** |
| 3 | 150 |
| 5 | 250 |
| 7 | 350 |
| 9 | 450 |
| 10 | |

| Inês | |
|---|---|
| **Minutos** | **Metros** |
| 2 | 75 |
| 4 | 150 |
| 6 | 250 |
| 8 | 275 |
| 10 | 300 |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

É possível calcular quantos metros Rui corre em 10 minutos? Se sim, quantos?

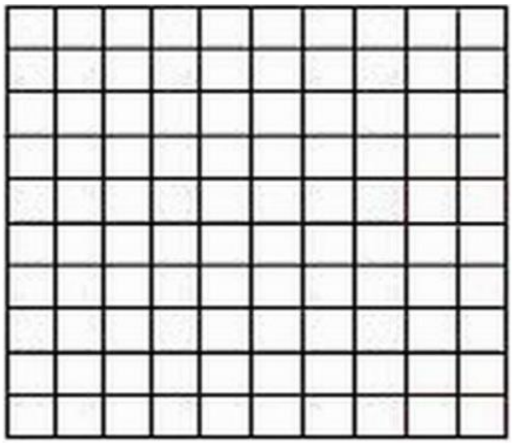
e) É possível calcular quantos minutos Rui levará para correr 550 metros? Se sim, quantos?

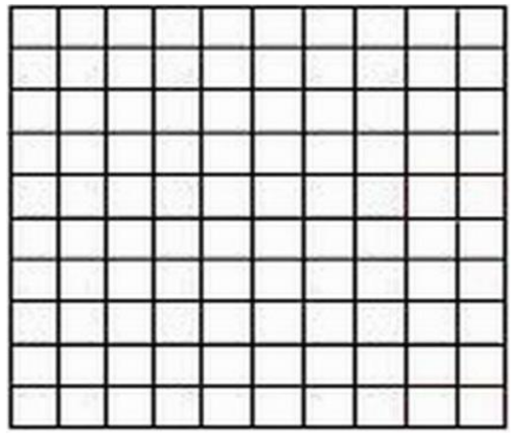
f) É possível calcular quantos minutos Inês levará para correr 350 metros? Justifique sua resposta.

g) O que você pode concluir em relação às grandezas tempo e distância na corrida do Rui e da Inês?

h) Qual a constante de proporcionalidade presente na relação de grandezas na corrida do Rui?

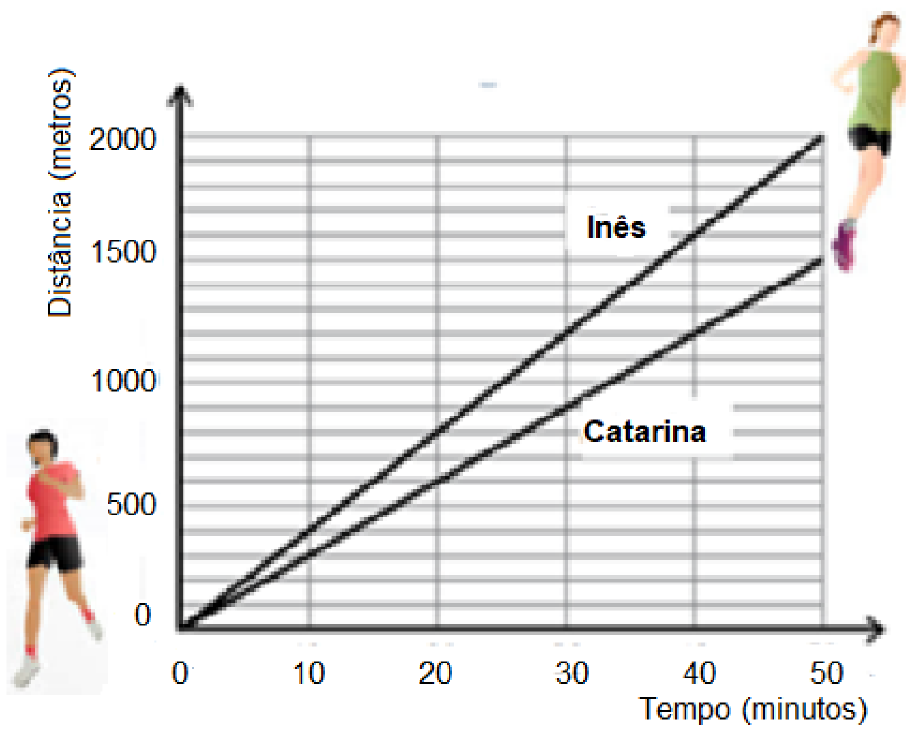
J) Com base na tabela 1 construa dois gráficos.





k) Analise o gráfico que representa a relação entre tempo e distância percorrida numa corrida entre Inês e Catarina. Você pode indicar quantos metros são percorridos em 1 hora por cada uma das amigas? Explique.

Gráfico 3 - Atividade 10




Fonte: Soeiro (2017)

l) É possível indicar quantos metros percorre cada uma por minuto? Se sim, indique o valor e explique porquê isto é possível.

m) Como se designa o valor que indica quantos metros por minuto, corre cada uma?

ATIVIDADE 11 Caixa de chocolates (Adaptado de Soeiro, 2017)

Inês, Catarina, Rui, Paulo e Laura, compraram uma caixa de chocolates que contém 60 bombons por R$ 15,00. Mas nem todos contribuíram com a mesma quantia de dinheiro, como pode ser verificado no quadro. Quando repartirem os bombons entre si, o número de bombons que cada um receberá, será proporcional a quantia que deu.

a) Com base na informação apresentada no quadro, indique quantos bombons deverá receber cada um.

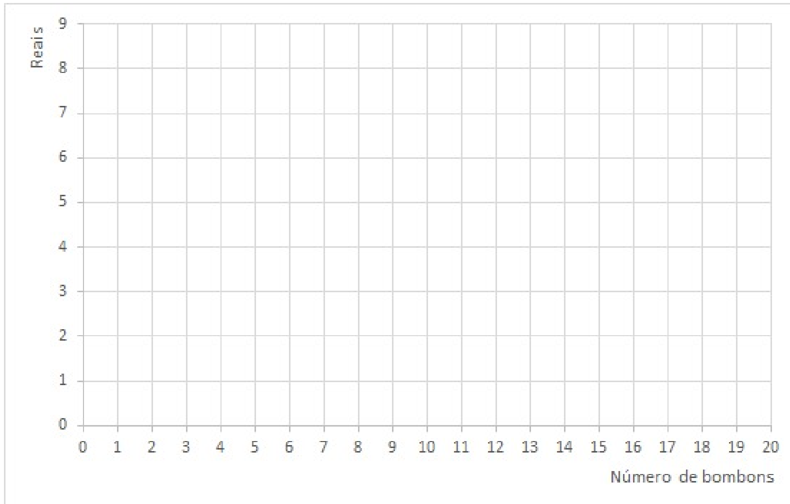
Quadro 6 - Atividade 11

| | INÊS | CATARINA | RUI | PAULO | LAURA |
|---|---|---|---|---|---|
| QUANTIA (R$) | 3 | 2 | 4 | 1 | 5 |
| Nº DE BOMBONS | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

b) Construa um gráfico com as coordenadas que correspondam às razões entre o número de bombons e seu valor em reais, de acordo com o quadro.
   Obs. Solicitar que tracem uma linha unindo os pontos marcados, com intuito de enfatizar as características da linha traçada, linha retilínea com início no ponto de origem (semirreta), representativa de uma situação proporcional, consolidando as noções trabalhadas na Atividade 10.

Gráfico 4 - Atividade 11




Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

c) Qual o valor de cada unidade?

d) Se uma caixa dos mesmos chocolates contiver 36 bombons, qual o preço da caixa? E qual o preço de uma caixa com 90 bombons?

e) Como se pode calcular o preço de uma caixa de chocolates com qualquer número (n) de bombons? Explica por palavras tuas ou por uma expressão matemática.

O item a seguir visa consolidar o trabalho com números racionais, relacionando razões, frações e percentagens em relações proporcionais.

f) Em relação a Inês:

1) Qual a fração de dinheiro que pagou?
2) Que fração de chocolates recebeu?
3) A fração de dinheiro que Inês pagou corresponde a que porcentagem do preço total da caixa?

Observações:

1) Por formação e apresentação das frações na sua forma irredutível, os alunos poderiam constatar que estas seriam exatamente as mesmas.

2) Durante a discussão verificar se relacionaram o total pago com a percentagem total, por formação de uma proporção, notando que 15 reais corresponderiam a 100%.

3) Intervir e explicar uma relação de covariância entre a quantidade de bombons recebida do total.

ATIVIDADE 12

Veja o tempo gasto para ler um livro de 360 páginas e responda.

Quadro 7 - Atividade 12

| Páginas lidas (por dia) | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Número de dias | 72 | 36 | 24 | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

a) Complete o quadro.

b) Lendo 5 páginas por dia, quantos dias serão necessários para ler o livro todo?

c) Para ler o livro todo em 18 dias, quantas páginas devem ser lidas por dia?

d) Quando o número de páginas lidas (por dia) aumenta, o número de dias aumenta ou diminui?

e) Quanto o número de páginas lidas (por dia) diminui, o número de dias aumenta ou diminui?

f) Que número obtemos sempre ao multiplicar o número de páginas lidas (por dia) pelo número de dias? O que ele representa?

g) Quando o número de páginas lidas (por dia) dobra, o que acontece com o número de dias?

h) Quando o número de páginas lidas (por dia) cai pela metade, o que acontece com o número de dias?

ATIVIDADE 13

O prêmio de uma loteria está acumulado em R$ 600.000,00. a) Complete o quadro:

Quadro 8- Atividade 13

| Quantidade de ganhadores | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Prêmio por ganhador (R$) | 600.000 | | | | | |

Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

b) Quando dobra o número de ganhadores, o que acontece com o prêmio por ganhador?

c) Quando triplica o número de ganhadores, o que acontece com o prêmio por ganhador?

d) É possível escrever uma expressão matemática para indicar o prêmio P a ser recebido em função do número N de ganhadores? Em caso afirmativo, escreva-a.

ATIVIDADE 14

Uma viagem de ônibus entre Vitória e Rio de Janeiro tem duração de 8 horas. Suponha que vários ônibus partam juntos de Vitória para, em condições idênticas, fazerem o percurso até o Rio de Janeiro.

Quadro 9 - Atividade 14

| Número de ônibus | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| Tempo de viagem(h) | 8 | | | | |

Fonte: Fonte: Elaborado pelo autor (2021)

## 5 CONCLUSÃO

Concluí o Ensino Fundamental sem a participação de professores de Matemática com formação acadêmica. Os professores tinham apenas o curso de magistério (Ensino Médio) e seguiam as propostas do livro didático, trabalhando em cada ano, apenas os primeiros capítulos do livro. Sendo assim, não estudei proporção e outros conteúdos. Resolvia as questões de proporcionalidade com estratégias variadas, sem utilização da regra de três.

Na minha atividade docente sempre aceitei (diferente dos meus professores do Ensino Fundamental) e valorizei as diversas formas de resolução dos problemas apresentados.

Quando iniciei o projeto de dissertação, tomei conhecimento do termo raciocínio proporcional, e de que havia estudos com a abordagem do tema proporcionalidade sem o uso da regra de três, com o qual eu já trabalhava, produzindo melhores resultados.

A utilização de tarefas contextualizadas, a valorização da intuição, a observação para reconhecimento de regularidades entre grandezas ou dentro das grandezas, a realização do trabalho em grupo e compartilhamento das diferentes formas de resolver problemas, contribuem para o interesse pelo tema e para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Para orientar a seleção de novas atividades, sugerimos as seguintes observações:

- Que estratégias os alunos usam para identificarem a existência ou não de proporcionalidade;

- Quais estratégias eles usam para resolução de problemas de proporcionalidade;

- Que compreensão, os alunos demonstram, do significado de constante de proporcionalidade e das relações multiplicativas;

- Quais as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no trabalho com problemas de proporcionalidade e na distinção entre as situações proporcionais e não proporcionais.

Principais estratégias utilizadas pelos alunos:

> Como resultado da investigação do Rational Number Project, Cramer e Post, (1993) destacaram-se quatro estratégias distintas de soluções: (i) taxa unitária (ou constante de proporcionalidade), (ii) fator de mudança, (iii) fração e (iv) produto cruzado (ou regra de três simples). A estratégia que envolve a razão unitária ou constante de proporcionalidade, decorre do dar a resposta a "Qual o valor de uma unidade?" exemplo, “Quantos quilômetros por minuto?”. A estratégia de fator de mudança ou variação implica em dar a resposta: “Quantas vezes mais?”. Por exemplo: “Se em 20 minutos percorre 4 km para percorrer 12 km que corresponde a 3 vezes mais então demorará 3 vezes 20 minutos ou seja 60 minutos”. A facilidade na utilização deste método está relacionada com os aspetos numéricos do problema. Os alunos seriam menos propensos a usar este método se o fator a ser usado não fosse um número inteiro 24 por exemplo, se o fator fosse, como na situação: “Se leva 20 minutos a percorrer 7 km, quanto tempo leva a percorrer 2 km?”. A estratégia de fração refere-se à quando os alunos usam a ideia de equivalência. Os alunos trabalham as razões como frações, aplicando a regra de frações equivalentes. Finalmente, a estratégia do algoritmo do produto cruzado [regra de três simples] é um processo extremamente eficiente, mas mecânico desprovido de significado no mundo real. Exemplo, “20 minutos para 4 km então para 12 serão?”; mas qual o sentido de multiplicar km por minutos? No mesmo estudo, Cramer e Post (1993) concluíram que num problema que não apresente uma situação de proporcionalidade, grande parte dos alunos aplicam a regra de três simples inadequadamente, enquanto os alunos que não tinham aprendido esse algoritmo foram melhor sucedidos, usando outras estratégias de resolução de problemas, nomeadamente a de valor unitário ou de fração equivalente. (SOEIRO, 2017 p.23 e 24).

De acordo com os PCN, as necessidades cotidianas fazem com que os alunos desenvolvam capacidades de natureza prática para lidar com a atividade matemática. Quando essa capacidade é potencializada pela escola, a aprendizagem apresenta melhor resultado.

O professor deve atuar como mediador, ao promover a análise das respostas dos alunos e sua comparação, ao disciplinar as condições em que cada aluno pode intervir para expor sua solução, questionar, contestar.

Lobato e Ellis (2010, tradução nossa) indicam que, apesar de os alunos usarem com facilidade relações de dobros ou metades, se uma situação envolver números mais complicados, não conseguem estabelecer relações proporcionais.

No decorrer das atividades e observações dos padrões, informa-se aos alunos que uma proporção direta ocorre quando duas quantidades mudam de forma similar, ou seja, se uma aumenta a outra também aumenta, e o fator de aumento é o mesmo para ambas as quantidades e uma proporção inversa decorre de se relacionar o aumento de uma quantidade com a diminuição da outra quantidade pelo mesmo fator.

> Sugestões para trabalhar proporcionalidade.
>
> 1 - Utilizar multiplicação ou divisão para resolver problemas envolvendo ideias de razão ou proporção.
> 2 - Fazer comparações numéricas ou não numéricas, trabalhar com classes deequivalência de frações.
> 3 - Distinguir situações proporcionais de não proporcionais.
> 4 - Utilizar a ideia de covariação.
> 5 - Representar situações proporcionais por meio de gráficos, tabelas, símbolos, desenhos ou diagramas.
> 6 - Relacionar proporcionalidade com ideias de medidas de comprimento, superfície, volume, massa, ou capacidade etc.; efetuar conversão de unidades de medida.
> 7 - Desenhar ou representar em escala.
> 8 - Utilizar proporções na análise de dados (de uma enquete ou pesquisa) ou em probabilidade.
> 9 - Resolver problemas (tais como os que requeiram cálculos relativos a impostos) envolvendo custos, taxas, porcentagem, juros, descontos. Efetuar corretamente cálculos envolvendo esses tópicos.
> 10 - Utilizar ideias centrais associadas aos sentidos do número racional, ou de relações e operações entre eles, além de suas representações, para resolver problemas envolvendo funções ou ideias associadas às funções e suas representações.
> 11 – Relacionar proporcionalidade com ideias de semelhança, homotetia, Ampliação ou redução de figuras planas.
> 12 - Diferenciar grandezas diretamente proporcionais das inversamente proporcionais.
> 13 - Resolver problemas usando a regra de três.
> 14 - Usar o método da falsa posição ou algo similar a ele.
> 15 - Usar reconfigurações geométricas precedidas de alteração de escala.
> 16 - Relacionar ao menos duas das ideias centrais acerca do número racional: parte-todo, razão, divisão/quociente, taxas, porcentagem, probabilidade, operador, semelhança e homotetia.
> 17 - Utilizar a propriedade aditiva das proporções.
> 18 - Resolver problemas envolvendo a divisão em partes proporcionais.
> 19 - Resolver problemas envolvendo inequações ou ideias associadas às inequações e suas representações (MIRANDA, 2009, p. 66-67).

Alguns dos possíveis contextos das situações-problema:

- Planta baixa de uma casa - interpretação, desenho, cálculos, ampliação, redução;
- Índices relacionados a saúde (taxas de mortalidade, doenças endêmicas etc.) - interpretação, cálculos, gráficos;
- Índices relacionados ao trabalho (taxas de desemprego, salários) - interpretação, cálculos, gráficos;
- Questão da terra (reforma agrária, erosão, preço, desmatamento) - unidades de medida, cálculos;
- Produção agrícola (produção de grãos, exportação, importação, custo, lucro, impostos) - unidades de medidas, gráficos e cálculos;
- Construção de uma horta (planejamento de canteiros, obtenção das medidas de um canteiro retangular de maior área entre vários de mesmo perímetro) - cálculos, gráficos;
- Tabelas de fatores de conversão (unidades de diferentes grandezas, moedas) elaboração, interpretação, cálculos;
- Energia elétrica - unidades, cálculo do custo em função do consumo;
- Custo de uma quantidade de uma mercadoria a ser comprada (preços no varejo e no atacado) - cálculos, descontos, impostos;
- Problemas históricos dos números racionais e medidas;
- Renda per capita e densidade demográfica (de diferentes países e estados) - interpretação, cálculos;
- Velocidade em estradas - velocidade máxima, consumo de combustível - unidades, cálculos (tempos, distâncias) (BRASIL, 1998, p. 140 e 141).

# REFERÊNCIAS

BIANCHINI, E. **Matemática**. 9. ed. São Paulo: Moderna, 2018. 7. ano.

BEM-CHAIM, David; BET-SHEVA, Ilany; KERET, Yaffa. Atividades investigativas autênticas: para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio**. Bolema**, Rio Claro/SP, a. 21, n. 31, 2008. (tradução de Antonio Vicente Marafioti Garnica). Disponível em: https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/2104. Acesso em: 19 jan. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 20 jan. 2021.

BRASIL. Secretaria de Educação Básica**. Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 10 mar. 2021.

GAY, Mara Regina Garcia; SILVA, Willian Raphael (Ed.). **Araribá mais matemática**. São Paulo: Moderna, 2018. 7. ano. 262 p. (Obra coletiva – Editora Moderna).

GIOVANNI JUNIOR, José Ruy, CASTRUCCI, Benedicto. **A conquista da matemática**. 4. ed. São Paulo: FTD, 2018. 7. ano. 200 p.

LAMON, S. **Teaching fractions and ratios for understanding**: essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2ed. Mahwah, NJ: Erlbaum. 2005.

LESH, R.; POST, T.; BEHR, M. Rational number relations and proportions. In: JANVIER, C. (Ed.). **Problems of representation in the teaching and learning of mathematics**. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 1987.

LESH, R., POST, T., BEHR, M. Proportinal reasoning. In: HIEBERT, J.; BEHR, M. (Eds.). **Number concepts and operations in the middle grades**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum/ National Council of Teachers of Mathematics, 1988. p.93-118.

LOBATO, Joane; ELLIS, Amy B. **Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8**. Reston, VA: Lawrence Erlbaum/ National Council of Teachers of Mathematics, 2010. (Series for Teaching Mathematics). Disponível em http://cunycci.pbworks.com/w/file/fetch/81998846/Developing%20Essential%20Understanding%20of%20Ratios,%20proportions%20and%20proportional%20reasoning.pdf. Acesso em 10 jan. 2021.

MARANHÃO, C.; MACHADO, S. D. Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. **Educar em Revista**, Curitiba, n.1, p. 141-156, 2011. Edição especial.

MATULLE, Luciano. **O raciocínio de proporcionalidade sob a luz da resolução de problemas com estudantes do 7° ano do ensino fundamental**. 2019, 117 f. Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem de Ciências Naturais e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Universidade Estadual do Centro-Oeste, Guarapuava/PR, 2019.

MIRANDA, Marcia Regiane. **Pensamento proporcional**: uma metanálise qualitativa de dissertações. 2009, 132 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) – Faculdade de Ciências Exatas e Tecnologia, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2009.

POST, T.R.; BEHR, M.J.; LESH, R. A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In: COXFORD, Arthur. F.; SHULTE, Albert. P. (Org.). **As idéias da álgebra.** Tradução de Domingues, H. H. São Paulo: Atual, 1995.

NUNES, Terezinha. **É hora de ensinar proporção**. 2003. Entrevista concedida a Ricardo Falzetta para a Revista Nova Escola, São Paulo, 2003. Disponível em: https://novaescola.org.br/conteudo/958/e-hora-de-ensinar-proporcao. Acesso em: 10 jan. 2021.

SILVESTRE, Ana Izabel; PONTE, João Pedro da. Resolução de problemas de valor omisso: análise das estratégias dos alunos. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 19, 2009. Vila Real/Portugal. **Anais...** Vila Real/Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2009.

SILVESTRE, Ana Izabel; PONTE, João Pedro. Raciocinio proporcional: uma perspectiva atual. **Educação e Matemática,** Lisboa, n. 1, 2, 3, jan/dez. 2013

SOEIRO, Sandra Cristina Nunes. **Contributo para o desenvolvimento do raciocínio proporcional**: uma experiência de ensino no 6.º ano. 2017. 334 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, Lisboa, 2017. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/31903/1/ulfpie052201_tm.pdf. Acesso em 15 dez. 2020.

TINOCO, L. A. A. (Coord.). **Razões e proporções**. Rio de Janeiro: Ed. UFRJ, 2011. (Projeto Fundão, Instituto de Matemática).

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no ensino fundamental**: formação de professores e aplicação em sal.